代数几何讨论班备用稿

全纯向量丛理论入门

陆　　俊

华东师范大学数学系

二零一五年二月

前　言

本讲义是在讨论班选读文献以及 Lawrence Ein 教授所开设的相关短课程的基础上编撰而成. 若干章节的内容并非完全按照教学顺序展开. 作者非常感谢如下好友, 通过和他们的讨论, 作者对一些概念与结论有了更为准确的理解. 他们分别是 (按姓氏拼音排列): 陈苗芬、杜荣、吕鑫、瞿振华、孙浩、谢大军、叶飞、张通、周国栋. 作者也特别感谢谈胜利教授和左康教授在相关课题方面的指引与建议.

陆俊

2015 年 2 月 5 日于

华东师范大学数学系

目 录

第一部分

基础篇

第一章 基础知识

在高等代数中, 我们主要关心一个向量空间的性质. 如果需要研究一族向量空间, 就必须引入向量丛的概念. 向量空间中的向量概念推广到向量丛中, 则可替换为向量场–也叫做截面. 这本讲义主要关心全纯向量丛以及全纯截面的性质. 我们在这一章简要地介绍相关基础知识.

1.1 向量丛的基本概念

这一节的内容整理自 [Tan11, 第一章].

1.1.1 向量丛与截面

以下设 X 是 n 维复流形.

定义 1.1.1 设 $\pi : E \to X$ 是从复流形 E 到 X 的全纯映射. 如果 π 满足以下条件, 则称其为 X 上的秩 r 全纯向量丛 (Holomorphic vector bundle):

(1) 对任何点 $x \in X$, 纤维 $E_x := \pi^{-1}(x)$ 是 r 维复向量空间,

(2) 对任何点 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 U 及双全纯映射 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$, 满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & U \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

并且 φ_U 将 E_x 同构地映到 $\{x\} \times \mathbb{C}^r$ 上.

我们将 $\operatorname{rk} E := r$ 称为 E 的秩 (Rank). 如果 $\operatorname{rk} E = 1$, 则称 $\pi : E \to X$ 为线丛 (Line bundle).

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 上的开覆盖, 使得

$$\varphi_{U_\alpha} : E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

是同构, 此处 $E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha)$. 为方便起见, 我们简记 $\varphi_\alpha := \varphi_{U_\alpha}$, 称之为平凡化映射. 事先取定 $\mathbb{C}^r$ 的一组标准基 $e_1, \cdots, e_r$. 为方便起见, 我们把向量 $v = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i$ 写成矩阵 $v = {}^T(a_1, \ldots, a_r)$. 由定义, 我们有双全纯映射

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r, \quad (x, v) \to (x, \Phi_{\alpha\beta}(x) \cdot v),$$

这里 $\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{C})$ 视作 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的全纯矩阵函数 (即矩阵中的元素都是全纯函数). 它们满足余链条件:

(1) $\Phi_{\alpha\alpha} = Id$,

(2) $\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = Id$.

$\{\Phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in I}$ 称为 E 的过渡矩阵 (Transition matrix) . 对线丛而言, 过渡矩阵就是全纯函数.

反过来, 如果 X 上有一组开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 以及一族全纯矩阵函数 $\Phi_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to GL(r,\mathbb{C})$ (事先取定 $\mathbb{C}^r$ 的一组标准基) 满足上述两个条件, 我们可以将诸 $U_\alpha\times\mathbb{C}^r$ 通过如下方式粘合起来, 得到全纯向量丛

$$E = \coprod U_\alpha \times \mathbb{C}^r / \sim,$$

此处等价关系 $\sim$ 定义为 (取 $(x_\beta, v_\beta)\in U_\beta\times\mathbb{C}^r$, $(x_\alpha, v_\alpha)\in U_\alpha\times\mathbb{C}^r$):

$$(x_\beta, v_\beta) \sim (x_\alpha, v_\alpha) \Longleftrightarrow x_\alpha = x_\beta, \quad v_\alpha = \Phi_{\alpha\beta}(x_\beta)\cdot v_\beta.$$

向量丛由它的过渡矩阵集合 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in I}$ 唯一确定. 因此当我们在构造或者描述向量丛时, 使用过渡矩阵的语言往往会比较方便.

对 $x\in X$, 我们设

$$e_{\alpha k}(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, e_k), \quad x\in U_\alpha, \quad k = 1,\cdots,r. \tag{1-1}$$

$e_\alpha(x) = (e_{\alpha 1}(x),\cdots,e_{\alpha r}(x))$ 构成纤维 E_x 的局部基. 通过具体计算局部基的转换关系, 我们有

$$\begin{aligned} e_\beta(x) &= \left(\varphi_\beta^{-1}(x,e_1),\ldots,\varphi_\beta^{-1}(x,e_r)\right) = \left(\varphi_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x,e_1),\ldots,\varphi_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha\beta}(x,e_r)\right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(x,(e_1,\ldots,e_r)\cdot\Phi_{\alpha\beta}) = e_\alpha(x)\cdot\Phi_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha 1} \\ \vdots \\ e_{\alpha r} \end{pmatrix} = {}^T\Phi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\cdot \begin{pmatrix} e_{\beta 1} \\ \vdots \\ e_{\beta r} \end{pmatrix}.$$

例 1.1.1 (**平凡丛**) $E = X\times\mathbb{C}^r$ 称为 X 上的平凡丛, 其过渡矩阵 $\Phi_{\alpha\beta} = I_r$ 是单位矩阵. ■

下例中的向量丛是代数几何中最经典的一类对象.

例 1.1.2 (**全纯切丛与余切丛**) 考虑 n 维复流形 X 上的坐标卡覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 我们可以定义全纯切丛 (Holomorphic tangent bundle)

$$T_X = \left\{\frac{\partial(x_{\alpha 1},\cdots,x_{\alpha n})}{\partial(x_{\beta 1},\cdots,x_{\beta n})}\right\}$$

以及全纯余切丛(Holomorphic cotangent bundle)

$$\Omega_X = \left\{\frac{\partial(x_{\beta 1},\cdots,x_{\beta n})}{\partial(x_{\alpha 1},\cdots,x_{\alpha n})}\right\}.$$

切丛和余切丛的纤维可写为

$$T_{X,x} = \mathbb{C}\langle\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{\alpha n}}\rangle, \quad \Omega_{X,x} = \mathbb{C}\langle dx_{\alpha 1},\cdots,dx_{\alpha n}\rangle,$$

因而都是秩 n 丛. 换言之, $T_{X,x}$ 和 $\Omega_{X,x}$ 的局部基分别可取为

$$e_{\alpha i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}, \quad e^*_{\alpha i}(x) = dx_{\alpha i}.$$

全纯切丛和余切丛都是光滑复流形天然具有的向量丛, 它们反映了复流形本身的几何性质. ■

例 1.1.3 (**对偶丛**) $E = \{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 的对偶丛 (Dual bundle) 定义为 $E^\vee = \{{}^T\Phi_{\alpha\beta}^{-1}\}$.

对偶丛与原来的丛有相同的秩. 对偶丛也可以看成一族对偶空间的"粘合". 具体言之, 对 $x \in X$, 将 $E_x^\vee$ 视为 E_x 的对偶空间, 并取局部基 $e_\alpha^*(x) = (e_{\alpha 1}^*(x), \ldots, e_{\alpha r}^*(x))$, 满足 $\langle e_{\alpha i}^*(x), e_{\alpha j}(x)\rangle = \delta_j^i$. 由此可得转换关系

$$\begin{pmatrix} e_{\alpha 1}^*(x) \\ \vdots \\ e_{\alpha r}^*(x) \end{pmatrix} = \Phi_{\alpha\beta}(x) \cdot \begin{pmatrix} e_{\beta 1}^*(x) \\ \vdots \\ e_{\beta r}^*(x) \end{pmatrix}. \tag{1-2}$$

由例 1.1.2, 我们有 $\Omega_X = T_X^\vee$. 进一步的讨论见例 1.1.10 与例 1.1.11. ■

例 1.1.4 (**向量丛的直和**) 设 $E = \{\Phi_{\alpha\beta}\}, E' = \{\Phi'_{\alpha\beta}\}$ 是两个向量丛. 我们定义 E 和 E' 的*直和* (Direct sum)

$$E \oplus E' = \left\{ \begin{pmatrix} \Phi_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \Phi'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \right\}.$$

这个概念也能推广到一般情形, 即 n 个向量丛 $E_1, \cdots, E_n$ 的直和

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

易知 $\operatorname{rk} E = \sum\limits_{i=1}^n \operatorname{rk} E_i$. 这样的直和也被称为 Whitney *直和*. ■

例 1.1.5 (**向量丛的张量积**) 设 $E = \{\Phi_{\alpha\beta}\}, E' = \{\Phi'_{\alpha\beta}\}$ 分别是秩 r 和 r' 向量丛. 我们定义*张量积* (Tensor product)

$$E \otimes E' = \{\Phi_{\alpha\beta} \otimes \Phi'_{\alpha\beta}\}.$$

这里的过渡矩阵之间的张量积是指矩阵的 Kronecker 积. 具体言之, 设 $\Phi_{\alpha\beta} = (a_{ij})_{1\le i,j\le r}$, 则

$$\Phi_{\alpha\beta} \otimes \Phi'_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} a_{11}\Phi'_{\alpha\beta} & a_{12}\Phi'_{\alpha\beta} & \ldots & a_{1r}\Phi'_{\alpha\beta} \\ a_{21}\Phi'_{\alpha\beta} & a_{22}\Phi'_{\alpha\beta} & \ldots & a_{2r}\Phi'_{\alpha\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}\Phi'_{\alpha\beta} & a_{r2}\Phi'_{\alpha\beta} & \ldots & a_{rr}\Phi'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

取合适的开覆盖, 设 e_α, e'_α 分别是 E, E' 的局部基, 那么 $E \otimes E'$ 的局部基可取为 $e_{\alpha i} \otimes e'_{\alpha j}$ $(1 \le i \le r,\ 1 \le j \le r')$.

特别地, 如果 E, E' 都是线丛, 那么 $E \otimes E'$ 仍是线丛, 其过渡函数为 $\Phi_{\alpha\beta}\Phi'_{\alpha\beta}$. 更一般地, 向量丛 $E_1, \cdots, E_n$ 的张量积定义为

$$E := E_1 \otimes \cdots \otimes E_n.$$

由计算可知, $\operatorname{rk} E = \prod\limits_{i=1}^n \operatorname{rk} E_i$. 有时为方便书写, 我们记 $E^{\otimes n} := \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{n}$. ■

例 1.1.6 (**同态丛**) 对向量丛 E, E', 我们也能定义 $\operatorname{Hom}(E, E')$. 对每个 $x \in X$, 对应的纤维就是

$$\operatorname{Hom}(E_x, E'_x) \cong E_x^\vee \otimes E'_x.$$

设 $e_\alpha^*(x)$ 和 $e'_\alpha(x)$ 分别是 $E^\vee$ 和 E' 的局部基, 那么 $\operatorname{Hom}(E, E')$ 的局部基可取为 $\{e_{\alpha i}^*(x) \otimes e'_{\alpha j}(x)\}$, 其过渡矩阵为 ${}^T\Phi_{\alpha\beta}^{-1} \otimes \Phi'_{\alpha\beta}$. 因此我们可以把 $\operatorname{Hom}(E, E')$ 等同于 $E^\vee \otimes E'$. ■

例 1.1.7 (**向量丛的对称积**) 设 $E=\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 是秩 r 向量丛. 我们定义对称积 (Symmetric product)

$$S^kE=\{S^k\Phi_{\alpha\beta}\}.$$

具体地说, S^kE 的局部基可取为 $e_{\alpha 1}(x)^{n_1}\cdot e_{\alpha 2}(x)^{n_2}\dots e_{\alpha r}(x)^{n_r}$, 这里 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=k$, $n_i\geq 0$. 因此

$$\operatorname{rk}S^kE=\begin{pmatrix}r+k-1\\k\end{pmatrix}.$$

特别地, 如果 E 是线丛, 那么 $S^kE=E^{\otimes k}$ 仍为线丛. ■

例 1.1.8 (**向量丛的外积**) 设 $E=\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 是秩 r 的向量丛. 我们定义外积 (Wedge product)

$$\wedge^kE=\{\bigwedge^k\Phi_{\alpha\beta}\}.$$

$\wedge^kE$ 的局部基可取为 $e_{\alpha i_1}\wedge\cdots\wedge e_{\alpha i_k}$, 这里 $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r$. 因此

$$\operatorname{rk}\,\wedge^kE=\begin{pmatrix}r\\k\end{pmatrix}.$$

特别地, 当 $k=\operatorname{rk}E$ 时, 我们得到 E 的行列式丛 (Determinant bundle)

$$\det E:=\wedge^kE=\{\det\Phi_{\alpha\beta}\}.$$

它显然是线丛.

由例 1.1.2, 可以定义 $\Omega_X^p:=\wedge^p\Omega_X$. 特别地,

$$\omega_X:=\wedge^n\Omega_X=\left\{\left|\frac{\partial(x_{\beta 1},\cdots,x_{\beta n})}{\partial(x_{\alpha 1},\cdots,x_{\alpha n})}\right|\right\}$$

被称为典范丛 (Canonical bundle). ■

例 1.1.9 (**向量丛的拉回**) 设 $f:Y\to X$ 是复流形间的全纯映射. $E=\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 是 X 上的向量丛. 我们可以定义 Y 上的拉回向量丛

$$f^*E=\{f^*\Phi_{\alpha\beta}\}.$$

我们解释一下 $f^*\Phi_{\alpha\beta}$ 的含义. 设 $\Phi_{\alpha\beta}=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, 那么 $f^*\Phi_{\alpha\beta}:=(f^*a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$, 这里 $f^*a_{ij}:=a_{ij}\circ f$ 视为 Y 上的函数.

如果 $f:Y\hookrightarrow X$ 是包含映射, 那么 $f^*E=E|_Y$ 是向量丛 E 在 Y 上的限制. ■

定义 1.1.2 设 $\pi:E\to X$ 是秩 r 全纯向量丛. 它的全纯截面 (Holomorphic section) 是指一个全纯映射 $s:X\to E$, 满足 $\pi\circ s=Id$.

由平凡化映射 (事先取定 $\mathbb{C}^r$ 的标准基 $e_1,\cdots,e_r$),

$$\varphi_\alpha\circ s|_{U_\alpha}(x)=(x,s_\alpha(x)),$$

这里

$$s_\alpha(x)=\begin{pmatrix} s_{\alpha 1}(x)\\ \vdots \\ s_{\alpha r}(x)\end{pmatrix}$$

是全纯的向量函数. 由式 (1-2) 以及 $s(x)=e_\alpha(x)s_\alpha(x)=e_\beta(x)s_\beta(x)$,

$$s_\alpha(x)=\Phi_{\alpha\beta}\cdot s_\beta(x). \tag{1-3}$$

E 的全纯截面全体构成 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 记为 $\Gamma(X,E)$. 类似地, 我们也可以定义半纯截面的概念.

例 1.1.10　设 $E=\{\Phi_{\alpha\beta}\}, E'=\{\Phi'_{\alpha\beta}\}$ 分别是秩为 r,r' 的向量丛. s,s' 分别是 E,E' 的截面. 它们的局部纤维基分别是

$$e_\alpha(x)=(e_{\alpha 1}(x),\dots,e_{\alpha r}(x)),\quad e'_\alpha(x)=(e'_{\alpha 1}(x),\dots,e'_{\alpha r'}(x))$$

(1) 设 $e^*_\alpha(x)=(e^*_{\alpha 1}(x),\dots,e^*_{\alpha r})$ 是 $E^\vee_x$ 的对偶基, 满足 $\langle e^*_{\alpha i},e_{\alpha j}\rangle=\delta^i_j$. $E^\vee$ 的全纯截面

$$s^*_\alpha(x)=\sum_{j=1}^r s^*_{\alpha j}(x)e^*_{\alpha j}(x)$$

满足如下转换关系

$$\begin{pmatrix} s^*_{\alpha 1}\\ \vdots \\ s^*_{\alpha r}\end{pmatrix}={}^T\Phi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\begin{pmatrix} s^*_{\beta 1}\\ \vdots \\ s^*_{\beta r}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} e^*_{\alpha 1}\\ \vdots \\ e^*_{\alpha r}\end{pmatrix}=\Phi_{\alpha\beta}(x)\cdot\begin{pmatrix} e^*_{\beta 1}\\ \vdots \\ e^*_{\beta r}\end{pmatrix}.$$

(2) $E\otimes E'$ 的全纯截面为

$$\bar{s}_\alpha(x)=\sum_{i,j}s_{\alpha,ij}(x)e_{\alpha i}(x)\otimes e'_{\alpha j}(x).$$

(3) $\det E$ 的全纯截面为

$$\bar{s}_\alpha(x)=\ell_\alpha(x)e_{\alpha 1}(x)\wedge\cdots\wedge e_{\alpha r}(x),$$

这里 $\ell_\alpha(x)$ 是 U_α 上的全纯函数, 满足 $\ell_\alpha=\det\Phi_{\alpha\beta}\ell_\beta$.

(4) 设 $f:Y\to X$ 是全纯映射. f^*E 的全纯截面为

$$f^*s_\alpha(y)=s_\alpha(f(y)).$$

■

例 1.1.11 (**纤维坐标**)　设 $\pi:E\to X$ 是向量丛. 如果我们把 E 作为复流形看, 那么任一点 $p\in E$ 的局部邻域可以建立局部坐标. 具体操作如下. 首先设 $x=\pi(p)\in U_\alpha$, 我们已有双全纯映射 $\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{C}^r$. 因此 $\varphi_\alpha(p)$ 在给定的标准基 $\{e_i\}_{1\le i\le r}$ 下提供了自然的坐标 $\varphi_\alpha(p)=(x,z_\alpha(p))$, 这里

$$z_\alpha(p)=\begin{pmatrix} z_{\alpha 1}(p)\\ \vdots \\ z_{\alpha r}(p)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^r z_{\alpha i}(p)e_i.$$

p 在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的纤维坐标 (Fiber coordinates) 定义为

$$p = z_{\alpha 1}e_{\alpha 1}(x) + \cdots + z_{\alpha r}e_{\alpha r}(x).$$

由转换关系

$$z_\alpha(p) = \Phi_{\alpha\beta}(x)z_\beta(p) = \pi^*(\varphi_{\alpha\beta})(p)z_\beta(p),$$

$z = \{z_\alpha\}$ 也可以理解为向量丛 $\pi^*E \to E$ 的整体截面.

如果把纤维 E_x 中的点 p 理解为 E_x 中的向量, 那么 $z_{\alpha i}$ 实际上也能视为 E_x 上的线性泛函, 即

$$z_{\alpha i} : E_x \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p = z_{\alpha 1}(p)e_{\alpha 1} + \cdots + z_{\alpha r}(p)e_{\alpha r} \to z_{\alpha i}(p).$$

考虑 $E^\vee$ 的局部基 $e^*_\alpha = (e^*_{\alpha 1}, \ldots, e^*_{\alpha r})$ 满足例 1.1.3 的条件. 这就有 $z_{\alpha i} = e^*_{\alpha i}$. 换言之, $z_{\alpha i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ 可以看成 $E^\vee = \{{}^T\Phi^{-1}_{\alpha\beta}\}$ 的一组基. 这些函数之间可以有天然的加法与乘法运算, 因此 $\oplus_{n=0}^\infty S^nE^\vee$ 被赋予了自然的交换环结构. 显见, $S^nE^\vee$ 的全纯截面在 U_α 上就是 $z_{\alpha 1}, \ldots, z_{\alpha r}$ 的 r 元 n 次多项式, 其系数是关于 $x(\in U_\alpha)$ 的全纯函数. 将来我们需要讨论多项式在向量丛上的推广时, 用对偶丛显然更为自然. ■

注 1.1.1 (1) 对截面 $s = \{s_\alpha(x)\}$ 而言, 我们也可以用坐标等价地叙述为 $z = s(x)$, 即 $z_{\alpha i} = s_{\alpha i}(x)$.
(2) 上面这些讨论如果限制在一个向量空间上，只是一些经典的高等代数结论. 我们在向量空间事先给定一组基 (相当于给定了坐标系), 那么上面的向量可以理解成坐标点, 其分量就是坐标函数. 它们也可以看成这组基的线性泛函, 因而构成了对偶空间的一组基. 我们只是把这些讨论推广到向量丛上, 让它们整体化. ■

例 1.1.12 (射影空间上的线丛) 设 $X = \mathbb{P}^n$ 是 n 维复射影空间. $[X_0, \cdots, X_n]$ 是齐次坐标. 考虑仿射开集

$$U_i = \{[X_0, \cdots, X_n] |\, X_i \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n = \left\{ \left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, 1, \cdots, \frac{X_n}{X_i} \right) \,|\, X_i \neq 0 \right\}.$$

我们定义线丛 $H = \{\frac{X_j}{X_i}\}$. 容易验证, H 的全纯截面可写为

$$\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \frac{X_k}{X_i} \right\}_{0 \le i \le n}, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

因此 H 的全纯截面空间 (作为复空间)

$$\Gamma(X, H) \cong \{\sum_{k=0}^n a_k X_k |\, a_k \in \mathbb{C}\}.$$

进一步考虑线丛

$$H^{\otimes m} = \left\{ \left(\frac{X_j}{X_i} \right)^m \right\}, \quad m > 0.$$

$H^{\otimes m}$ 的全纯截面可写为

$$\left\{ f\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_k}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i} \right) \right\}_{0 \le i \le n},$$

这里 $f(x_0,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]$ 中的 m 次多项式 (即其中的单项式最高次数为 m). 因此

$$\Gamma(X,H^{\otimes m})\cong\{F(X_0,\cdots,X_n)|\ F \text{ 是 } m \text{ 次齐次多项式}\}.$$

计算维数可知

$$\dim_{\mathbb{C}}\Gamma(X,H^{\otimes m})=\binom{n+m}{m}.$$

$H^{\vee}$ 有另一种几何解释:

$$H^{\vee}\cong\{(\ell,v)\in\mathbb{P}^n\times\mathbb{C}^{n+1}|\ v\in\ell\},$$

这里 $v\in\ell$ 是指 ℓ 视为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的直线, v 是 ℓ 上的点. 设 $\ell\in U_i\cap U_j$, 在 U_i 上, 右边向量丛的基 $e_i=(\frac{X_0}{X_i},\cdots,\frac{X_n}{X_i})(\in\mathbb{C}^{n+1})$; 在 U_j 上的基 $e_j=(\frac{X_0}{X_j},\cdots,\frac{X_n}{X_j})$. 因此

$$e_j=e_i\cdot\frac{X_i}{X_j}.$$

从这个几何解释上看, 每个纤维 $H^{\vee}_{\ell}$ 就是 ℓ (作为直线看). 因此我们也将 $H^{\vee}$ 称为赘线丛 (Tautological line bundle). 有时我们也将 $(H^{\vee})^{\otimes m}$ 记为 $H^{\otimes(-m)}$.

如果用层的语言, 我们也常常将 $H^{\otimes m}$ 等同为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ (见例 1.2.1). ■

1.1.2 向量丛的同态

定义 1.1.3 设 $\pi:E\to X$ 和 $\pi':E'\to X$ 是两个向量丛. 如果存在全纯映射 $h:E\to E'$ 使得以下交换图成立,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

并且对任意 $x\in X$, $h|_{E_x}$ 是线性映射, 则称 h 为向量丛的同态 (Homomorphism). 进一步, 如果 h 是双全纯的, 则称 h 是向量丛的同构 (Isomorphism).

向量空间同态在不同基下的变化规律可以推广到向量丛的同构上.

命题 1.1.1 设 $E=\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 和 $E'=\{\Phi'_{\alpha\beta}\}$ 分别是秩 r 和 r' 向量丛.

(1) 对任意向量丛同态 $h:E\to E'$, 可构造一族全纯映射 $h_\alpha:U_\alpha\to M_{r'\times r}(\mathbb{C})$, 满足交换图

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} \arrow[r, "h|_{U_\alpha}"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & E'|_{U_\alpha} \arrow[d, "\varphi'_\alpha"] \\ U_\alpha\times\mathbb{C}^r \arrow[r, "h_\alpha"] & U_\alpha\times\mathbb{C}^{r'} \end{tikzcd}$$

$$(x,v)\longrightarrow(x,h_\alpha(x)\cdot v)$$

并且满足转换关系

$$\Phi'_{\alpha\beta}h_\beta(x)=h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta},\quad x\in U_\alpha\cap U_\beta, \tag{1-4}$$

这里 $M_{r\times r'}(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^r\otimes\mathbb{C}^{r'}$ 是 r' 行 r 列复系数矩阵构成的空间.

(2) 反过来，给定一族全纯函数 $h_\alpha : U_\alpha \to M_{r'\times r}(\mathbb{C})$ 满足关系式(1-4), 那么它们诱导向量丛同态 $h : E \to E'$.

证明　(1) 已知存在同态 $h : E \to E'$. 利用关系式 $\varphi'_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha, v_\alpha) = (x_\alpha, h_\alpha(x_\alpha)v_\alpha)$ 可得

$$\begin{aligned}&(x, h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta}v_\beta)\\&\quad= \varphi'_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \Phi_{\alpha\beta}(x)v_\beta)\\&\quad= (\varphi'_\alpha \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v_\beta)\\&\quad= (\varphi'_\alpha \circ h \circ \varphi_\beta^{-1})(x, v_\beta)\end{aligned}$$

再利用关系式 $h \circ \varphi_\beta^{-1}(x_\beta, v_\beta) = {\varphi'}_\beta^{-1}(x_\beta, h_\beta(x_\beta)v_\beta)$, 我们有

$$\begin{aligned}(x, h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta}v_\beta) &= \varphi'_\alpha \circ (h \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v_\beta))\\&= \varphi'_\alpha \circ ({\varphi'}_\beta^{-1}(x, h_\beta(x)v_\beta))\\&= (\varphi'_\alpha \circ {\varphi'}_\beta^{-1})(x, h_\beta(x)v_\beta)\\&= (x, \Phi'_{\alpha\beta}h_\beta(x)v_\beta).\end{aligned}$$

由 v_β 的任意性, 这就有 $\Phi'_{\alpha\beta}h_\beta(x) = h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta}$.

(2) 构造向量丛同态

$$h : E = \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}^r / \sim \longrightarrow E' = \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}^{r'} / \sim, \qquad (x, v)(\in U_\alpha \times \mathbb{C}^r) \to (x, h_\alpha(x)v).$$

我们只需要验证 h 的定义不依赖于开集的选取. 具体言之, 设 $(x, v_\alpha) \sim (x, v_\beta)$ (即 $v_\alpha = \Phi_{\alpha\beta}(x)v_\beta$), 要证 $(x, h_\alpha(x)v_\alpha) \sim (x, h_\beta(x)v_\beta)$. 这来自于以下事实:

$$h_\alpha(x)v_\alpha = h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta}(x)v_\beta = \Phi'_{\alpha\beta}(x)(h_\beta(x)v_\beta).$$

至此完成证明. ■

由命题 1.1.1, 可得如下推论.

推论 1.1.1　设 $E = \{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 和 $E' = \{\Phi'_{\alpha\beta}\}$ 是秩 r 向量丛, 则以下条件彼此等价:

(1) 存在向量丛同构 $h : E \to E'$,

(2) 存在一族全纯映射 $h_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{C})$, 满足

$$\Phi'_{\alpha\beta} = h_\alpha(x)\Phi_{\alpha\beta}h_\beta(x)^{-1}, \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

例 1.1.13 (**射影空间上的典范丛**)　回顾例 1.1.12 中的记号与概念. 我们考虑 $X = \mathbb{P}^n$ 上的典范丛 ω_X. 注意到

$$\left|\frac{\partial(x_{j1}, \cdots, x_{jn})}{\partial(x_{i1}, \cdots, x_{in})}\right| = (-1)^{j+i}x_{ij}^{-1-n} = (-1)^{i+j}\left(\frac{X_i}{X_j}\right)^{n+1},$$

因而由推论 1.1.1, 我们可取 $h_i = (-1)^i$, 从而得到

$$\omega_X \cong (H^{\otimes(n+1)})^\vee.$$

例 1.1.14 (秩二向量丛的对偶) 设 $E = \{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 是秩 2 向量丛, 我们来证明

$$E^\vee \cong E \otimes (\det E)^\vee.$$

事实上, 可取全纯函数族 $\{h_\alpha\}$:

$$h_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证

$${}^T\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = h_\alpha \cdot \Phi_{\alpha\beta} \cdot (\det \Phi_{\alpha\beta})^{-1} \cdot h_\beta^{-1}.$$

利用推论 1.1.1, 即得结论. ■

上述结果实际上是如下结论的特例.

命题 1.1.2 ([Hir66], **定理** 3.6.1, page 47) 设 E, E', E'' 是 X 上的向量丛, 证明:

(1) $(E \oplus E') \oplus E'' \cong E \oplus (E' \oplus E'')$, $E \oplus E' \cong E' \oplus E$.

(2) $(E \otimes E') \otimes E'' \cong E \otimes (E' \otimes E'')$, $E \otimes E' \cong E' \otimes E$.

(3) $(E \oplus E') \otimes E'' \cong E \otimes E'' \oplus E' \otimes E''$.

(4) $(E \oplus E')^\vee \cong E^\vee \oplus E'^\vee$, $(E \otimes E')^\vee \cong E^\vee \otimes E'^\vee$.

(5) $\mathrm{Hom}(E, E') \cong E^\vee \otimes E'$, $(E^\vee)^\vee \cong E$.

(6) 设 $r = \mathrm{rk}\, E$, 则 $(\Lambda^{r-p}E)^\vee \cong \Lambda^{r-p}(E^\vee) \cong \Lambda^r E^\vee \otimes \Lambda^p E \cong \Lambda^p E \otimes (\det E)^\vee$.

(请读者自己验证)

向量空间的一些正合列的性质也能推广到向量丛上.

命题 1.1.3 ([Hir66], **定理** 4.1.2 **及** 4.1.3, page 54-55) 考虑向量丛的正合列

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0.$$

设 E 是另一个向量丛. 我们有如下正合序列

(1) $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, W') \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E, W'') \longrightarrow 0$.

(2) $0 \longrightarrow W' \otimes E \longrightarrow W \otimes E \longrightarrow W'' \otimes E \longrightarrow 0$.

(3) $0 \longrightarrow (W'')^\vee \longrightarrow W^\vee \longrightarrow (W')^\vee \longrightarrow 0$.

(4) 若 W' 是线丛, 则

$$0 \longrightarrow \Lambda^{p-1}W'' \otimes W' \longrightarrow \Lambda^p W \longrightarrow \Lambda^p W'' \longrightarrow 0.$$

(5) 若 W'' 是线丛, 则

$$0 \longrightarrow \Lambda^p W' \longrightarrow \Lambda^p W \longrightarrow \Lambda^{p-1}W' \otimes W'' \longrightarrow 0.$$

(请读者自己验证)

1.2 凝聚层的预备知识

1.2.1 局部自由层

在层论中, 与向量丛对应的概念是局部自由层. 很多时候, 我们都将这两者等同起来处理.

定义 1.2.1 设 $\mathcal{E}$ 是复流形 X 上的层, 如果满足如下性质, 就称为秩 r 的局部自由层 (Local free sheaf): 对任何 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $\mathcal{E}|_U = \mathcal{O}_U^{\oplus r}$.

设 E 是复流形 X 上的秩 r 全纯向量丛. 我们可以构造 $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{O}(E)$: 在每个开集 U 上, $\mathcal{O}(E)(U) := \Gamma(U, E)$ 由 E 在 U 上的全纯截面构成, 称为全纯截面层.

我们证明如下主要结论.

命题 1.2.1 设 $\mathfrak{Vec}(X)$ 是 X 上全纯向量丛同构类的范畴, $\mathfrak{Mod}(X)$ 是 X 上局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层同构类的范畴. 那么 $E \to \mathcal{O}(E)$ 给出了从 $\mathfrak{Vec}(X)$ 到 $\mathfrak{Mod}(X)$ 的自然等价. 具体言之,

(1) 全纯向量丛 E 的全纯截面层 $\mathcal{O}(E)$ 是秩 r 局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层.

(2) 对任意秩 r 局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{E}$, 存在 X 上唯一的全纯向量丛 E, 使得 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$.

(3) 上述对应保持了向量丛或层之间的同态.

证明 (1) $\mathcal{O}(E)|_{U_\alpha} = \mathcal{O}(E|_{U_\alpha}) \cong \mathcal{O}(U_\alpha \times \mathbb{C}^r) \cong \mathcal{O}|_{U_\alpha}{}^{\oplus r}$. 回顾 E 在 U_α 上的局部基 $e_\alpha(x) = (e_{\alpha 1}(x), \ldots, e_{\alpha r}(x))$ (见式 (1-1)). 显然, $e_{\alpha 1}(x), \ldots, e_{\alpha r}(x)$ 可以视作 $\mathcal{O}(E)|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}|_{U_\alpha}{}^{\oplus r}$ 的一组基. 它们满足转换关系

$$(e_{\beta 1}, \cdots, e_{\beta r}) = (e_{\alpha 1}, \cdots, e_{\alpha r}) \cdot \Phi_{\alpha\beta}. \tag{1-5}$$

(2) 设 $\{e_{\alpha 1}, \cdots, e_{\alpha r}\}$ 是 $\mathcal{E}|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}|_{U_\alpha}^{\oplus r}$ 作为 $\mathcal{O}_{U_\alpha}$-模的基. 由 $(\mathcal{E}|_{U_\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta} = (\mathcal{E}|_{U_\beta})|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, 我们有基之间的变换式 (1-5). 这族变换 $\{\Phi_{\alpha\beta}\}$ 给出了全纯向量丛 E, 因而 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(E)$.

(3) 考虑向量丛映射 $\varphi : E \to F$. 我们定义相应层的映射

$$\Phi : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(F), \quad s \to \varphi \circ s.$$

反过来, 考虑任一局部自由层态射 $\Psi : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(F)$. 选取合适的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 使得 $\mathcal{O}(E)|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}$, $\mathcal{O}(F)|_{U_\alpha} \cong \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r'}$. 设

$$e_\alpha(x) = (e_{\alpha 1}(x), \ldots, e_{\alpha r}(x)), \quad e'_\alpha(x) = (e'_{\alpha 1}(x), \ldots, e'_{\alpha r'}(x))$$

分别是 $\mathcal{O}(E)$ 和 $\mathcal{O}(F)$ 的局部基, 那么 $\Psi_{U_{\alpha\beta}}$ 诱导了全纯映射 $h_\alpha : U_\alpha \to M_{r' \times r}(\mathbb{C})$, 使得

$$\big(\Phi_{U_{\alpha\beta}}(e_{\alpha 1}(x)), \ldots, \Phi_{U_{\alpha\beta}}(e_{\alpha r}(x))\big) = (e_{\alpha 1}(x), \ldots, e_{\alpha r'}(x)) \cdot h_\alpha(x).$$

由定义可验证它满足命题 1.1.1 的关系式 1-4. 因此这就构造了向量丛同态 $\phi : E \to F$. ■

注 1.2.1 一般说来, 向量丛强调的是标架, 而局部自由层强调的是截面. 不过基于以上的自然等价, 我们在讨论问题时, 往往将全纯向量丛和全纯截面层等同起来. 这样处理是非常便捷的. 今后如无特别声明, 我们就不再区分两者. 这里再解释一下茎和纤维的关系. 局部自由层 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$ 在 $x \in X$ 处的纤维可以理解成 $\mathcal{E}(x) := \mathcal{E}_x / \mathcal{I}_x(\mathcal{E})$, 这里 $\mathcal{I}_x$ 是 x 处的理想层. 它是 $\mathbb{C}$ 上有限维向量空间. 我们可以把 $\mathcal{E}(x)$ 和向量丛 E 的纤维 E_x 等同起来. ■

注 1.2.2 这里要特别提醒读者注意, 上述自然等价并不保持同态的单射性. 具体言之, 即使 $\mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{O}_X(F)$ 是单射, 也不能保证 $E \to F$ 是单射. 局部上看, 相当于说茎映射 $\mathcal{O}_{X,x}(E) \to \mathcal{O}_{X,x}(F)$ 的单射性不能保证纤维映射 $E_x \to F_x$ 的单射性. 比如取 $X = \mathbb{C}$, $0 \neq (f_1, \cdots, f_r) \in H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus r})$ 使得诸 f_i 有公共零点 x, 则

$$\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus r}, \quad h \to (hf_1, \cdots, hf_r)$$

是层的单同态. 但是对应的向量丛同态在 x 处是零映射.

