

数学软件 Matlab

—— Matlab 符号运算

主要内容

- Matlab 符号运算介绍
- 符号对象与基本符号运算
- `symvar`、`subs` 和 `vpa`
- 常见的符号计算

符号运算

● 符号运算的特点

- 计算以**推理方式**进行，不受计算误差累积所带来的困扰
- 符号计算可以给出完全正确的封闭解，或任意精度的数值解（封闭解不存在时）
- 符号计算指令的调用比较简单，与教科书上的公式相近
- 符号计算所需的**运行时间相对较长**

Matlab 符号运算

● Matlab 符号运算

- Matlab 符号运算是通过**符号数学工具箱**（Symbolic Math Toolbox）来实现的。
- Matlab 的符号数学工具箱可以完成几乎所有得符号运算功能，如：**符号表达式的运算**，**符号矩阵的运算**，**符号微积分**，**符号作图**，**符号代数方程求解**，**符号微分方程求解**等。
- 此外，该工具箱还支持**可变精度运算**，即支持以指定的精度返回结果。

符号运算举例

- 求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根

```
solve('a*x^2+b*x+c=0')
```

- 求的根 $f(x) = (\cos x)^2$ 的一次导数

```
x=sym('x');  
diff(cos(x)^2)
```

- 计算 $f(x) = x^2$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分

```
syms a b x;  
int(x^2,a,b)
```

内容提要

- Matlab 符号运算介绍
- 符号对象与基本符号运算
- `symvar`、`subs` 和 `vpa`
- 常见的符号计算

符号对象

● Matlab 符号对象

- 在进行符号运算时，必须先定义基本的符号对象，可以是符号变量、符号表达式等
- 符号对象是一种数据结构
- 符号表达式：含有符号对象的表达式称
- 符号矩阵/数组：元素为符号表达式的矩阵/数组

符号对象的建立

- 符号对象的定义/声明: `sym`、`syms`

- `sym` 用来建立单个符号对象，一般调用格式为：

符号变量 = `sym(x)`

参数 x 可以是一个数或数值矩阵，也可以是字符串

例：

`a=sym('a')`

a 是符号变量

`b=sym('1/3')`

b 是符号常量

`C=sym('[1 ab; c d]')`

C 是符号矩阵

符号对象的建立

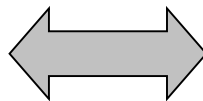
- 符号对象的定义/声明: `sym`、`syms`

- `syms` 用来声明多个符号变量, 一般调用格式为:

```
syms 符号变量1 符号变量2 ... 符号变量n
```

例:

```
syms a b c;
```



```
a=sym('a');  
b=sym('b');  
c=sym('c');
```

符号表达式

- 符号表达式：含符号对象的表达式
 - 建立符号表达式通常有以下 2 种方法：
 - (1) 用 `sym` 函数直接建立符号表达式
 - (2) 使用已经定义的符号变量组成符号表达式

例：`y=sym('sin(x)+cos(x)')`

```
x=sym('x');  
y=sin(x)+cos(x)
```

```
syms x;  
y=sin(x)+cos(x)
```

基本符号运算

Matlab 符号运算采用的运算符和基本函数，在形状、名称和使用上，都与数值计算中的运算符和基本函数完全相同

● 基本运算

- 普通运算：`+` `-` `*` `\` `/` `^`
- 数组运算：`.*` `.\` `./` `.^`
- 矩阵转置：`'` `!`

● 基本数学函数

三角函数与反三角函数、指数函数、对数函数等

`sin, cos, asin, acos, exp, log, abs, diag, tril, triu, ...`

符号矩阵

- 符号矩阵的生成

- 使用 `sym` 函数直接生成

```
A=sym(' [1+x, sin(x); 5, exp(x)]')
```

- 将数值矩阵转化成符号矩阵

```
B=[2/3, sqrt(2); 5.2, log(3)]; C=sym(B)
```

- 符号矩阵中元素的引用和修改

```
A=sym(' [1+x, sin(x); 5, exp(x)]');  
A(1,2) % 引用  
A(2,2)=sym('cos(x)') % 重新赋值
```

内容提要

- Matlab 符号运算介绍
- 符号对象与基本符号运算
- `symvar`、`subs` 和 `vpa`
- 常见的符号计算

symvar

- 列出符号表达式中的符号变量

```
symvar(s)
```

- 按字母顺序列出符号表达式 s 中的所有符号变量

```
symvar(s, N)
```

- 列出符号表达式 s 中离 x 最近的 N 个符号变量
- 若有两个符号变量与 x 的距离相等，则ASCII码大者优先
- 常量 π , i , j 不作为符号变量

例:

```
f=sym('2*v-3*y+z^2+5*a')  
symvar(f)  
symvar(f,2)
```

subs

● 符号替换

- 用给定的数据替换符号表达式中的指定的符号变量

`subs(s, x, a)`

- 用 **a** 替换符号表达式 **s** 中的符号变量 **x**
- 这里 **a** 可以是 数/变量/表达式 或 符号变量/表达式

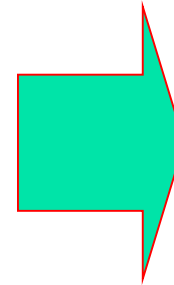
例:

```
syms x y u v;  
f1=2*x+y-1;  
f2=subs(f1,x,u)  
f3=subs(f1,y,2+3)  
f3=subs(f1,{x,y},{u,v})
```

subs 举例

例：指出下面各条语句的输出结果

```
f=sym('2*u');  
f1=subs(f,'u',2)  
f2=subs(f,'u','u+2')  
f3=subs(f,'u',[1,2])  
a=3;  
f4=subs(f2,'u',a+2)  
f5=subs(f2,'u','a+2')  
syms x y;  
f6=subs(f,'u',x+y)  
f7=subs(f6,{x,y},{1,2})  
f8=subs(f6,{x,y},{x+y,x+y})
```



```
f=2*u  
f1=4  
f2=2*u+4  
f3=[2,4]  
f4=14  
f5=2*a+8  
f6=2*x+2*y  
f7=6  
f8=4*x+4*y
```

