专题选讲

定积分的近似计算

（数值积分）

为什么数值积分

为什么数值积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

数学方法：**Newton-Leibniz** 公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

- 但是在许多实际计算问题中

(1) $F(x)$ 表达式可能比较复杂，计算困难，如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$

(2) $F(x)$ 难求！甚至有时不能用初等函数表示，如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad f(x)=e^{-x^2}$$

(3) $f(x)$ 表达式未知，只有通过测量或实验得来的数据表

数值积分非常重要

- 数值积分是计算数学的基础和核心，很多连续问题都需要通过数值积分才能转化为离散问题。
- 数值积分内容非常复杂，也非常丰富，特别是弱奇异积分，奇异积分，超奇异积分，或者被积函数是急剧震荡或急剧衰减的。
- 对于高维积分，由于维数效应，计算复杂度往往随维数指数增长，如何高效地计算高维积分，仍然是计算数学的一大难题。

如何近似计算定积分

定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \Delta x_i \quad \cdots \quad \cdots \quad \Delta x_n$$

$$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad x_{i-1} \quad x_i \quad \cdots \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad b = x_n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x = \max_i \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

（n 充分大，Δx 充分小）

矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

怎么选取 ξ_i？不同的选取方法 ⟹ 不同的求积方法

矩形公式

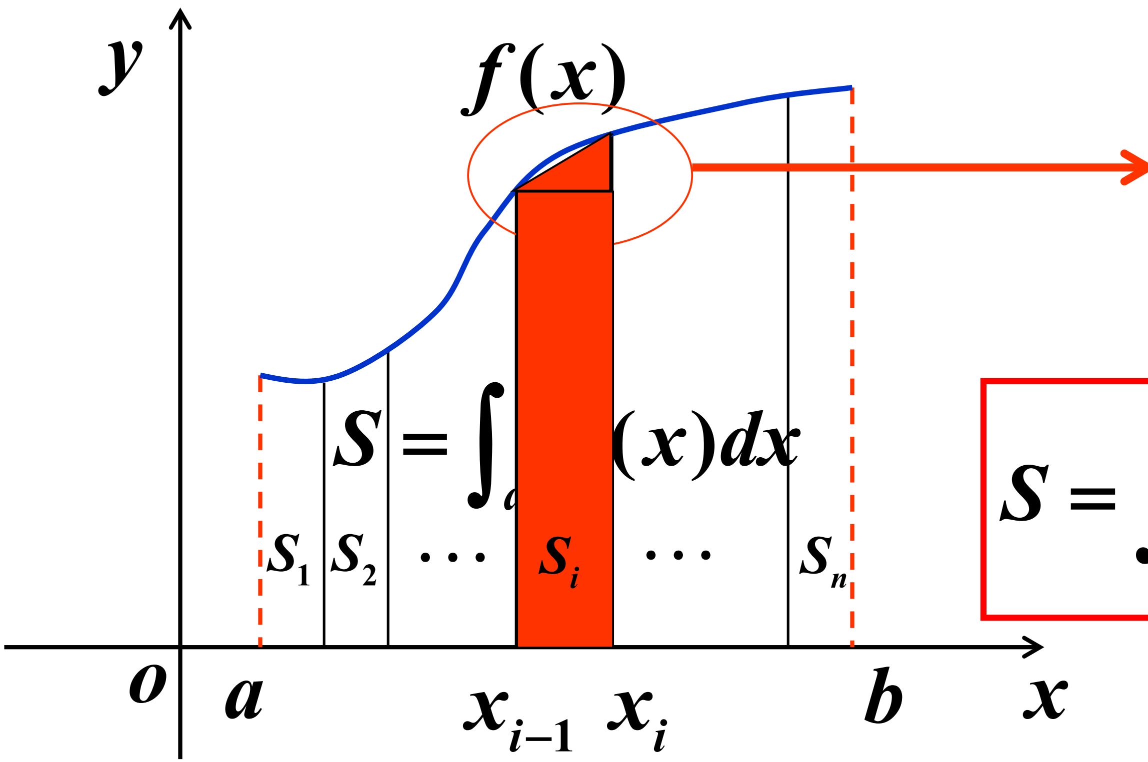
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$ ⟹ 左矩形公式，左点法

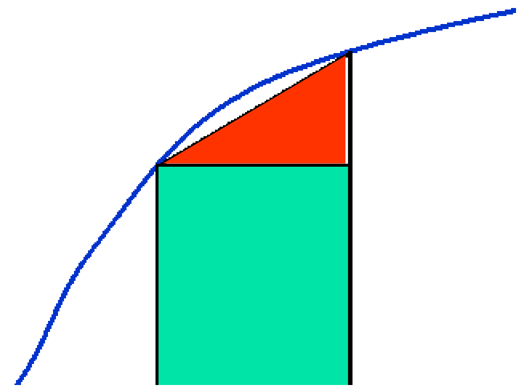
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$ ⟹ 右矩形公式，右点法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x_i$$ ⟹ 中矩形公式，中点法