不过满射性仍然保持. 由 Nakayama 引理 (见习题 1.19), 纤维映射 $E_x \to F_x$ 是满的当且仅当茎映射也是满的. ∎

在代数几何中, 线丛 (可逆层) 是重要的研究对象之一. 它们和除子有着密切联系. 为方便读者, 我们简单回顾一下. 设 D 是 X 上的超曲面. D 在每个坐标开集 U_α 上由全纯函数 f_i 的零点集 (记为 $V(f_\alpha)$) 定义. 由 $V(f_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = V(f_\beta)|_{U\alpha \cap U_\beta}$, 可找到在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上无零点的全纯函数 $\ell_{\alpha\beta}$, 使得

$$f_\alpha = \ell_{\alpha\beta} f_\beta.$$

容易验证, $\{\ell_{\alpha\beta}\}$ 诱导了一个全纯线丛 $[D] = \{\ell_{\alpha\beta}\}$. 更一般地, 任何除子 D 可以写成 $\sum\limits_{i=1}^m n_i D_i$, 这里 $n_i \in \mathbb{Z}$, D_i 是超曲面. 设 $[D_i] = \{\ell_{i\alpha\beta}\}$. 我们可诱导全纯线丛

$$[D] := [D_1]^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes [D_m]^{\otimes n_m} = \left\{ \prod_{i=1}^m \ell_{i\alpha\beta}^{n_i} \right\}.$$

反过来, 任给线丛 L, 以及非零半纯截面 $s \in L$ (即截面是半纯的), 那么 $L \cong [\mathrm{div}(s)]$. s 是全纯的当且仅当 $\mathrm{div}(s)$ 是有效除子. 进一步, 两个除子诱导同构的线丛当且仅当它们线性等价.

例 1.2.1 如果 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是复射影簇, 我们可以构造线丛 $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$, 即超平面截口除子对应的线丛. 对 X 上的局部自由层 (更一般地, 凝聚层) $\mathcal{F}$, 我们通常记 $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$. 反过来, 一个*非常丰富线丛* (very ample line bundle) 就是指它是某个超平面截口除子对应的线丛. 一个线丛 H 被称为*丰富的* (Ample), 是指对某个正整数 m_0, $H^{\otimes m_0}$ 是非常丰富的. ∎

例 1.2.2 (整体截面诱导的层态射) 设 E 是 X 上的向量丛, $s \in \Gamma(X, E)$ 是 E 的非零全纯截面. 我们可以诱导层的单态射

$$\nu : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(E), \quad h \to hs.$$

反过来, 任何单态射 $\nu : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}(E)$ 诱导了全纯截面 $s = \nu(1) \in \Gamma(X, E)$.

更一般的, 给定非零全纯截面 $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(X, E)$, 我们可以诱导层态射

$$\nu : \mathcal{O}_X^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{O}(E), \quad (h_1, \ldots, h_k) \to h_1 s_1 + \cdots + h_k s_k.$$

一般说来, 它既不是单态射, 也不是满态射. 如果它是满射, 我们就说 $\mathcal{O}(E)$ 是*由整体截面生成的*(见第 2.1 节).

对上述态射取对偶得

$$\nu^* : \mathcal{O}(E^\vee) \to \mathcal{O}_X^{\oplus k}, \quad \xi^* \to (\xi^*(s_1), \ldots, \xi^*(s_k)).$$

它通常既非单射也非满射. ∎

例 1.2.3 (Euler 序列) 我们将诱导所谓的 Euler 正合列 (Euler sequence)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

我们来解释该正合列的几何意义.

首先考虑标准投影

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad (X_0, \dots, X_n) \to [X_0, \dots, X_n].$$

设 $x_i = X_i/X_0$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的仿射坐标. 我们有

$$\pi^* dx_i = \frac{X_0 dX_i - X_i dX_0}{X_0^2}, \quad \pi_* \frac{\partial}{\partial X_i} = \frac{1}{X_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \pi_* \frac{\partial}{\partial X_0} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{X_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

特别地

$$\pi_* \left(\sum_{k=0}^{n} X_k \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) = 0.$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} X_k \cdot \frac{\partial}{\partial X_k}$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的向量场, 称为 Euler *向量场*.

对任何线性函数 $\sigma(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X_i$ 及 $v(X) = \sigma(X) \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}$.

$$\pi_* \left(v(X) \right) = \pi_* \left(v(\lambda X) \right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

因此 $\pi_*(v(X))$ 诱导了 $\mathbb{P}^n$ 的向量场.

现在我们可以构造层态射

$$\tau : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}, \quad (\sigma_0, \cdots, \sigma_n) \to \pi_* \left(\sum_{k=0}^{n} \sigma_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i} \right),$$

这里 $\sigma_i(X) \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 是线性齐次多项式. 可以验证 τ 是满的且 $\mathrm{Ker}\tau = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (由截面 $(X_0, \cdots, X_n)$ 生成).

对欧拉序列取对偶, 则得

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0,$$

或写为

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow 0. \tag{1-6}$$

φ 是所谓的赋值映射 (见第 2.1 节). 取定整体全纯截面空间 $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ 中的一组基 $X_0, \cdots, X_n$, 则

$$\varphi(f_0, \dots, f_n) = f_0 \cdot X_0|_U + \cdots + f_n \cdot X_n|_U, \quad f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U).$$

$\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$ 相当于 φ 诱导的核丛 (见第 2.1 节的定义).

对正合列 (1-6) 取外积, 并利用命题 1.1.3 (4) 可得正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus m} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p-1}(p) \longrightarrow 0, \quad m = \binom{n+1}{p}. \tag{1-7}$$

关于欧拉序列的详细讨论也可参见 [GrHa94, Page 409]. ■

1.2.2 凝聚层

凝聚层是比局部自由层更广泛的一类对象. 它在很多方面保留了局部自由层的性质. 我们在处理向量丛问题时, 经常会讨论凝聚层这类对象.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 X 上的 $\mathcal{O}_X$-模层, 如果满足如下性质: 对于任一点 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 以及如下的正合列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus q}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0,$$

那么我们就称 $\mathcal{F}$ 是有限型 $\mathcal{O}_X$-模层 (Finite type).

定义 1.2.3 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 X 上的有限型 $\mathcal{O}_X$-模层, 如果满足如下性质: 对于任一邻域 U 以及任意 $\mathcal{O}_X|_U$模层态射 $\varphi : (\mathcal{O}_X|_U)^{\oplus q} \to \mathcal{F}|_U$, $\mathrm{Ker}\varphi$ 也是有限型的 $\mathcal{O}_X|_U$-模层, 那么我们就称 $\mathcal{F}$ 是凝聚层 (Coherent sheaf).

这里罗列凝聚层的一些基本性质.

命题 1.2.2 设 X 是复流形, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是凝聚层, 那么

(1) (**O**ka 引理 [OKa61]) X 上的结构层 $\mathcal{O}_X$ 是诺特的, 因而是凝聚层. 子流形 $Y \subseteq X$ 的理想层也是凝聚的.

(2) 设
$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$
是 $\mathcal{O}_X$-模层的正合列. 若其中有两个是凝聚的, 则第三个也是凝聚的.

(3) $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 也是凝聚的. 其逆也成立.

(4) 设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是凝聚层之间的态射, 那么 $\mathrm{Ker}\varphi, \mathrm{Im}\varphi$ 及 $\mathrm{coker}\varphi$ 都是凝聚的.

(5) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$, $\mathscr{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 也是凝聚的.

(6) 层 $\mathcal{E}$ 是凝聚的当且仅当对每个点 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 以及正合列
$$\mathcal{O}_X^{\oplus p}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus q}|_U \longrightarrow \mathcal{E}|_U \longrightarrow 0.$$

(7) 局部自由层都是凝聚的.

我们还可以定义凝聚层 $\mathcal{F}$ 的奇点集 (Singularity set)

$$S(\mathcal{F}) = \{x \in X |\ \mathcal{F}_x \text{ 不是自由-}\mathcal{O}_{X,x} \text{ 模}\}.$$

可以证明, $S(\mathcal{F})$ 是复流形 X 中余维数至少为 1 的闭解析子集. 因此 $\mathcal{F}$ 在 $X \setminus S(\mathcal{F})$ 上是局部自由层. 由此还可定义 $\mathcal{F}$ 的秩 (Rank) 为这个局部自由层的秩.

注 1.2.3 凝聚层的有限型这一性质在讨论问题时往往很有用. 比如在构造局部映射时, 我们只需要构造茎的映射即可. 这是因为 $\mathcal{F}_x$ 上可以找有限个生成元, 它们在 x 的某个邻域上仍是 $\mathcal{F}$ 的局部生成元. 茎上的映射由这些生成元确定, 从而可以延拓到邻域上. 另外, 有限型的模层的支撑集是闭集, 换言之 $\mathcal{F}_x = 0$ 蕴含着 $\mathcal{F}|_U = 0$ 在某个邻域 U 成立. 因此如果我们有凝聚层的茎之间的单态射, 那么在延拓到邻域时, 单性被保持 (只要考虑态射的核即得). ■

注 1.2.4 复流形 X 上的凝聚层 $\mathcal{F}$ 在 x 处的茎 $\mathcal{F}_x$ 与纤维 $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x/m_x\mathcal{F}_x$ 显然是两个不同的概念. 前者是 $\mathcal{O}_{X,x}$-模, 后者是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 正如注记 1.2.2 所指出的, 茎态射的单射性不能保证纤维态射的单射性. 但是纤维态射的满射性蕴含了茎态射的满射性 (由 Nakayama 引理). 我们往往可以利用这一点来证明某些凝聚层态射的满性. 比如下面的结论正是利用了这个原理. ■

命题 1.2.3 *设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 是紧复流形上的凝聚层 $\mathcal{F}$ 到自身的单态射, 则 φ 是同构.*

证明 此时 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维空间. 因此 φ 满足多项式方程. 注意到 φ 是单射, 因此我们可以假设该多项式含有非零常数项 (否则可以消去因子 φ).

注意到每个纤维 $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x/m_x\mathcal{F}_x$ 都是 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间, φ 满足的多项式方程显然在每个纤维 $\mathcal{F}(x)$ 上都成立. 因为该方程有非零常数项, 因此这就推出 φ 在 $\mathcal{F}(x)$ 上是满的. 由 Nakayama 引理, 即得 φ 的满性. ■

定义 1.2.4 *设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层,*

(1) *如果对 $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ 是无挠的 $\mathcal{O}_{X,x}$-模, 就称 $\mathcal{F}$ 在 x 处无挠. 若 $\mathcal{F}$ 处处无挠, 则称 $\mathcal{F}$ 是无挠层* (Torsion free sheaf) .

(2) *如果典范的层同态 $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ 是同构, 则称 $\mathcal{F}$ 是自反的* (Reflexive).

(3) *如果对任何开集 $U \subseteq X$ 以及余维数至少为 2 的解析闭子集 $A \subseteq U$, 限制映射 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U \setminus A)$ 都是同构, 那么称 $\mathcal{F}$ 是正规的* (Normal).

例 1.2.4 很明显, 无挠层的子层仍是无挠的; 局部自由层都是无挠且自反的. 另外, 由黎曼扩张定理, $\mathcal{O}_X$ 是正规的. ■

例 1.2.5 设 Δ 是 X 上余维数至少为 2 的解析闭子集, 理想层 $\mathscr{I}_\Delta \subseteq \mathcal{O}_X$ 是无挠的, 但不是正规的. ■

注 1.2.5 前面已提及, 凝聚层的奇点集是余维数至少为 1 的解析闭子集. 实际上还可以证明, 无挠层的奇点集余维数至少是 2, 自反层的奇点集余维数至少是 3. 因此若 X 是光滑代数曲线, 那么无挠当且仅当局部自由. 若 X 是光滑射影曲面, 则自反当且仅当局部自由. ■

命题 1.2.4 *设 $\mathcal{F}$ 是无挠的凝聚层, 那么对每点 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 以及层的单态射*

$$\Phi : \mathcal{F}|_U \hookrightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus r}.$$

证明 因为 $\mathcal{F}$ 是凝聚的, 所以我们只要构造茎上的单同态即可 (见注记 1.2.3). 设 K 是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的分式域. 首先有典范同态

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K \cong K^{\oplus r}.$$

因为 $\mathcal{F}$ 是无挠的, 所以上述映射是单的.

设 $e_1, \cdots, e_r$ 是 $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$ 的一组 K-基, $m_1, \cdots, m_k$ 是 $\mathcal{F}_x$ 的生成元. 于是 $m_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \gamma_{ij} e_j$, $\gamma_{ij} \in K$. 在 $\mathcal{O}_{X,x}$ 中取一个合适的元 h, 使得 $h\gamma_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$. 这样,

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\cdot h} h \cdot \mathcal{F}_x \subseteq {\mathcal{O}_{X,x}}^{\oplus r}$$

就是我们需要的映射. ■

命题 1.2.5 考虑凝聚层 $\mathcal{F}$ 的典范态射 $\mu:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\vee\vee}$, 则

$$\mathrm{Ker}\mu_x=\{a\in\mathcal{F}_x|\ fa=0 \text{ 对某个 } f\in\mathcal{O}_{X,x},\ f\neq 0\},\quad x\in X.$$

因此, $\mathcal{F}$ 无挠的充要条件是 μ 为单态射.

证明 为方便书写, 记 $R=\mathcal{O}_{X,x}$, $M=\mathcal{F}_x$. 显然 $M_{tor}\subseteq\mathrm{Ker}\mu_x$. 为证反过来的包含关系, 我们不妨以 M/M_{Tor} 替代 M. 因此, 我们只需要证明此时 $\mu_x:M\to M^{\vee\vee}$ 是单射.

利用命题 1.2.4, 我们有交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & \mathbb{R}^r \arrow[d, equal] \\ M^{\vee\vee} \arrow[r] & (R^r)^{\vee\vee} \end{tikzcd}$$

这就得到了单射性. ■

定理 1.2.1 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 X 上的凝聚层, 那么以下条件彼此等价:

(1) $\mathcal{F}$ 是自反的.

(2) $\mathcal{F}$ 是无挠且正规的.

(3) 存在凝聚层 $\mathcal{N}$ 使得 $\mathcal{F}=\mathcal{N}^{\vee}$.

证明 (1) ($\Longrightarrow$) (3) 取 $\mathcal{N}=\mathcal{F}$ 即得.

(3) ($\Longrightarrow$) (2) 由黎曼扩张定理, $\mathcal{O}_X$ 是无挠且正规的. 因此任何凝聚层的对偶是无挠且正规的 (留给读者验证).

(2) ($\Longrightarrow$) (1) 由命题 1.2.5 以及 $\mathcal{F}$ 的无挠性, $\mu:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\vee\vee}$ 是单态射. 进一步, 在奇点集 $S(\mathcal{F})$ (它的余维数至少是 2) 之外, μ 是同构. 这就得到以下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "|_{U\setminus S(\mathcal{F})}"] & \mathcal{F}^{\vee\vee}(U) \arrow[d, "|_{U\setminus S(\mathcal{F})}"] \\ \mathcal{F}(U\setminus S(\mathcal{F})) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{F}^{\vee\vee}(U\setminus S(\mathcal{F})) \end{tikzcd}$$

这里 U 是任意开集. 由于 $\mathcal{F}$ 正规, 因而上图中的映射 $|_{U\setminus S(\mathcal{F})}$ 是同构, 故 $\mu:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}^{\vee\vee}(U)$ 是同构. ■

对一个秩 r 无挠层 $\mathcal{F}$, 我们可以定义行列式丛 (Determinant bundle) $\det\mathcal{F}:=(\wedge^r\mathcal{F})^{\vee\vee}$. 由下面的结论, 它是一个线丛.

命题 1.2.6 秩 1 的自反层是线丛.

(证明见 [OSS80, 引理 1.1.15, page 154])

命题 1.2.7 设 $0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{H}\longrightarrow 0$ 是层的正合列, 其中 $\mathcal{E}$ 是自反的, $\mathcal{H}$ 是无挠的, 则 $\mathcal{F}$ 是正规的.

证明 设 U 是开集, $A \subseteq U$ 是余维数至少为 2 的解析闭子集. 因 $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ 是无挠的, 故有单射

$$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(U \setminus A), \qquad \mathcal{H}(U) \hookrightarrow \mathcal{H}(U \setminus A).$$

现在我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "|_{U\setminus A}"] & \mathcal{E}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{H}(U) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U \setminus A) \arrow[r, "\psi_{U\setminus A}"] & \mathcal{E}(U \setminus A) \arrow[r, "\varphi_{U\setminus A}"] & \mathcal{H}(U \setminus A)
\end{tikzcd}$$

我们只需要证明 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U \setminus A)$ 是满射. 假设 $s \in \mathcal{F}(U \setminus A)$, $s' = \psi_{U\setminus A}(s)$. 由于 $\varphi_{U\setminus A}(s') = 0$ 且 $\mathcal{H}(U) \hookrightarrow \mathcal{H}(U \setminus A)$ 是单射, 因而 s' (视为 $\mathcal{E}(U)$ 中的元素) 也落在 $\mathrm{Ker}\varphi_U = \mathrm{Im}\psi_U$ 中, 即存在 $t \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $s' = \psi_U(t)$. 那么 $\psi_{U\setminus A}(t|_{U\setminus A}) = s'$. 由于 $\psi_{U\setminus A}$ 是单射, 所以 $t|_{U\setminus A} = s$. 由此推出 $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}(U \setminus A)$. ■

命题 1.2.8 设 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 是具有相同秩的无挠层之间的单态射, 则可诱导行列式丛的单态射 $\det\phi : \det\mathcal{F} \hookrightarrow \det\mathcal{F}'$.

证明 设 A 是这些层及 $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ 的奇点集, 那么在 $X \setminus A$ 上 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 是同构, 从而 $\det\mathcal{F} \to \det\mathcal{F}'$ 也是同构. 因此 $\mathrm{Ker}\det\phi$ 是挠层, 其支集落在 A 中. 但是另一方面, 它作为 $\det\mathcal{F}$ 的子层是无挠的. 因此支集是空的, 即它是零. ■

定义 1.2.5 设 $\mathcal{E}$ 是自反层, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的凝聚子层. 如果一个凝聚子层 $\mathcal{F}'$ 满足 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{E}$ 且 $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}'$, 我们就称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的扩张 (Extension). 进一步, $\mathcal{F}'$ 若是正规的, 则称它是 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的正规扩张.

对上述扩张, 由蛇形引理, 我们有正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

这里 $\mathcal{H} = \mathcal{E}/\mathcal{F}$, $\mathcal{H}' = \mathcal{E}'/\mathcal{F}'$. $T = \mathrm{Ker}(\mathcal{H} \to \mathcal{H}')$ 是挠层, 并且显然落在 $\mathcal{H}$ 的挠子模层 $T(\mathcal{H})$ 中. 这样, $\mathcal{F}'' := \mathrm{Ker}(\mathcal{E} \to \mathcal{H}/T(\mathcal{H}))$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极大扩张. 由命题 1.2.7, 它是正规的. 这就得到如下结论.

推论 1.2.1 设 $\mathcal{E}$ 是自反层, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的凝聚子层, 则存在 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极大正规扩张.

另一方面, $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ 也是 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极小正规扩张.

1.2.3 一些上同调定理

关于局部自由层 (更一般地, 凝聚层) 及其上同调, 我们罗列一些常用的经典结论.

定理 1.2.2 (Serre **对偶定理**) 设 X 是 n 维复光滑射影簇, $\mathcal{E}$ 是局部自由层, $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是凝聚层, 则

(1) $H^i(X,\mathcal{E}) \cong H^{n-i}(X,\omega_X \otimes \mathcal{E}^\vee)^\vee$.

(2) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X) \cong H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee$.

(3) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{G}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E},\mathcal{G})$.

(4) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$.

(5) 对任何 $q \geq 1$, 当 m 充分大时, 总有 $H^q(X,\mathcal{F}(m)) = 0$.

例 1.2.6 (**全纯截面空间**) 设 E 是光滑射影簇 X 上的全纯向量丛, 利用 E 上的 $\bar\partial_E$ 算子所诱导的 Dolbeault 复形, 上同调 $H^0(X,E) = \Gamma(X,E)$ 就是全纯截面张成的有限维空间. ■

例 1.2.7 对线丛 L_1, L_2, $\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)$ 中的元素 η 可以理解为 L_1 通过 L_2 的扩张 (Extension)

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow E_\eta \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0$$

的同构类 (E_η 是秩 2 向量丛). 这里的同构是指如下交换图成立,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_\eta \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & E'_\eta \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里 $\alpha : E_\eta \to E'_\eta$ 是同构. $\eta = 0$ 对应分裂的扩张.

如果将交换图中左右竖列的等号改成同构映射, 那么就称这样的同构为*弱同构* (Weak isomorphism). 注意到线丛的同构相当于非零数乘, 因此弱同构相当于给出 $\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)$ 上的 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 作用. 这个作用对 E_η 来说, 只是由数乘诱导的自同构 (相当于标架的放缩), 并且对角线 $\{(g,g) |\ g \in \mathbb{C}^*\}$ 作用在强同构类上是平凡的. 因此弱同构类可以看成是 $\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)/\mathbb{C}^*$ 中的元素. 换言之, 不分裂的扩张的弱同构类可以视为 $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1))$ 中的元素. ■

对丰富的线丛, 我们有如下的上同调判则 (通常称为 Serre *判则*). 这里为方便读者, 我们也把其他判则罗列在一起.

定理 1.2.3 (Cartan-Serre-Grothendieck **定理**) 设 L 是光滑复射影簇 X 上的线丛, 则以下条件彼此等价:

(1) L 是丰富丛.

(2) 对任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在依赖于它的正整数 m_1, 使得当 $m \geq m_1$ 时, 总有

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}) = 0, i > 0.$$

(3) 对任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在依赖于它的正整数 m_2, 使得当 $m \geq m_2$ 时, $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}$ 都由整体截面生成 (见定义 2.1.1).

(4) 存在正整数 m_3, 使得当 $m \geq m_3$ 时, $L^{\otimes m}$ 总是非常丰富层.

例 1.2.8 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的局部自由层. 注意到

$$h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m)) = h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^\vee(-m-n-1)),$$

故由上述结论, 可以找到一个整数 $m_0 = m_0(\mathcal{E})$, 使得

$$h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m_0)) \neq 0, \qquad h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m)) = 0, \quad \forall m < m_0.$$

至于如何具体求出这样的 m_0, 这并非易事. 对于 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^n}$ 的情形, 我们可以精确求出所有的同调 (见 Bott 公式, 定理 8.1.1). ■

定理 1.2.4 (Lefschetz 超平面定理) 设 X 是 n 维复光滑射影簇, Y 是 X 上有效的丰富除子, 则限制映射

$$r^*: H^k(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{Z})$$

当 $k \leq n-2$ 时是同构; 当 $k = n-1$ 时是单射.

特别地, 如果 Y 也是光滑的, 那么限制映射

$$r_{p,q}: H^q(X, \Omega_X^p) \longrightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p)$$

当 $p+q \leq n-2$ 时是同构; 当 $p+q = n-1$ 时是单射.

例 1.2.9 我们利用上述结论来证明 $H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ 对任何 $q \geq 1$ 成立. 当 $q > n$ 时, 结论显然. 因此我们只需要讨论 $q \leq n$ 的情形.

我们首先证明 $q = n$ 情形, 此时由例 1.1.12 及 Serre 对偶定理可得

$$h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = h^0(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = 0.$$

其次证明 $q = n-1$ 的情形. 因为限制映射 $r_{0,n-1}: H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$ 是单射, 所以结合上面讨论可得

$$h^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \leq h^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) = 0.$$

因此 $h^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$.

现在讨论 $q \leq n-2$ 的情形. 由 Lefschetz 超平面定理, 我们有

$$H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong H^q(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \cong \cdots \cong H^q(\mathbb{P}^{q+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q+1}}).$$

由上面讨论, $H^q(\mathbb{P}^{q+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q+1}}) = 0$. 因此 $H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$. ■

1.2.4 高次正像层

设 $f: X \to Y$ 是光滑射影簇之间的正常全纯映射, $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, E 是 X 上的向量丛. 我们介绍几个和高次正像层有关的定理.

定理 1.2.5 (凝聚性定理) $R^i f_* \mathcal{F}$ 是 Y 上的凝聚层 $(i \geq 0)$.

请注意, 一般说来 $R^i f_* E$ 不是向量丛.

定理 1.2.6 (半连续性定理) 如果 f 是平坦的, 那么对任何 $i \geq 0$ 以及 $k \geq 0$,

$$S_k := \left\{ y \in Y \mid h^i(f^{-1}(y), E|_{f^{-1}(y)}) \geq k \right\}$$

是 Y 的解析闭子集.

定理 1.2.7 (基变换定理) 设 f 是平坦的, 那么

(1) 对任何基变换

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

都存在典范同构

$$\phi^*(R^i f_* E) \cong R^i g_*(\psi^* E).$$

(2) (Grauert) 给定 $i \geq 0$,

$$s(y) := h^i(f^{-1}(y), E|_{f^{-1}(y)}), \quad y \in Y$$

是常值函数的充分必要条件是 $R^i f_* E$ 是局部自由层, 并且它在 $y \in Y$ 处的纤维自然同构于 $H^i(f^{-1}(y), E|_{f^{-1}(y)})$.

(3) 若对某个 i, 上述 $s(y) \equiv 0$ $(\forall y \in Y)$, 那么 $R^{i-1} f_* E$ 在每一点 $y \in Y$ 处的纤维

$$R^{i-1} f_* E(y) := R^{i-1} f_* E \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \cong H^{i-1}(f^{-1}(y), E|_{f^{-1}(y)}).$$

定理 1.2.8 (射影公式) 设 $\mathcal{W}$ 是 Y 上的向量丛, 那么

$$R^i f_*(f^* \mathcal{W} \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{W} \otimes R^i f_* \mathcal{F}, \quad i \geq 0.$$

1.2.5 陈类

设 $\pi : E \to X$ 是复流形 X 上的复向量丛 (不要求全纯). 我们有如下定理.

定理 1.2.9 (陈类公理化定义) 存在唯一的映射 c, 使得

$$c(E) = \sum_i c_i(E) t^i \in H^*(X, \mathbb{Z})[t], \qquad c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}), \quad c_0(E) := 1,$$

并满足以下条件:
(1) 若 $\mathrm{rank} E = 1$, 则 $c(E) = 1 + t c_1(E)$.
(2) 设 $\phi : Y \to X$ 是连续映射, $\phi^* : H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \to H^{2i}(Y, \mathbb{Z})$ 是拉回映射, 则

$$c(\phi^* E) = \phi^*(c(E)).$$

(3) (Whitney 公式) 设 $E = F \oplus G$, 则在 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 环结构运算下, 我们有 $c(E) = c(F) c(G)$.

我们称 $c_i(E)$ 为 E 的第 i 陈类 (Chern class).

$c_i(E) \in H^{2r}(X,\mathbb{Z})$ 可以看成余维数 r 的闭链类. 利用如下的分裂原理, 我们在计算陈类时, 可以形式上把 E 分裂为一些线丛的直和, 再结合 Whitney 公式来计算.

命题 1.2.9 (分裂原理) *存在一个连续映射 $\phi : Y \to X$, 使得拉回映射 $\phi^* : H^k(X,\mathbb{Z}) \to H^k(Y,\mathbb{Z})$ 是单射, 并且 $\phi^* E$ 是线丛的直和.*

读者可以通过习题 1.11 及习题 1.12 熟悉这方面的计算. 此处不再赘述.

注 1.2.6 Whitney 公式也可以用到短正合列上. ■

命题 1.2.10 *设 $\pi : E \to X$ 是全纯向量丛, $s \in H^0(X,E)$, $Z(s)$ 是 s 的零子概型, 那么 $c_r(E) = Z(s)$.*

设秩 r 局部自由层 $\mathcal{E}$ 的陈类多项式

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + a_i t).$$

我们定义陈特征 (Chern charcter)

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_i}$$

及 Todd 类 (Todd class)

$$\mathrm{td}(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1 - e^{-a_i}}.$$

设 $\mathcal{F}$ 是另一个局部自由层. $\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{F})$ 幂级数展开后 n 次部分的系数可以用 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 的陈类来表示, 记成 $(\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{F}))_n$.

定理 1.2.10 (Hirzebruch-Riemann-Roch 定理 [Hir66]) *设 X 是 n 维光滑射影簇, $\mathcal{E}$ 是 X 上的局部自由层, 那么*

$$\chi(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_X))_n,$$

这里 $\mathcal{T}_X$ 是 X 的全纯切丛对应的层.

例 1.2.10 (1) 若 X 是光滑代数曲线, 那么

$$\chi(\mathcal{E}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{E} \cdot \chi(\mathcal{O}_X) + \deg \mathcal{E}.$$

(2) 若 X 是光滑射影代数曲线, 那么

$$\chi(\mathcal{E}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{E} \cdot \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left(c_1^2(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{E})K_X\right) - c_2(\mathcal{E}).$$

对凝聚层 $\mathcal{F}$, 我们可以诱导局部自由层的有限析解

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

由此可定义 $\mathcal{F}$ 的陈类

$$c(\mathcal{F}) = \prod_i c(\mathcal{E}_i)^{(-1)^i}.$$

这个定义不依赖于析解的选取且仍满足 Whitney 公式 (但未必满足其他结论).

例 1.2.11 ([Fri98], Ch.2, Sec.2, Page 29) 设 Z 是 X 的余维数为 k 的既约不可约子簇, $\mathcal{E}$ 是 Z 上的秩 r 局部自由层, $j: Z \to X$ 是嵌入映射. 那么由 Grothendieck-Riemann-Roch 定理可得

$$c_i(j_*\mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & i < k \\ (-1)^{k-1}(k-1)!r[Z], & i = k, \end{cases}$$

这里 $[Z] \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ 是 Z 对应的闭链类.

特别地, 取 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Z$, 则有

$$c_i(j_*\mathcal{O}_Z) = \begin{cases} 0, & i < k \\ (-1)^{k-1}(k-1)![Z], & i = k. \end{cases} \tag{1-8}$$

式 (1-8) 对任何纯余维数 k 的闭子概型都成立 (即要求不可约分支都是余维数 k). 习题 1.13 是这个结论在曲面秩 2 向量丛上的应用. 请读者自己验证. ■

例 1.2.12 ([Fri98], page 30) 设 D 是 X 的有效除子, $j: D \to X$ 是嵌入映射.
(1) 我们可以进一步确定 $j_*\mathcal{O}_D$ 所有的陈类. 实际上只要将 Whitney 公式应用到如下正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

即得

$$c(j_*\mathcal{O}_D) = c(\mathcal{O}_X(-D))^{-1} = \sum_i [D]^i t^i.$$

(2) 设 L 是 D 上的线丛. 我们来验证如下公式

$$c_i(j_*L) = \begin{cases} [D], & i = 1, \\ [D]^2 - j_*c_1(L), & i = 2. \end{cases}$$

首先设 $L = \mathcal{O}_D(H_2 - H_1)$, 这里 H_1, H_2 是 D 上的无公共分支的有效除子. 设 $k_i : H_i \to X$ 是相应的嵌入映射. 将 Whitney 公式应用到如下正合列

$$0 \longrightarrow j_*\mathcal{O}_D(-H_1) \longrightarrow j_*\mathcal{O}_D \longrightarrow k_{1*}\mathcal{O}_{H_1} \longrightarrow 0$$

并利用 (1) 的结论, 即得

$$c_i(j_*\mathcal{O}_D(-H_1)) = \begin{cases} [D], & i = 1 \\ [D]^2 + [H_1], & i = 2. \end{cases}$$

再次应用 Whitney 公式到如下正合列

$$0 \longrightarrow j_*\mathcal{O}_D(-H_1) \longrightarrow j_*\mathcal{O}_D(H_2 - H_1) \longrightarrow k_{2*}\mathcal{O}_{H_2}(H_2 - H_1) \longrightarrow 0$$

并结合上面讨论即得证. ■

1.2.6 斜率与稳定性

对光滑射影簇 X 上无挠的凝聚层 $\mathcal{F}$, 我们可以定义所谓的斜率

$$\mu_H(\mathcal{F}) := \frac{c_1(\mathcal{F}) \cdot H^{\dim X - 1}}{\operatorname{rk} \mathcal{F}}.$$

这里 H 是事先给定的丰富除子.

例 1.2.13 (1) 当 X 是光滑曲线时, $\mu(\mathcal{F})=\frac{\deg c_1(\mathcal{F})}{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}$ 不依赖于 H 的选取.
(2) 当 $X=\mathbb{P}^n$ 时, H 的选取最多只相差一个倍数, 因而斜率的值也只相差一个倍数. 因此我们通常选取 H 是一个充分一般的超平面. $L=H^{\dim X-1}$ 是充分一般的直线, 因而

$$\mathcal{F}|_L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r).$$

这样, $c_1(\mathcal{F})=\sum_{i=1}^{r}a_i$. 从此意义上说, 此时斜率的定义也不依赖于 H 的选取. 请注意, $\mathcal{F}|_L$ 的分解有可能依赖于 L 的位置, 但是 $c_1(E)$ 是拓扑量, 并不依赖于 L. ■

例 1.2.14 对任何非零无挠层正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{F}'\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}''\longrightarrow 0,$$

由斜率定义直接可得

$$\min(\mu_H(\mathcal{F}'),\mu_H(\mathcal{F}''))\le\mu_H(\mathcal{F})\le\max(\mu_H(\mathcal{F}'),\mu_H(\mathcal{F}'')).$$

其中一个等号成立当且仅当 $\mu_H(\mathcal{F})=\mu_H(\mathcal{F}')=\mu_H(\mathcal{F}'')$. ■

定义 1.2.6 (Mumford-Takemoto 稳定性) *设 $\mathcal{F}$ 是无挠层, 如果 $\mathcal{F}$ 满足以下条件, 就称为 H-稳定的 (相应地, H-半稳定的): 对任何满足 $0<\mathrm{rk}\,\mathcal{E}<\mathrm{rk}\,\mathcal{F}$ 的凝聚子层 $\mathcal{E}$, 都有 $\mu_H(\mathcal{E})<\mu_H(\mathcal{F})$ (相应地, $\mu_H(\mathcal{E})\le\mu_H(\mathcal{F})$).*

如果 $\mathcal{F}$ 不是 H-半稳定的 (H-semistable), 则称为不稳定的 (Unstable); 如果 $\mathcal{F}$ 是 H-半稳定的但不是 H-稳定的 (H-stable), 则称为严格半稳定的 (Strictly semistable).

为方便起见, 在不至于混淆的前提下, 我们通常在叙述中省略 H. 当然, 这并不意味着相关的概念与 H 无关. 另外, 也常常将 $\mu(\mathcal{F})$ 定义式简单地写为 $\frac{\deg\mathcal{F}}{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}$.