符号变量若没有声明，则需要加上单引号！

vpa

- 可变精度

`vpa(s,n)`

- 计算表达式 `s` 的值，保留 `n` 位有效数字
- 返回值是符号对象

例：

```
x1=vpa(sin(pi/2),10)
```

```
x2=vpa(pi^3,3)
```

```
x3=vpa(pi,100)
```

内容提要

- Matlab 符号运算介绍
- 符号对象与基本符号运算
- `symvar`、`subs` 和 `vpa`
- 常见的符号计算
 - 因式分解、展开、化简
 - 计算极限
 - 计算导数
 - 计算积分
 - 符号级数求和
 - 代数方程和微分方程的求解

因式分解

- 因式分解

```
factor(f)
```

例:

```
syms x; f=x^6+1; factor(f)
```

- **factor** 也可用于正整数的分解

例:

```
s=factor(100)
```

对大整数进行因式分解时可以先将其转化成符号常量

```
factor(12345678901234567890) % ERROR  
factor(sym('12345678901234567890'))
```

函数展开

- 函数展开

```
expand(f)
```

- 多项式展开

例:

```
syms x;  
f=(x+1)^6;  
expand(f)
```

- 三角函数展开

例:

```
syms x y;  
f=sin(x+y);  
expand(f)
```

函数简化

- 函数简化

`y=simple(f)`

- 对 **f** 尝试多种不同的方法（包括 `simplify`）进行简化，以寻求其最简短形式

例：化简
$$f(x) = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin 2x (e^{2x} - 2e^x + 1)}{e^{2x} - 1}$$

```
syms x;
f=(cos(x)^2-sin(x)^2)*sin(2*x)*(exp(2*x) ...
-2*exp(x)+1)/(exp(2*x)-1);
y1=simplify(f)
y2=simple(f)
```

计算极限

● 计算极限

```
limit(f,x,a)    % 计算  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$   
limit(f,a)      % 当默认变量趋向于  $a$  时的极限  
limit(f)        % 计算  $a=0$  时的极限  
limit(f,x,a,'right') % 计算右极限  
limit(f,x,a,'left')  % 计算左极限
```

例：计算 $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$, $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

```
syms x h n;  
L=limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)  
M=limit((1-x/n)^n,n,inf)
```

计算导数

● 计算导数

```
g=diff(f,v) % 求符号表达式 f 关于变量 v 的导数  
g=diff(f)   % 计算关于默认变量的导数  
g=diff(f,v,n) % 求 f 关于 v 的 n 阶导数
```

例:

```
syms x;  
f=sin(x)+3*x^2;  
g1=diff(f,x)  
g2=diff(f,x,3)
```

计算积分

● 计算积分

<code>int(f,v,a,b)</code>	% 计算定积分 $\int_a^b f(v)dv$
<code>int(f,a,b)</code>	% 计算关于默认变量的定积分
<code>int(f,v)</code>	% 计算不定积分 $\int f(v)dv$
<code>int(f)</code>	% 计算关于默认变量的不定积分

例：计算 $I = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$ 和 $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

```
syms x; f=(x^2+1)/(x^2-2*x+2)^2;  
I=int(f,x)  
K=int(exp(-x^2),x,0,inf)
```


符号级数求和

- 符号级数求和

`symsum(f,v,a,b)` % 级数求和 $\sum_{v=a}^b f(v)$
`symsum(f,a,b)` % 关于默认变量求和

例：计算级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 及其前100项的部分和 S100

```
syms n; f=1/n^2;  
S=symsum(f,n,1,inf)  
S100=symsum(f,n,1,100)
```

例：计算函数级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$

```
syms n x; f=x/n^2;  
S=symsum(f,n,1,inf)
```

代数方程求解

- 代数方程符号求解: `solve`

<code>s=solve(f,v)</code>	关于指定自变量求解
<code>s=solve(f)</code>	关于默认变量求解

- 参数 `f` 是一个符号方程或表达式

例: 解方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$

```
syms x; f=x^3-3*x+1;  
s=solve(f,x) % 或 s=solve(f)
```

```
syms x;  
s=solve(x^3-3*x+1==0,x) % 符号方程
```

详细用法见讲义 “多项式运算与代数方程求解器”

微分方程求解

● 常微分方程求解

```
y=dsolve(eq1,eq2,...,cond1,cond2,...,'v')
```

- 这里 $eq1$ 、 $eq2$ 、... 为微分方程
 $cond1$ 、 $cond2$ 、... 为初值条件， v 为自变量
 y 为输出的解。
- 微分方程中用 D 表示对 **自变量** 的导数，如：
 $Dy \longrightarrow y'$ ； $D^2y \longrightarrow y''$ ； $D^3y \longrightarrow y'''$
- 如果省略初值条件，则表示求通解；
- 如果省略自变量，则默认自变量为 t
- 若找不到解析解，则返回其积分形式。

其它运算

● 反函数

```
finverse(f,v)    % 求  $f$  关于指定变量  $v$  的反函数  
finverse(f)     % 求  $f$  关于默认变量的反函数
```

例： 计算函数 $f = x^2 + 2t$ 的反函数

```
syms x t; f=x^2+2*t;  
g1=finverse(f,x)  
g2=finverse(f,t)
```