线性方程组

迭代方法与预处理

潘建瑜

华东师范大学 数学科学学院

https://math.ecnu.edu.cn/~jypan/Teaching/IMP/

第一讲 预备知识：矩阵基础

目录

参考资料

相关参考资料

- Horn and Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd Edition, 2013.
- Horn and Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, 1991.
- 戴华, 矩阵论, 2001.
- 潘建瑜, 矩阵计算讲义, 2023.

1-1 线性代数基础

- 线性空间, 如: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbb{R}^{m\times n}$
- 内积与内积空间, 正交与 GramSchmidt 正交化过程
- 矩阵与线性变换, 值域与零空间, 初等变换, 相似变换
- 向量范数与矩阵范数, 范数与内积
- 投影, 正交投影, 最佳逼近
- 矩阵 Shcur 分解, Jordan 标准型, Kronecker 积
- LU 分解, Cholesky 分解, QR 分解, SVD 分解, 极分解

1-2 向量序列与矩阵序列

- 向量序列的收敛性和判别
- 矩阵序列的收敛性和判别
- 谱半径与矩阵范数
- 矩阵幂级数
- 收敛速度

1-3 几类特殊矩阵

- 正定矩阵, 对称正定矩阵
- 对角占优矩阵, 严格对角占优矩阵
- 可约矩阵, 不可约矩阵

1-4 数值域

1.4 数值域

1-5 Chebyshev 多项式

1.5 Chebyshev 多项式

1-5-1 实 Chebyshev 多项式

Chebyshev 多项式的定义

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$
- 令 $\theta = \arccos x$, 则 $x = \cos\theta$, 于是 $T_n(x) = \cos(n\theta)$. 根据三角函数的和差化积公式:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

所以有 $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$, 即

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

这就是著名的 Chebyshev 多项式 三项递推公式

其他定义

定义方式二

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Chebyshev 多项式的正交性

首先给出 **加权函数** 和 **带权内积** 的定义.

加权函数

设 $\omega(x) \in C[a,b]$, 若 $\omega(x)$ 满足:

(1) $w(x) \geq 0, \quad \forall\ x \in [a,b]$;

(2) $\displaystyle\int_a^b x^k \omega(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 其中 k 为任意非负整数;

(3) 对任意非负函数 $g(x) \in C[a,b]$, 若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $g(x) = 0$;

则称 $\omega(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 **加权函数**.

Chebyshev 多项式的正交性 (续)

带权内积

设 $\omega(x)$ 是 $[a,b]$ 上的加权函数, 定义 $C[a,b]$ 上的带权内积如下:

$$(f,g)_\omega \triangleq \int_a^b \omega(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Chebyshev 多项式的正交性 (续)

- Chebyshev 多项式是 $[-1,1]$ 上带权 $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式族, 即

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,T_k(x)\,T_l(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & k=l=0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & k=l>0;\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

✍ 事实上, 基于带权内积, 将线性无关函数组 $\{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ 关于权函数 $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交化后得到的正交多项式就是 Chebyshev 多项式.

Chebyshev 多项式的性质

Chebyshev 多项式基本性质

(1) $T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n$;

(2) $T_n(x)$ 的首项系数为 2^{n-1};

(3) $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$, 即 $T_{2n}(x)$ 只含偶次项, $T_{2n+1}(x)$ 只含奇次项;

(4) 当 $|x| \leq 1$ 时 $|T_n(x)| \leq 1$, 当 $|x| > 1$ 时 $|T_n(x)| > 1$;

(5) $T_n(x) = 0$ 的解为 $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

(6) $T_n(x)$ 有 $n+1$ 个极值点: $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, 且 $T_n(x_k) = (-1)^k$;

Chebyshev 多项式举例

根据递推公式可知

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

(Chebyshev.m)

Chebyshev 多项式的最佳逼近性质

定理 设 $p_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, 则

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |p_n(x)| \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |p(x)|, \quad \forall\ p(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n,$$

其中 $\tilde{\mathbb{P}}_n$ 表示所有首项系数为 1 的 n 次多项式组成的集合, 即

$$\|p_n(x)\|_\infty = \min_{p(x)\in\tilde{\mathbb{P}}_n} \|p(x)\|_\infty.$$

这里的 ∞-范数的定义为 $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

该结论表明, 在所有首项系数为 1 的 n 次多项式中, $p_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的偏差是最小的 (在无穷范数意义下).

极小极大问题

记 $\mathbb{P}_n$ 为所有次数不超过 n 的实系数多项式组成的集合, 并记

$$\mathbb{P}_n^{(\eta)} \triangleq \{p(x) \in \mathbb{P}_n \ : \ p(\eta) = 1\}.$$

定理 设 $\eta \in \mathbb{R}$ 满足 $|\eta| > 1$, 则下面的极小极大问题

$$\min_{p(x) \in \mathbb{P}_n^{(\eta)}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|$$

的唯一解为

$$\tilde{T}_n(x) \triangleq \frac{T_n(x)}{T_n(\eta)}.$$

极小极大问题 (一般区间)

通过简单的仿射变换, 该定理的结论可以推广到一般区间.

定理 设 $\alpha, \beta, \eta \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha < \beta$ 且 $\eta \notin [\alpha, \beta]$. 则下面的极小极大问题

$$\min_{p(x)\in\mathbb{P}_n^{(\eta)}} \max_{\alpha\leq x\leq\beta} |p(x)|$$

的唯一解为

$$\hat{T}_n(x) \triangleq \frac{T_n\left(\dfrac{2x-(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}\right)}{T_n\left(\dfrac{2\eta-(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}\right)}.$$

1-5-2 复 Chebyshev 多项式

复 Chebyshev 多项式定义为

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-n}\right], \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

令 $w = z+\sqrt{z^2-1}$, 则 $w^{-1} = z-\sqrt{z^2-1}$, 且 $w+w^{-1} = 2z$, 则

$$T_n(z) = \frac{w^n + w^{-n}}{2}, \quad \text{其中} \quad z = \frac{w+w^{-1}}{2}.$$

- 注意到 $w+w^{-1} = 2z$ 有两个解, 但这两个解互为倒数, 因此 $T_n(z)$ 的定义与哪个解无关
- 复 Chebyshev 多项式也具有相同的三项递推公式, 即

$$T_0(z) = 1, \quad T_1(z) = z, \quad T_n(z) = 2zT_{n-1}(z) - T_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \ldots.$$


谢谢
THANK YOU