

### 第三周作业：Newton 插值、Hermite 插值 共 7 题

练习 3.1 当  $x = 1, -1, 2$  时,  $f(x) = 0, -3, 4$ , 求  $f(x)$  的二次插值多项式.

- (1) 用单项式基函数, 即  $\{1, x, x^2\}$ ;
- (2) 用 Lagrange 基函数;
- (3) 用 Newton 基函数.

练习 3.2 已知  $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$ , 求  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^7]$  和  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8]$ .

(提示: 利用差商的性质, 不要死算)

练习 3.3 证明:  $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$ .

练习 3.4 证明:  $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k$ . (提示: 可用上题结论)

练习 3.5 求次数不超过 3 的多项式  $p(x)$ , 满足

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p''(x_0) = f''(x_0).$$

(提示: 可借助 Taylor 展开式)

练习 3.6 求次数不超过 3 的多项式  $p(x)$ , 满足

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 1, \quad p(1) = 1, \quad p'(1) = 2.$$

(注: 不要直接代公式, 根据 Hermite 插值思想自己推导, 一步一步计算)

练习 3.7 证明两点三次 Hermite 插值余项为

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2,$$

其中  $\xi_x \in (x_0, x_1)$  与  $x$  相关.