几何意义及改进

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$





$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} S_i}$$

复合梯形法

曲边小梯形的面积可以由直边小梯形的面积来近似

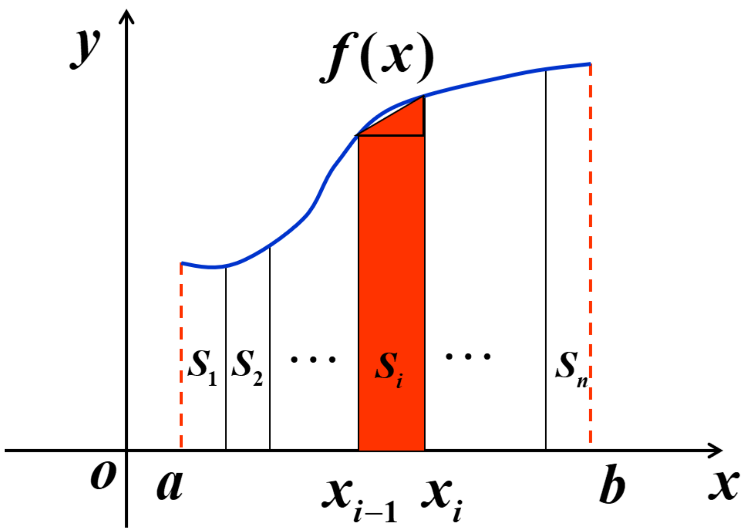
$$S_i \approx \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$$

$$(y_i = f(x_i),\ \ i = 1, 2, \ldots, n)$$

整个曲边梯形的面积：

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$$



复合梯形法（续）

如何对积分区间进行分割?

一种简单易用的方法： n 等分

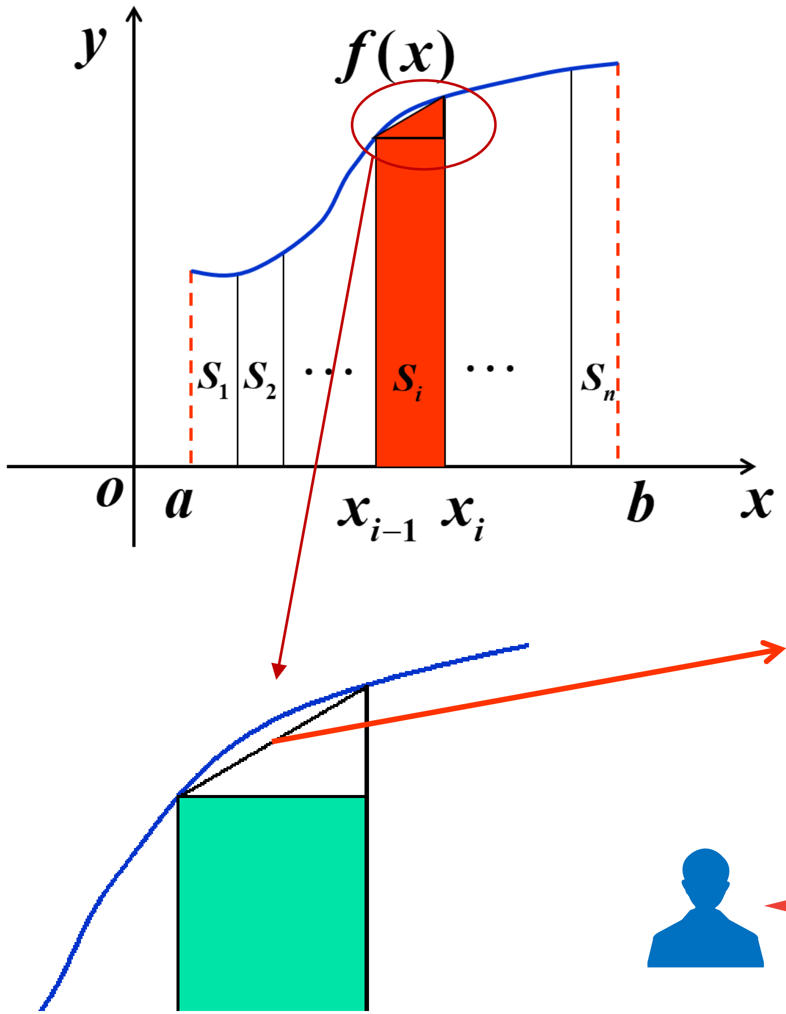
$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = h = \frac{b-a}{n}$$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i = h\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

→ 复合梯形法

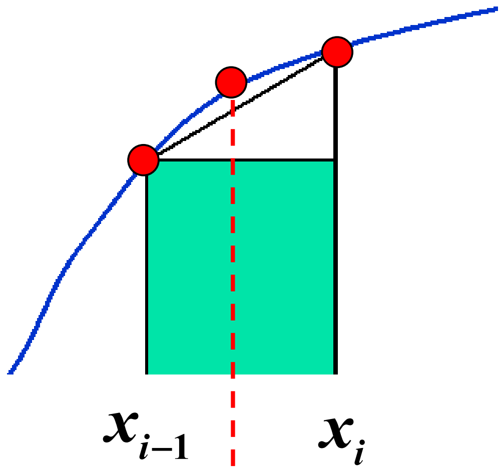
复合抛物线法



用抛物线代替该直线，是否会更好?

问题：怎么构造合适的抛物线?

复合抛物线法（续）



$\frac{1}{2}\left(x_{i-1}+x_i\right)$

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，用过以下三点

$$(x_{i-1}, y_{i-1}),\quad (x_{i-1/2}, y_{i-1/2}),\quad (x_i, y_i)$$

的抛物线来近似原函数 $f(x)$ 。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{6n}(y_{i-1}+4y_{i-1/2}+y_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0+y_n+4(y_{1/2}+\cdots+y_{n-1/2})+2(y_1+\cdots+y_{n-1})]$$

复合抛物线法（也称复合 Simpson 公式）

其他方法

除了复合梯形和复合抛物线方法外，其他方法还有

- **Newton-Cotes** 公式
- **Gauss** 型求积公式
- **Romberg** 外推求积方法
- **Monte Carlo** 方法
- 数论方法、点阵逼近法等等

详细介绍可参考相关资料