例 1.2.15 对光滑射影曲面 X 及其上的秩 2 向量丛 E, E 的任何秩 1 无挠子层都可写为 $\mathcal{I}_Z(L)$, 这里 L 是线丛, $\mathcal{I}_Z$ 是零维子概型 Z 上的理想层. 注意到 $c_1(\mathcal{I}_Z(L))=c_1(L)$, 因此 $\mu(\mathscr{I}_Z(L))=\mu(L)$. 这样, 为了验证 E 的 (半) 稳定性, 我们只需要验证 E 的子线丛的斜率是否满足条件

$$L\cdot H=\mu(L)<\mu(E)=\frac{c_1(E)\cdot H}{2}\quad(\text{相应地}, \mu(L)\le\mu(E)),$$

即

$$(c_1(E)-2L)H>0\quad(\text{相应地},\ (c_1(E)-2L)H\ge 0).$$

进一步, 任何子线丛的斜率总是不超过相应的极大子线丛的斜率, 因此最终我们只需要验证 E 的极大子线丛的斜率是否满足条件. ■

命题 1.2.11 (稳定性的等价叙述) *设 $\mathcal{E}$ 是光滑射影簇 X 上的无挠层, 则以下条件彼此等价:*

(1) *$\mathcal{E}$ 是稳定的 (相应地, 半稳定的),*

(2) *对任何满足 $0<\mathrm{rk}\,\mathcal{F}<\mathrm{rk}\,\mathcal{E}$ 且使得 $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ 无挠的子层 $\mathcal{F}$, 都有 $\mu(\mathcal{F})<\mu(\mathcal{E})$ (相应地, $\mu(\mathcal{F})\le\mu(\mathcal{E})$).*

(3) 对 $\mathcal{E}$ 的任何满足 $0<\operatorname{rk}\mathcal{H}<\operatorname{rk}\mathcal{E}$ 无挠商层 $\mathcal{H}$, 都有 $\mu(\mathcal{E})<\mu(\mathcal{H})$ (相应地, $\mu(\mathcal{E})\leq\mu(\mathcal{H})$).

(4) 存在线丛 $\mathcal{L}$, 使得 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}$ 是稳定的 (相应地, 半稳定).

(5) 对任何线丛 $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}$ 是稳定的 (相应地, 半稳定).

(6) $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ 稳定 (相应地, 半稳定).

(7) $\mathcal{E}^{\vee}$ 稳定 (相应地, 半稳定).

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 是平凡的.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 由推论 1.2.1, 对任何子层 $\mathcal{F}$, 可构造 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极大正规扩张 $\mathcal{F}'$. 因而 $\mathcal{E}/\mathcal{F}'$ 是无挠的, 且 $\mu(\mathcal{F})\leq\mu(\mathcal{F}')$ (习题 1.9). 因此由 (2) 的假设条件立得 (1).

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) 来自于例 1.2.14.

(1) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (5) 来自于习题 1.16.

(6) $\Longrightarrow$ (7) $\Longrightarrow$ (1) 来自于 (2) 与 (3) 的等价性.

(1) $\Longrightarrow$ (6) 已知 $\mathcal{E}$ 是 (半) 稳定的. 我们取 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ 的正规子层, 使得 $\mathcal{H}:=\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{F}$ 无挠. 设 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{E}$ 在典范单态射 $\mu:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^{\vee\vee}$ (命题 1.2.5) 及投影 $\mathcal{E}^{\vee\vee}\to\mathcal{H}$ 的复合下, 于 $\mathcal{H}$ 中的像层. $\mathcal{F}'=\operatorname{Ker}(\mathcal{E}\to\mathcal{H}')$. 我们有正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注意到这些层都是无挠的, 并且上下对应的层在某开集上是同构的. 由命题 1.2.8, 它们对应的行列式丛映射都是单的. 因而 (以下简记 $\deg\mathcal{E}=c_1(\mathcal{E})\cdot H^{\dim X-1}$ 等等)

$$\deg\mathcal{E}=\deg\mathcal{F}'+\deg\mathcal{H}'\leq\deg\mathcal{F}+\deg\mathcal{H}=\deg E^{\vee\vee}=\deg\mathcal{E}.$$

这就迫使 $\deg\mathcal{F}'=\deg\mathcal{F}$, $\deg\mathcal{H}'=\deg\mathcal{H}$. 因此

$$\mu(\mathcal{E}^{\vee\vee})=\mu(\mathcal{E})<(\text{ or }\leq)\mu(\mathcal{H}')=\mu(\mathcal{H}).$$

由 (1) 和 (3) 的等价性, 即知 $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ 半稳定. ■

注 1.2.7 实际上, 我们在计算次数 $\deg_H\mathcal{E}=c_1(\mathcal{E})\cdot H^{\dim X-1}$ 时, 可以把它理解为 $\mathcal{E}$ 限制在曲线 $L=H^{\dim X-1}$ 上的次数来理解. 由于曲线上无挠层就是局部自由层, 因此对无挠层 $\mathcal{E}$, 有 $\deg\mathcal{E}^{\vee\vee}=\deg\mathcal{E}$. ■

命题 1.2.12 设 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 是半稳定层, 那么 $\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$ 半稳定当且仅当 $\mu(\mathcal{E})=\mu(\mathcal{F})$.

证明 ($\Longrightarrow$) 此时 $\mathcal{E}$ 既是 $\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$ 的子层又是它的商层, 因而由命题 1.2.11 可知 $\mu(\mathcal{E})=\mu(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F})$. 同理 $\mu(\mathcal{F})=\mu(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F})$.

($\Longleftarrow$) 已知 $\mu(\mathcal{E})=\mu(\mathcal{F})$. 由例 1.2.14 的计算立知 $\mu(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F})=\mu(\mathcal{E})$. 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}$ 的子层, $0<\operatorname{rk}\mathcal{H}<\operatorname{rk}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F})$. 我们只需要证明 $\mu(\mathcal{H})\leq\mu(\mathcal{E})$.

设 $\mathcal{H}_1 = \mathrm{Im}(\mathcal{H} \to \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \to \mathcal{F})$, $\mathcal{H}_2 = \mathrm{Ker}(\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1)$, 我们有正合列交换图正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

不失一般性, 我们可以假设 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}_1, \mathrm{rk}\,\mathcal{H}_2 > 0$ (否则 $\mu(\mathcal{H}) = \mu(\mathcal{H}_i) < \mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F})$).

若 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}_1 = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}$, 则由命题 1.2.8 即得 $\mu(\mathcal{H}_1) \leq \mu(\mathcal{F})$. 若 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}_1 < \mathrm{rk}\,\mathcal{F}$, 则由 $\mathcal{F}$ 的半稳定性也有 $\mu(\mathcal{H}_1) \leq \mu(\mathcal{F})$. 同理 $\mu(\mathcal{H}_2) \leq \mu(\mathcal{E})$. 结合例 1.2.14, 我们得到

$$\mu(\mathcal{H}) \leq \max\{\mu(\mathcal{H}_1), \mu(\mathcal{H}_2)\} \leq \max\{\mu(\mathcal{E}), \mu(\mathcal{F})\} = \mu(\mathcal{E}).$$

因此 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ 是半稳定的. ∎

命题 1.2.12 其实只是如下结论的特殊情形. 其证明思路与大致相仿. 我们留给读者验证.

命题 1.2.13 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

是无挠层的正合列, 且 $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{H})$, 那么 $\mathcal{F}$ 不可能稳定的, 并且以下条件彼此等价:

(1) $\mathcal{E}$ 是半稳定的,

(2) $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}$ 是半稳定的.

特别地, 如果 $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ 都是线丛, 则 $\mathcal{E}$ 必是严格半稳定的.

例 1.2.16 (**直线上的半稳定向量丛**) 考虑 $\mathbb{P}^1$ 上的秩 r 局部自由层 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$. 如果 $\mathcal{E}$ 是半稳定的, 那么由于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ 是 $\mathcal{E}$ 的子层, 从而 $a_i \leq \mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{r}(\sum_i a_i)$. 由此可推出 $a_1 = \cdots = a_r$.

反过来, 假设 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus r}$ (不妨设 $r > 1$). 我们考虑它的子层 $\mathcal{F}$ ($0 < \mathrm{rk}\,\mathcal{F} < \mathrm{rk}\,\mathcal{E}$). 由 Grothendieck 分裂定理 (见定理 6.4.1), $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_s)$ ($b_1 \geq \cdots \geq b_s$).

若 $b_1 > a$, 则

$$1 \leq h^0(\mathcal{F}(-b_1)) \leq h^0(\mathcal{E}(-b_1)) = rh^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a - b_1)) = 0,$$

矛盾! 故 $b_1 \leq a$. 因此

$$\mu(\mathcal{F}) \leq b_1 \leq a = \mu(\mathcal{E}).$$

这就证明了 $\mathcal{E}$ 是半稳定的. 另外请注意, 当 $r > 1$ 时, $\mathcal{E}$ 不可能是稳定的. ∎

下面我们要研究半稳定层之间的态射. 这里先准备一个引理.

命题 1.2.14 设 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 是半稳定无挠层的非零态射, 并且 $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E})$. 如果 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 至少有一个是稳定的, 则要么 φ 是单射, 要么 $\mathrm{rk}\,\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}\,\mathcal{E}$.

进一步, 若它们都是稳定的, 则 φ 必是单射; 并且若还满足以下条件之一, 那么 φ 也是同构,

(1) $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 是向量丛,

(2) $\mathcal{E}=\mathcal{F}$.

证明 设 $\mathcal{H}=\mathrm{Im}\varphi$. 因 φ 非零, 故 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}>0$. 我们首先说明, $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}<\min\{\mathrm{rk}\,\mathcal{F},\mathrm{rk}\,\mathcal{E}\}$ 是不可能的. 若不然,

$$\mu(\mathcal{H})\le\mu(\mathcal{E})=\mu(\mathcal{F})<\mu(\mathcal{H}) \text{ 若 } \mathcal{F} \text{ 稳定},$$
$$\mu(\mathcal{H})<\mu(\mathcal{E})=\mu(\mathcal{F})\le\mu(\mathcal{H}) \text{ 若 } \mathcal{E} \text{ 稳定}.$$

都得到矛盾! 因此要么 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}=\mathrm{rk}\,\mathcal{F}$ (即 φ 是单的), 要么 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}=\mathrm{rk}\,\mathcal{E}$.

进一步, 假设 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 都是稳定的. 此时推出 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}=\mathrm{rk}\,\mathcal{F}$, 即 φ 是单的. 进一步还可得到 $\mathrm{rk}\,\mathcal{H}=\mathrm{rk}\,\mathcal{E}$, $\mu(\mathcal{H})=\mu(\mathcal{E})$. 因此若 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 是向量丛, 则由 $\mathcal{F}\cong\mathcal{H}$ 以及上面的数值条件, 即知 $\mathcal{F}\cong\mathcal{H}\cong\mathcal{E}$ (习题 1.9), 即 φ 是同构. 若 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$, 则由命题 1.2.3 即得. ■

推论 1.2.2 (Schur **引理**) *稳定无挠层 $\mathcal{E}$ 必是单* (Simple) *的, 即 $h^0(\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{E})=1$, 亦即* $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})=\{\lambda\cdot\mathrm{Id}|\ \lambda\in\mathbb{C}\}$.

证明 由命题 1.2.14, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ 中的非零元 φ 必是同构. 在 $\mathcal{E}$ 的奇点集外取一点 x, 茎映射 $\varphi_x:\mathcal{E}_x\to\mathcal{E}_x$ 是同构. 不妨取 φ_x 的特征值 λ, 于是 $\varphi-\lambda\cdot\mathrm{Id}$ 不是同构, 因而只能是零映射, 即 $\varphi=\lambda\cdot\mathrm{Id}$. ■

除了 Mumford 稳定性之外, 还有其他稳定性的定义. 它们并不完全一致. 下面我们将介绍 Gieseker 稳定性 (Gieseker stability). 设 $\mathcal{E}$ 是光滑射影簇 x 上的秩 r 无挠层, H 是丰富除子. 定义规范 Hilbert 多项式 (Normalized Hilbert polynomial)

$$p_{H,\mathcal{E}}(n):=\frac{1}{r}\chi(\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}_X(H)^{\otimes n}).$$

定义 1.2.7 (Gieseker **稳定性**) *如果 $\mathcal{E}$ 的任何满足 $0<\mathrm{rk}\,\mathcal{F}<\mathrm{rk}\,\mathcal{E}$ 的凝聚子层 $\mathcal{F}$, 都有*

$$p_{H,\mathcal{F}}(n)<p_{H,\mathcal{E}}(n)\ (\text{相应地},\ p_{H,\mathcal{F}}(n)\le p_{H,\mathcal{E}}(n)),\quad \text{对充分大的正整数 } n \text{ 成立},$$

我们就称 $\mathcal{E}$ 是 Gieseker *(半) 稳定的* (Gieseker stable/semistable).

为书写方便, 上面的不等式也常简记为 $p_{H,\mathcal{F}}\prec p_{H,\mathcal{E}}$ (相应地, $p_{H,\mathcal{F}}\preceq p_{H,\mathcal{E}}$).

例 1.2.17 (1) 设 X 是光滑亏格 g 代数曲线, $\mathrm{rk}\,\mathcal{E}=r$, $\deg\mathcal{E}=d$, 则由 Riemann-Roch 定理得

$$p_{H,\mathcal{E}}(n)=n\deg H+\frac{d}{r}+1-g.$$

因此 Gieseker (半) 稳定和 Mumford (半) 稳定等价.

(2) 设 X 是光滑射影曲面, $\mathcal{E}$ 是秩 r 向量丛. 那么

$$\begin{aligned}p_{H,\mathcal{E}}&=\frac{H^2}{2}n^2+\left[\frac{c_1(\mathcal{E})\cdot H}{r}-\frac{K_X\cdot H}{2}\right]n+\frac{1}{r}\left[\frac{c_1^2(\mathcal{E})-c_1(\mathcal{E})\cdot K_X}{2}-c_2(\mathcal{E})\right]+\chi(\mathcal{O}_X)\\&=\frac{H^2}{2}n^2+\left[\frac{c_1(\mathcal{E})\cdot H}{r}-\frac{K_X\cdot H}{2}\right]n+\frac{\chi(\mathcal{E})}{r}.\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{E}$ 是 Gieseker 稳定当且仅当对任何秩 s 凝聚子层 $\mathcal{F}$ $(0<s<r)$, 要么 $\mu_H(\mathcal{F})<\mu_H(\mathcal{E})$, 要么 $\mu_H(\mathcal{F})=\mu_H(\mathcal{E})$ 且 $\frac{\chi(\mathcal{F})}{s}<\frac{\chi(\mathcal{E})}{r}$. ■

这里罗列部分性质

命题 1.2.15 设 $\mathcal{E}$ 是光滑射影簇 X 上的无挠层. 那么

(1) 若 $\mathcal{E}$ 是 Mumford 稳定的, 则也必是 Gieseker 稳定.

(2) 若 $\mathcal{E}$ 是 Gieseker 半稳定, 则也必是 Mumford 半稳定的.

(3) (凸性质) 对任何非零无挠层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

我们有

$$\min(p_{H,\mathcal{F}'}, p_{H,\mathcal{F}''}) \preceq p_{H,\mathcal{F}} \preceq \max(p_{H,\mathcal{F}'}, p_{H,\mathcal{F}''}).$$

(4) Gieseker 稳定丛是单的.

1.3 射影丛

向量空间的射影化也可以推广到射影丛上. 设 $\pi : E \to X$ 是复流形 X 上的秩 r 向量丛. 过渡矩阵 $\Phi_{\alpha\beta}$ 可以视为射影空间 $\mathbb{P}^{r-1}$ 的线性同构. 换言之, 可以视为如下正合列中 $\Phi_{\alpha\beta}$ 在 p 下的像 $\overline{\Phi}_{\alpha\beta} := p(\Phi_{\alpha]\beta})$:

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(r, \mathbb{C}) \xrightarrow{p} PGL(r, \mathbb{C}) \longrightarrow \{1\}.$$

$\overline{\Phi}_{\alpha\beta}$ 称为射影过渡矩阵. 它也满足类似过渡矩阵的条件:

$$\overline{\Phi}_{\alpha\alpha} = \overline{Id}, \quad \overline{\Phi}_{\alpha\beta}\overline{\Phi}_{\beta\gamma}\overline{\Phi}_{\gamma\alpha} = \overline{Id}.$$

因此我们可以构造复流形

$$\mathbb{P}(E) = \coprod_{\alpha} U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1} / \sim,$$

这里 $\sim$ 是等价关系, 对 $(x_\alpha, \bar{v}_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1}$, $(x_\beta, \bar{v}_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{P}^{r-1}$,

$$(x_\alpha, \bar{v}_\alpha) \sim (x_\beta, \bar{v}_\beta) \Longleftrightarrow \bar{v}_\alpha = \overline{\Phi}_{\alpha\beta}\bar{v}_\beta.$$

这个丛 $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E) \to X$ 称为 $\pi : E \to X$ 在 X 上诱导的射影丛 (Projective bundle). 在每个开集 U_α 上, $\bar{\pi}^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1}$.

注 1.3.1 一般来说, $\mathbb{P}^{r-1}$-丛未必是由向量丛诱导的射影丛. 这取决于映射

$$H^1(X, GL(r, \mathcal{O}_X)) \text{ (秩 } r \text{ 向量丛同构类群)} \longrightarrow H^1((X, PGL(r, \mathcal{O}_X)) \text{ (}\mathbb{P}^{r-1} - \text{丛同构类群)}$$

是否为满射. 当 X 是紧黎曼曲面时, $\mathbb{P}^{r-1}$-丛确实是由向量丛诱导的射影丛. ■

注 1.3.2 读者必须留意, 在很多文献中 (比如 [Hart77, Laz04I] 等), E 的射影丛实际上是指 $\mathbb{P}(E^\vee)$. 这主要是因为 $E^\vee$ 上有自然的环结构, 因此射影丛 $\mathbb{P}(E)$ 可以理解为如下的射影概型

$$\mathbb{P}(E) = \mathrm{Proj}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{m \geq 0} S^m E^\vee).$$

由于这两种定义的不同, 所以很多结论都会相差一个对偶. ■

进一步, 可定义半纯截面

$$\bar{s}=\{\bar{s}_\alpha : U_\alpha \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1} |\ \bar{s}_\alpha = \overline{\Phi}_{\alpha\beta}\bar{s}_\beta\},$$

这里诸 $\bar{s}_\alpha$ 是半纯映射.

由正合列

$$H^1(\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, GL(r,\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^1((X, PGL(r,\mathcal{O}_X)),$$

我们有

命题 1.3.1 (射影丛的同构判则) *设 $\pi : E \to X$ 及 $\pi' : E' \to X$ 是两个向量丛, 则以下条件彼此等价:*

(1) $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E')$.

(2) *存在线丛 L, 使得 $E' \cong E \otimes L$.*

例 1.3.1 (射影丛的截面) $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E) \to X$ 的任何半纯截面 $\bar{s}$ 可以由 $E \otimes L$ 的某个非零全纯截面 s 所定义 (L 是某个线丛). 因此单态射 $s : \mathcal{O}_X \to E \otimes L$ (例 1.2.2) 诱导了有理映射 $\bar{s} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(E)$, 局部上即为

$$\bar{s}=[s] : U_\alpha \dashrightarrow U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1}, \quad x \to (x, [s_{\alpha 1}(x), \cdots, s_{\alpha r}(x)]),$$

$\bar{s}$ 没定义的点就是 s 的零点. ■

例 1.3.2 (赘线丛和Serre 线丛) 对射影丛 $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E) \to X$, 我们有一个典范的线丛,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) := \{(\ell, v) \in \mathbb{P}(E) \times E | v \in \ell\} \subseteq \bar{\pi}^* E.$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ 称为 $\mathbb{P}(E)$ 的赘线丛(Tautological line bundle). 其对偶线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1))^\vee$ 称为 Serre 线丛. 如果将赘线丛限制到纤维 $E_x := \bar{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ 上, 那么

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{E_x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1) \subseteq \bar{\pi}^* E|_{\mathbb{P}^{r-1}} = \mathbb{P}^{r-1} \times E_x.$$

用层的语言说, 这相当于给出了欧拉序列 (见例 1.2.3) 的左端,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1) \otimes T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

由射影丛的局部平凡性, 上面的Euler *序列*可以整体地推广到 $\mathbb{P}(E)$ 上, 即

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \longrightarrow \bar{\pi}^* E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \otimes T_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0,$$

或对偶地写为

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow \bar{\pi}^* E^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \longrightarrow 0. \tag{1-9}$$

这里 $\Omega_{\mathbb{P}(E)/X} = T_{\mathbb{P}(E)/X}^\vee$ 是相对余切丛, 来自于正合列

$$0 \longrightarrow \bar{\pi}^* \Omega_X \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0. \tag{1-10}$$

我们来分析赘线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ 的转移函数. 对 $x \in U_\alpha$, 设 $\{V_i\}_{i=1}^r$ 是 $\mathbb{P}(E_x) = \mathbb{P}^{r-1}$ 上的标准坐标卡, 即

$$V_i = \{[z_{\alpha 1}(p), \ldots, z_{\alpha r}(p)] | z_{\alpha j} \neq 0\},$$

这里 $z_\alpha=(z_{\alpha 1},\dots,z_{\alpha r})$ 是 E 的纤维坐标. $\mathbb{P}(E)$ 有开覆盖 $\{U_\alpha\times V_i\}_{\alpha\in I,1\le i\le r}$. 那么在 $U_\alpha\times V_i\cap U_\beta\times V_j$ 上, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ 的转移函数为

$$\ell_{\alpha i,\beta j}:=\frac{z_{\alpha i}}{z_{\beta j}}.$$

因此 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 的转移函数是 $\ell_{\alpha i,\beta j}^{-1}$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 的截面在 $U_\alpha\times V_i$ 上可局部写为

$$s_\alpha^{(i)}:=\frac{1}{z_{\alpha i}}(h_{\alpha 1}(x)z_{\alpha 1}+\cdots+h_{\alpha r}(x)z_{\alpha r}),\quad x\in U_\alpha.$$

由于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 的转移函数是 $\ell_{\alpha i,\beta j}^{-1}$, 所以

$$h_{\alpha 1}(x)z_{\alpha 1}+\cdots+h_{\alpha r}(x)z_{\alpha r}=h_{\beta 1}(x)z_{\beta 1}+\cdots+h_{\beta r}(x)z_{\beta r}.$$

上式相当于给出了 $\bar\pi^*E^\vee$ 的截面, 其中 $z_{\alpha 1},\dots,z_{\alpha r}$ 视为 $E^\vee$ 的局部基 (见例 1.1.12). 这样, 我们有满同态 $\bar\pi^*E^\vee\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. 它就是正合列 (1-9) 的右端. ■

命题 1.3.2 设 $\mathcal{F}$ 是凝聚层, L 是线丛, 则

(1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E\otimes L)}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\otimes\bar\pi^*L^\vee$.

(2) $\mathbb{P}(E)$ 的典范除子 $K_{\mathbb{P}(E)}=\bar\pi^*K_X-\bar\pi^*\det E-r\mathscr{H}$, 这里 $\mathscr{H}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 对应的除子.

(3) $\bar\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}=\mathcal{O}_X$, $\bar\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n)\otimes\bar\pi^*\mathcal{F})\cong S^nE^\vee\otimes\mathcal{F}$.

(4) $R^{r-1}\bar\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r-m)=S^mE\otimes\det E$, 并且其他高阶正像 $R^i\bar\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(k)=0$ $(i\ne 0,r-1$ 或 $i=r-1,k+r>0)$.

证明 (1) 来自于例 1.3.2 中关于 Serre 线丛的转移函数的计算.

(2) 对正合列 (1-9) 和 (1-10) 使用 Whitney 公式即得.

(3) 利用射影公式, 我们只需要证明 $\bar\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n))\cong S^nE^\vee$. 由满同态 $\bar\pi^*E^\vee\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$, 可得满态射 $S^n\bar\pi^*E^\vee\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n)$, 从而诱导态射 $S^nE^\vee\to\bar\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n)$. 因此, 为验证这是同构, 我们只需要讨论 U_α 上的情形. 此时射影丛是平凡的. 由此可直接验证.

(4) 利用相对对偶公式及 Bott 公式(见定理 8.1.1). ■

注 1.3.3 如果用 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 代替 $\mathbb{P}(E)$, 那么 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}((E\otimes L)^\vee)}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}\otimes\bar\pi^*L$. 因此当 L 充分大时, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}((E\otimes L)^\vee)}(1)$ 是丰富的. 后文正是用 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 来定义向量丛的丰富性 (而不是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$).■

例 1.3.3 ($\Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}$ 的析解) 关于欧拉序列 (1-9), 我们再做一些探讨. 首先, 利用 $\bar\pi^*E(-1)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}$, 可以构造 Koszul 复形 (具体见例 3.1.6)

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\wedge^r\bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(-r)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\wedge^2\bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(-2)\\ \longrightarrow\bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(-1)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

对欧拉序列 (1-9) 取外积, 并利用命题 1.1.3 (5) 可得

$$0\longrightarrow\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}(E)/X}(p)\longrightarrow\wedge^p\bar\pi^*E^\vee\longrightarrow\wedge^{p-1}\Omega_{\mathbb{P}(E)/X}(p)\longrightarrow 0.$$

它限制在纤维上就是正合列 (1-7). 再结合上面的 Koszul 复形, 我们可以给出 $\Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}$ 的自由析解

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \wedge^r\bar{\pi}^*E(-r) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^{m+2}\bar{\pi}^*E(-m-2)\\ \longrightarrow \wedge^{m+1}\bar{\pi}^*E(-m-1) \longrightarrow \Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

■

命题 1.3.3 设 $0 \le m \le r-1$, 那么

(1) $\bar{\pi}_*(\Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}(\ell)) = 0$, $\ell \le m$.

(2) $\bar{\pi}_*(\Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}(m+1)) = \wedge^{m+1}E$.

(3) $R^j\bar{\pi}_*(\Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}(\ell)) = 0$, $j > 0$, $\ell > 0$.

(4) 设 a 是正整数, $n = \dim X$.

$$R^i\bar{\pi}_*\left(\Omega^{n+a-1}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(a)\right) = \begin{cases}\Omega^n_X \otimes \wedge^a E, & \text{若 } j = 0,\\ 0, & \text{若 } j > 0.\end{cases}$$

(5)

$$R^j\bar{\pi}_*\left(\Omega^p_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)\right) = \begin{cases}\Omega^p_X \otimes E, & \text{若 } j = 0,\\ 0, & \text{若 } j > 0.\end{cases}$$

证明 利用上述析解及射影公式, 我们可以直接得到 (1)(2)(3) (留给读者完成证明).

下面证 (4). 利用正合列

$$0 \longrightarrow \bar{\pi}^*\Omega_X \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E^\vee)/X} \longrightarrow 0,$$

我们可以得到 $\Omega^{n+a-1}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(a)$ 有一个滤过, 其相邻项的商为 $\bar{\pi}^*\Omega^\ell_X \otimes \Omega^m_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}(a)$ ($\ell + m = n + a - 1$, $\ell \le n$). 利用 (1)(2)(3), 这个滤过的分次商的高次正像层都为零, 并且除了最后一项外, 正像层也全都为零. 这就迫使

$$\bar{\pi}_*(\Omega^{n+a-1}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(a)) = \bar{\pi}_*(\bar{\pi}^*\Omega^n_X \otimes \Omega^{a-1}_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}(a)) = \Omega^n_X \otimes \wedge^a E.$$

(5) 的证明类似. ■

命题 1.3.4 (Grothendieck 关系) 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ 的除子, 则

$$\mathcal{H}^r + \bar{\pi}^*(c_1(E)) \cdot \mathcal{H}^{r-1} + \cdots + \bar{\pi}^*(c_r(E)) = 0.$$

证明 因为 $T_{\mathbb{P}(E)/X}$ 的秩为 $r-1$, 所以 Whitney 公式迫使 $c_r(\bar{\pi}^*E \otimes \mathcal{O}_X(\mathcal{H})) = 0$. 再利用分裂原理, 即得上式. ■

例 1.3.4 假设 X 是光滑曲线, 则 $\mathcal{H}^r + \bar{\pi}^*c_1(E)\mathcal{H}^{r-1} = 0$. 取 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \mu(E)\bar{\pi}^*p \in N^1(\mathbb{P}(E)) \otimes \mathbb{Q}$ (定义见下), 这里 $p \in X$, $\mu(E)$ 是斜率. 由直接计算, $(\mathcal{H}')^r = 0$, $\mathcal{H}'$ 在 $\mathbb{P}(E)$ 的每个纤维上是超平面. 利用命题 1.3.2, $\operatorname{rk} E \cdot \mathcal{H}' = -K_{\mathbb{P}(E)/X} := -(K_{\mathbb{P}(E)} - \bar{\pi}^*K_X)$. ■

回顾一些经典概念和结论. 设 Y 是光滑簇.

(1) $N^1(Y)$ 是 Y 上除子数值等价类张成的实空间 (注: 两个除子数值等价是指它们和任一曲线的相交数都相等).

(2) $N_1(Y)$ 是 1 维闭链类的数值等价类张成的实空间 (注: 两个 1 维闭链类数值等价是指它们和 $N^1(Y)$ 中任一元素相交数相等).

(3) $NA(Y)(\subseteq N^1(Y))$ 是丰富锥, 即丰富除子构成的开锥.

(4) $\overline{NA}(Y)$ 是 $NA(Y)$ 的闭包, 即数值有效除子张成的锥.

(5) $NE(Y)(\subseteq N_1(Y))$ 是有效锥, 即有效 1 维闭链类张成的锥.

(6) $\overline{NE}(Y)$ 是 $NE(Y)$ 的闭包, 即和 $\overline{NA}(Y)$ 中元素相交数非负的 1 维闭链类张成的锥.

(7) (**Kleiman 丰富性判则** [Kle66]) 一个除子是丰富的充分必要条件是它和 $\overline{NE}(Y)$ 中的任何非零元的相交数为正数.

今取 $Y=\mathbb{P}(E)$, 则

$$N^1(Y)=\mathbb{R}\cdot(-K_{\mathbb{P}(E)/X})\oplus\bar{\pi}^*N^1(X),\quad N_1(Y)=(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-2}\cdot N^1(Y).$$

命题 1.3.5 设 X 是光滑代数曲线, $\mathcal{E}$ 是 X 上的秩 r 向量丛, $p\in X$, 则

(1) 记 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是非负实数集合.

$$\overline{NA}(\mathbb{P}(E))=\mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E)/X})\oplus\mathbb{R}_{\geq 0}\bar{\pi}^*p$$

当且仅当

$$\overline{NE}(\mathbb{P}(E))=\mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-1}\oplus\mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-2}\bar{\pi}^*p.$$

(2) 若 $(-K_{\mathbb{P}(E)/X})$ 是数值有效的, 则 (1) 的条件成立.

(3) 若 (1) 的条件成立, 则 $\mathbb{P}(E)$ 上的有效除子都是数值有效的.

证明 (1) 来自于 Kleiman 判则.

(2) 任取 $\Lambda=(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-2}(a(-K_{\mathbb{P}(E)/X})+b\bar{\pi}^*p)\in\overline{NE}(\mathbb{P}(E))$. 因为 $(-K_{\mathbb{P}(E)/X})$ 和 $\bar{\pi}^*p$ 是数值有效的, 所以

$$a=\Lambda\bar{\pi}^*p\geq 0,\quad b=\Lambda(-K_{\mathbb{P}(E)/X})\geq 0.$$

这样,

$$\begin{aligned}\overline{NA}(\mathbb{P}(E))&=\{D\in N^1(\mathbb{P}(E))|\ D(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-1}\geq 0,\ D(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-2}\bar{\pi}^*p\geq 0\}\\&=\mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E)/X})\oplus\mathbb{R}_{\geq 0}\bar{\pi}^*p.\end{aligned}$$

(3) 设 $D=a(-K_{\mathbb{P}(E)/X})+b\bar{\pi}^*p$ 是有效除子. 首先我们注意到, 对任何正实数 t, 除子 $H_t=(-K_{\mathbb{P}(E)/X}+t\bar{\pi}^*p)$ 都是丰富的 (请读者自己验证), 因而 DH_t^{r-2} 落在 $NE(\mathbb{P}(E))$ 中. 让 $t\to 0$, 则 $D(-K_{\mathbb{P}(E)/X})^{r-2}\in\overline{NE}(\mathbb{P}(E))$. 由 (1) 的条件, 这就相当于 $a,b\geq 0$. 利用 (1) 即知 D 是数值有效的. ■

例 1.3.5 (Serre **线丛的丰富性**) 设 $\phi:F\twoheadrightarrow E$ 是向量丛之间的满态射. 我们可以诱导射影丛的单态射

$$\bar{\phi}:\mathbb{P}(E^\vee)\hookrightarrow\mathbb{P}(F^\vee).$$

此时

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) = \bar{\phi}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1)\big|_{\mathbb{P}(E^\vee)}.$$

因此, 如果 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1)$ 是 $\mathbb{P}(F^\vee)$ 中的丰富 (相应地, nef) 除子, 那么 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 也是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 中的丰富 (相应地, nef) 除子.

上面讨论可以应用到几类特殊情形.

(1) 直和的投影 $\phi : E \oplus F \to E$. 此时 $\mathbb{P}(E^\vee) \subseteq \mathbb{P}((E \oplus F)^\vee)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}((E\oplus F)^\vee)}(1)\big|_{\mathbb{P}(E^\vee)}$.

(2) 设 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$ 是由整体截面生成的 (见定义 2.1.1), 即存在满态射 $V_X := V \times \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{E}$. 我们可以利用射影丛的包含关系诱导如下复合映射

$$\psi : \mathbb{P}(E^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}((V_X)^\vee) = \mathbb{P}(V^\vee) \times X \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}(V^\vee).$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) = \psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)$. 因此 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是丰富除子当且仅当 ψ 是有限态射.

对每个点 $x \in X$, 我们有纤维满同态 $V \to E(x)$, 因而 $\mathbb{P}(E(x)^\vee) \subseteq \mathbb{P}(V^\vee)$. 因此, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是丰富除子的充分必要条件也可以改述为: 对 $\mathbb{P}(V^\vee)$ 中的每个给定点, 最多只存在有限个 $x \in X$, 使得 $\mathbb{P}(E(x)^\vee)$ 经过该点.

(3) 对欧拉序列作对称积, 可诱导满态射 $S^m \bar{\pi}^* E^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m)$. 这等价于诱导了射影丛的 Veronese 嵌入

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(E^\vee) \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{\pi}"'] & & \mathbb{P}(S^m E^\vee) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

此时 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^m E^\vee)}(1)\big|_{\mathbb{P}(E^\vee)}$. ■

例 1.3.6 设 $f : X' \to X$ 是有限态射, E 是 X 上的向量丛. f 诱导了射影丛的有限态射 $F : \mathbb{P}(f^* E^\vee) \to \mathbb{P}(E^\vee)$. 此时 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E^\vee)}(1) = F^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$. 因此若 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是丰富 (相应地, nef) 除子, 则 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E^\vee)}(1)$ 是丰富的 (相应地, nef). 如果进一步假设 f 是满的, 那么利用 Kleiman 判则可知 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f^*E^\vee)}(1)$ 的丰富性也蕴含了 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 的丰富性. ■

本章习题

习题 1.1 设 E 是秩 2 向量丛,

$$\Phi_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

为过渡矩阵.

(1) 验证: $S^2 E$ 的过渡矩阵

$$S^2 \Phi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接验证过渡矩阵 $S^2 \Phi_{\alpha\beta}$ 满足余链条件.

习题 1.2 验证命题 1.1.2 诸等式. (提示: 验证 (6) 中的转换映射需要用到行列式的按多行的拉普拉斯展开.)

习题 1.3 验证命题 1.1.3 中的诸正合列.

习题 1.4 设 E_1, E_2 是向量丛, 证明: $S^m(E_1 \oplus E_2) = \sum\limits_{p+q=m} S^p E_1 \otimes S^q E_2$.

