

第二周作业：函数插值基本概念与方法、Lagrange 插值 共 4 题

练习 2.1 已知 $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, 在等距节点上的函数值 (带有误差), 其中步长为 $h = 1' = (1/60)^\circ = \frac{\pi}{10800}$. 如果所给定的函数值具有 5 位有效数字, 试估计用线性插值求 $\cos(x)$ 近似值时的总误差.

(提示: 总误差要考虑插值误差和所给数据的舍入误差)

练习 2.2 设 x_0, x_1, \dots, x_n 为互异节点, 试证明等式

$$\sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0$$

对 $k = 0, 1, \dots, n$ 都成立.

练习 2.3 设 $f(x) \in C^2[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 试证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

练习 2.4 给定 $f(x) = e^x$ 在 $-4 \leq x \leq 4$ 上的等距节点函数值, 若用二次插值求 e^x 的近似值, 要使截断误差不超过 10^{-6} , 问步长 h 应取多少?

(提示: 这里假定节点上的函数值是已知的, 且没有误差)