习题 1.5 设 $f: X \to Y$ 是光滑簇的平坦态射, $\mathcal{E}$ 是 X 上的局部自由层, 证明: $f_*\mathcal{F}$ 是自反的. 特别地, 若 Y 是曲线或曲面, 则 $f_*\mathcal{E}$ 是局部自由的. (提示: 利用定理 1.2.1)

习题 1.6 设 X 是光滑射影代数簇, $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, 证明: $\mathcal{F}^\vee$ 是无挠且正规的, 因而是自反的 (见定理 1.2.1). (提示: 对开集 U 及余维数至少为 2 的解析闭子集 A, 注意到 $\mathcal{O}(U \setminus A) \cong \mathcal{O}(U)$, 可将任何 $\mathcal{O}(U \setminus A)$-模同态 $\varphi_{U\setminus A}: \mathcal{F}(U \setminus A) \to \mathcal{O}(U \setminus A)$ 延拓到 U 上).

习题 1.7 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是光滑射影簇 X 上的凝聚层, 且 $\mathcal{E}$ 无挠, $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是态射, Z 是 X 中的解析闭子簇, $U = X \setminus Z$. 证明: 如果 $\varphi|_U$ 是单态射, 那么 φ 也是单态射.(提示: $\mathrm{Ker}\varphi$ 的支集在 Z 中, 但它又是无挠的, 故支集为空.)

习题 1.8 设 $\mathcal{L}$ 是线丛, $\mathcal{F}$ 是无挠层,

(1) 证明: 任何非零态射 $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ 都是单态射. (提示: 归结到 $\mathcal{F}$ 自反, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ 的情形.)

(2) 举例说明, 如果 $\mathcal{F}$ 不是无挠的, 结论 (1) 未必成立.

(3) 证明: 任何线丛间的满态射 $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 必为同构.

习题 1.9 (行列式映射) 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是光滑射影簇 X 上的同秩无挠层, $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是非零态射.

(1) 证明: φ 诱导了行列式映射 $\det\varphi: \det\mathcal{E} \to \det\mathcal{F}$.

(2) 证明: $\det\varphi$ 是单态射当且仅当 φ 是单态射. (”$\Leftarrow$”来自命题 1.2.8; ”$\Rightarrow$” 由习题 1.7 可归结到 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是局部自由层的情形, 再考虑 $\det\varphi$ 在每点处茎映射的定义.) 特别地, φ 是单射时, 斜率满足 $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{F})$.

(3) 如果 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是局部自由层, 证明: $\det\varphi$ 是满态射当且仅当对每个点 $x \in X$, 纤维映射 $\varphi(x): \mathcal{E}(x) \to \mathcal{F}(x)$ 是满射 (即 $\varphi(x)$ 是同构), 也当且仅当 φ 是同构.

(4) 举例说明, 如果 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{F}$ 不是局部自由的, 那么 $\det\varphi$ 的满射性不能蕴含 φ 的满射性.

(5) 设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 都是局部自由层, 并且 $\mathcal{E} \neq \mathcal{F}$, 证明: $\mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{F})$. 进一步, 将这个结论推广到商丛情形.

习题 1.10 设 H 是关于光滑射影簇 X 上的光滑有效除子, E, F 是 X 上的全纯向量丛, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(E)$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(F)$ 是对应的局部自由层. 设 $\phi: F|_H \to E|_H$ 是它们限制在 H 上的向量丛同态.

(1) 证明: 如果 $H^1(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}(-H)) = 0$, 那么 ϕ 可以延拓为 X 上同态 $\Phi: F \to E$, 即 $\phi = \Phi|_H$.

(2) 设 $\Phi: F \to E$ 是向量丛同态, 并且 $\mathrm{rk}\, E = \mathrm{rk}\, F$. 证明: 如果 $\Phi|_H: F|_H \to E|_H$ 是同构, 并且 $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{F})$, 则 Φ 是同构.

习题 1.11 设 E, F 都是复流形 X 上的全纯向量丛, 证明:
(1) $c_1(S^m E) = C^r_{m+r-1} c_1(E)$, 这里 $S^m E$ 表示 m 次对称积, $r = \mathrm{rk} E$.
(2) $c_1(\wedge^r E) = c_1(E)$ (r 同上)
(3) $c_1(E \otimes F) = s c_1(E) + r c_1(F)$, 这里 $s = \mathrm{rk} F$.
(4) 如果 F 是线丛, $c_2(E \otimes F) = c_2(E) + (r-1) c_1(E) c_1(F) + \frac{r(r-1)}{2} c_1^2(F)$.

习题 1.12 设 E 是复射影代数曲面 X 上的秩 r 全纯向量丛, $E_n := S^n E \otimes (\wedge^r E)^{-\frac{n}{2}}$ (n 是偶数), 证明:
(1) $E_n^* \cong E_n$, 这里 E_n^* 表示对偶丛.
(2) $c_1(E_n) = 0$, $c_2(E_n) = C^3_{n+2}(c_2(E) - \frac{1}{4} c_1^2(E))$.

习题 1.13 设 E 是复射影代数曲面 X 上的秩 2 全纯向量丛, L 是 E 的极大子线丛.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_Z(L') \longrightarrow 0$$

是它诱导的正合列, Z 是零维子概型, $\mathscr{I}_Z$ 是理想层. 证明:
(1) $c_1(E) = c_1(L) + c_1(L')$.
(2) $c_2(E) = c_1(L) \cdot c_1(L') + \deg Z$.

习题 1.14 证明: 对射影平面上任何线丛 L_1, L_2, 扩张

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow E \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0$$

必是分裂的.

习题 1.15 设 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$ ($e \geq 0$), $\varphi : X := \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^1$ 是对应的 e 次 Hirzebruch 曲面, 带有截面 C_∞, 使得 $C_\infty^2 = -e$. 设 F 是 φ 的一般纤维.
(1) 证明: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) = \mathcal{O}_X(C_\infty)$, $\Omega_{\mathbb{P}(E)/X} = \mathcal{O}_X(-2C_\infty - eF)$.
(2) 证明:

$$R^i \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(aC_\infty + bF) = \begin{cases} \oplus_{k=0}^a \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b - ek), & \text{if } i = 0,\ a \geq 0, \\ \oplus_{k=0}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b + ek - e), & \text{if } i = 1,\ a = -2 - m,\ m \geq 0, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

(3) 对非负整数 a, 证明:

$$\begin{aligned} h^0(aC_\infty + bF) &= h^0(\varphi_*(\mathcal{O}_X(aC_\infty + bF))) = \oplus_{k=0}^a h^0(b - ek), \\ h^1(aC_\infty + bF) &= h^1(\varphi_*(\mathcal{O}_X(aC_\infty + bF)) = \oplus_{k=0}^a h^0(ek - b - 2). \end{aligned}$$

(4) 证明: 当 $a < 0$ 或 $b < 0$ 时, 总有 $h^0(X, \Omega_X(aC_\infty + bF)) = 0$.
(5) 证明: 当 $a \geq 0$ 且 $b \geq 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} h^0(X, \Omega_X(aC_\infty + bF)) &= h^0(X, aC_\infty + (b-2)F) + h^0((a-2)C_\infty + (b-e)F) \\ &= \sum_{k=0}^a h^0(b - 2 - ek) + \sum_{k=0}^a h^0(b - e - ek). \end{aligned}$$

(提示: 将 $\mathcal{O}_X(aC_\infty + bF)$ 张量到正合列

$$0 \longrightarrow \varphi^* \Omega_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0,$$

并利用 $R^1 \varphi_*(aC_\infty) = 0$.)

习题 1.16 设 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 是复射影簇 X 上的局部自由层, H 是丰富除子,证明:

(1) $\mu_H(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})=\mu_H(\mathcal{E})+\mu_H(\mathcal{F})$.

(2) $\mu_H(S^n\mathcal{E})=n\mu_H(\mathcal{E})$.

进一步, 若将 $\mathcal{E}$ 换成无挠层, 并设 $\mathcal{F}$ 是线丛, (1) 仍成立.

习题 1.17 验证命题 1.2.13.

习题 1.18 证明: 半稳定丛的非零映射 $\varphi:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ 必有 $\mu(\mathcal{F})\le\mu(\mathcal{E})$.

习题 1.19 (Nakayama 引理) 设 M 是有限生成 R 模, m 是 R 的极大理想. $M_0=M/mM$ 称为 M 的纤维.

(1) 证明: $M_0=0$ 当且仅当 $M=0$. (提示: 考虑 M 的生成元 $m_1,\cdots,m_r$, 并且写 $m_i=\sum\limits_j a_{ij}m_j$, $a_{ij}\in m$. 利用克莱姆法则说明 $m_i=0$.)

(2) 证明: $m_1,\cdots,m_r$ 生成 M 当且仅当它们生成 M_0. (提示: 假设 $m_1,\cdots,m_r$ 生成 M_0, 令 $S=R\langle m_1,\cdots,m_r\rangle\subseteq M$, 对商模 M/S 应用 (1).)

(3) 设 $\varphi:M\to N$ 是 R 模同态. 证明: 诱导的纤维同态 $\varphi_0:M_0\to N_0$ 是满的当且仅当 φ 是满的.

习题 1.20 设凝聚层 $\mathcal{F}$ 有一个凝聚子层的滤过

$$0=K^{p+1}\subseteq K_p\subseteq\cdots\subseteq K_1\subseteq K_0=\mathcal{F}.$$

记 $Gr_i=K_i/K_{i+1}$. 假设存在整数 k, 使得当 $i\neq k$ 时总有

$$H^i(X,Gr_\ell)=0,\quad \ell=0,1,\cdots,p.$$

证明: 此时也有 $H^i(X,\mathcal{F})=0$. 进一步, $H^k(X,\mathcal{F})$ 有一个滤过, 它的相邻项的商分别是 $H^k(X,Gr_\ell)$. (提示: 将滤过拆成短正合列 $0\longrightarrow K_{j+1}\longrightarrow K_j\longrightarrow Gr_j\longrightarrow 0$.)

习题 1.21 证明命题 1.3.3 中剩余的结论.

第二章　向量丛的正性

2.1　由整体截面生成的层

定义 2.1.1　设 X 是复流形, $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{O}_X$-模层. V 是 $H^0(X,\mathcal{E})$ 的一个子空间. V 生成了 $\mathcal{E}$ 的一个子层 $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极大正规扩张 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 称为由 V 生成的饱和子层. 如果 $\widetilde{\mathcal{F}}=\mathcal{E}$, 就称 $\mathcal{E}$ 几乎处处由整体截面生成 (Almost everywhere generated by global sections). 如果 $\mathcal{F}=\mathcal{E}$, 则称 $\mathcal{E}$ 由整体截面生成 (generated by global sections).

对 $\Gamma(X,\mathcal{E})$ 的 n 个截面 $s_1,\cdots,s_n$, 如果它们生成的饱和子层秩恰为 n, 我们就说它们是代数无关的.

很明显, 层 $\mathcal{E}$ 由整体截面生成等价于说它是一个自由层的商, 即 P 中的截面生成元 $\{s_i\}_{i\in I}$ 诱导了满射

$$\mathcal{O}_X^{\oplus I}\longrightarrow\mathcal{E},\quad \{f_i\}_{i\in I}\to\sum_i f_i s_i.$$

换言之, 对每个点 $x\in X$, 茎 $\mathcal{E}_x$ 由 s_i 的像生成. 通常我们也将上面的满射简记作

$$V\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{E}.$$

这个映射通常也称为赋值映射 (Evaluation map). 该映射的核称为 E 的核丛 (Kernel bundle), 通常记作 $M_{V,\mathcal{E}}$.

注 2.1.1　容易看到 $H^0(X,M_{V,\mathcal{E}})=0$. 当 $M_{V,\mathcal{E}}$ 是向量丛时 (比如 X 是曲线的情形), $M_{V,\mathcal{E}}^\vee$ 显然也是由整体截面生成的. 请注意, $H^0(X,M_{V,\mathcal{E}})=0$ 这个结论直接依赖于条件 $V\subseteq H^0(X,E)$. 如果我们取的 V 不满足此条件, 那么 $M_{V,E}$ 可以含有整体截面. 比如我们考虑 $X=\mathbb{P}^1$ 上的向量丛 $E=\mathcal{O}_X(1)\oplus\mathcal{O}_X$, 利用满射 $\phi: H^0(X,\mathcal{O}_X(1))\otimes\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X(1)$ (也来自于欧拉序列), 我们可诱导正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-1)\longrightarrow\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\stackrel{\phi\oplus\mathrm{Id}}{\longrightarrow}E\longrightarrow 0.$$

取对偶得

$$0\longrightarrow E^\vee\longrightarrow\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_X(1)\longrightarrow 0.$$

上述正合列的核 $E^\vee=\mathcal{O}_X(-1)\oplus\mathcal{O}_X$ 显然包含整体截面. ■

设 X 是光滑射影代数簇. $\mathcal{E}$ 是秩 r 局部自由层. 如果 $\mathcal{E}$ 由整体截面 $s_1,\cdots,s_n$ 生成, 那么 $\mathcal{E}$ 没有基点, 即 $h^0(X,\mathcal{I}_x(\mathcal{E}))\neq h^0(X,\mathcal{E})$ 对任何 $x\in X$ 成立. 这是因为, 若不然, 它们生成的子丛含于 $\mathcal{I}_x(\mathcal{E})$ 中 ($\mathcal{I}_x$ 是理想层), 因而不可能是饱和子层. 进一步, 我们有正合列

$$0\longrightarrow H^0(X,\mathcal{I}_x(\mathcal{E}))\longrightarrow H^0(X,\mathcal{E})\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_x(\mathcal{E}))(=\mathbb{C}^r)\longrightarrow 0, \tag{2-1}$$

这里 $\mathcal{O}_x(\mathcal{E})=\mathcal{E}(x)$ 是 x 处的纤维. 这是因为局部满射 $\mathcal{O}_{X,x}^{\oplus n}\to\mathcal{E}_x$ 诱导了纤维 $\mathcal{E}(x)$ 上的满射.

反过来, 假设对任何 $x\in X$, 都有正合列 (2-1), 那么 $\mathcal{E}(x)$ 由 $H^0(X,\mathcal{E})$ 的生成元整体生成. 这样, 我们可以找 $H^0(X,\mathcal{E})$ 中的 r 个截面 $s_1,\cdots,s_r$, 使得它们生成纤维 $\mathcal{E}(x)$. 由 Nakayama 引理, 它们也生成茎 $\mathcal{E}_x$. 因此, $\mathcal{E}$ 是由整体截面生成的. 这样, 我们就得到如下结论.

命题 2.1.1 *$\mathcal{E}$ 由整体截面生成当且仅当正合列 (2-1) 处处成立. 特别地, 若 $\mathcal{E}$ 是线丛, 那么它由整体截面生成也当且仅当它无基点.*

这里也顺便指出, 当 $h^1(X, \mathcal{I}_x(\mathcal{E})) = 0$ 对任何 $x \in X$ 成立时, 上述正合列总成立, 因而此时 $\mathcal{E}$ 由整体截面生成. 由 Nakayama 引理, 正合列 (2-1) 中的满态射也给出了由整体截面生成的另一种叙述, 即有满射

$$H^0(X, \mathcal{E}) \times \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

命题 2.1.2 ([Ati57], **定理** 2, page 426) *设 X 是 n 维光滑射影簇, $\mathcal{E}$ 是 X 上由整体截面生成的秩 r 局部自由层 $(r > n)$. 那么 $\mathcal{E}$ 有极大子丛 $\mathcal{O}_X^{\oplus r-n}$.*

证明 对每个点 $x \in X$, 我们记 $E'_x := H^0(X, \mathcal{I}_x(\mathcal{E}))$, $V = H^0(X, \mathcal{E})$. 注意 $\dim \mathbb{P}(E'_x) = \dim \mathbb{P}(V) - r$, 因而

$$Y = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E'_x) \subseteq \mathbb{P}(V)$$

作为射影子簇的维数 $\leq n + \dim \mathbb{P}(V) - r$. 因此存在 $\mathbb{P}(V)$ 中的 $r - n - 1$ 维射影子空间 $\mathbb{P}(W)$ 和 Y 完全不相交.

注意 E'_x 是 $H^0(X, \mathcal{E}) \times \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ 的核在 x 处的纤维. 因此上面的讨论实际上给出了单态射

$$\Phi : W \times \mathcal{O}_X (\hookrightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \times \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{E}.$$

对每个点 $x \in X$, Φ 的余核的纤维维数为 n. 因此 $W \times \mathcal{O}_X$ 是极大丛. ■

推论 2.1.1 *设 X 是光滑代数曲线, $\mathcal{E}$ 是 X 上由整体截面生成的 r 局部自由层, 则*

(1) *存在正合列*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus r-1} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0,$$

这里 $\mathcal{L}$ 是某线丛.

(2) *$\mathcal{E}$ 可以由最多 $r + 1$ 个整体截面生成, 即存在满射 $\mathcal{O}_X^{\oplus r+1} \to \mathcal{E} \to 0$.*

证明 (1) $r = 1$ 是显然的, 因此不妨设 $r > 1$. 此时由命题 2.1.2 立得.

(2) 我们先验证 $r = 1$ 的情形. 此时, 可取两个没有公共零点的整体截面 (习题 2.2), 它们显然生成了 $\mathcal{E}$.

现在考虑 $r > 1$ 的情形. 注意到 (1) 中的正合列给出满的复合映射

$$H^0(X, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{L}.$$

因此 $\mathcal{L}$ 也是由整体截面生成的, 并且这些整体截面取自 E 的整体截面的像. 由上讨论, 我们可选取 E 中两个截面生成 L. 它们连同 (1) 的正合列中 $\mathcal{O}_X^{\oplus r-1}$ 提供的 $r - 1$ 个截面, 生成了 $\mathcal{E}$. ■

注 2.1.2 由推论 2.1.1, 对光滑曲线 X 上一个由整体截面生成的的秩 r 向量丛 E 来说, 我们可以构造 r 个截面 $s_1, \cdots, s_r$, 使得 $s_1 \wedge \cdots \wedge s_r$ 是 $\det E$ 的非零截面. 另一方面, 如果这个截面没有零点, 那么 $E \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r}$. 因此 $\deg E \geq 0$, 等号成立当且仅当 E 是平凡丛.

由此还可知其核丛的斜率总是小于等于零, 并且仅当 E 是平凡丛时才等于零. 在曲线情形, 核丛是向量丛, 因而利用对偶可知, 核丛的对偶丛也是由整体截面生成的. 因此核丛的次数为零也当且仅当它是平凡丛.

请注意, 一般说来, 一个向量丛即使有整体截面, 也未必有非负的斜率. 比如 $E=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ (n 是充分大正整数) 是曲线 $\mathbb{P}^1$ 上的秩 2 分裂丛. 它有整体截面, 但是它的行列式丛的次数显然小于 0. ■

命题 2.1.3 ([Law85], **命题** 1.1) *设 X 是光滑射影簇, E 是 X 上由整体截面生成的秩 r 向量丛, 且不含平凡直和项, 那么 $h^0(X,E^\vee)=0$.*

证明 今假设 $h^0(X,E^\vee)\neq 0$, 则存在非零映射 $\psi: E\to\mathcal{O}_X$. 因为 E 由整体截面生成, 所以 $\mathrm{Im}\psi=\mathcal{O}_X$, 即 ψ 是满射 (若不然, $\mathrm{Im}\psi$ 作为 $\mathcal{O}_X$ 的理想层将包含整体截面, 矛盾!).

由于 ψ 非零并且 E 由整体截面生成, 所以 E 至少有一个整体截面 s 在 ψ 下的像非零. 因此复合映射

$$\mathcal{O}_X\overset{s}{\hookrightarrow}E\overset{\psi}{\twoheadrightarrow}\mathcal{O}_X$$

是同构 (不失一般性, 可假设是恒同映射). 这样, 我们就有分裂正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\psi\longrightarrow E\underset{\psi}{\overset{s}{\leftrightarrows}}\mathcal{O}_X\longrightarrow 0,$$

从而 E 含平凡直和项, 矛盾! 综上, 我们证明了 $h^0(X,E^\vee)=0$. ■

例 2.1.1 (**平凡丛的态射**) 设 X 是光滑代数曲线. V,W 是复向量空间,

$$\phi: V\otimes\mathcal{O}_X\to W\otimes\mathcal{O}_X$$

是非零态射, $\mathcal{E}=\mathrm{Im}\phi$, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 在 $W\otimes\mathcal{O}_X$ 中的极大正规扩张. $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 显然都是无挠的, 因而是局部自由的. 由于 $V\otimes\mathcal{O}_X\to\mathcal{E}$ 是满的, 因而 $\mathcal{E}$ 由整体截面生成, $\deg\mathcal{E}\geq 0$. 由于 $W\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{F}$ 也是无挠的 (因而局部自由), 并且由整体截面生成, 所以 $\deg\mathcal{F}\leq 0$. 由于 $\deg\mathcal{E}\leq\deg\mathcal{F}$ (习题 1.9)以及注记 2.1.2 的讨论, 这就迫使 $\mathcal{E}=\mathcal{F}=T\otimes\mathcal{O}_X$, 这里 T 是复向量空间. 由此还可知 $\mathrm{Ker}\phi$ 与 $\mathrm{Coker}\phi$ 也是平凡丛.

今假设 ϕ 是满态射, $\mathrm{Ker}\phi=K\otimes\mathcal{O}_X$. 对正合列

$$0\longrightarrow K\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow W\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow 0$$

取同调易知 $H^0(V\otimes\mathcal{O}_X)(=V)\to H^0(W\otimes\mathcal{O}_X)(=W)$ 是满的 (注意秩的关系), 因而存在同态 $\psi: H^0(W\otimes\mathcal{O}_X)\to H^0(V\otimes\mathcal{O}_X)$, 使得 $\phi\psi=\mathrm{Id}_W$. 这样, 我们可以诱导层态射 $\psi: W\otimes\mathcal{O}_X\to V\otimes\mathcal{O}_X$, 满足 $\phi\psi=\mathrm{Id}$. 因此上面的正合列是分裂的.

综合这些讨论, 我们可以看到, 平凡丛的态射本质上就是自由模的同态. ■

例 2.1.2 设 E,F 都是曲线 X 上由整体截面生成的局部自由层, 且 E 不含平凡的直和项. 设 $\sigma: E\to F$ 是非零映射. 假设有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{V,E} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & V\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{W,F} \arrow[r] & W\otimes\mathcal{O}_X \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里 $M_{V,E}$, $M_{W,F}$ 是相应的核丛.

首先, $\gamma \neq 0$ (若不然 $\sigma = 0$). 因此由例 2.1.1, $\mathrm{Ker}\gamma = K \otimes \mathcal{O}_X$ 是平凡丛, 且 $\dim K < \dim V$. 类似地, $\mathrm{Im}\gamma$ 与 $\mathrm{Coker}\gamma$ 也是平凡丛. 其次, $\alpha \neq 0$, 否则 $\gamma\beta = 0$ 蕴含着 $M_{V,E} \subseteq K \otimes \mathcal{O}_X$, 从而 E 包含平凡的直和项 $V/K \otimes \mathcal{O}_X$, 与假设条件矛盾!

当 $E \to F$ 是满射时, E 由整体截面生成的条件蕴含了 F 也是由整体截面生成, 因而上述交换图总成立. ■

由整体截面生成的局部自由层的概念和相关结论也可以推广到凝聚层上, 这里不再赘述.

2.2 丰富丛

在这一节中, 我们要推广丰富线丛和数值有效线丛的概念到一般的向量丛上. 这些工作主要基于 [Hart66] 等.

定义 2.2.1 设 E 是 X 上的向量丛. 如果 $\pi : \mathbb{P}(E^\vee) \to X$ 的 Serre 线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是丰富的 (相应地, 数值有效的), 那么就称 E 是丰富的 (相应地, 数值有效的).

数值有效向量丛 (Numerically effective)也称为 nef 向量丛.

例 2.2.1 考虑向量丛 $T = \mathcal{O}_X(H)^{\oplus n}$, 这里 H 是丰富除子. 它对应的射影丛是平凡的, 所以 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T^\vee)}(1) = pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) \times pr_2^*\mathcal{O}_X(H)$. 它是 $\mathbb{P}(T^\vee)$ 中的丰富线丛. 由此可知 T 是丰富丛. ■

由例 1.3.5 和例 1.3.6 的讨论, 我们实际上证明了如下几个结论.

命题 2.2.1 设 E 是 X 上的向量丛, 则

(1) 若 E 是丰富的 (相应地, nef), 则其商丛也是丰富的 (相应地, nef).

(2) 若 E 是由整体截面生成的, 即有满射 $V \times \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow E$, 那么 E 是丰富的当且仅当诱导映射 $\psi : \mathbb{P}(E^\vee) \to \mathbb{P}(V^\vee)$ 是诱导映射是有限的.

(3) 设 $f : X' \to X$ 是有限态射, 若 E 是丰富的(相应地, nef), 则 f^*E 是丰富的(相应地, nef). 若进一步, f 是满的, 则其逆也成立.

(4) 若 S^kE 是丰富的, 那么 E 也是丰富的.

证明 这里对 (4) 稍作说明. 考虑 Veronese 嵌入 $\mathbb{P}(E^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^kE^\vee)$, 此时 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^mE^\vee)}(1)\big|_{\mathbb{P}(E^\vee)}$ 是丰富线丛. 由定理 1.2.3, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 也是丰富的. ■

例 2.2.2 (1) 设 $X = \mathbb{P}^n$, T_X 是切丛. 由欧拉序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T_X \longrightarrow 0. \tag{2-2}$$

T_X 是丰富层 $\mathcal{O}_X(1)^{\oplus(n+1)}$ 的商丛, 因此 T_X 也是丰富的.

(2) 设 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ 是光滑射影子簇, $N_{Y/\mathbb{P}^n}$ 是法丛, 我们也有正合列

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}\big|_Y \longrightarrow N_{Y/\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0. \tag{2-3}$$

由于 $T_{\mathbb{P}^n}\big|_Y$ 是丰富的, 所以其商丛 $N_{Y/\mathbb{P}^n}$ 也是丰富的.

(3) 将欧拉序列 (2-2) 限制到 Y 上, 并结合 (2-3), 我们满射

$$\mathcal{O}_Y^{\oplus(n+1)} \longrightarrow N_{Y/\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0.$$

这就给了射影丛的嵌入

$$\mathbb{P}((N_{Y/\mathbb{P}^n}(-1))^\vee) \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^n.$$

其像等价于

$$\{(x,H)|\ x \in X,\ H \subseteq \mathbb{P}^n \text{ 与 } Y \text{ 相切于 } x \text{ 的超平面}\}.$$

由命题 2.2.1, $N_{Y/\mathbb{P}^n}$ 是丰富的当且仅当 $\mathbb{P}((N_{Y/\mathbb{P}^n}(-1))^\vee) \to \mathbb{P}^n$ 是有限态射, 即每个与 Y 相切的超平面至多只有有限个切点 (换言之, Y 的每个超平面截口只有至多有限个奇点). ■

在我们介绍丰富丛的上同调判则判则之前, 首先回顾丰富线丛的判则 (见定理 1.2.3). [Hart66] 给出了丰富丛的类似判则.

定理 2.2.1 (Hartshorne **丰富性判则**) 设 E 是光滑复射影簇 X 上的向量丛, 则以下条件彼此等价:

(1) E 是丰富丛.

(2) 对任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在依赖于它的正整数 m_1, 使得当 $m \geq m_1$ 时, 总有
$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes S^m E) = 0, \quad i > 0.$$

(3) 对任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在依赖于它的正整数 m_2, 使得当 $m \geq m_2$ 时, $\mathcal{F} \otimes S^m E$ 都由整体截面生成.

(4) 对任何丰富除子 H, 存在依赖于它的正整数 m_3, 使得当 $m \geq m_3$ 时, $S^m E$ 总是可以作为 $\mathcal{O}_X(H)^{\oplus n}$ 的商层 (对某个 n).

(5) 存在某个丰富除子 H 以及依赖于它的正整数 m_3', 使得当 $m \geq m_3'$ 时, $S^m E$ 可以作为 $\mathcal{O}_X(H)^{\oplus n}$ 的商层.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由定理 1.2.3 以及 $\mathcal{O}_P\mathbb{P}(E^\vee)(1)$ 的丰富性, 我们有

$$H^i(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m) \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{F}) = 0, \quad i > 0, \quad m \geq m_1(\mathcal{F}),$$

这里 $\bar{\pi}: \mathbb{P}(E^\vee) \to X$ 是对应的射影丛. 利用射影公式及命题 1.3.2 可得

$$\mathcal{F} \otimes S^m E = \bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m)) \otimes \mathcal{F} = \bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m) \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{F})$$

以及 $R^i\bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m) \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{F}) = 0$ $(i > 0)$ 由此即得结论 (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3) 对每个点 $x \in X$, 存在正整数 $m_2(\mathcal{F}, x)$, 使得 $H^1(X, \mathcal{I}_x(\mathcal{F}) \otimes S^m E)$ $(\forall m \geq m_2(\mathcal{F}, x))$. 由命题 2.1.1, $\mathcal{F} \otimes S^m E$ 在 x 处的茎由整体截面生成. 在 x 的某个邻域内, 该结论对同样的 m 仍成立. 由 X 的紧性, 可以找到只依赖于 $\mathcal{F}$ 的正整数 $m_2(\mathcal{F})$, 使得 $m \geq m_2$ 时, $\mathcal{I}_x(\mathcal{F}) \otimes S^m E$ 由整体截面生成.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 取 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(-H)$ 即可.

(4) $\Longrightarrow$ (5) 显然.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 首先, 由例 2.2.1, 已知 $T = \mathcal{O}_X(H)^{\oplus n}$ 是丰富的. 因为 S^mE 是 T 的商, 所以由命题 2.2.1, S^mE 是丰富的. 再由命题 2.2.1 即知 E 是丰富丛. ■

这个判则有很多重要的应用. 我们可以利用它由已知的丰富丛构造出新的丰富丛.

推论 2.2.1 (**丰富丛的构造**) *设 E, F 都是 X 上的丰富丛, 那么以下每个向量丛 G 都是丰富的.*

(1) *$G = E \oplus F$ (其逆也成立).*

(2) *若G 来自扩张 $0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$.*

(3) *$G = S^kE$ ($k \geq 1$) (其逆也成立).*

(4) *$G = E \otimes F$.*

(5) *$G = \wedge^q E$.*

证明 (1) 利用 Hartshorne 丰富性判则, 我们需要验证 $S^m(G) \otimes \mathcal{F}$ 由整体截面生成 ($\mathcal{F}$ 是给定的凝聚层). 由习题 1.4, 相当于找 m_0, 使得当 $p + q \geq m_0$ 时, $(S^pE \otimes S^qF) \otimes \mathcal{F}$ 由整体截面生成. 其逆命题直接来自于命题 2.2.1 (1).

首先, 因为 E, F 是丰富的, 所以存在 k_1 使得当 $k \geq k_1$ 时, S^kE 和 $S^kF \otimes \mathcal{F}$ 都是由整体截面生成. 再次应用判则到 S^lE 和 $S^lF \otimes \mathcal{F}$ 上 ($l = 0, 1, \cdots, k_1$), 则可找到正整数 k_2 使得当 $k \geq k_2$ 时,

$$S^kE \otimes S^lF \otimes \mathcal{F}, \quad S^lE \otimes S^kF \otimes \mathcal{F}, \quad l = 0, 1, \cdots, k_1,$$

由整体截面生成.

今取 $m_0 = k_1 + k_2$ 即满足要求 (留给读者验证).

(2) $S^mG \otimes \mathcal{F}$ 有一个滤过, 它的相邻的商是 $S^pE \otimes S^qF \otimes \mathcal{F}$. 由习题 1.20, 为了说明 $S^mG \otimes \mathcal{F}$ 的高阶上同调消失, 我们只需要证明每一级的商 $S^pE \otimes S^qF \otimes \mathcal{F}$ 的高阶上同调消失. 因为 (1) 已证 $E \oplus F$ 是丰富的, 所以由同调判则, $H^i(X, S^mG \otimes \mathcal{F}) = 0$ ($i > 0$). 结合 S^mG 的直和分解, 即得 $H^i(S^pE \otimes S^qF \otimes \mathcal{F}) = 0$.

(3) 假设 E 是丰富的, 由判则条件 (4), 当 m 充分大后, S^mE 可以看成一些丰富线丛的直和的商, 因而 S^mE 本身也是丰富的. 现在对固定的整数 k, 选取充分大的整数 ℓ, 则可由 $S^{k\ell}E$ 的丰富性即推出 S^kE 的丰富性 (习题 2.3). 其逆也直接来自于命题 2.2.1.

(4) 因为 $E \otimes F$ 是 $S^2(E \oplus F)$ 的直和项, 故由前面结论立得.

(5) 注意到外积 $\wedge^i E$ 是某一个张量积 $E^{\otimes q}$ 的商, 因此也是丰富的. ■

我们再引入其他几类丰富性 (nef) 的判则.

定理 2.2.2 (Barton-Kleiman **判则**) *设 E 是 X 上的向量丛, 那么*

(1) *E 是 nef 当且仅当对任何从光滑不可约曲线 C 到 X 的有限态射 $\nu : C \to X$ 以及 ν^*E 的任何商线丛 L, 都有 $\deg_C L \geq 0$.*

(2) 固定一个丰富除子类 $h \in N^1(X)$. E 是丰富的当且仅当存在正有理数 $\delta = \delta(h)$, 对任何从光滑不可约曲线 C 到 X 的有限态射 $\nu : C \to X$ 以及 $\nu^* E$ 的任何商线丛 L, 都有 $\deg_C L \geq \delta(\deg_C \nu^* h)$.

证明 (1) 由习题 2.4, 命题可以转换为满足交换图的映射 $\mu : C \to \mathbb{P}(E^\vee)$ 都有 $\deg_C \mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) \geq 0$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathbb{P}(E^\vee) \arrow[dl, "\bar\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

因此这就相当于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是 nef 的.

(2) 设 ξ 是 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1))$ 在 $N^1(X)$ 中对应的类. $\deg_C L \geq \delta(\deg_C \nu^* h)$ 等价于证明 $\xi - \delta(h) \cdot \bar\pi^* h \in N^1(\mathbb{P}(E^\vee))$ 是 nef. 另一方面, 因为

$$\bar\pi^* \bar\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1) = \bar\pi^* E \to E$$

是满的, 所以 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是关于 $\bar\pi$ 相对丰富的 (习题 2.6). 因此对充分小正数 ε, $\varepsilon\xi + \delta \cdot \bar\pi^* h$ 是丰富的.

这样, 如果 $\xi - \delta(h) \cdot \bar\pi^* h$ 是 nef, 那么

$$(1+\varepsilon)\xi = (\xi - \delta \cdot \bar\pi^* h) + (\varepsilon\xi + \delta \cdot \bar\pi^* h)$$

是丰富的.

反过来, 如果 ξ 是丰富的, 由习题 2.5, 这样的 δ 存在. ■

定理 2.2.3 (Gieseker 引理 [Gie71]) 设 E 是 X 上的向量丛, E 是丰富丛当且仅当它满足如下两个条件:

(1) 存在正整数 m_0, 使得当 $m \geq m_0$ 时, $S^m E$ 都由整体截面生成.

(2) 不存在既约不可约曲线 $C \subseteq X$, 使得 $E|_C$ 有一个平凡的商丛.

特别地, 如果 E 由整体截面生成, 那么 E 是丰富丛当且仅当条件 (2) 成立.

证明 如果 E 是丰富的, 那么条件 (1) 来自于 Hartshorne 判则, (2) 来自于命题 2.2.1.

今假设两个条件满足, 我们要证 E 是丰富的. 首先, 我们有以下复合映射

$$\Phi_{m_0} : \mathbb{P}(E^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^{m_0} E^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times X \overset{pr_1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}(V^\vee),$$

这里 $V = H^0(X, S^{m_0} E)$. 当然, 这个映射也可以通过 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0)$ 的线性系诱导 (此时 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0)$ 是由整体截面生成的).

为证 E 是丰富的, 我们只需要证明 Φ_{m_0} 是有限态射. 若不然, 则存在既约不可约曲线 $C \subseteq \mathbb{P}(E^\vee)$ 被 Φ_{m_0} 收缩为点. 请注意, 因为这映射也是由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0)$ 的线性系诱导, 所以 C 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 对应的除子不相交, 即 $\deg \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)|_C = 0$.

由于 Φ_{m_0} 限制在 $\bar\pi : \mathbb{P}(E^\vee) \to X$ 的每个纤维上都是嵌入. 因此 C 被 $\bar\pi$ 同构地映到它在 X 中的像上. 此时 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0)|C = \Phi_{m_0}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)|_C$ 显然是平凡丛. 这样, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)|_C =$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0+1)|_C$, 并且它是零次的线丛. 再次应用条件 (1) 到 $m = m_0+1$ 上, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m_0+1)$ 是由整体截面生成. 这就迫使 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)|_C$ 是平凡丛. 由欧拉序列, 我们有满射 $\bar{\pi} * E|_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)|_C$, 这就得到平凡商, 与条件 (2) 矛盾! ■

2.3 $\mathbb{Q}$-扭向量丛

在处理线性系的问题时, 我们会引入 $\mathbb{Q}$-除子的概念. 这对于讨论线丛的数值性质是非常方便的. 比如利用这个概念将 nef 除子看成丰富除子的极限. 这个思路也可以推广到一般的向量丛上. 本节将介绍 [Miy85] 关于这方面的工作.

设 E 是光滑射影簇 X 上的向量丛, $\delta \in N^1(X)\otimes\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 除子的数值等价类. $\mathbb{Q}$-扭向量丛 ($\mathbb{Q}$-twisted vector) $E\langle\delta\rangle$ 是指 E 和 δ 的二元组, 它们满足:

(1) **(规范化)** $E\langle 0\rangle = E$.

(2) **($\mathbb{Q}$-同构)** $E\langle [A]+\delta\rangle = (E\otimes\mathcal{O}_X(A))\langle\delta\rangle$, 这里 A 是整 Cartier 除子. $E_1\langle 0\rangle = E_2\langle 0\rangle$ 等价于 $E_1 = E_2\otimes P$, 这里 P 是数值等价于 0 的线丛. 后面的等式均是指 $\mathbb{Q}$ 同构意义下的.

(3) **(张量运算)**

$$E_1\langle\delta_1\rangle\otimes E_1\langle\delta_2\rangle = (E_1\otimes E_2)\langle\delta_1+\delta_2\rangle,$$
$$S^m(E\langle\delta\rangle) = (S^mE)\langle m\delta\rangle,$$
$$\bigwedge^m(E\langle\delta\rangle) = (\wedge^m E)\langle m\delta\rangle.$$

(4) **(基变换)** 设 $f: Y\to X$ 是态射, $f^*(E\langle\delta\rangle) = (f^*E)\langle f^*\delta\rangle$.

(5) **(直和)** $E\langle\delta\rangle\oplus F\langle\delta\rangle = (E\oplus F)\langle\delta\rangle$.

(6) **(子丛和商丛)**设 F 是 E 的子丛 (相应地, 商丛), 我们规定 $F\langle\delta\rangle$ 是 $E\langle\delta\rangle$ 的$\mathbb{Q}$-扭子丛 (相应地, 商丛).

(7) **(秩和次数)** $\operatorname{rk} E\langle\delta\rangle := \operatorname{rk} E$, 如果 X 是曲线, 定义次数 $\deg E\langle\delta\rangle := \deg E + \operatorname{rk} E\cdot\deg\delta$.

定义 2.3.1 设 $E\langle\delta\rangle$ 是 $\mathbb{Q}$-扭向量丛, ξ_E 是 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1))$ 在 $N^1(\mathbb{P}(E^\vee))$ 中对应的除子类. 如果

$$\xi_E + \bar{\pi}^*\delta \in N^1(\mathbb{P}(E^\vee))\otimes\mathbb{Q}$$

是丰富 (相应地, nef) 的 $\mathbb{Q}$-除子, 我们就称 $E\langle\delta\rangle$ 是丰富的 (相应地, nef).

对整除子 A, 因为 $\mathbb{P}(E^\vee) = \mathbb{P}((E\otimes A)^\vee)$ 且 $\xi_{E\otimes\mathcal{O}_X(A)} = \xi_E + \bar{\pi}^*A$, 所以

$$\xi_{E\otimes\mathcal{O}_X(A)} + \bar{\pi}^*\delta = \xi_E + \bar{\pi}^*([A]+\delta).$$

这表明 $E\langle [A]+\delta\rangle = (E\otimes\mathcal{O}_X(A))\langle\delta\rangle$ 在 $\mathbb{Q}$-同构意义下对应相同的 $\mathbb{Q}$-除子类. 因此 $(E\otimes\mathcal{O}_X(A))\langle\delta\rangle$ 丰富 (相应地, nef) 当且仅当 $E\langle [A]+\delta\rangle$ 丰富 (相应地, nef). 换言之, $\mathbb{Q}$-扭向量丛的丰富性或 nef 性质不依赖于 $\mathbb{Q}$-同类代表元的选取.

例 2.3.1 (基变换技巧) 设 $f: Y \to X$ 是有限满态射. 我们诱导了射影丛的有限满态射 $F: \mathbb{P}(f^*E^\vee) \to \mathbb{P}(E^\vee)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(f^*E^\vee) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\overline{\Pi}"'] & \mathbb{P}(E^\vee) \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

由此易知

$$F^*(\xi_E + \bar{\pi}^*\delta) = \xi_{f^*E} + \overline{\Pi}^*(f^*\delta).$$

因为除子的丰富性和 nef 性质在有限满射的拉回仍然保持, 因此 $f^*(E\langle\delta\rangle)$ 和 $E\langle\delta\rangle$ 具有相同的丰富性或 nef 性质. ■

利用这个结论, 我们可以构造有限覆盖 f, 使得 $f^*\delta$ 变成整除子. 这样就可以将 $\mathbb{Q}$-扭向量丛的丰富性或 nef 性质归结到通常的向量丛上来讨论. 由此很容易得到如下结论.

推论 2.3.1 设 $E\langle\delta\rangle$ 是 $\mathbb{Q}$-扭向量丛, 我们有

(1) $E\langle\delta\rangle$ 丰富的充分必要条件为: 对某个 (或所有) 整数 k, $S^k(E\langle\delta\rangle)$ 也丰富.

(2) 设 $E\langle\delta\rangle, E'\langle\delta'\rangle$ 都是丰富的, 则 $E\langle\delta\rangle \otimes E'\langle\delta'\rangle$ 也是丰富的.

(3) 设 $E\langle\delta\rangle, E'\langle\delta\rangle$ 都是丰富的, 则 $E\langle\delta\rangle \oplus E'\langle\delta\rangle$ 也是丰富的.

(4) 设 $E\langle\delta\rangle$ 是丰富的, 则对任何 $\mathbb{Q}$-除子类 δ', 当 ε 是充分小正数时, $E\langle\delta + \varepsilon\delta'\rangle$ 也是丰富的.

如何将丰富扭向量丛的性质过渡到其极限情形, 即 nef 情形呢? 这里给出一种经典技巧.

命题 2.3.1 (Nef 丛的丰富扭技巧) $E\langle\delta\rangle$ 是 nef 的充分必要条件为: 对任何丰富除子类 $h \in N^1(X) \otimes \mathbb{Q}$, $E\langle\delta + h\rangle$ 都是丰富的.

证明 由基变换技巧, 我们只需要讨论 $\delta = 0$ 的情形.

若对任何 h, $E\langle h\rangle$ 是丰富的, 即 $\xi_E + \bar{\pi}^*h$ 是丰富的, 那么通过取极限 $h \to 0$, 即知 ξ_E 是 nef, 即 E 是 nef. 反过来, 假设 E 是 nef. 取充分小正数 ε,

$$\xi_E + \bar{\pi}^*h = (1-\varepsilon)\xi_E + (\varepsilon\xi_E + \bar{\pi}^*h).$$

类似定理 2.2.2 的证明, $\varepsilon\xi_E + \bar{\pi}^*h$ 是丰富的, 因而上式蕴含着左端是 nef. ■

利用 nef 丛的丰富扭技巧, 很容易得到如下性质 (留给读者验证).

命题 2.3.2 nef 的 Q-扭丛的直和、张量积、对称积、外积、商丛、有限满态射下的拉回都是 nef 的.

以上这些讨论也都可以照搬到无挠层上, 这里不再赘述.

2.4 稳定性

设 E 是 X 上的秩 r 向量丛, H 是给定的丰富除子, $\mu_H(E)$ 是对应的斜率. 令

$$E_{\rm norm} := E\langle -\frac{\det E}{r}\rangle. \tag{2-4}$$

在第 6.2.1 节, 我们对光滑曲线上的向量丛的稳定性和正性做了深入探讨. 这里简要罗列如下:

(1) (**Miyaoka 判则**)

E 半稳定$\iff E_{\rm norm}$ 半稳定$\iff E_{\rm norm}$ 是 nef 的$\iff E_{\rm norm}$ 半正定$\iff E_{\rm norm}$ 半负定.

(2) (**Hartshorne 定理**)

E 丰富 (相应地, nef) $\iff E$ 正定 (相应地, 半正定).

(3) 当 E 半稳定时,

E 丰富 (相应地, nef, 半负定, 负定) $\iff \deg E > 0$ 正定 (相应地, $\geq 0, \leq 0, < 0$).

(4) (**Narasimhan-Seshadri 定理**)

E 半稳定$\iff E\otimes L$ 半稳定 (L 是线丛) $\iff S^nE$ 半稳定 ($n\geq 2$)

对高维簇上的向量丛, 我们可以通过以下经典结论, 把稳定性的讨论过渡到曲线的向量丛上. 为方便理解, 这里只叙述简化的情形 (见 [Miy85, 推论 3.13]).

定理 2.4.1 (Mumford-Mehta-Ramanathan **定理**) 设 X 是 n 维正规射影簇, $\mathcal{E}$ 是无挠层, H 是 X 上的丰富除子, m 是充分大的整数, Y 是 $|mH|$ 中的充分一般元, 那么 $\mathcal{E}|_Y$ 中的极大不稳定子层 (定义见注记 6.1.1) $\mathcal{F}$ 可以扩张成 $\mathcal{E}$ 中的饱和子层, 它是 $H|_Y$-极大不稳定子层 (因而是唯一的). 特别地, $\mathcal{E}$ 是 H-稳定的当且仅当 $\mathcal{E}|_Y$ 是 $H|_Y$-稳定的.

进一步, 设 C 是由 $|mH|$ 中 $n-1$ 个一般元完全交得到的曲线. 那么 $\mathcal{E}|_C$ 中的极大不稳定子层 $\mathcal{F}$ 可以扩张成 $\mathcal{E}$ 中的饱和子层, 它是 H-极大不稳定子层.

现在我们利用这个定理来证明如下的结论. 这个结论在秩 2 向量丛上有另一种解释.

命题 2.4.1 设 E 是 X 上的 H-半稳定的秩 r 无挠层, 这里 H 是给定的丰富除子. 设 L 是 X 上的线丛, 那么

$$H^0(X, S^{rn}E_{\rm norm}\otimes L) = O(n^{r-1}).$$

进一步, 当 $\mu_H(L) < 0$ 时, 对任何正整数 n,

$$H^0(X, S^{rn}E_{\rm norm}\otimes L) = 0.$$

证明 先讨论 $\mu_H(L) < 0$ 的情形. 取曲线 C 如定理 2.4.1, 并设 $E_n = S^{rn}E_{\rm norm}$. 因为 $(E_n(L))|_C$ 是半稳定 (定理 2.4.1) 且 $\deg(E_n(L))|_C < 0$, 所以 $(E_n(L))|_C$ 是负定的. 这样, $H^0(X, E_n(L))$ 不可能含有非零截面 (否则有正次数线丛).

再讨论一般情形. 对维数 $\dim X$ 施归纳法. $\dim X = 1$ 时, 取有效除子 D ($\deg D = d > \deg L$). 考虑正合列

$$H^0(X, E_n(L-D)) \longrightarrow H^0(X, E_n(L)) \longrightarrow H^0(D, E_n(L)).$$

由上面讨论, $H^0(X,E_n(L-D))=0$. 又因为 $h^0(D,E_n(L))=dC^{r-1}_{rn+r-1}$, 所以 $h^0(X,E_n(L))=O(n^{r-1})$.

今假设 $\dim X<k$ 的情形已证. 对充分整数 m, 选取充分一般元 $Y\in|mH|$, $E|_Y$ 是 $H|_Y$-半稳定的, 并且 $Y-L$ 是丰富的. 考虑正合列

$$H^0(X,E_n(L-Y))\longleftarrow H^0(X,E_n(L))\longrightarrow H^0(Y,E_n(L))$$

由上面讨论, $H^0(X,E_n(L-Y))=0$. 再由归纳假设即得结论. ■

本章习题

习题 2.1 设 L 是 X 上由整体截面生成的线丛, $\varphi_{|L|}:X\to\mathbb{P}(V^\vee)=\mathbb{P}(H^0(X,L)^\vee)$ 是由线性系 $|L|$ 诱导的态射. 证明: 正合列

$$0\longrightarrow M_L\longrightarrow H^0(X,L)\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow L\longrightarrow 0$$

是 Euler 序列

$$0\longrightarrow\Omega_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)\longrightarrow H^0(X,L)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)\longrightarrow 0$$

在 $\varphi_{|L|}$ 下的拉回.

习题 2.2 设 $\mathcal{L}$ 是 n 维射影簇 X 上的无基点线丛, 证明: 存在 $n+1$ 个整体截面, 它们没有公共零点集. (提示: 考虑对应的线性系诱导的态射)

习题 2.3 设 E 是向量丛, k,ℓ 是正整数. 证明; 存在有限态射

$$\nu_{\ell,k}:\mathbb{P}(S^kE^\vee)\to\mathbb{P}(S^{k\ell}E^\vee),$$

满足 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^kE^\vee)}(\ell)=\nu^*_{\ell,k}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^{k\ell}E^\vee)}(1)$.

习题 2.4 设 $\nu:C\to X$ 是光滑不可约曲线 C 到 X 的有限态射. E 是 X 上的向量丛.

(1) 证明: ν^*E 的任何商线丛 L 都诱导了有限态射 $\mu:C\to\mathbb{P}(E^\vee)$ 满足交换图.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathbb{P}(E^\vee) \arrow[dl, "\bar\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

并且 $L=\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$.

(2) 证明: 任何满足上面交换图的有限态射 $\mu:C\to\mathbb{P}(E^\vee)$ 都由 ν^*E 的某商线丛 L 诱导.

(提示: 考虑诱导映射 $\mathbb{P}(L^\vee)\hookrightarrow\mathbb{P}(\nu^*E^\vee)\to\mathbb{P}(E^\vee)$ 并将 $\mathbb{P}(L^\vee)$ 视为 $\mathbb{P}(\nu^*E^\vee)\to C$ 的截面.)

习题 2.5 设 H 是光滑射影簇 X 上的丰富线丛, D 是另一线丛.

(1) 证明: 对充分大正整数 m, $mH+D$ 是非常丰富的. (提示: 先说明 $mD+H$ 无基点.)

(2) 证明: 给定有限个除子 $D_1,\cdots,D_r$, 那么对 $0<|\varepsilon_i|\ll 1$, $H+\varepsilon_1D_1+\cdots+\varepsilon_rD_r$ 是丰富的.

(3) 证明: 如果 D 是 nef, 对任何正数 ε, 那么 $D+\varepsilon H$ 是丰富的.

(4) 证明: 如果对任何充分小的正数 ε, $D+\varepsilon H$ 是丰富的, 那么 D 是 nef.

(5) 证明: D 是丰富的当且仅当存在整数 δ, 当且仅当对任何不可约曲线 C, $\frac{DC}{HC} \geq \delta$.

习题 2.6 (**相对丰富**) 设 $f: X \to Y$ 是光滑代数簇的正常态射. L 是 X 上的线丛. 如果 $f^*f_*L \to L$ 是满态射, 并且定义了嵌入映射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}(f_*L^\vee) \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

我们就称 L 关于 f 是相对非常丰富的或 f-非常丰富. 如果对某个正整数 m, $L^{\otimes m}$ 是相对非常丰富的, 那么就称 L 是关于 f 相对丰富的或 f-丰富的. 证明: 如下条件彼此等价:

(1) L 关于 f 相对丰富.

(2) 对 X 上的任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在正整数 $m_1 = m_1(\mathcal{F})$, 使得当 $m \geq m_1$ 时,
$$R^i f_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}) = 0, \quad i > 0.$$

(3) 对 X 上的任何凝聚层 $\mathcal{F}$, 存在正整数 $m_2 = m_2(\mathcal{F})$, 使得当 $m \geq m_2$ 时,
$$f^*f_*(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L^{\otimes m}$$
是满射.

(4) 存在正整数 m_3, 使得当 $m \geq m_3$ 时, $L^{\otimes m}$ 是 f-非常丰富.

(5) 给定 Y 上的丰富除子 A, 存在正整数 $m_4 = m_4(\mathcal{F})$, 使得当 $m \geq m_4$ 时, $L \otimes f^*(A^{\otimes m})$ 是 X 上的丰富除子.

习题 2.7 设 E 是光滑射影簇 X 上的向量丛.

(1) 证明: 如果对某正整数 k, S^kE 是 nef 的, 那么 E 也是 nef 的.

(2) 设 $f: Y \to X$ 是满射, 证明: 如果 f^*E 是 nef 的, 那么 E 也是 nef 的.

(3) 证明: 如果 E 是 nef 的, F 是丰富的, 那么 $E \otimes F$ 是丰富的.

(4) 证明: 上面的结论也都可以推广到 $\mathbb{Q}$-扭丛上.

习题 2.8 设 E_{norm} 同式 (2-4). 证明:

(1) $(E\langle\delta\rangle)_{\text{norm}} = E_{\text{norm}}$.

(2) $(E^\vee)_{\text{norm}} = (E_{\text{norm}})^\vee$.

(3) $(S^nE)_{\text{norm}} = S^nE_{\text{norm}}$.

(4) $\mu_H(E_{\text{norm}}) = 0$.

(5) $S^{nr}E_{\text{norm}} = \bar{\pi}_*(-nK_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})$.

第三章 Koszul 上同调与合冲

3.1 Koszul 上同调

3.1.1 缩并映射

设 V 是域 k 上秩 r 向量空间. 我们可以诱导线性映射 $\iota : \wedge^p V \to \wedge^{p-1} V \otimes V$, 满足

$$\iota(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (v_1 \wedge \cdots \hat{v}_k \cdots \wedge v_p) \otimes v_k,$$

这里 $\hat{v}_k$ 是指在表达式中去掉 v_k 这一项.

例 3.1.1 设 $v_1, v_2, v_3 \in V$.
(1) $\iota(v_1 \wedge v_2) = v_2 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_2$.
(2) $\iota(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = (v_2 \wedge v_3) \otimes v_1 - (v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 + (v_1 \wedge v_2) \otimes v_3$. ■

设 $V^\vee$ 是 V 的对偶空间, $x \in V^\vee$. 利用 ι, 我们可以定义线性映射

$$\iota_x : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^{p-1} V, \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \to \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \langle x, v_k \rangle v_1 \wedge \cdots \hat{v}_k \cdots \wedge v_p,$$

这里 $\langle x, - \rangle : V \to \mathbb{C}$ 是 $x \in Hom(V, \mathbb{C})$ 诱导的线性映射. ι_x 称为缩并映射 (Contraction map) 或内积映射 (Inner product map). ι 与 ι_x 的关系来自于交换图

$$\begin{tikzcd} \wedge^p V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_x"'] & \wedge^{p-1} V \otimes V \arrow[d, "id \otimes \langle x, - \rangle"] \\ & \wedge^{p-1} V \end{tikzcd}$$

另一方面, 我们有自然的同构

$$\wedge^{p-1} V \otimes V \cong Hom(V^\vee, \wedge^{p-1} V), \quad (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1}) \otimes v \to \big(x \mapsto \langle x, v \rangle v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1}\big).$$

因此 ι 也可以用如下方式理解:

$$\iota : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^{p-1} V \otimes V \cong Hom(V^\vee, \wedge^{p-1} V), \quad v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \to \big(x \mapsto \iota_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)\big).$$

容易验证对偶映射

$$\iota^* : \wedge^{p-1} V^\vee \otimes V^\vee \longrightarrow \wedge^p V^\vee, (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1}) \otimes x \to x \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1}. \tag{3-1}$$

因而

$$\iota_x^* = \wedge x : \wedge^{p-1} V^\vee \longrightarrow \wedge^p V, \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \to x \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1}. \tag{3-2}$$

这就是通常的外积映射 (Exterior product map). 因此 ι_x 就是外积映射 $\wedge x$ 的对偶. 特别地, $\iota_x \circ \iota_x = 0$. 这就诱导了所谓的 Koszul 复形

$$K_\bullet(x) : 0 \longrightarrow \wedge^r V \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^p V \xrightarrow{\iota_x} \wedge^{p-1} V \xrightarrow{\iota_x} \wedge^{p-2} V \longrightarrow \cdots \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0. \tag{3-3}$$

注 3.1.1 对任何非零常数 c, 容易看到 cx, x 给出了同构的 Koszul 复形. 这表明 Koszul 复形只依赖于点 $[x] \in \mathbb{P}(V^\vee)$. ■

外积映射与内积映射存在如下的关系 (留给读者验证).

命题 3.1.1 设 $v \in V$, $x \in V^\vee$, 则

$$\iota_x \circ (\wedge v) + (\wedge v) \circ \iota_x = \langle x, v\rangle \cdot \mathrm{Id}.$$

命题 3.1.2 对任何 $[x] \in \mathbb{P}(V^\vee)$, Koszul 复形 $K_\bullet(x)$ 都是正合的.

证明 设 $K = \mathrm{Ker}(\iota_x : \wedge^{p-1}V \to \wedge^{p-2}V)$, $W = \mathrm{Im}(\iota_x : \wedge^p V \to \wedge^{p-1}V)$. 我们只需要验证 $K \subseteq W$. 对任何 $v \in K$, 我们取 $w \in V$, 使得 $\langle x, w\rangle \neq 0$. 由命题 3.1.1,

$$\iota_x(w \wedge v) = \langle x, w\rangle \cdot v,$$

即 $\iota_x(\frac{1}{\langle x,w\rangle} w \wedge v) = v$. 这表明 $v \in W$. ■

上面的讨论也可以平移到对称积情形. 设 $x \in V^\vee$, 我们定义导子 (Derivation)

$$\partial : S^qV \longrightarrow S^{q-1}V \otimes V, \quad v_1 \cdot v_2 \cdots v_q \to \sum_{k=1}^{q} (v_1 \cdots \hat{v}_k \cdots v_q) \otimes v_k.$$

及

$$\partial_x : S^qV \longrightarrow S^{q-1}V, \quad v_1 \cdot v_2 \cdots v_q \to \sum_{k=1}^{q} \langle x, v_k\rangle v_1 \cdots \hat{v}_k \cdots v_q.$$

它们满足交换图

$$\begin{tikzcd} S^qV \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial_x"'] & S^{q-1}V \otimes V \arrow[d, "id\otimes\langle x,-\rangle"] \\ & S^{q-1}V \end{tikzcd}$$

其对偶映射 $\partial^* : S^{q-1}V^\vee \otimes V^\vee \to S^qV^\vee$ 就是通常的乘法映射. 与外积情形不同的是, 此时 ∂_x 并不能诱导出复形, 即 $\partial_x \circ \partial_x \neq 0$. ∂ 也可以理解为

$$\partial : S^qV \longrightarrow S^{q-1}V \otimes V \cong Hom(V^\vee, S^{q-1}V), \quad f \to \big(x \mapsto \partial_x(f)\big).$$

假设 $X_1, \cdots, X_r \in V$ 是一组基, 那么 ∂ 可以被具体写为

$$\partial : S^qV \longrightarrow S^{q-1}V \otimes V, \quad f \to \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial X_k} \otimes X_k.$$

设 $x_k \in V^\vee$ 是对偶基, 那么 $\partial_{x_k}(f) = \frac{\partial f}{\partial X_k}$, 即关于 X_k 的偏导数.

结合外积映射 $\lambda : \wedge^{p-1}V \otimes V \to \wedge^p V$, 我们可以诱导映射 $D_{p,q} : \wedge^{p-1}V \otimes S^{q+1}V \to \wedge^p V \otimes S^qV$. 它来自于以下交换图

$$\begin{tikzcd} \wedge^{p-1}V \otimes S^{q+1}V \arrow[r, "id\otimes\partial"] \arrow[dr, "D_{p,q}"'] & \wedge^{p-1}V \otimes V \otimes S^qV \arrow[d, "\lambda\otimes id"] \\ & \wedge^p V \otimes S^qV \end{tikzcd}$$

类似地, 我们也可以诱导映射 $d_{p,q}: \wedge^p V\otimes S^qV \to \wedge^{p-1}V\otimes S^{q-1}V$. 它来自于交换图

$$\begin{tikzcd}
\wedge^p V\otimes S^qV \arrow[r, "\iota\otimes id"] \arrow[dr, "d_{p,q}"'] & \wedge^{p-1}V\otimes V\otimes S^qV \arrow[d, "id\otimes\mu"] \\
& \wedge^{p-1}V\otimes S^{q+1}V
\end{tikzcd}$$

这里 $\mu: S^qV\otimes V \to S^{q+1}V$ 是通常的乘法映射. 容易看到, $D_{p,q}$ 的对偶映射实际上就是 $d_{p,q}: \wedge^p V^\vee\otimes S^qV^\vee \to \wedge^{p-1}V^\vee\otimes S^{q-1}V^\vee$. 它们满足以下性质 (请读者自证).

命题 3.1.3 (1) 设 D, d 意义同上, 则
(1) $D_{p+1,q-1}D_{p,q} = d_{p,q}d_{p+1,q-1} = 0$, 因此它们诱导复形 (称为 Koszul 复形).
(2) $D_{p,q}d_{p,q} + d_{p+1,q-1}D_{p+1,q-1} = (p+q)\mathrm{Id}$.

3.1.2 Koszul 复形与上同调

设 $S(V)$ 是对称代数, $B = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} B_q$ 是分次 $S(V)$-模. $m_q: V\otimes B_q \to B_{q+1}$ 是 B 的 $S(V)$-模结构诱导的乘法映射, 我们可以从以下交换图定义映射 $d_{p,q}$.

$$\begin{tikzcd}
\wedge^p V\otimes B_q \arrow[r, "\iota\otimes id"] \arrow[dr, "d_{p,q}"'] & \wedge^{p-1}V\otimes V\otimes B_q \arrow[d, "id\otimes m_q"] \\
& \wedge^{p-1}V\otimes B_{q+1}
\end{tikzcd}$$

容易验证, $(\iota)\circ(\iota): \wedge^p V \to \wedge^{p-2}V\otimes S^2V$ 是零映射, 从而 $d_{p-1,q+1}d_{p,q} = 0$. 这样, 我们诱导了 Koszul 复形.

$$\cdots \longrightarrow \wedge^{p+1}V\otimes B_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \wedge^p V\otimes B_q \xrightarrow{d_{p,q}} \wedge^{p-1}V\otimes B_{q+1} \xrightarrow{d_{p-1,q+1}} \cdots$$

B 的 Koszul 上同调群定义为

$$\mathcal{K}_{p,q}(B,V) = \frac{\mathrm{Ker}d_{p,q}}{\mathrm{Im}d_{p+1,q-1}}.$$

对任何 m, 我们有以下维数等式 (留给读者验证)

$$\sum_{p+q=m}(-1)^p\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_{p,q}(B,V) = \sum_{p+q=m}(-1)^p\binom{\dim V}{p}\dim_{\mathbb{C}} B_q. \tag{3-4}$$

对分次模 B, 我们定义分次模 $B(n)$, 满足 $B(n)_q := B_{q+n}$. 这样得到的模与原来的 B 尽管有相同的元素, 但是次数相差 n. 利用这种方式, 我们可以把上述的 Koszul 复形统一写为分次 $S(V)$-模的复形 (其中每个映射都保持次数)

$$K_\bullet(\mathbb{C}): \cdots \longrightarrow \wedge^{p+1}V\otimes B(-p-1) \longrightarrow \wedge^p V\otimes B(-p) \longrightarrow \wedge^{p-1}V\otimes B(-p+1) \longrightarrow \cdots$$

例 3.1.2 今取 $B = S(V)$. 由命题 3.1.3, 我们可以得到分次 $S(V)$-模的正合复形 $K_\bullet(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \wedge^r V\otimes S(V)(-r) \longrightarrow \wedge^{r-1}V\otimes S(V)(-r+1) \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow \wedge^2 V\otimes S(V)(-2) \longrightarrow V\otimes S(V)(-1) \longrightarrow S(V) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3-5}$$

它相当于给出了 $\mathbb{C}$ 的自由析解. ■

例 3.1.3　设 $\mathcal{L}$ 是 n 维紧复流形 X 上的解析线丛, $\mathcal{F}$ 是 X 上的解析凝聚层, $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ 是子空间. 令

$$R(\mathcal{F}, L) = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes q}).$$

$R(\mathcal{F}, L)$ 是 $S(V)$-模. 这样, 我们就得到 X 上的 Koszul 复形及其上同调群 $\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{F}, \mathcal{L}, V)$.

如果取 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, 我们就简写成 $\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{L}, V)$. 如果 $V = H^0(X, \mathcal{L})$, 就简写成 $\mathcal{K}(X, \mathcal{F}, L)$. 如果取 $\mathcal{F} = \omega_X$, 那么上述 $R(\mathcal{F}, L)$ 称为 X, L 的 Arbarello-Sernesi 模 (见 [ArSe78]), 它是 $S(H^0(X, L))$-模. Arbarello-Sernesi 模的性质可以参看 [Gr84a, 定理 4.b.2]. ■

注 3.1.2　(1) 我们总是有

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{F}, L) = \mathcal{K}_{p,q-1}(X, \mathcal{F} \otimes L, L) = \cdots = \mathcal{K}_{p,1}(X, \mathcal{F} \otimes L^{q-1}, L) = \mathcal{K}_{p,0}(X, \mathcal{F} \otimes L^q, L).$$

(2)上例的讨论也可以推广到高阶同调群上, 即考虑 $S(V)$-模

$$R^i(\mathcal{F}, L) = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes q}).$$

Koszul 复形的定义也可以推广到向量丛上. 下面列举几例.

例 3.1.4　设 E 是 X 上的秩 r 向量丛, L 是线丛, 并有态射 $\sigma : E \to L$. 我们构造复合映射

$$\delta : \wedge^p E \otimes L^q \xrightarrow{\iota\otimes id} \wedge^{p-1} E \otimes E \otimes L^q \xrightarrow{id\otimes\sigma\otimes id} \wedge^{p-1} E \otimes L \otimes L^q \xrightarrow{id\otimes\mu} \wedge^{p-1} E \otimes L^{q+1},$$

这里 μ 是线丛的乘法. 由此可诱导 Koszul 复形

$$\mathcal{K}_\bullet(\sigma) : \cdots \longrightarrow \wedge^p E \otimes L^q \xrightarrow{\delta} \wedge^{p-1} E \otimes L^{q+1} \longrightarrow \cdots$$

设 $Z = Z(\sigma)$ 是 $\sigma \in H^0(X, E^\vee \otimes L)$ 的零点概型. 我们可以把上述复形改写成如下形式

$$0 \longrightarrow \wedge^r E \otimes L^{-r} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^2 E \otimes L^{-2} \longrightarrow E \otimes L^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

该复形在 Z 之外的地方都是正合的. 特别地, 如果 X 是光滑簇且 σ 是*正则截面* (Regular section), 即其零点集 $Z = Z(\sigma)$ 的余维数恰好是 $r = \operatorname{rk} E$, 那么它整体上也正合.

若取 L 为平凡线丛时, 则 $\delta = \iota_\sigma$. 此时有复形

$$\mathcal{K}_\bullet(\sigma) : \wedge^r E \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^p E \xrightarrow{\iota_\sigma} \wedge^{p-1} E \longrightarrow \cdots \mathcal{O}_X.$$

这就是复形 (3-3) 的推广. ■

例 3.1.5　设 $V = H^0(X, L)$ 以及赋值映射 $\mathrm{ev} : V \otimes \mathcal{O}_X \to L$. 在例 3.1.4 中取 $E = V \otimes \mathcal{O}_X$, 则可诱导 Koszul 复形

$$\mathcal{K}.(X, L) : \cdots \longrightarrow \wedge^p V \otimes L^q \longrightarrow \wedge^{p-1} V \otimes L^{q+1} \longrightarrow \cdots \tag{3-6}$$

如果对该复形作用整体截面函子, 就得到例 3.1.3 中由 $S(V)$-模 $R(L)$ 诱导的 Koszul 复形.

今取 $X = \mathbb{P}(V^\vee)$, $L = \mathcal{O}_X(1)$, 则可诱导 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow \wedge^r V \otimes \mathcal{O}_X(-r) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^2 V \otimes \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

对该正合列乘以 $\mathcal{O}_X(n)$, 并取整体截面, 即得例 3.1.2 中的复形. ■

例 3.1.6 我们将例 3.1.2 中的复形 (3-5) 推广到秩 r 向量丛 E 上, 即得正合复形

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \wedge^r E\otimes S^{k-r}E \longrightarrow \wedge^{r-1}E\otimes S^{k-r+1}E \longrightarrow \cdots\\ \longrightarrow \wedge^2 E\otimes S^{k-2}E \longrightarrow E\otimes S^{k-1}E \longrightarrow S^kE \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

我们也可以利用例 3.1.4 来得到该复形. 考虑射影丛 $\bar\pi:\mathbb{P}(E^\vee)\to X$. 我们有满射 $\sigma:\bar\pi^*E\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ (见例 1.3.2). 由例 3.1.4, 即得复形

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \wedge^r\bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(k-r) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^2\bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(k-2)\\ \longrightarrow \bar\pi^*E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(k-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(k) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

对以上正合列取正像层即得. ■

3.1.3 Green 定理

我们在这一节介绍 Green 关于 Koszul 同调的几个重要结果. 为此先做一些准备工作.

以下设 X 是光滑射影簇, L 是 X 上由整体截面生成的线丛, $V\subseteq H^0(X,L)$ 生成 L, $M_{V,L}$ 是核丛 (若 $V=H^0(X,L)$ 则 简记为 M_L), 来自正合列

$$0 \longrightarrow M_{V,L} \longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

命题 3.1.4 *设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层. 我们有如下同构*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{p,q}(X,\mathcal{F},L,V) &\cong \mathrm{Coker}\left(\wedge^{p+1}V\otimes H^0(X,\mathcal{F}\otimes L^{q-1})\to H^0(X,\mathcal{F}\otimes\wedge^p M_{V,L}\otimes L^q)\right)\\ &\cong \mathrm{Ker}\left(H^1(X,\mathcal{F}\otimes\wedge^{p+1}M_{V,L}\otimes L^{q-1})\to\wedge^{p+1}V\otimes H^1(X,\mathcal{F}\otimes L^{q-1})\right).\end{aligned}$$

证明 我们这里讨论特殊情形: $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$, $V=H^0(X,L)$. 一般情形可类似证明.

首先, 我们有 Koszul 复形

$$\bigwedge^{p+1}V\otimes H^0(X,L^{q-1}) \longrightarrow \bigwedge^{p}V\otimes H^0(X,L^{q}) \longrightarrow \bigwedge^{p-1}V\otimes H^0(X,L^{q+1}). \tag{3-7}$$

此外, 我们有正合列

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow \textstyle\bigwedge^{p+1}M_L\otimes L^{q-1} \longrightarrow \bigwedge^{p+1}V\otimes L^{q-1} \longrightarrow \bigwedge^{p}M_L\otimes L^{q} \longrightarrow 0,\\ &0 \longrightarrow \textstyle\bigwedge^{p}M_L\otimes L^{q} \longrightarrow \bigwedge^{p}V\otimes L^{q} \longrightarrow \bigwedge^{p-1}M_L\otimes L^{q+1} \longrightarrow 0,\\ &0 \longrightarrow \textstyle\bigwedge^{p-1}M_L\otimes L^{q+1} \longrightarrow \bigwedge^{p-1}V\otimes L^{q+1} \longrightarrow \bigwedge^{p-2}M_L\otimes L^{q+2} \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{3-8}$$

使用正合列 (3-7) 及 (3-8), 并利用习题 3.4 (2), 我们得到交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \bigwedge^{p+1}V\otimes H^0(X,L^{q-1}) \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"] & \bigwedge^{p}V\otimes H^0(X,L^{q}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \bigwedge^{p-1}V\otimes H^0(X,L^{q+1}) \\
0 \arrow[r] & H^0(\bigwedge^{p}M_L\otimes L^{q}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigwedge^{p}V\otimes H^0(X,L^{q}) \arrow[r, "\delta'"] & H^0(\bigwedge^{p-1}M_L\otimes L^{q+1}) \arrow[u] \\
 & H^1(\bigwedge^{p+1}M_L\otimes L^{q-1}) & & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

请注意, 图中左列和第二行都是正合的.

由图可得

$$\mathrm{Ker}\delta=\mathrm{Ker}\delta'=H^0(\bigwedge^{p}M_L\otimes L^q),\quad \mathrm{Im}u=\mathrm{Im}u'.$$

因此

$$\mathcal{K}_{p,q}(X,L)=\frac{\mathrm{Ker}\delta}{\mathrm{Im}u'}\cong\frac{\mathrm{Ker}\delta'}{\mathrm{Im}u}\cong\frac{H^0(\bigwedge^p M_L\otimes L^q)}{\mathrm{Im}u}=\mathrm{Coker}u.$$

另一等式来自于交换图左列的正合性. ■

推论 3.1.1　在命题 3.1.4 的条件下,

(1) $H^0(X,\bigwedge^p M_L)=0$, 对任何 $p\geq 1$ 成立.

(2) 如果 $H^1(X,L^{q-1})=0$, 那么 $\mathcal{K}_{p,q}(X,L)=0$ 的充分必要条件是 $H^1(X,\bigwedge^{p+1}M_L\otimes L^{q-1})=0$.

(3) 如果 $H^1(X,L)=0$, 那么 $K_{r-1,2}(X,L)=H^1(X,\mathcal{O}_X)$, 这里 $r=\dim|L|$.

证明　(1) 若 $L=\mathcal{O}_X$, 则结论显然. 今假设 $L\ncong\mathcal{O}_X$. 此时由命题 3.1.4 得

$$H^0(X,\wedge^p M_L)=\mathcal{K}_{p,0}(X,L)=\mathrm{Ker}(\wedge^p V\to\wedge^{p-1}V\otimes V)=0.$$

(2) 直接来自命题 3.1.4.

(3) 注意到 $\wedge^r M_L\cong\mathcal{O}_X(-L)$ 即可. ■

推论 3.1.1 (3) 表明, 当 L 满足某类上同调条件时, X 的结构层的上同调有可能用 L 的 Koszul 上同调计算出来. 这个结论可以被推广到如下形式.

命题 3.1.5　设 X 是光滑射影簇, $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, L 是 X 上由整体截面生成的线丛, $V\subseteq H^0(X,L)$, $r=\dim V-1$. 如果

$$H^{q-i}(X,\mathcal{F}\otimes L^i)=H^{q-i}(X,\mathcal{F}\otimes L^{i+1})=H^q(X,\mathcal{F}\otimes L)=0,\quad i=1,\cdots,q-1,$$

那么 $H^q(X,\mathcal{F})=\mathcal{K}_{r-q,q+1}(X,\mathcal{F},L,V)$.

证明　考虑正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow V^\vee\otimes\mathcal{F}\otimes L\longrightarrow M_L^\vee\otimes\mathcal{F}\otimes L\longrightarrow 0.$$

注意 (由命题 1.1.2 (6))

$$M_L^\vee=\wedge^{r-1}M_L\otimes\det M_L^\vee=\wedge^{r-1}M_L\otimes L,$$

所以上面的正合列相当于

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\wedge^r V^\vee\otimes\mathcal{F}\otimes L\longrightarrow\wedge^{r-1}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^2\longrightarrow 0.\tag{3-9}$$

再由命题 3.1.4, 这就证明了 $q=1$ 的情形.

以下假设 $q\geq 2$. 对正合列 (3-9) 取上同调, 并应用命题条件, 我们得到

$$H^q(X,\mathcal{F})\cong H^{q-1}(X,\wedge^{r-1}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^{\otimes 2}).$$

由习题 3.8, 我们有长正合列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\wedge^{r-1}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^2\longrightarrow\wedge^{r-1}V\otimes\mathcal{F}\otimes L^2\longrightarrow\wedge^{r-2}V\otimes\mathcal{F}\otimes L^3\\ \longrightarrow\cdots\longrightarrow\wedge^{r-q+1}V\otimes\mathcal{F}\otimes L^q\longrightarrow\wedge^{r-q}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^{q+1}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

结合习题 3.7、命题 3.1.4及假设条件, 我们有

$$H^0(\wedge^{r-1}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^2)=\mathrm{Ker}(H^0(\wedge^{r-1}M_L\otimes\mathcal{F}\otimes L^2)\to H^0(\wedge^{r-1}V\otimes\mathcal{F}\otimes L^2))$$

$$= \mathrm{Coker}(H^0(\wedge^{r-q+1}V \otimes \mathcal{F} \otimes L^q) \to H^0(\wedge^{r-q}M_L \otimes \mathcal{F} \otimes L^{(q+1)}))$$
$$= \mathcal{K}_{r-q,q+1}(X, \mathcal{F}, L, V).$$

这就完成了证明. ■

推论 3.1.2　当以下两个条件之一成立时, 我们总有

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \mathcal{K}_{r-q,q+1}(X, \mathcal{F}, L), \quad r = h^0(X, L) - 1.$$

(1) L 是充分丰富除子时 (即满足命题 3.1.5 的同调条件).
(2) $\mathcal{F}$ 是 q-正则的 (见定义 3.2.1).

现在我们介绍 Green 的几个主要结果. 首先, 我们有以下的 Green 对偶定理.

定理 3.1.1 ([Gr84a], **定理** 2.c.6)　设 L 是 n 维紧复流形 X 上的线丛, E 是 X 上的向量丛, 设子空间 $V \subseteq H^0(X, L)$ 无基点, $r = \dim \mathbb{P}(V^\vee)$, 且满足 $(i = 1, \cdots, n-1)$

$$H^i(X, E \otimes (q-i)L) = 0,$$
$$H^i(X, E \otimes (q-i-1)L) = 0.$$

那么我们有

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, E, L, V)^\vee \cong \mathcal{K}_{r-n-p,n+1-q}(X, K_X \otimes E^\vee, L, V).$$

证明　我们考虑特殊情形: $V = H^0(X, L)$, $E = \mathcal{O}_X$, L 由整体截面生成. 一般情形类似可证.

由命题 (3.1.4) 及 Serre 对偶定理,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{p,q}(X, L) &\cong \mathrm{Coker}\left(\wedge^{p+1}V \otimes H^0(X, L^{q-1}) \to H^0(X, \wedge^p M_L \otimes L^q)\right)\\ &\cong \mathrm{Ker}\left(H^n(X, K_X \otimes \wedge^p M_L^\vee \otimes L^{-q}) \to \wedge^{p+1}V^\vee \otimes H^n(X, K_X \otimes L^{1-q})\right)\end{aligned}$$

注意到 M_L 是秩 r 向量丛, 且 $\wedge^r M_L = L^\vee$, 因此我们有

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, L) \cong \mathrm{Ker}\left(H^n(X, K_X \otimes \wedge^{r-p}M_L \otimes L^{1-q}) \to \wedge^{r-p}V^\vee \otimes H^n(X, K_X \otimes L^{1-q})\right)$$

我们对正合列 $0 \to M_L \to V \otimes \mathcal{O}_X \to L \to 0$ 逐次取外积, 可得长正合列 (习题 3.8)

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow \wedge^{r-p}M_L \otimes K_X \otimes L^{1-q} \longrightarrow \wedge^{r-p}V \otimes K_X \otimes L^{1-q} \longrightarrow \wedge^{r-p-1}V \otimes K_X \otimes L^{2-q}\\ &\longrightarrow \wedge^{r-p-1}V \otimes K_X \otimes L^{3-q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^{r-p-n+1}V \otimes K_X \otimes L^{n-q}\\ &\longrightarrow \wedge^{r-p-n}M_L \otimes K_X \otimes L^{n+1-q} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

由命题假设及习题 3.7 立得结论. ■

定理 3.1.2 ([Gr84a], **定理** 2.c.1)　设 $\dim X = n \geq 2$, L, V 同上, 且满足

$$H^i(X, L^{-i}) = H^i(X, L^{-i-1}) = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

那么 $\mathcal{K}_{r-n,n+1}(X, K_X, L, V) = \mathbb{C}$.

证明　利用 Serre 对偶以及 $H^0(X, L^{-1}) = 0$, 将命题条件转为

$$H^{n-i}(X, K_X \otimes L^i) = H^{n-i}(X, K_X \otimes L^{i+1}) = H^n(X, K_X \otimes L) = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

因此由命题 3.1.5 得到结论. ■

定理 3.1.3 (Green 消失定理) 设 $W \subseteq H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$ 是余维数 c 的无基点子空间. 那么当 $k+(q-1)d \geq p+c$ 时, 我们有

$$\mathcal{K}_{p,q}(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d), W) = 0.$$

特别地, 当 $k \geq d+p+c$ 时, Koszul 复形

$$\wedge^{p+1}W \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k-d)) \longrightarrow \wedge^p W \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)) \longrightarrow \wedge^{p-1}W \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k+d))$$

是正合的.

证明 考虑子空间序列

$$W = W_c \subset W_{c-1} \subset \cdots W_1 \subset W_0 = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$$

满足 $\dim W_i/W_{i+1} = 1$. 设 M_i 是 $W_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ 的核丛.

我们的目标是要证明 $\wedge^p M_i$ 是 $(p+i)$-正则的 (见定义 3.2.1). 先证 $i=0$ 的情形. 此时由正合列

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow W_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d) \longrightarrow 0,$$

容易得到 M_0 的 1-正则性. 因此 $\wedge^p M_0$ 是 p-正则的 (见习题 3.9).

由正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r] \arrow[d] & W_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r] & W_{i-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

以及蛇形引理, 我们得到正合列

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow 0.$$

对它取外积 (见命题 1.1.3 (5)), 并用归纳法, 可证 $\wedge^p M_i$ 是 $(p+i)$-正则的.

这样, 由命题条件, $\wedge^{p+1} M_c$ 也是 $k+(q-1)d+1$-正则的 (见定理 3.2.1), 故

$$H^1(\mathbb{P}^r, \wedge^{p+1} M_c \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d)^{\otimes(q-1)}) = 0.$$

再由命题 3.1.4 即得 $\mathcal{K}_{p,q}(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d), W) = 0$. ■

推论 3.1.3 设 $W \subseteq H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d))$ 是余维数 c 的无基点子空间. 那么乘法映射

$$s_k : W \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(d+k)), \quad k \geq c.$$

换言之, 次数大于等于 $d+c$ 的齐次多项式必落在 W 生成的理想中.

证明 在定理 3.1.3 中取 $p=q=0$ 即得. ■

3.2 Castelnuovo-Mumford 正则性

3.2.1 Castelnuovo-Mumford 引理

定义 3.2.1 (Castelnuovo-Mumford 正则性) (1) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^r$ 上的凝聚层, 如果它满足

$$H^i(\mathcal{F}(m-i)) = 0, \quad \forall i > 0,$$

我们就称 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的.

(2) 设 X 是光滑射影簇, L 是 X 上由整体截面生成的丰富线丛, $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层. 如果

$$H^i(X,\mathcal{F}\otimes L^{m-i})=0,\quad \forall i>0,$$

那么我们称 $\mathcal{F}$ 关于 L 是 m-正则的.

例 3.2.1 (1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)$ 是 $(-m)$-正则的.

(2) 设 $L\subseteq\mathcal{P}^r$ 是线性子空间, 那么理想层 $\mathscr{I}_L$ 是 1-正则的. ■

定理 3.2.1 (Castelnuovo-Mumford **引理**, [Mum66]) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^r$ 上的 m-正则凝聚层. 那么对任何 $k\geq 0$,

(1) 我们有满射

$$H^0(\mathbb{P}^r,\mathcal{F}(i))\otimes H^0(\mathbb{P}^r,\mathcal{O}(1))\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r,\mathcal{F}(i+1)),\quad i\geq m.$$

(2) $\mathcal{F}$ 是 $(m+k)$-正则的.

(3) $\mathcal{F}(m+k)$ 由整体截面生成.

证明 我们对 r 施归纳法. $r=0$ 时, 诸结论显然. 对一般情形, 我们取充分一般的超平面 H. 考虑正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{F}(k-1)\longrightarrow\mathcal{F}(k)\longrightarrow\mathcal{F}_H(k)\longrightarrow 0. \tag{3-10}$$

取同调得正合映射 $(k=m-i)$

$$H^i(\mathcal{F}(m-i))\longrightarrow H^i(\mathcal{F}_H(m-i))\longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1)).$$

因此 $\mathcal{F}$ 的 m-正则性蕴含着 $\mathcal{F}_H$ 在 H 上的 m-正则性. 由归纳假设, $\mathcal{F}_H$ 是 $(m+1)$-正则, 因而 $H^{i+1}(\mathcal{F}_H(m-i))=0$. 再利用正合列 (3-10) (取 $k=m-i$) 得

$$H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i-1))\longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i))\to 0$$

结合 $\mathcal{F}$ 的 m-正则性, 即得 $H^{i+1}(\mathcal{F}(m-i))=0$ $(\forall i\geq 0)$. 这就证明了 $\mathcal{F}$ 是 $(m+1)$-正则性. 依次类推, 即得 $\mathcal{F}$ 的 $(m+k)$-正则性.

考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathcal{F}(k-1))\otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"] & H^0(\mathcal{F}_H(k-1))\otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathcal{F}(k-1)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}(k)) \arrow[r, "\nu"] & H^0(\mathcal{F}_H(k))
\end{tikzcd}$$

如果 $k>m$, 则由性质 (2) 知 $H^1(\mathcal{F}(k-2))=0$, 从而由正合列 (3-10) 可得 σ 的满射性. 由归纳假设及性质 (1), τ 在 $k>m$ 时也是满的. 这就得到 $\nu(\mathrm{Im}\mu)=H^0(\mathcal{F}_H(k))$. 因而 $H^0(\mathcal{F}(k))$ 由 $\mathrm{Im}\mu$ 及 $H^0(\mathcal{F}(k-1))$ 张成. 注意

$$\mathrm{Im}\left(H^0(\mathcal{F}(k-1))\hookrightarrow H^0(\mathcal{F}(k))\right)=H^0(\mathscr{I}_H(\mathcal{F}(k))).$$

因而其中的截面的零点集包含 H, 故可以看成 $\mathrm{Im}\mu$ 中的元素, 因此 μ 是满射. 这就证明了 $\mathcal{F}$ 满足性质 (1).

由 Serre 定理, 对充分大的 k, $\mathcal{F}(k)$ 由整体截面生成. 因此结合性质 (1) 得到满射

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k-m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{F}(k).$$

它可以通过 $H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k-m) \to \mathcal{F}(k)$ 分解. 由此即知 $\mathcal{F}(m)$ 由整体截面生成. ■

注 3.2.1 (1) 用 $\mathcal{F}(m)$ 替代 $\mathcal{F}$, 上述结论条件实际上等价于 0-正则条件.
(2) 上述结论也表明, $\mathbb{P}^n$ 上的凝聚层不可能对任何整数 m 都是 m-正则的. 若不然, $\mathcal{F}(m)$ 都是由整体截面生成. 但当 $m \ll 0$ 时, 这是不可能的. 因此当我们用某个 $\mathcal{F}(m)$ 代替 $\mathcal{F}$ 后, 可以假设 $\mathcal{F}$ 是 0-正则, 但不是 (-1)-正则. ■

我们也可以对上面的结论稍作修改, 得到如下有用的结论.

定理 3.2.2 ([Mum70]) *设 L 是由整体截面生成的丰富线丛, $\mathcal{F}$ 是 X 上关于 L 的 m-正则凝聚层. 那么对任何 $k \geq 0$,*
(1) 我们有满射

$$H^0(X, \mathcal{F} \otimes L^m) \otimes H^0(X, L^k) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F} \otimes L^{m+k}).$$

(2) $\mathcal{F}$ 是 $(m+k)$-正则的.
(3) $\mathcal{F} \otimes L^{m+k}$ 由整体截面生成.

证明 这里我们采用 Koszul 复形的观点重新证明此结论. 具体细节可参看 [Laz04I, 定理 1.8.5].

对充分大的 l, $\mathcal{F} \otimes L^{m+l}$ 由整体截面生成. 因此性质 (1) 蕴含着 $\mathcal{F} \otimes L^m$ 也是整体截面生成 (类似定理 3.2.1 的讨论). 以下我们只需要证明 (1)(2) 对 $k=1$ 的情形成立即可.

设 $V = H^0(X, L)$. 由 Koszul 复形 (3-6) 得

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{r+1} V \otimes L^{-r-1} \cdots \longrightarrow \bigwedge^{2} V \otimes L^{-2} \longrightarrow V \otimes L^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

对它张量 $\mathcal{F} \otimes L^{m+1}$ 得

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{3} V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-2} \longrightarrow \bigwedge^{2} V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-1} \longrightarrow V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L^{m+1} \longrightarrow 0.$$

由 $\mathcal{F}$ 的 m-正则性, 我们有

$$H^i(X, \wedge^{i+1} V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-i}) = 0.$$

利用上述消失性以及将长正合列分成短正合列计算, 我们就得到了性质 (1).

类似考虑正合列

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^{3} V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-3} \longrightarrow \bigwedge^{2} V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-2} \longrightarrow V \otimes \mathcal{F} \otimes L^{m-1} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes L^{m} \longrightarrow 0.$$

类似地计算同调可得性质 (2). ■

注 3.2.2 如果仅要求 L 是无基点的线丛, 并取 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, 定理 (3.2.1) (1) 也成立. ■

下面的结论给出了 m-正则性的析解判则.

命题 3.2.1 (线性析解) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^r$ 上的凝聚层. 以下条件彼此等价:
(1) $\mathcal{F}$ 是 m-正则的.
(2) $\mathcal{F}$ 有长正合列析解

$$\cdots \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-m-2) \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-m-1) \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-m) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{3-11}$$

证明 (2) $\Longrightarrow$ (1) 留作习题 (见习题 3.9 (1)).

(1) $\Longrightarrow$ (2) 由定理 3.2.1, $\mathcal{F}(m)$ 由整体截面生成. 设 $V = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m))$, 我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-m) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

我们要证明 $\mathcal{F}_1$ 是 $(m+1)$-正则的. 这样, 我们可以依此类推, 递归地诱导出 (2) 中的长正合列. 首先, 由上述正合列, 我们有 $H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_1(m)) = 0$ 以及

$$H^{i+1}(\mathcal{F}_1(m-i)) = H^i(\mathcal{F}(m-i)) = 0, \quad i > 0.$$

这就得到 $\mathcal{F}_1$ 的 $(m+1)$-正则性. ■

注 3.2.3 尽管大多数情况下, 我们讨论 $\mathbb{P}^r$ 上的凝聚层的正则性就足够了, 并且很多结论都可以过渡到 $X \subseteq \mathbb{P}^r$ 的情形, 但也并非任何时候都能推广. 比如命题 3.2.1, 对 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ 来说, 虽有平凡的线性析解, 但未必是 0-正则的. ■

3.2.2 Castelnuovo-Mumford 正则性指标

设 $\mathcal{F}, L$ 同前. 我们可以定义 $\mathcal{F}$ 关于 L 的 Castelnuovo-Mumford 正则性指标

$$\mathrm{reg}_L(\mathcal{F}) = \min\{m |\ \mathcal{F} \text{ 关于 } L \text{ 是 m-正则的}\}.$$

我们将分别从 Koszul 上同调与合冲层的角度去理解它.

命题 3.2.2 假设 $\mathcal{F}$ 是 $(m+1)$-正则的. 那么 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的当且仅当 $\mathcal{K}_{p,m+1}(X, \mathcal{F}, L) = 0$ 对所有 p 都成立. 特别地,

$$\mathrm{reg}_L(\mathcal{F}) = \min\{m |\ \mathcal{K}_{p,m+1}(X, \mathcal{F}, L) = 0, \ \forall p\}.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 此时已知

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{m+1-i}) = H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-i}) = 0, \quad i > 0.$$

设 $r = h^0(X, L) - 1$. 当 $p \geq r$ 时, $\wedge^{p+1} M_L = 0$, 故由命题 3.1.4 知 $\mathcal{K}_{p,m+1}(X, \mathcal{F}, L) = 0$. 今假设 $p < r$, 并设 $q = r - p (> 0)$. 此时 $\mathcal{K}(p.m+1)(X, \mathcal{F}, L) = \mathcal{K}_{r-q,q+1}(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-q}, L)$. 由于 $\mathcal{F}$ 是 m-正则, 所以 $\mathcal{F} \otimes L^{m-q}$ 是 q-正则. 特别地, $\mathcal{F} \otimes L^{m-q}$ 满足命题 3.1.5 的诸同调条件. 因此由推论 3.1.2, 这就得到

$$\mathcal{K}_{p,m+1}(X, \mathcal{F}, L) = \mathcal{K}_{r-q,q+1}(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-q}, L) \cong H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-q}) = 0.$$

最后一个等式来自 $\mathcal{F}$ 的 m-正则性.

($\Longleftarrow$) 将推论 3.1.2 应用到 i-正则的层 $\mathcal{F} \otimes L^{m-i+1}$ 上, 我们得到

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-i}) \cong K_{r-i,i+1}(X, \mathcal{F} \otimes L^{m-i+1}) = \mathcal{K}_{r-i,m+1}(X, \mathcal{F}, L) = 0.$$

由此即得证. ■

$\mathrm{reg}_L(\mathcal{F})$ 也可以从 $\mathcal{F}$ 的极小自由析解来考虑 (见定义 3.3.1). 考虑这样的极小自由析解

$$0 \longrightarrow E_{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

这里

$$E_p = \oplus_i S(-a_{p,i}).$$

我们记

$$a_p := \max_i \{a_{p,i}\}.$$

命题 3.2.3 *$\mathcal{F}$ 是 m-正则的当且仅当 $a_p \leq p + m$ 对所有 p 成立. 特别地,*

$$\mathrm{reg}_L(\mathcal{F}) = \max_p \{a_p - p\}.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 此时对任何 $k \geq 0$, $\mathcal{F}$ 是 $m+k$-正则的. 由命题 3.2.2,

$$K_{p,m+k+1}(X, \mathcal{F}, L) = 0, \quad p \geq 0,\ k \geq 0.$$

利用命题 3.3.1, 这相当于 (记号意义见该命题)

$$M_{p,m+k+1+p} = 0, \quad p \geq 0,\ k \geq 0.$$

注意到 a_p 就是使得 $M_{p,a_p} \neq 0$ 的最大下标, 因此这就有 $a_p \leq m + p$.

($\Longleftarrow$) 此时的条件等价于

$$K_{p,m+k+1} = M_{p,m+k+1+p} = 0, \quad p \geq 0,\ k \geq 0.$$

因此 $\mathrm{reg}_L(\mathcal{F}) \leq m$, 故 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的 (定理 3.2.2). ■

例 3.2.2 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是射影子簇, $\mathscr{I}_X$ 是理想层. 如果 $\mathcal{I}_X$ 是 m-正则的, 我们就称 X 是 m-正则的. 这个条件等价于

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(m-i)) = 0, \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

当 X 是完全交时 (由 $d_1, \cdots, d_r$ 次超曲面相交得到), 此时极小自由析解就是

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d_r) \longrightarrow \mathscr{I}_X.$$

由命题 3.2.3,

$$\mathrm{reg}_L(\mathscr{I}_X) = \sum_{i=1}^{r} (d_i - 1).$$ ■

3.2.3 相对正则性

设 $f : X \to Y$ 是光滑射影簇之间的正常满态射. 设 A 是 X 上的线丛, 它相对 f 是丰富的 (定义见习题 2.6), 有满的典范的映射

$$f^* f_* A \longrightarrow A.$$

注 3.2.4 当 A 由整体截面生成时, 上面的态射总是满的. ■

定义 3.2.2 (**相对正则性**) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, 如果
$$R^i f_*(\mathcal{F}\otimes A^{\otimes(m-i)})=0,\quad i>0,$$
我们就称 $\mathcal{F}$ 关于 A 和 f 是 m-正则的.

类似定理 3.2.1 和定理 3.2.2, 我们有如下相对性的结论 (留作习题).

定理 3.2.3 设 $\mathcal{F}$ 关于 A 和 f 是 m-正则的. 那么对任何 $k\geq 0$, 都有

(1) 我们有满态射
$$f^*f_*(\mathcal{F}\otimes A^{\otimes(m+k)})\longrightarrow \mathcal{F}\otimes A^{\otimes(m+k)}.$$

(2)
$$f_*(\mathcal{F}\otimes A^{\otimes m})\otimes f_*(A^{\otimes k})\longrightarrow f_*(\mathcal{F}\otimes A^{\otimes(m+k)})$$
是满态射.

(3) $\mathcal{F}$ 关于 A 和 f 是 $(m+k)$-正则的.

上面的概念可以应用到射影丛上. 设 $\bar{\pi}:\mathbb{P}(E^\vee)\to X$ 是 X 上的射影丛, $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的凝聚层. 我们取 $A=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$. 如果
$$R^i\bar{\pi}_*\left(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m-i)\right)=0,$$
则简称 $\mathcal{F}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 m-正则的.

推论 3.2.1 ([Gr84a], **例** 1.8.25) 若 $\bar{\pi}:\mathbb{P}(E^\vee)\to X$ 是 X 上的射影丛, $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上关于 $\bar{\pi}$ 是 m-正则的凝聚层, 那么对 $k\geq 0$,

(1) 我们有满态射
$$\bar{\pi}^*\bar{\pi}_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m))\longrightarrow\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m).$$

(2) 对任何 $k\geq 0$, 都有满态射
$$\bar{\pi}_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m))\otimes\bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(k))\longrightarrow\bar{\pi}_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m+k)).$$

(3) $\mathcal{F}$ 关于 f 是 $(m+1)$-正则的.

相对正则性有如下判则.

命题 3.2.4 (**相对正则性判则** [But94], **引理** 3.1) 设 $\bar{\pi}:\mathbb{P}(E^\vee)\to X$ 是 X 上的射影丛, $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的向量丛. 那么以下条件彼此等价:

(1) $\mathcal{F}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 m-正则的;

(2) 对任何 $x\in X$,
$$h^i\left(\bar{\pi}^{-1}(x),\mathcal{F}(m-i)\big|_{\bar{\pi}^{-1}(x)}\right)=0\ \ (\forall i>0).$$

(3) $\mathcal{F}$ 有如下的析解, 其中 $\mathcal{F}_i$ 是 X 上的向量丛,

$$\cdots \longrightarrow \bar{\pi}^*\mathcal{F}_2(-m-2) \longrightarrow \bar{\pi}^*\mathcal{F}_1(-m-1) \longrightarrow \bar{\pi}^*\mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

证明 (1)(3) 的等价性证明类似于命题 3.2.1, 留给读者完成. (2) 推出 (1) 是显然的. 以下证明 (1) 蕴含 (2).

由于 $\bar{\pi}$ 的纤维是 $n-1$ 维, 因而 $R^n\bar{\pi}_*(\mathcal{F}(m-n+1))=0$. 由基变换定理以及 $R^{n-1}\bar{\pi}_*(m-n+1)=0$ (来自正则性假设), 因而 $h^{n-1}(\bar{\pi}^{-1}(x),\mathcal{F}(m-n+1)|_{\bar{\pi}^{-1}(x)})=0$.

因为 $\mathcal{F}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 m-正则的, 从而关于 $\bar{\pi}$ 也是 $(m+1)$-正则的. 这就有 $R^{n-1}\bar{\pi}_*(\mathcal{F}(m-n+2))=0$. 由基变换定理即得 $h^{n-2}(\bar{\pi}^{-1}(x),\mathcal{F}(m-n+2)|_{\bar{\pi}^{-1}(x)})=0$. 以此类推, 即得结论. ■

命题 3.2.5 ([But94], **引理** 3.2) *设 $\bar{\pi}:\mathbb{P}(E^\vee)\to X$ 是 X 上的射影丛, V (相应地, W) 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上向量丛, 关于 $\bar{\pi}$ 是 v-正则 (相应地, w-正则). 那么*

(1) *$V\otimes W$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 $(v+w)$-正则.*

(2) *如果 $v\le 1$, 则 $h^i(\mathbb{P}(E^\vee),V)=h^i(X,\bar{\pi}_*V)$.*

(3) *如果 $v\le 0$, 则存在向量丛正合列*

$$0\longrightarrow K_V\longrightarrow \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V\longrightarrow V\longrightarrow 0,$$

这里 K_V 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的.

(4) *如果 $v\le 0, w\le 0$, 那么存在满态射*

$$\bar{\pi}_*V\otimes\bar{\pi}_*W\longrightarrow \bar{\pi}_*(V\otimes W).$$

(5) *如果 $v\le 0$ 并且 $\bar{\pi}_*V$ 由整体截面生成, 那么 V 也由整体截面生成. 它的核丛 M_V 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则.*

(6) *如果 Y 是光滑曲线, $v,w\le 0$, 那么*

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(V\otimes W))\ge \mu^-(\bar{\pi}_*V)+\mu^-(\bar{\pi}_*W),$$

这里 $\mu^-(\mathcal{F})$ 指 $\mathcal{F}$ 的最后斜率 (见第 6.2.2 节).

证明 (1) 利用命题 3.2.4 (3), 类似习题 3.9 (3) 的方法可得.

(2) 此时高次正像层都消失.

(3) 此时 V 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则的, 命题 3.2.4 (3) 的正合列析解中 $\mathcal{F}_0=\bar{\pi}_*V$. 该析解诱导了 K_V 的析解, 由此可知 K_V 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的.

(4) 考虑正合列

$$0\longrightarrow K_V\otimes W\longrightarrow \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V\otimes W\longrightarrow V\otimes W\longrightarrow 0.$$

由前面讨论, $K_V\otimes W$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的. 因而上述正合列取 $\bar{\pi}_*$ 仍正合.

(5) 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}(E^\vee),\bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)} & \xrightarrow{\cong} & H^0(\mathbb{P}(E^\vee),V)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)} \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V & \xrightarrow{\alpha} & V \end{array}$$

注意到 α, β 都是满的, 故 γ 亦然.

为方便书写, 我们记 $F(x) := \bar{\pi}^{-1}(x)$, $V(x) := V|_{F(x)}$, $M_V(x) : M_V|_{F(x)}$, $M_{V(x)}$ 是 $V(x)$ 在 $F(x)$ 上的核丛. 因为 $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), V) = H^0(Y, \bar{\pi}_* V)$ 且 $\bar{\pi}_* V$ 由整体截面生成, 故有满射 $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), V) \otimes \mathcal{O}_X \to \bar{\pi}_* V$. 将它限制到纤维上即得满射

$$H^0(\mathbb{P}(E^\vee), V) \longrightarrow H^0(F(x), V(x)).$$

因而 $H^0(\mathbb{P}(E^\vee), V) = H^0(F(x), V(x)) \oplus U(x)$, 这里 $U(x) \otimes \mathcal{O}_{F(x)} \to V(x)$ 是零映射. 由此可得

$$M_V(x) = M_{V(x)} \oplus (U(x) \otimes \mathcal{O}_{F(x)}).$$

这样, $M_V(x)$ 在 $F(x)$ 上是 1-正则的. 由相对正则性判则, 这就推出 M_V 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的.

(6) 我们有

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(V \otimes W)) \geq \mu^-(\bar{\pi}_* V \otimes \bar{\pi}_* W) = \mu^-(\bar{\pi}_* V) + \mu^-(\bar{\pi}_* W).$$

上面不等式来自于命题 6.2.2, 推论 6.2.4 及 (4). ■

3.3 代数簇上的合冲

3.3.1 合冲层

定义 3.3.1 设 V 是域 k 上向量空间, $M = \oplus_q M_q$ 是有限型分次 $S(V)$-模, $m = \oplus_{d \geq 1} S^d V \subseteq S(V)$. 考虑 M 的自由析解

$$\cdots \longrightarrow F_{p+1} \xrightarrow{\varphi_{p+1}} F_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

如果 $\varphi_{p+1}(F_{p+1}) \subseteq mF_p$ 对所有 p 成立, 那么我们称上述析解是 M 的极小自由析解 (Minimal free resolution).

由经典结论, 任何有限生成的分次 $S(V)$-模 M 都有极小自由析解 $F_\bullet$. 由于 F_i 是有限生成的 $S(V)$-模, 我们可找有限个齐次生成元, 其中 q-次生成元张成的 k-向量空间记为 $M_{i,q}$. 这样, 该析解可写为

$$\cdots \longrightarrow \oplus_{q \geq q_1} S(-q) \otimes M_{1,q} \longrightarrow \oplus_{q \geq q_0} S(-q) \otimes M_{0,q} \longrightarrow M, \tag{3-12}$$

这里 S 是齐次坐标环, $M_{i,j}$ 是域 k 上的向量空间. 该析解在同构意义下是唯一的.

注 3.3.1 (1) 设 $\overline{F}_i = F_i \otimes_S k$, $\bar{\phi}_i = \phi_i \otimes_S \mathrm{id} : \overline{F}_{i+1} \to \overline{F}_i$. 注意 $k = S/m$, 故极小析解相当于对任何 i 都有 $\bar{\phi}_i = 0$. 特别地, $\mathrm{Tor}_i^S(M, k) = \overline{F}_i$ 是分次 S-模.

(2) 对 $\overline{F}_i = \oplus_{q \geq q_i} S(-q) \otimes M_{i,q} \otimes k$, 注意到

$$S(-q)_j \otimes_S k = \begin{cases} 0, & q \neq j, \\ S(-j)_j \otimes_S k, & q = j. \end{cases}$$

因此我们有 $\mathrm{Tor}_i^S(M, k)_j = M_{i,j}$.

(3) 设

$$m_i(M) := \min\{j |\ Tor_i^S(E, k)_j \neq 0\}.$$

由析解的极小性, $\{m_i(M)\}_{i \geq 0}$ 是严格递增序列. ■

定义 3.3.2 在析解 (3-12) 的记号下, 设 $\beta_{i,j}=\dim_k M_{i,j}$. 我们称 $\beta_{i,j}$ 为模 M 的分次 Betti 数. $M_{0,q}$ 称为模 M 的 q 次生成元空间, $M_{p,q}$ $(p\geq 1)$ 称为模 M 的 p 阶 q 次合冲 (Syzygy) 空间.

命题 3.3.1 $\mathcal{K}_{p,q}(M,V)=M_{p,p+q}$. 特别地, $\dim_k\mathcal{K}_{p,q}(M,V)=\beta_{p,p+q}$.

证明 由 k 的自由析解 (3-5), 我们得到

$$\operatorname{Tor}_p^S(M,k)_{p+q}=H_p(K_\bullet(k)\otimes M)_{p+q}=\mathcal{K}_{p,q}(M,V).$$

另一方面, 由 M 的自由析解 (3-12), 可得

$$\operatorname{Tor}_p^S(M,k)_{p+q}=H_p(F_\bullet\otimes k)=M_{p,p+q}.$$

这就得到结论. ■

推论 3.3.1 (Hilbert 合冲定理) 有限型分次 $S(V)$-模 M 都有一个分次自由析解 $F_\bullet\to M$, 其长度最多是 $\dim V$.

证明 设 $r=\mathbb{P}(V)$. 由 Koszul 同调定义, $\dim_k\mathcal{K}_{p,q}(M,V)=0$, 对任何 $p\geq r+2$ 成立. 由命题 3.3.1, $M_{p,q}=0$ $(p\geq r+2)$. 这就证明了结论. ■

$S(V)$-模 M 给了以下的 Betti 列表

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & \beta_{0,0} & \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \cdots \\
 & \beta_{0,1} & \beta_{1,2} & \beta_{2,3} & \cdots \\
 & \beta_{0,2} & \beta_{1,3} & \beta_{2,4} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

3.3.2 N_p 性质

设 X 是光滑射影簇, L 是 X 上的非常丰富线丛, 诱导嵌入映射

$$\varphi_{|L|}:X\hookrightarrow\mathbb{P}^r,\quad r=h^0(X,L)-1.$$

$S=\mathrm{Sym}H^0(X,L)$ 是 $\mathbb{P}^r$ 的齐次坐标环, $E=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}H^0(X,L^n)$ 是分次 S-模. 考虑 E 在坐标环 S 上的极小分次自由析解

$$0\longrightarrow E_{r+1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow E_1\longrightarrow E_0\longrightarrow E\longrightarrow 0,$$

这里 $E_i=\oplus_j S(-a_{ij})$. 我们可以假设

$$E_0=S\oplus\left(\bigoplus_i S(-a_{0,j})\right),\quad a_{0,j}\geq 2.$$

由于 $\varphi_{|L|}$ 的像是非退化的, 所以 E_1 中的每个 $a_{1,j}\geq 2$. 由析解的极小性进一步可知 E_i 中的 $a_{i,j}\geq i+1$ $(i=1,2,\cdots)$. 从研究角度出发, 我们首先希望考虑 E_i 尽可能简单的情形. 这就引出了如下的概念.

定义 3.3.3 (1) 如果 $E_0=S$, 我们就称 L 满足 N_0 性质或称 L 是正规生成的 (Normally generated).

(2) 给定正整数 p, 如果 $E_0 = S$, 且
$$E_i = \oplus S(-i-1), \quad 1 \le i \le p,$$
我们就称 L 满足 N_p 性质.

注 3.3.2 这里分析一下 N_p 的意义.
(1) L 满足 N_0 性质等价于
$$S^m H^0(X, L) \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes m})$$
是满射. 它蕴含着 $h^1(\mathbb{P}^r, \mathscr{I}_X(m)) = 0$ $(\forall m \ge 1)$, 这里 $\mathscr{I}_X$ 是理想层. 对于无基点的丰富线丛, 它满足 N_0 性质蕴含着它是非常丰富的. 此时我们就说 $\varphi_{|L|} : X \to \mathbb{P}^r$ 将 X 作为射影正规簇 (Projectively normal variety) 嵌入.
(2) L 满足 N_1 性质等价于 $X \subseteq \mathbb{P}^r$ 的齐次理想由二次函数生成. 此时我们也称 L 能被射影表示.
(3) L 满足 N_2 性质当且仅当 L 满足 N_1 性质并且理想层 $\mathscr{I}_X$ 中的二次生成元 Q_i, 所满足的关系都形如 $\sum L_i Q_i = 0$, 这里 L_i 是线性多项式.
(4) 由析解的极小性以及 $X \subseteq \mathbb{P}^r$ 的非退化性, 我们前面已经说明了 $(E_i)_j = 0$ $(j \le i)$. 因而 X 满足 N_p 性质等价于 $\mathrm{Tor}_i^S(E, k)_j = 0$, $j \ge i+2$, $1 \le i \le p$. ■

对非退化射影子簇 $X \subseteq \mathbb{P}^r$, 我们取 $L = \mathcal{O}_X(1)$. 如果 L 满足 N_p 性质, 我们就说 $X \subseteq \mathbb{P}^r$ 满足 N_p 性质. 设 $I \subseteq S$ 是定义 X 的理想, $R = S/I$. 如果 X 满足 N_0 性质, 那么 $E = R$, 上面析解也可以写为
$$0 \longrightarrow E_{r+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$
设 $\mathscr{I}_X$ 是 X 的理想层, 则
$$I = \bigoplus_{m \ge 0} H^0(\mathbb{P}^r, \mathscr{I}_X(m)).$$

命题 3.3.2 给定整数 $p \le \mathrm{codim}(X, \mathbb{P}^r)$. 假设 X 满足 N_0 性质, 那么以下条件彼此等价

(1) $X \subseteq \mathbb{P}^r$ 满足 N_p 性质.

(2) X 满足
$$\mathrm{Tor}_p^S(E, k)_j = 0, \quad j \ge p+2.$$

进一步, 如果 $\mathscr{I}_X$ 是 3-正则的, 那么上述条件也等价于以下条件之一:

(1) $\mathrm{Tor}_p^S(E, k)_{p+2} = 0$.

(2) Koszul 复形
$$\wedge^{p+1} V \otimes V \longrightarrow \wedge^p V \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) \longrightarrow \wedge^{p-1} V \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(3))$$
是正合的, 这里 $V := H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_X(1))$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)(3) 显然.
(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $\dim X = n$, $E_i^\vee = \mathrm{Hom}(E_i, S)$. 我们将使用如下事实:
$$Ext^i(E, S) = 0, \quad \forall i < r-n.$$

由此诱导正合序列

$$0 \longrightarrow E_0^\vee \longrightarrow E_1^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{r-n-1}^\vee \longrightarrow E_{r-n}^\vee.$$

它给出了 $F := \mathrm{coker}(E_{r-n-1}^\vee \to E_{r-n}^\vee)$ 的极小自由析解.

定义

$$m_i(F) = \min\{j |\ Tor_i^S(F,k)_j \neq 0\},$$
$$M_i(E) = \max\{j |\ Tor_i^S(E,k) \neq 0\}.$$

比较两组析解可知 $M_i(E) = -m_{r-n-i}(F)$ $(i = 0, \cdots, r-n)$. 结合注记 3.3.1 (3), 这就得到严格递增序列

$$M_1(E) < M_2(E) < \cdots < M_{r-n-1} < M_{r-n}.$$

由命题条件, $M_p(E) \leq p+1$. 因此 $M_i(E) \leq i+1$ $(i = 1, \cdots, p)$, 即 $\mathrm{Tor}_i^S(E,k)_j = 0$ $(1 \leq i \leq p$, $j \geq i+2)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 由命题 3.2.1 及 $\mathscr{I}_X$ 的 3-正则性, 我们有线性析解

$$\cdots \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-5) \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-4) \longrightarrow \oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-3) \longrightarrow \mathscr{I}_X \longrightarrow 0.$$

由此推得 $\mathrm{Tor}_i^S(E,k)_j = 0$ $(j \geq i+3)$. 结合 (2) 和命题条件, 即知其满足 N_p 性质.

(1) $\Longleftrightarrow$ (4) 由 X 的退化性, $E_1 = H^1(X, \mathcal{O}_X(1))$. 由于 $\mathscr{I}_X$ 是 3-正则的, 所以有短正合列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathscr{I}_X(m)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \longrightarrow 0.$$

这表明 $E_m = H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$. 再利用命题 3.3.1 即 (2), 即得结论. ■

命题 3.3.3 ([GrLa89], **引理** 1.10) 设 L 是非常丰富线丛且满足 $H^i(X, L^{2-i}) = 0$ 对任何 $i > 0$ 成立. 给定非负整数 $p \leq \mathrm{codim}(X, \mathbb{P}^r)$, 那么 L 满足 N_p 性质当且仅当核丛 M_L 满足 $H^1(X, \wedge^{q+1}M_L \otimes L) = 0$, 对任何 $0 \leq q \leq p$ 成立.

证明 先讨论 $p = 0$ 的情形. 考虑正合列同调

$$H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^{\otimes 2}) \to H^1(M_L \otimes L) \to H^0(L) \otimes H^1(L)$$

因为 $H^1(L) = 0$, 所以 $H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^{\otimes 2})$ 是满射当且仅当 $H^1(M_L \otimes L) = 0$. 因此此时命题等价于证明: L 是正规生成的当且仅当 $H^0(L) \otimes H^0(L) \to H^0(L^{\otimes 2})$ 是满射. 必要性是显然. 下证充分性. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
H^0(L)^{\otimes m} \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\beta"'] & H^0(L^{\otimes 2}) \otimes H^0(L)^{\otimes m-2} \arrow[r, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, "\gamma_{m-2}"] & H^0(L^{m-1}) \otimes H^0(L) \arrow[d, "\gamma_{m-1}"] \\
S^m H^0(L) \arrow[rrr, "\alpha"] & & & H^0(L^{\otimes m})
\end{tikzcd}$$

由定理 3.2.2 知 $\gamma_2, \cdots, \gamma_{m-2}$ 是满射. 因此 γ_1 的满射性蕴含着 α 的满射性.

下面讨论 $p \geq 1$ 的情形. 不妨假设 L 是正规生成的. 我们要证明 L 满足 N_p 性质当且仅当

$$H^1(X, \wedge^{q+1}M_L \otimes L) = 0 \quad 1 \leq q \leq p.$$

由于 L 是正规生成的, 所以 $h^1(\mathbb{P}^r, \mathscr{I}_X(m)) = 0$. 考虑正合列

$$H^{i-1}(X, L^{3-i}) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^r, \mathscr{I}_X(3-i)) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(3-i)), \quad i > 1.$$

由 L 的同调假设, 可推出 $\mathscr{I}_X$ 的 3-正则性. 由命题 3.3.2, L 满足 N_p 性质等价于有 Koszul-复形短正合列 ($V=H^0(X,L)$)

$$\bigwedge^{p+1} V\otimes V \longrightarrow \bigwedge^{p} V\otimes H^0(X,L^2) \longrightarrow \bigwedge^{p-1} V\otimes H^0(X,L^3). \tag{3-13}$$

由推论 3.1.1 (2) 立得. ■

推论 3.3.2 设 X 是光滑射影曲面满足 $p_g(X)=0$, L 是非常丰富除子, 满足 $H^1(L)=0$. 那么 L 是正规生成的当且仅当 $H^1(M_L\otimes L)=0$.

3.3.3 有限点集上的合冲问题

设 V 是域 k 上的 $r+1$ 维空间, p 是给定正整数, 满足 $1\le p\le r$

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2r+1-p}\}\subseteq \mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^r.$$

是由 $2r+1-p$ 个线性一般位置的点构成的有限点集, 即任何 $r+1$ 个点都不可能落在同一超平面内. 因为一般位置上的 $2r+1$ 个点给出二次元的独立性条件, 所以由直接计算可知 $\mathscr{I}_X$ 是 3-正则的.

定理 3.3.1 ([GrLa89], **定理** 2.1) X 满足 N_p 性质.

证明 由及命题 3.3.2, 为了验证 X 是否满足 N_p 性质, 我们只需要验证以下 Koszul 复形正合

$$\bigwedge^{p+1} V\otimes V \xrightarrow{a} \bigwedge^{p} V\otimes H^0(X,\mathcal{O}_X(2)) \xrightarrow{b} \bigwedge^{p-1} V\otimes H^0(X,\mathcal{O}_X(3)). \tag{3-14}$$

引理 3.3.1 设

$$Y=\{y_1,\cdots,y_N\}\subseteq \mathbb{P}^r$$

是由 $N(\le r+1)$ 个一般位置的点 (即任何一点都不落在其他点张成的子空间内) 构成的有限集. 那么我们有正合列

$$\bigwedge^{p+1} V\otimes V \xrightarrow{a} \bigwedge^{p} V\otimes H^0(Y,\mathcal{O}_Y(2)) \xrightarrow{b} \bigwedge^{p-1} V\otimes H^0(Y,\mathcal{O}_Y(3)).$$

证明 取 V 的一组基 $s_1,\cdots,s_{r+1}$ 使得 $s_i(y_j)=\delta_{ij}$. 设 $\{e^i\}_{i=1}^N$ 是 $H^0(Y,\mathcal{O}_Y(q))$ 对应的基. 设

$$\alpha=\sum_i\sum_{j_1<\cdots<j_p}\alpha_i^{j_1\cdots j_p}s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\otimes e^i.$$

由直接计算可知 $\alpha\in \mathrm{Ker}b$ 当且仅当

$$\alpha_i^{j_1\cdots j_p}=0,\quad i\in\{j_1,\cdots,j_p\}.$$

因此 $\mathrm{Ker}b$ 由形如

$$s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\otimes e^i,\quad i\notin\{j_1,\cdots,j_p\}$$

的元生成.

今取

$$\alpha=s_{j_1}\wedge\cdots\wedge s_{j_p}\otimes e^i,$$

$$\beta = s_{j_1} \wedge s_{j_2} \cdots \wedge s_{j_p} \wedge s_i \otimes e^i, \quad i \notin \{j_1, \cdots, j_p\}.$$

我们有 $a(\beta) = \pm\alpha$. 这就证明了正合性. ■

设 $X = X_1 \cup X_2$, 其中

$$X_1 = \{x_1, \cdots, x_{r+1}\}, \quad X_2 = \{x_{r+2}, \cdots, x_{2r+1-p}\}.$$

取 V 的一组基 $s_1, \cdots, s_{r+1}$ 使得 $s_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \le i, j \le r+1)$. 设 $\{e^i\}_{i=1}^N$ 是 $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ 的基, 其中 e^i 对应 s_i $(1 \le i \le r+1)$. 这样, 序列 (3-14) 可以分拆成

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes V \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{p} V \otimes H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(2)) \xrightarrow{b_1} \bigwedge^{p-1} V \otimes H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(3)). \tag{3-15}$$

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes V \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{p} V \otimes H^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(2)) \xrightarrow{b_2} \bigwedge^{p-1} V \otimes H^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(3)). \tag{3-16}$$

由引理 3.3.1, Koszul 复形 (3-15) 是正合的. 因此, 为验证 X 是否满足 N_p, 我们只需要验证: 在Koszul 复形 (3-16) 中, 对任何

$$\alpha = s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p} \otimes e^i, \quad i \notin \{j_1, \cdots, j_p\}, \quad 1 \le i, j_1, \cdots, j_p \le r+1,$$

是否总存在 $\beta \in \bigwedge^{p+1} V \otimes V$ 使得 $a_2(\beta) = \alpha$, 并且 $a_1(\beta) = 0$. 因为 X 中的点是线性一般位置的, 故存在唯一的超平面包含 $X_2 \cup \{x_{j_1} \cup \cdots x_{j_p}\}$ 且不过 x_i. 今取 $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \lambda_k s_k$ 对应该超平面. 令

$$\beta = s_{j_1} \wedge s_{j_2} \cdots \wedge s_{j_p} \wedge s_i \otimes \sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k s_k.$$

由直接计算可知, $a_1(\beta) = \pm\alpha$, $a_2(\beta) = 0$. ■

[GrLa89] 提出如下有趣的猜想:
如果上述 X 不满足 N_p 性质, 那么存在子集 $Y \subseteq X$, 使得 Y 至少包含 $2s+2-p$ 个点, Y 含在某个线性子空间 $\mathbb{P}^s$ 内, 并且 Y 在该子空间中不满足 N_p.

本章习题

习题 3.1 验证式 (3-1) 及式 (3-2).

习题 3.2 求 $V^\vee \otimes V = Hom(V, V)$ 中单位元 1_V 具体的张量积表达式, 并证明内积映射 $\iota : \wedge^p V \to \wedge^{p-1} V \otimes V$ 可以通过 1_V 诱导的通常缩并映射得到.

习题 3.3 验证命题 3.1.1.

习题 3.4 设 $x \in V^\vee$, $W_x = \mathrm{Ker}(\langle x, * \rangle : V \to \mathbb{C})$. 证明:
(1) 对每个 $p \ge 1$, 都有正合列

$$0 \longrightarrow \wedge^p W_x \longrightarrow \wedge^p V \longrightarrow \wedge^{p-1} W_x \longrightarrow 0.$$

(2) 内积映射 $\iota_x : \wedge^p V \to \wedge^{p-1} V$ 可以通过 $\wedge^{p-1} W_x$ 分解, 即有

$$\wedge^p W_x = \mathrm{Ker}(\iota_x : \wedge^p V \to \wedge^{p-1} V) = \mathrm{Im}(\iota_x : \wedge^{p+1} V \to \wedge^p V).$$

习题 3.5 验证维数公式 (3-4).

习题 3.6 证明命题 3.1.3 的结论. (提示: 利用齐次多项式的欧拉公式.)

习题 3.7 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{r+1} \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

是凝聚层的长正合列, 满足

$$H^i(X, \mathcal{F}_i) = H^i(X, \mathcal{F}_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r-1.$$

证明:

$$\operatorname{Ker}\left(H^r(X, \mathcal{F}_{r+1}) \to H^r(X, \mathcal{F}_r)\right) \cong \operatorname{Coker}\left(H^0(X, \mathcal{F}_1) \to H^0(X, \mathcal{F}_0)\right).$$

(提示: 将长正合列分拆成短正合列.)

习题 3.8 设 L 是线丛, $V \subseteq H^0(X, L)$ 生成 L, $M_{V,L}$ 是核丛. 证明: 存在如下正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\wedge^{r-p} M_{V,L} \otimes L \longrightarrow \wedge^{r-p} V \otimes L \longrightarrow \wedge^{r-p-1} V \otimes L^2 \\ &\longrightarrow \wedge^{r-p-1} V \otimes L^3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^{r-p-n+1} V \otimes L^n \longrightarrow \wedge^{r-p-n} M_{V,L} \otimes L^{n+1} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

(提示: 对正合列 $0 \longrightarrow M_{V,L} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 逐次取外积.)

习题 3.9 (1) 证明: 射影空间上的 m-正则层的扩张也是 m-正则的.
(2) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^r$ 上的凝聚层, 且有长正合列析解

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

证明: 如果 $\mathcal{F}_i$ 是 $(m+i)$-正则的, 那么 $\mathcal{F}$ 是 m-正则的.
(3) 设 $\mathcal{F}$ 是 m-正则凝聚层, E 是 k-正则向量丛, 证明: $E \otimes \mathcal{F}$ 是 $(m+k)$-正则的. 进一步, 我们有满射

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, E(k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F} \otimes E(m+k)).$$

(提示: 将 E 张量到长正合列 (3-11)), 并利用命题 (3.2.1) 及第 (2) 小题.)
(4) 设 E 是 m-正则向量丛, 证明: $T^q E$, $S^p E$ 及 $\wedge^p E$ 是 pm-正则的.

习题 3.10 验证定理 3.2.3. (提示: 不妨设 Y 是仿射的. 此时存在 $V \subseteq H^0(Y, f_*A)$ 生成 f_*A. 通过复合 $f^*f_*A \to A$, 我们有满射 $V_X = V \otimes \mathcal{O}_X \to A$. 由此可诱导 Koszul 复形

$$\cdots \longrightarrow \wedge^2 V_X \otimes \mathcal{F} \otimes A^{\otimes(m-1)} \longrightarrow V_X \otimes \mathcal{F} \otimes A^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes A^{\otimes(m+1)} \longrightarrow 0.$$

对上述正合列取高次正像层并利用相对正则条件.)

习题 3.11 验证命题 3.2.4 中 (1) 和 (3) 的等价性.

第四章　向量丛的构造

4.1　Schwarzenberger 方法

设 X,Y 是光滑簇, $\pi : X \to Y$ 是 X 到 Y 的 2 次覆盖. 对任何除子 D, $\pi_*\mathcal{O}_X(D)$ 是秩 2 向量丛 (见 [Sch61]). 这一节将讨论用此方法得到的秩 2 向量丛.

首先回顾二次覆盖的一些基本内容. 设 B 是 π 的分歧轨迹, 则 $B \equiv 2L$, 这里 L 是线丛, 来自于

$$\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-L). \tag{4-1}$$

此外, π 诱导了对合映射 $\tau : X \to X$.

对任何既约不可约除子 D, 我们定义 $\pi_*D = (\deg \pi|_D)\pi(D)$, 这里 $\deg \pi|_D = 1, 2$, 这取决于 D 是否落在分枝曲线里. 由此, 我们可以给出自然映射 $\pi_* : \mathrm{Div}X \to \mathrm{Div}Y$. 容易验证, $\pi^*\pi_*D = D + \tau(D)$. 请注意, π_*D 和 $\pi_*\mathcal{O}_X(D)$ 意义完全不同, 前者是除子, 后者是秩 2 向量丛. 我们类似的射影公式 $f_*(D \cdot \pi^*L) = f_*D \cdot L$.

命题 4.1.1 (Schwarzenberger **公式**)　*在上述记号下, 我们有*

$$c_1(\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = [\pi_*D] - [L], \qquad (\text{在 } \mathrm{Pic}Y \text{ 中}),$$
$$c_2(\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}\left((\pi_*D)^2 - \pi_*(D^2) - (\pi_*D)L\right), \qquad (\text{在 } H^4(Y, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]) \text{ 中}).$$

证明　将 D 写为不可约分支的组合 $D = \sum\limits_i n_iD_i$. 我们对 $n := \sum\limits_i |n_i|$ 施归纳法. $n = 0$ 时, $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$, 此时由式 (4-1) 及 Whitney 公式即得. 今假设对 $< n$ 情形已证.

找 $n_j \neq 0$. 不妨设 $n_j < 0$ ($n_j > 0$ 的情形类似讨论). 取 $D' = D + D_j$. D' 的系数绝对值之和严格小于 n, 因此满足归纳假设条件. 由正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D') \longrightarrow \mathcal{O}_{D_j}(D') \longrightarrow 0,$$

我们可诱导正合列 (这是因为 π 是仿射态射, 所以高次正向层取零)

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_X(D') \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{D_j}(D') \longrightarrow 0.$$

$\pi_*\mathcal{O}_{D_j}(D')$ 可以看成 $f(D_j)$ 上的秩为 $\deg \pi|_{D_1}$ 的向量丛, 故由例 1.2.11 知,

$$c_1(\pi_*\mathcal{O}_{D_j}(D')) = (\deg \pi|_{D_j})[\pi(D_j)] = [\pi_*D_j].$$

因此由 Whitney 公式及 D' 上的归纳假设, 即得

$$c_1(\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = c_1(\pi_*\mathcal{O}_X(D')) - [\pi_*D_j] = [\pi_*D'] - [L] - [\pi_*D_j] = [\pi_*D] - [L].$$

此外, 结合上面的讨论, 我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(\tau(D)) \otimes \pi^*L^\vee \longrightarrow \pi^*\pi_*\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow 0.$$

下面证明 c_2 的公式. 利用以上正合列及 Whitney 公式即得

$$\pi^*c_2(\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = c_2(\pi^*\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = D \cdot \tau(D) - D \cdot \pi^*L.$$

因此

$$\begin{aligned}2c_2(\pi_*\mathcal{O}_X(D)) &= \pi_*c_2(\pi^*\pi_*\mathcal{O}_X(D)) = \pi_*[D\cdot\tau(D) - D\cdot f^*L] \\ &= \pi_*[\frac{1}{2}(D+\tau(D))^2 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\tau(D)^2 - D\cdot\pi^*L] \\ &= \frac{1}{2}\pi_*\pi^*(\pi_*D)^2 - \frac{1}{2}\pi_*(D^2) - \frac{1}{2}\pi_*(\tau(D))^2 - \pi_*(D\cdot\pi^*L) \\ &= (\pi_*D)^2 - \pi_*(D^2) - (\pi_*D)\cdot L.\end{aligned}$$

至此完成证明. ■

例 4.1.1　考虑 Segre 嵌入 $\psi : \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ 的像曲面 X. X 上有两族直线 (分别对应 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上的两族直线), 相应的除子记为 F_1, F_2. 它们生成 Pic$X$. X 到平面的投影 $\pi : X\to\mathbb{P}^2$ 是二次覆盖.

由命题 4.1.1, 我们有

$$c_1(\pi_*\mathcal{O}_X(aF_1+bF_2)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a+b-1),\quad c_2(\pi_*\mathcal{O}_X(aF_1+bF_2)) = \frac{1}{2}(a^2-a+b^2-b).$$

利用 Horrocks 判则 (见定理 8.2.1), $\pi_*\mathcal{O}_X(aF_1+bF_2)$ 分裂的充分必要条件是 $|a-b|\le 1$ (见习题 4.2) ■

定理 4.1.1 (Schwarzenberger **定理**)　*设 Y 是光滑代数曲线或光滑射影曲面, E 是 Y 上的秩 2 向量丛. 那么存在光滑二次覆盖 $\pi : X\to Y$ 以及 X 上的线丛 L, 使得 $\mathcal{O}_Y(E) = \pi_*\mathcal{O}_X(L)$.*

证明　考虑射影丛

$$\bar\pi : \mathbb{P}(E^\vee)(:= P) \longrightarrow Y.$$

此时 $E = \pi_*\mathcal{O}_P(1)$ (见命题 1.3.2). 今取 Y 上充分丰富的线丛 L, 并令 $\mathscr{H} = \mathcal{O}_P(2)\otimes\bar\pi^*L$. $\mathscr{H}$ 诱导的线性系中存在光滑元 X, 从而诱导了光滑二次覆盖 $\pi : X\to Y$. 由正合列

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_P(1)\otimes\mathcal{O}_P(-X)\longrightarrow\mathcal{O}_P(1)\longrightarrow\mathcal{O}_P(1)|_X\longrightarrow 0$$

可诱导正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar\pi_*(\mathcal{O}_P(1)\otimes\mathscr{H}^\vee) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar\pi_*\mathcal{O}_P(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar\pi_*(\mathcal{O}_P(1)|_X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R^1\bar\pi_*(\mathcal{O}_P(1)\otimes\mathscr{H}^\vee) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\sim"] & \bar\pi_*(\mathcal{O}_P(1)|_X) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

图中的左右两侧等号可以通过直接验证茎的维数得到. 由此即得结论. ■

4.2　秩 2 向量丛的初等修正

设 X 是光滑簇, D 是 X 上的有效除子, $j : D\to X$ 是包含映射, L 是 D 上的线丛, E 是 X 上的秩 2 向量丛. 假设我们有一个满态射 $\varphi : E\to j_*L$. 令 $W = \mathrm{Ker}\varphi$. W 称为 E 的初等修正 (Elementary modification).

命题 4.2.1　*初等修正 W 是局部自由的, 它的陈类*

$$c_1(W) = c_1(E) - [D],$$

$$c_2(W) = c_2(E) - c_1(E) \cdot [D] + j_* c_1(L).$$

证明 陈类公式来自于例 1.2.12 和 Whitney 公式. 下面证明它是局部自由层. 这是个局部问题, 我们直接考虑 $x \in X$ 处的茎即可. 当 $x \notin D$ 时, $E \to j_* L$ 的茎映射是平凡的, 故不妨设 $x \in D$. 设 $s \in \mathcal{O}_{X,x}(D)$, $E \to j_* L$ 的茎映射 $\varphi_x : \mathcal{O}_{X,x} \oplus \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/s \cdot \mathcal{O}_{X,x}$. 我们可以诱导提升映射 $\bar{\varphi}_x : \mathcal{O}_{X,x} \oplus \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$, 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \oplus \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}_x"'] & \mathcal{O}_{X,x}/s \cdot \mathcal{O}_{X,x} \\
 & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

由 Nakayama 引理, $\bar{\varphi}_x$ 是满的. 注意到 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是自由模, 所以 $\bar{\varphi}_x$ 是分裂的, 它的核是 $\mathcal{O}_{X,x} \oplus \mathcal{O}_{X,x}$ 的秩 1 自由子模. 适当调整基, 可以假设 $\bar{\varphi}_x$ 是到第二个直和项的投影. 因此局部上 $W_x = \mathcal{O}_{X,x} \oplus s \cdot \mathcal{O}_{X,x}$. ■

例 4.2.1 假设 D 是既约不可约的, $\mathcal{O}_X(M)$ 是 W 的极大子线丛. 如果 $\mathcal{O}_X(M)$ 不是 E 的极大子线丛, 那么 $\mathcal{O}_X(M+D) \subseteq E$. 事实上, 由于在 $X-D$ 上, $W|_{X-D} \cong E|_{X-D}$, 因此 $\mathcal{O}_{X-D}(M)$ 也是 $E|_{X-D}$ 的极大子线丛. 这样, 对 $\mathcal{O}_X(M)$ 在 E 中的非平凡扩张 $\mathcal{O}_X(M+T)$ (这里 T 是有效除子), $\mathcal{O}_X(M+T)/\mathcal{O}_X(M)$ 的支集只能落在 D 中. 由于 D 是既约不可约的, 所以 $T = nD$ (n 是某个正整数). ■

4.3 Tan-Viehweg 方法

4.3.1 向量丛的存在性判则

设 X 是 $n(\geq 2)$ 维光滑射影簇, Z 是 X 中纯余维数 $r(\geq 2)$ 的子概型. 设 Z' 是 Z 的子概型 (即理想层满足 $I_Z \subseteq I_{Z'}$). 我们可以定义 Z' 在 Z 中的*补子概型* $Z - Z'$ (Complement of subscheme), 它由如下理想层 $I_{Z-Z'} := [I_Z : I_{Z'}]$ 确定, 即对任意开集 $U \subseteq X$, 定义

$$I_{Z-Z'}(U) := \{g \in \mathcal{O}_X(U) |\, g I_{Z'}(U) \subseteq I_Z(U)\}.$$

有时我们也称 $Z - Z'$ 为 Z' 在 Z 中的*剩余子概型* (Residual subscheme). 设 W 是另一个子概型, 我们也可以定义*相交子概型* $Z \cap W$ (Intersection subscheme), 它由理想层 $I_{Z \cap W} := I_Z + I_W$ 给出.

在这一节中, 我们关心如下问题:

给定余维数 $r(\geq 2)$ 的子概型以及除子 L, 是否存在秩 r 向量丛 E, 有效除子 F, 以及非零截面 $s \in H^0(X, E)$ 使得其零点集 $Z(s)$ 是纯余维数 r 的子概型, 且满足如下方程

$$\begin{cases} \Delta = Z(s) - Z(s)F, \\ L \equiv \det E - F, \end{cases} \tag{4-2}$$

满足以上条件的 (E, s, F) 称为方程 (4-2) 的解.

我们要证明如下结论.

定理 4.3.1 ([TaVi00]) *设 Δ 是 X 的纯余维数 r 子概型, L 是 X 上除子, 则以下条件彼此等价:*

(1) 方程 (4-2) 有解 (E,s,F).

(2) 存在 $\eta\in H^{n-r+1}(I_\Delta(K_X+L))^\vee$, 使得对任何余维数 r 的真闭子概型 $\Delta'\subsetneq\Delta$, η 都不落在如下自然包含映射的像内

$$H^{n-r+1}(I_{\Delta'}(K_X+L))^\vee\hookrightarrow H^{n-r+1}(I_\Delta(K_X+L))^\vee. \tag{4-3}$$

为此需要做一些准备工作.

首先, 我们解释一下定理 4.3.1 (2) 中的自然包含映射 (4-3).

引理 4.3.1 设 Z,Z',L 同上, 我们有如下正合列交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{r-1}(I_{Z'},\mathcal{O}_X(-L)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{r-1}(I_Z,\mathcal{O}_X(-L)) & . \\ & \| & & \| & \\ 0 \longrightarrow & H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^\vee & \longrightarrow & H^{n-r+1}(I_Z(K_X+L))^\vee & \end{array}$$

证明 两列的同构来自于 Serre 对偶. 今证第一行正合. 考虑正合列

$$0\longrightarrow I_Z\longrightarrow I_{Z'}\longrightarrow Q\longrightarrow 0.$$

这里挠层 Q 的支集余维数不超过 r. 对该正合列作用 $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{O}_X(-L))$, 即得

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^{r-1}(Q,\mathcal{O}_X(-L)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{r-1}(I_{Z'},\mathcal{O}_X(-L)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{r-1}(I_Z,\mathcal{O}_X(-L)) \\ \| & & & & \\ 0=H^{n-r+1}(X,Q(K_X+L))^\vee & & & & \end{array}$$

因此 $\mathrm{Ext}^{r-1}(I_{Z'},\mathcal{O}_X(-L))$ 可以视为 $\mathrm{Ext}^{r-1}(I_Z,\mathcal{O}_X(-L))$ 的子空间. ■

引理 4.3.2 假设 (E,s,F) 是方程 (4-2) 的一组解, H 是充分丰富的线丛, $M\in H^0(E^\vee\otimes E\otimes H)$. 我们将 M 视为态射 $M:E\to E\otimes H$, 并令

$$\widetilde{E}:=E\otimes H,\quad \tilde{s}:=sM,\quad \widetilde{F}:=F+Z(\det M),$$

则 $(\widetilde{E},\tilde{s},\widetilde{F})$ 也是方程组 (4-2) 的一组解.

证明 在我们开始证明前, 先做一些解释. 由于 M 看成态射, 所以局部上它可以看成一个 $r\times r$ 的矩阵函数. $\tilde{s}=sM$ 相当于把局部向量函数 s 与 M 相乘. 当然 $\tilde{s}\in H^0(X,\widetilde{E})$ 也可以理解成复合态射

$$\mathcal{O}_X\overset{s}{\hookrightarrow}E\overset{M}{\longrightarrow}E\otimes H$$

所诱导的非零截面. $\det M:\det E\to\det(\widetilde{E})$ 是对应的行列式映射, 也可以视为 $H^0(X,H^{\otimes r})$ 中的截面. 由 H 的充分丰富性, 我们可以假设除子 $Z(\det M)$ 不含 $Z(s)$ 的任何分支. 此外, 显见

$$\det\widetilde{E}-\widetilde{F}=\det E-F\equiv L.$$

今设

$$\widetilde{\Delta}=Z(\tilde{s})-Z(\tilde{s})\widetilde{F}.$$

我们只需要证明 $\widetilde{\Delta}=\Delta$ 即可, 即证明 $I_{\widetilde{\Delta}}=I_\Delta$. 首先, I_Δ (相应地, $I_{\widetilde{\Delta}}$) 中的局部函数 g (相应地, $\tilde{g}$) 是使得 gf (相应地, $\tilde{g}f\det M$) 在 $Z(s)$ (相应地, $Z(\tilde{s})$) 上消失的元素. 由此易知 $I_\Delta\subseteq I_{\widetilde{\Delta}}$. 反

过来, 设 $\tilde{g} \in I_{\tilde{\Delta}}$, 那么 $\tilde{g} f \det M$ 也在 $Z(s)$ 上消失. 由我们的假设, $\det M$ 在 $Z(s)$ 上不恒为零, 因此 $\tilde{g} f$ 在 $Z(s)$ 上消失, 即 $\tilde{g} \in I_\Delta$. ■

基于上面的引理, 我们可以先考虑充分丰富的向量丛 E. 这里的"充分丰富"可以理解为

$$H^q(X, \wedge^p E^\vee(\det E - L)) = 0, \quad 1 \le p, q \le r-1. \tag{4-4}$$

考虑 Koszul 复形 (参见例 3.1.4)

$$\mathcal{K}_\bullet(\sigma) : \wedge^r E^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^p E^\vee \xrightarrow{\iota_\sigma} \wedge^{p-1} E^\vee \longrightarrow \cdots E^\vee \xrightarrow{s} I_{Z(s)} \longrightarrow 0. \tag{4-5}$$

由于 $Z(s)$ 是局部完全交, 因此上述正合列是正合的. 我们将它分解成诸短正合列

$$0 \longrightarrow F_k \longrightarrow \wedge^k E^\vee \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow 0, \quad k = 1, \cdots, r-1. \tag{4-6}$$

这里 $F_0 = I_{Z(s)}$, $F_{r-1} = \wedge^r E^\vee = \det E^\vee$.

引理 4.3.3 *设 Z' 是 $Z(s)$ 的子概型, E 充分丰富, $F \equiv \det E - L$, 则*

(1)

$$H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X + L))^\vee \cong \operatorname{Ext}^1(I_{Z'}, F_1(F)).$$

(2) *存在正合列*

$$H^0(E^\vee(F)) = \operatorname{Hom}(I_{Z'}, E^\vee(F)) \xrightarrow{s} H^0(I_{Z-Z'}(F)) \xrightarrow{\mu_{Z'}} H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^\vee.$$

证明 (1) 由 Serre 对偶,

$$H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^\vee \cong \operatorname{Ext}^{r-1}(I_{Z'}, \mathcal{O}_X(-L)),$$
$$\operatorname{Ext}^q(\mathcal{O}_X, \wedge^p E^\vee(F)) = H^q(X, \wedge^p E^\vee(F)) = 0, \quad 1 \le p, q \le r-1.$$

结合正合列

$$0 \longrightarrow I_{Z'} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{Z'} \longrightarrow 0, \tag{4-7}$$

我们得到

$$\operatorname{Ext}^q(I_{Z'}, \wedge^p E^\vee(F)) = \operatorname{Ext}^{q+1}(\mathcal{O}_{Z'}, \wedge^p E^\vee(F)) = H^{n-q-1}(\mathcal{O}_{Z'}(\wedge^p E^\vee(K_X - F)))^\vee = 0,$$

这里 $1 \le p \le r-1$, $1 \le q \le r-2$.

由短正合列 (4-6) 及上面的计算, 即得

$$\operatorname{Ext}^1(I_{Z'}, F_1(F)) \cong \operatorname{Ext}^2(I_{Z'}, F_2(F)) = \cdots = \operatorname{Ext}^{r-2}(I_{Z'}, F_{r-2}(F))$$

以及正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^{r-2}(I_{Z'}, F_{r-2}(F)) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^{r-1}(I_{Z'}, \mathcal{O}_X(-L)) & \xrightarrow{\tau} & \operatorname{Ext}^{r-1}(I_{Z'}, \wedge^{r-1}E^\vee(F)) \\ & & \| & & \| \\ & & H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^\vee & \longrightarrow & H^{n-r+1}(I_{Z'} \otimes E^\vee(K_X+L))^\vee \end{array}$$

这里最后一列的等号来自于事实 $\wedge^{r-1} E \cong E^\vee \otimes \det E$ (见命题 1.1.2).

我们要证明 τ 是零映射. 为此只需要考虑 τ 的对偶映射

$$H^{n-r+1}(I_{Z'} \otimes E^\vee(K_X+L)) \xrightarrow{s} H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L)).$$

利用正合列 (4-7), 我们有交换图

$$\begin{tikzcd} H^{n-r}(\mathcal{O}_{Z"} \otimes E^{\vee}(K_X+L)) \arrow[r] \arrow[d, "s|_{Z'}"] & H^{n-r+1}(I_{Z'} \otimes E^{\vee}(K_X+L)) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & 0 \\ H^{n-r}(\mathcal{O}_{Z'}(K_X+L)) \arrow[r] & H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L)) & \end{tikzcd}$$

由于 $s|_{Z'}=0$, 所以右列的映射也是零映射.

(2) 由前讨论, 已知 $\mathrm{Ext}^1(I_{Z'}, E^{\vee}(F))=0$ $(r\geq 3)$ 以及

$$\tau: \mathrm{Ext}^1(I_{Z'}, F_1(F)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(I_{Z'}, E^{\vee}(F))$$

是零映射 $(r=2)$. 因此将 $\mathrm{Hom}(I_{Z'}, *)$ 作用到如下正合列上,

$$0 \longrightarrow F_1(F) \longrightarrow E^{\vee}(F) \longrightarrow I_Z(F) \longrightarrow 0$$

即得正合列

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(I_{Z'}, E^{\vee}(F)) \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(I_{Z'}, I_Z(F)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(I_{Z'}, F_1(F)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ H^0(E^{\vee}(F)) \arrow[r, "s"] & H^0(I_{Z-Z'}(F)) \arrow[r, "\mu_{Z'}"] & H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^{\vee} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

这里的前两列同构可参见习题 4.5. ■

引理 4.3.4 *在引理 4.3.3 的记号与假设下, 设 $Z'' \subseteq Z'$ 是余维数 r 的子概型, 我们有正合序列*

$$0 \longrightarrow H^0(I_{Z-Z''}(F)) \xrightarrow{\alpha} H^0(I_{Z-Z'}(F)) \xrightarrow{\mu} \tag{4-8}$$

$$H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L)) \xrightarrow{\beta} H^{n-r+1}(I_{Z''}(K_X+L)) \longrightarrow 0.$$

证明 由引理 4.3.3, 我们可以诱导正合列交换图

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}s \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(I_{Z-Z''}(F)) \arrow[r, "\mu_{Z''}"] \arrow[d, "\alpha"] & H^{n-r+1}(I_{Z''}(K_X+L))^{\vee} \arrow[r] \arrow[d, "\beta^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}s \arrow[r] & H^0(I_{Z-Z'}(F)) \arrow[r, "\mu_{Z'}"] & H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))^{\vee} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

设 $Q=\mathrm{Corker}\alpha$. 由蛇形引理, $Q^{\vee}=\mathrm{Ker}\beta^*$. 选择一个典范同构 $Q\cong Q^{\vee}$, 这就诱导了正合列 (4-8). ■

定理 4.3.2 *设 E 是秩 $r(\geq 2)$ 向量丛, $Z=Z(s)$ 是截面 s 的零点集, 有纯余维数 r. 设 $Z''\subseteq Z'$ 是 Z 的两个纯余维数 r 的子概型, L 是线丛, 则序列 (4-8) 是复形, 并且除了 $H^{n-r+1}(I_{Z'}(K_X+L))$ 项外处处正合. 如果 E 是充分丰富的, 则该序列是正合列.*

证明 E 充分丰富的情形已在引理 4.3.4 证明. 下面讨论一般情形. 以下采用引理 4.3.2 的诸记号与假设.

首先, 我们有正合列交换图

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & H^0(I_{Z-Z''}(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\det M"] & H^0(I_{Z-Z'}(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\det M"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^0(I_{\widetilde{Z}-Z''}(\widetilde{F})) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(I_{\widetilde{Z}-Z'}(\widetilde{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Q} \arrow[r] & 0 \\ & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[d] & & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

其中左边两个竖列由 $\det M$ 的乘法映射诱导, W_i $(i=1,2)$ 是对应的余核.

为证明结论, 我们只需要证明 $Q \to \widetilde{Q}$ 是单射. 由蛇形引理, 这相当于证明 $W_1 \to W_2$ 是单射. 假设 $W_1 \to W_2$ 不是单的, 则存在 $G \in H^0(I_{\widetilde{Z}-Z''}(F))$ 以及 $G' \in H^0(I_{Z-Z'}(F))$, 使得 $G = G' + \det M$, 并且 G 在 W_1 中的像非零. 由于 G 穿过 $Z - Z''$, $\det M$ 不穿过 $Z - Z''$, 因而 G' 穿过 $Z - Z''$, 即 $G' \in H^0(I_{Z-Z''}(F))$. 因而 G 在 W_1 中的像为零, 矛盾! ■

定理 4.3.1 的证明: 我们仍采用引理 4.3.4 的记号与假设, 并取 $Z' = \Delta$, $Z'' = \Delta'$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 已知方程 (4-2) 有解. 由引理 4.3.2, 我们不妨假设 E 是充分丰富的. 现在我们要证明 $\eta = \mu_{Z'}(f)$ 满足条件 (2), 这里 $f \in H^0(I_{Z-Z'}(F))$. 若不然, 存在 $Z'' \subsetneq Z'$, 使得 $\eta = \mu_{Z''}(f')$, 这里 $f' \in H^0(I_{Z-Z''}(F))$. 因为 f' 也可以看成 $H^0(I_{Z-Z'}(F))$ 中的元, 所以 $\mu_{Z'}(f-f') = 0$, 故 $f - f' \in \mathrm{Im} s$. 因此 $f - f' \in H^0(I_{Z-Z''}(F))$, 从而 $f \in H^0(I_{Z-Z''}(F))$.

考虑局部函数 $h \in I_{Z''}$. 由于 f 穿过 $Z - Z''$, 所以 hf 穿过 Z. 这意味着 $h \in I_{Z-ZF} = I_{Z'}$. 因此 $I_{Z''} \subseteq I_{Z'}$, 即 $Z' \subseteq Z''$, 矛盾!

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 η 满足条件 (2). 取包含 Z' 的充分丰富的超曲面 $F_1, \cdots, F_r$, 并设 $Z = F_1 \cdots F_r$ 是完全交. 我们构造分裂向量丛 $E = \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(F_i)$, 并令 $F = \det E - L$. 由引理 4.3.4, 存在 $f \in H^0(I_{Z-Z'}(F))$ (因而 $F = Z(f)$), 使得 $\eta = \mu_{Z'}(f)$.

设 $Z'' = Z - ZF \subseteq Z'$. 此时我们也有 $f \in H^0(I_{Z-Z''}(F))$ (习题 4.5). 假如 $Z'' \neq Z'$, 则 $\eta = \mu_{Z''}(f)$, 矛盾! 故 $Z'' = Z'$. ■

4.3.2 秩 2 向量丛构造

定理 4.3.3 ([TaVi00], **定理** 10, page 10) 设 $\Delta \subset X$ 是余维数 2 子概型, 那么以下条件彼此等价:

(1) 存在秩 2 向量丛 E 以及截面 $s \in H^0(X, E)$, 使得 $Z(s) = \Delta$.

(2) Δ 是局部完全交, 其典范层 ω_Δ 可以延拓为 X 上的可逆层 $\mathcal{W}$, 并且存在 $\eta \in H^{n-1}(X, I_\Delta(\mathcal{W}))^\vee$ 使得对任何满足 $\Delta' \subset \Delta$ 及 $\deg \Delta' < \deg \Delta$ 的余维数 2 子概型 Δ', η 都不落在以下映射的像中,

$$H^{n-1}(X, I_{\Delta'}(\mathcal{W}))^\vee \longrightarrow H^{n-1}(X, I_\Delta(\mathcal{W}))^\vee.$$

(3) 存在三个超曲面 F_1, F_2, F_3, 其中 F_1, F_2 没有公共分支, $F_1F_2F_3$ 是纯余维数 2 且 Cohen-Macaulay 条件, 并且满足

$$\Delta = F_1F_2 - F_1F_2F_3.$$

进一步, 当条件成立时, 我们有

$$c_1(E) \equiv \mathcal{W} - K_X \equiv F_1 + F_2 - F_3.$$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 取 $\mathcal{W} = \det E + K_X$.由经典结论,

$$\omega_\Delta = \mathcal{W}|_\Delta.$$

今取 $L = \det E$, 则由定理 4.3.1, 即可找到满足条件的 η.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 取包含 Δ 的充分丰富的超平面 F_1, F_2 (没有公共分支). 令 $L = \mathcal{W} - K_X$. 由定理 4.3.1, 存在超平面 $F_3 \equiv F_1 + F_2 - L$, 使得 $\Delta = F_1F_2 - F_1F_2F_3$. 我们只需要验证 $F_1F_2F_3$ 是局部完全交即可 (因而也是 Cohen-Macaulay 的). 这一部分证明比较困难, 请读者直接参看 [TaVi00].

(3) $\Longrightarrow$ (1) 考虑合冲层 $\mathcal{F}$, 来自以下正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-F_1) \oplus \mathcal{O}_X(-F_2) \oplus \mathcal{O}_X(-F_3) \longrightarrow I_{F_1F_2F_3} \longrightarrow 0.$$

因为 $F_1F_2F_3$ 是纯余维数 2 且 Cohen-Macaulay, 因而 $\mathcal{F}$ 是局部自由的. 考虑复合态射

$$\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_X(-F_i) \to \mathcal{O}_X(-F_3).$$

$\mathrm{Im}\phi = I_\Delta(-F_3)$ (见 I_Δ 的定义). 这样, $\mathrm{Ker}\phi$ 是可逆层. 由陈数计算可知 $\mathrm{Ker}\phi = \mathcal{O}_X(-F_1 - F_2)$. 令 $E = \mathcal{F}(F_1 + F_2)$, 这就得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow I_\Delta(F_1 + F_2 - F_3) \longrightarrow 0.$$

这也给出了截面 $s \in H^0(X, E)$ 使得 $Z(s) = \Delta$. 此外 $\det E = F_1 + F_2 - F_3$. ■

4.4 射影空间上的标准构造

设 G_n 是 $\mathbb{P}^n$ 中的直线构成的 Grassmann 流形 ($\dim G_n = 2n - 2$). 每一点 $\ell \in G_n$ 对应直线 $L \subseteq \mathbb{P}^b$, 它也对应 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的平面 E_ℓ.

我们定义 G_n 上的秩 2 赘丛 (Tautological bundle).

$$V = \{(\ell, v) \in G_n \times \mathbb{C}^{n+1} |\ v \in E_\ell\}.$$

它对应的射影丛 $\mathbb{P}(V)$ 记为

$$\mathbb{F}_n := \{(x, \ell) \in \mathbb{P}^n \times G_n |\ x \in L\}.$$

我们有两个方向的投影映射

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_n \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & G_n \\ \mathbb{P}^n & \end{tikzcd}$$

这个图称为标准图 (Standard diagram). $q:\mathbb{F}_n\to G_n$ 是射影丛的映射, 对每个点 $\ell\in G_n$, 纤维

$$\widetilde{L}:=q^{-1}(\ell)=\{(x,\ell)|\ x\in L\}\cong L\cong\mathbb{P}^1.$$

投影 $p:\mathbb{F}_n\to\mathbb{P}^n$ 实际上可以理解为 $\mathbb{P}^n$ 上的射影切丛 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^n})$. 对每个点 $x\in\mathbb{P}^n$, 纤维

$$\mathbb{F}(x):=p^{-1}(x)=\{(x,\ell)|\ x\in L\}$$

可以看成过 x 的直线集合

$$G(x)(\subseteq G_n)\cong\mathbb{P}^{n-1}.$$

综上, 我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
L & \widetilde{L} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"'] & \{\ell\} \arrow[d, "\subseteq"'] \\
\mathbb{P}^n & \mathbb{F}_n \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & G_n \\
\{x\} \arrow[u, "\subseteq"] & \mathbb{F}(x) \arrow[l] \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\subseteq"] & G(x) \arrow[u, "\subseteq"]
\arrow[from=1-1, to=2-1, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

给定 $x\in\mathbb{P}^n$, 我们考察

$$\mathbb{B}(x):=q^{-1}(G(x))=\{(y,\ell)|\ x,y\in L\}.$$

设 $f:\mathbb{B}(x)\to G(x)$ 及 $\sigma:\mathbb{B}(x)\to\mathbb{P}^n$ 为投影映射. 由直接验证, $\sigma:\mathbb{B}(x)\to\mathbb{P}^n$ 实际上就是 $\mathbb{P}^n$ 在 $x\in\mathbb{P}^n$ 处的爆发, 其例外集即 $\mathbb{F}(x)$. 设 $y\in\mathbb{P}^n$ 是另一点, L 是经过 x,y 的直线, 那么 $\mathbb{B}(x)\cap\mathbb{B}(y)=q^{-1}(\ell)$.

综上, 我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(x) \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "\subseteq"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & G(x) \arrow[ll, bend right, "s"'] \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
& \mathbb{F}_n \arrow[rr, "q"'] \arrow[d, "p"] & & G_n \\
& \mathbb{P}^n & &
\end{tikzcd}$$

这里 s 是截面映射, $s(\ell)=(x,\ell)$.

射影空间上的这种构造称为标准构造. 我们将在后文用它处理向量丛在直线上的限制问题 (见第 8.2.2 节). 这里先准备一些引理, 作为标准构造的应用.

引理 4.4.1 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的向量丛, $\ell\in G_n$, $\widetilde{L}=q^{-1}(\ell)$, 那么

(1) p 映射诱导了同构 $p^*E\big|_{\widetilde{L}}\cong E|_L$ (在 $p:\widetilde{L}\to L$ 的意义下).

(2) 若 $h^0(L,E|_L)$ 是不依赖于 ℓ 的常值, 那么 $F:=q_*p^*E$ 是向量丛.

(3) 在 (2) 的条件下, 存在典范态射 $\mu:q^*F\to p^*E$, 其限制映射 $\mu|_{\widetilde{L}}$ 就是赋值映射

$$\mu_{\widetilde{L}}:H^0(\widetilde{L},p^*E)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{L}}\longrightarrow p^*E\big|_{\widetilde{L}}.$$

类似地, 给定 $x\in\mathbb{P}^n$, 对任何 $\ell\in G(x)$, 都有 $\sigma^*E\big|_{\widetilde{L}}\cong E|_L$. 进一步, 若对任何 $\ell\in G(x)$, $h^0(L,E|_L)$ 是常值, 那么 $F:=f_*\sigma^*E$ 是向量丛, 其典范态射 $\mu:f^*F\to\sigma^*E$ 限制到 $\widetilde{L}=f^{-1}(\ell)$ 上就是赋值映射.

证明 (1) 是显然的.

(2) 由 (1),

$$h^0(q^{-1}(\ell), p^*E|_{q^{-1}(\ell)}) = h^0(L, E|_L).$$

由命题条件, 上面的同调不依赖于 $\ell \in G_n$ 的选取. 结合 f 的平坦性及基变换定理, 这就证明 $F := q_*p^*E$ 是局部自由层.

(3) 我们有自然的典范态射

$$q^*F = q^*q_*p^*E \longrightarrow p^*E.$$

它在纤维 $\widetilde{L}$ 的限制可以直接计算得到, 此处不再赘述.

命题后半部的证明是完全类似的. ■

推论 4.4.1 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的一致向量丛, 那么 $F := f_*\sigma^*E$ 是向量丛. 进一步, 若 $f^*F \cong \sigma^*E$, 那么 E 是平凡向量丛.

证明 此时 E 满足引理4.4.1 (2) 的条件, 因而 F 是向量丛. 假设 $f^*F \cong \sigma^*E$, 那么我们有

$$\sigma^*E = f^*F = f^*((f \cdot s)^*F) = f^*(s^*f^*F) = f^*(s^*\sigma^*E) = f^*(\mathcal{O}_{G(x)}^{\oplus r}) = \mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)}^{\oplus r}.$$

这里用到了 $\sigma \cdot s$ 是常值映射的事实.

进一步, 注意到 $\sigma : \mathbb{B}(x) \to \mathbb{P}^n$ 是爆发, 此时 $\sigma_*\mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, 因而我们有同构

$$E \cong E \otimes \sigma_*\mathcal{O}_{\mathbb{B}(x)} \cong \sigma_*\sigma^*E.$$

因此 E 是平凡丛. ■

4.5 对数微分层

4.5.1 对数微分形式

定义 4.5.1 设 X 是 n 维光滑代数簇, $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ 是有效除子, D_i 是不可约分支. 如果 D 是既约的, 每个分支 D_i 是光滑的, 并且对任何 $p \in D$, 在 p 的小邻域内选取适合的坐标, D 的局部方程可写为

$$z_1 \cdots z_s = 0, \quad s \leq n$$

那么 D 为简单正规交除子 (Simple normal crossing divisor).

考虑 n 维光滑代数簇 X 上的简单正规交除子 $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ 及开集 $U := X - D$ 及包含映射 $i : U \hookrightarrow X$. 我们定义层

$$\Omega_X^k(*D) = i_*\Omega_U^k = \bigcup_{p \geq 0} \Omega_X^k(pD),$$

这里 $\Omega_X^k(pD)$ 是一个层, 其中的截面在 D 以外是全纯的, 而沿着 D 则最多有不超过 p 阶的极点.

定义 4.5.2 $\Omega_X^k(*D)$ 的子层 $\Omega_X^k(\log D)$ 按如下方式定义: 对任何开集 $V \subseteq X$,

$$\Omega_X^k(\log D)(V) = \{\omega \in \Omega_X^k(*D)(V) |\ \omega, d\omega \text{ 沿着 } D \text{ 都只有简单极点.}\}$$

它称为对数微分层 (Sheaf of logarithmic differentiation). 它的元素在 D 上的极点称为对数极点 (Logarithmic pole).

命题 4.5.1 设 $(z_1,\cdots,z_n)$ 是充分小邻域 V 的局部坐标系, $D\cap V$ 由局部方程 $z_1\cdots z_s=0$ 定义. 那么 $\Omega_X^k(\log D)|_V$ 是自由 $\mathcal{O}_V$-模层, 诸形式

$$\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}}\wedge\cdots\frac{dz_{i_l}}{z_{i_l}}\wedge dz_{j_1}\wedge\cdots dz_{j_m}, \tag{4-9}$$

构成它的一组基 ($i_l\le s$, $j_m>s$, $l+m=k$).

特别地, $\Omega_X^k(\log D)$ 是局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层, 并且有 $\Omega_X^k(\log D)=\wedge^k\Omega_X^1(\log D)$.

证明 设 $\alpha\in\Omega_X^k(\log D)$, 由于 α 在 D 上至多有一级极点, 因而 $\alpha=\frac{\beta}{z_1\cdots z_s}$, 这里 β 是全纯 k-形式. 又由 $d\alpha$ 的相同性质可知

$$\sum_{i\le s} z_1\cdots\hat{z}_i\cdots z_s dz_i\wedge\beta|_D\equiv 0. \tag{4-10}$$

我们将 β 写为

$$\beta=\sum_{I,J}\beta_{I,J}dz_I\wedge dz_J,\quad I\subseteq\{1,\cdots,s\},\ J\subseteq\{s+1,\cdots,n\}.$$

式 (4-10) 迫使

$$\beta_{I,J}|_{D_i}\equiv 0,\quad \forall i\in I'=\{1,\cdots,s\}-I.$$

因此 $(\prod_{i\in I'}z_i)\mid\beta_{I,J}$. 由此即可推出所需结论.

命题后半部直接来自于式 (4-9) 所给的基. ■

注 4.5.1 (1) 上述结论也可以如下描述: 设 f 是 D 的局部定义方程, 那么 $\Omega_X^k(\log D)$ 的元素 ϕ 就是满足以下形式的半纯形式: $f\phi$ 及 $fd\phi$ 皆全纯.
(2) 请读者务必注意, 在 D 上带一阶极点的微分形式也未必是 $\Omega_X^*(\log D)$ 中的元素. 比如 $\frac{dz_2}{z_1}$ 在微分后将包含项 $\frac{dz_1}{z_1^2}$. ■

4.5.2 对数 de Rham 复形

对 $\omega\in H^0(X,\Omega_X^k(\log D))$, 注意到 $d\omega$ 除了 D 上的一级极点之外是全纯的, 因而 $d\omega=\partial\omega\in\Omega_X^{k+1}(\log D)$. 这就诱导了所谓的对数 de Rham 复形 (Logarithmic de Rham complexes)

$$(\Omega_X^\bullet(\log D),d).$$

它显然是复形 $(\Omega_X^\bullet(*D),d)$ 的子复形. 一般说来, 对数 de Rham 复形即使在局部上也不是正合的. 比如对曲线 X 上由局部方程 $z=0$ 定义的单点除子 D, 有非恰当形式 $\frac{dz}{z}\in\Omega_X(\log D)$. 下面我们要把这种复形推广到更一般的向量丛上.

为今后书写方便, 我们引入一些记号. 设 $p\in X$, 不妨设 $p\in D_1\cap\cdots\cap D_s$, $p\notin D_{s+1}\cup\cdots\cup D_r$. 选择 p 的局部坐标 $(z_1,\cdots,z_n)$, 其中 D_i 由方程 $z_i=0$ 定义 ($i=1,\cdots,s$). 我们记

$$\delta_i=\begin{cases}\frac{dz_i}{z_i},\ 若\ i\le s,\\ dz_i,\ 若\ i>s.\end{cases}$$

对指标集 $I=\{i_1,\cdots,i_k\}\subseteq\{1,\cdots,n\}$ ($i_1<\cdots<i_k$), 我们定义

$$\delta_I=\delta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta_{i_k}.$$

在此记号下, $\Omega_X^k(\log D)$ 的局部基可以写为 $\{\delta_I : |I| = k\}$.

例 4.5.1　我们定义若干映射.

(1)

$$\alpha : \Omega_X^1(\log D) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{D_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_i \to (a_1|_{D_1},\cdots, a_s|_{D_s}).$$

(2) 任取 $\omega \in H^0(X, \Omega_X^k(\log D))$. 给定 $i \leq s$, ω 可分拆为

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge \delta_i,$$

这里 ω_i 由那些 δ_I $(i \notin I)$ 张成,

$$\omega_2 = \sum_{i\in I} a_I\delta_{I-\{i\}}.$$

由此可定义映射

$$\beta_i : \Omega_X^k(\log D) \longrightarrow \Omega_{D_i}^{k-1}(\log(D - D_i)\big|_{D_i}), \quad \omega \to \omega_2|_{D_2}.$$

(3) 任取 $\omega \in H^0(X, \Omega_X^k(\log(D - D_i)))$, 它可以写为

$$\omega = \sum_{i\in I} f_I a_I\delta_I + \sum_{i\notin I} a_I\delta_I.$$

因此可定义映射

$$\gamma_i : \Omega_X^k(\log(D - D_i)) \longrightarrow \Omega_{D_i}^{k-1}\left(\log(D - D_i)\big|_{D_i}\right), \quad \omega \to \sum_{i\notin I} a_I\delta_I|_{D_i}.$$

利用这些映射, 可以得到如下一些正合列.

(i)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0. \tag{4-11}$$

(ii)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^k(\log(D - D_i)) \longrightarrow \Omega_X^k(\log D) \xrightarrow{\beta_i} \Omega_X^{k-1}(\log(D - D_i)|_{D_i}) \longrightarrow 0.$$

(iii)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^k(\log(D - D_i))(-D_i) \longrightarrow \Omega_X^k(\log(D - D_i)) \xrightarrow{\gamma_i} \Omega_{D_i}^k(\log(D - D_i)|_{D_i}) \longrightarrow 0.$$

请读者自己验证这些正合列. ■

设 E 是 X 上的局部自由层,

$$\nabla : E \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \otimes E$$

是一个 $\mathbb{C}$-线性映射, 满足

$$\nabla(f \cdot e) = f \cdot \nabla(e) + df \otimes e.$$

由此可以进一步诱导映射

$$\nabla_k : \Omega_X^k(\log D) \otimes E \longrightarrow \Omega_X^{k+1}(\log D) \otimes E,$$

满足

$$\nabla_k(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^k \cdot \omega \wedge \nabla(e).$$

定义 4.5.3 如果 $\nabla_{k+1}\nabla_k = 0$ 对任意 k 成立, 那么我们称 ∇ 为沿着 D 的可积对数联络 (Integrable logarithmic connection along D). 它诱导的复形 $(\Omega_X^\bullet(\log D) \otimes E, \nabla_\bullet)$ 称为 $(E, \nabla_\bullet)$ 的对数 de Rham 复形.

对可积对数联络 ∇, 我们可以定义它沿着某个分支 D_i 的残数映射 (Residue map)

$$Res_{D_i}(\nabla) : E \xrightarrow{\nabla} \Omega_X(\log D) \otimes E \xrightarrow{\beta_i \otimes Id_E} \mathcal{O}_{D_i} \otimes E.$$

命题 4.5.2 $Res_{D_i}(\nabla)$ 是 $\mathcal{O}_X$ 线性的, 并且可以分解为

$$E \xrightarrow{|_D} \mathcal{O}_{D_i} \otimes E \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \otimes E.$$

为方便起见, 后面的映射仍记为 $Res_{D_i}(\nabla)$. 进一步, 我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
\Omega_X^k(\log(D - D_i)) \otimes E \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\gamma_i \otimes Id_E"'] & \Omega_X^k(\log D) \otimes E \arrow[r, "\nabla_k"] & \Omega_X^{k+1}(\log D) \otimes E \arrow[d, "\beta_i \otimes Id_E"] \\
\Omega_{D_i}^k(\log(D - D_i)|_{D_i}) \otimes E \arrow[rr, "(-1)^k Id \otimes Res_{D_i}(\nabla)"] & & \Omega_{D_i}^k(\log(D - D_i)|_{D_i}) \otimes E
\end{tikzcd}$$

证明 来自于直接计算. 留给读者验证. ■

今取除子

$$B = \sum_{i=1}^r \mu_i D_i.$$

我们希望通过 (∇, E) 诱导出复形

$$(\nabla^B, E(B)).$$

设 σ 是 $E(B) : E \otimes B$ 的局部截面, 它可写为

$$\sigma = \prod_{i=1}^s z_i^{-\mu_i} \cdot e.$$

我们定义

$$\nabla^B(\sigma) := \prod_{i=1}^s z_i^{-\mu_i} \nabla e + d\left(\prod_{i=1}^s z_i^{-\mu_i}\right) \otimes e.$$

由计算知

$$\nabla^B(\sigma) = \prod_{i=1}^s z_i^{-\mu_i} \nabla e + \sum_{k=1}^s \left(\prod_{i=1}^s z_i^{-\mu_i}\right) \cdot (-\mu_k)\frac{dz_k}{z_k} \otimes e.$$

因而给出了映射

$$\nabla^B : E(B) \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \otimes E(B).$$

我们计算其对应的残数映射 (以 D_1 分支为例)

$$Res_{D_1}(\nabla^B(\sigma)) = \prod_{i=1}^{s} z_i^{-\mu_i} Res_{D_1}(\nabla(e)) + \prod_{i=1}^{s} z_i^{-\mu_i}(-\mu_1)\otimes e|_{D_1}.$$

这样, 我们有

命题 4.5.3 $Res_{D_i}(\nabla^B) = Res_{D_i}(\nabla) - \mu_i \cdot Id_{D_i}$ $(i = 1, \cdots, s)$.

本章习题

习题 4.1 设 $\pi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ 是二次覆盖, 证明:

$$\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-1), & \text{若 } d = 2k, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k), & \text{若 } d = 2k+1. \end{cases}$$

习题 4.2 在例 4.1.1 的记号下, 设 B 是 π 的分歧轨迹, 证明:

(1) $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \equiv F_1 + F_2$.

(2) B 是 2 次光滑曲线.

(3) 设 $a \geq b$, 那么

$$h^1(aF_1 + bF_2) = \begin{cases} -(a+1)(b+1), & \text{若 } a \geq 0, b \leq -2, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

(4) $\pi_*\mathcal{O}_X(aF_1 + bF_2)$ 分裂成线丛当且仅当 $a = b$ 或 $a = b+1$. 此时

$$\pi_*\mathcal{O}_X(aF_1 + bF_2) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b-1), & \text{若 } a = b, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b), & \text{若 } a = b+1. \end{cases}$$

习题 4.3 设 $Z' \subseteq Z$ 是子概型, 证明: $I_{Z-Z'}/I_Z = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{Z'}, \mathcal{O}_Z)$.

习题 4.4 设 Z 是余维数 r 的子概型, F 是有效除子, $\Delta = Z - Z\cap F$, 证明: 在局部上, $g \in I_\Delta$ 当且仅当 $gf \in I_Z$, 这里 $f = 0$ 是 F 的局部定义方程.

习题 4.5 设 $Z' \subseteq Z$ 是子概型, E 是向量丛, 证明:

(1) $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Z'}, E) = 0$.

(2) $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(I_{Z'}, E) = E$.

(3) $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(I_{Z'}, I_Z(E)) = I_{Z-Z'}(E)$. (提示: 考虑局部函数 $f, g \in I_{Z'}$, $\sigma : I_{Z'} \to I_Z$, 利用 $\sigma(fg) = f\sigma(g) = g\sigma(f)$ 说明 σ 实际上是 $\mathcal{O}_X$-模的乘法映射.)

(4) $I_{Z'} \subseteq I_{Z-(Z-Z')}$.

习题 4.6 验证例 4.5.1 中的诸正合列.

习题 4.7 设 X 是光滑射影代数曲面, D 是 X 上正规交除子, 且每个分支都光滑. 证明:

$$c_1(\Omega_X(\log D)) = K_X + D,$$
$$c_2(\Omega_X(\log D)) = \chi_{\mathrm{top}}(X) - \chi_{\mathrm{top}}(D).$$

习题 4.8 验证命题 4.5.2.

第五章 消失定理

5.1 预备知识

5.1.1 奇点解消

在讨论改进的 Kodaira 消失定理以及 Kawamata-Viehweg 消失定理时, 我们需要高维簇奇点解消的结论. 这里罗列相关内容.

定理 5.1.1 (Hironaka) 设 X 是不可约复代数簇 (允许奇异), $D \subseteq X$ 是有效除子.

(1) 存在非奇异簇 X' 以及双有理态射

$$\mu : X' \longrightarrow X,$$

使得 $\mu^*D + E(\mu)$ 具有简单正规交的支集, 这里 $E(\mu)$ 是 μ 的例外除子.

(2) 上述 X' 可以通过沿着 D 和 X 的奇点轨迹中的光滑中心做一系列爆发得到. 特别地, 我们总可以假设 μ 在 $X - (Sing(X) \cup Sing(D))$ 上是同构.

这样的 X' 称为 D 的嵌入解消 (Embedded resolution) 或对数解消 (Log resolution).

进一步, 假设 X 是光滑的, 那么

(3) 关于 X (相应地, X') 的典范除子 K_X (相应地, $K_{X'}$), 我们有

$$\mu_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) = \mathcal{O}_X(K_X), \quad R^j\mu_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) = 0, \quad j > 0.$$

(4) 如果 X 是射影的, H 是 X 上的丰富除子, 那么存在整数 $m_\Gamma \geq 0$ 以及充分大整数 m, 使得

$$\mu^*(mH) - \sum_{\Gamma \subseteq E(\mu)} m_\Gamma \Gamma$$

是丰富除子, 这里 Γ 跑遍例外除子 $E(\mu)$ 的所有分支.

我们利用上述的结果先证明一个引理, 后面将会用到.

引理 5.1.1 设 X 是光滑射影簇, D 是 X 上的 big 除子, 那么

(1) 存在丰富除子 H, 有效除子 N 以及充分大的整数 m, 使得 $mD \equiv H + N$.

(2) 存在 N 的嵌入解消 $\mu : X' \to X$ 以及充分大的整数 m', 使得

$$m'\mu^*D \equiv H' + N',$$

这里 H' 是丰富除子, N' 是具有简单正规交支集的有效除子.

(3) $H^j(X', \mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + \mu * D)) = H^j(X, \mathcal{O}_X(K_X + D))$.

证明 (1) 任取丰富除子 H, 对充分大的整数 r, 我们取光滑有效除子 $H_r \in |rH|$, $H_{r+1} \in |(r+1)H|$, 那么由 Kodaira 引理 (见引理 5.1.2), 存在充分大整数 m, 使得 $mD \equiv H_{r+1} + E$, 这里 E 是有效除子. 因此

$$mD \equiv H + (E + rH)$$

满足命题条件.

(2) 考虑 N 的嵌入解消 $\mu : X' \to X$ 满足定理 5.1.1 (2). 此时 $\mu^* N$ 有简单正规交支集, 并满足

$$\mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) = \mathcal{O}_X(K_X), \quad R^j \mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) = 0, \quad j > 0. \tag{5-1}$$

设 $\mu^* N = \sum\limits_i a_i F_i$, 这里 F_i 是不可约分支 (包含了例外除子), $a_i \geq 0$. 由定理 5.1.1 (4), 存在充分大整数 p, 以及整数 $b_i \geq 0$, 使得

$$H' := \mu^* pH - \sum_i b_i F_i$$

是 X' 上的丰富除子. 因此

$$(pm)\mu^* D \equiv H' + (\sum_i (pa_i + b_i) F_i)$$

满足命题条件.

(3) 利用式 (5-1) 立得. ■

引理 5.1.1 (1) 的证明中用到如下事实.

引理 5.1.2 (Kodaira **引理**) *设 D 是 big 除子, F 是任何有效除子, 那么当 m 充分大时, 总有 $H^0(X, \mathcal{O}_X(mD - F)) \neq 0$.*

证明 设 $\dim X = n$, 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(mD - F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(mD) \longrightarrow \mathcal{O}_F(mD) \longrightarrow 0.$$

由于 D 是 big 的, 所以

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) \geq cm^n, \quad n := \dim X,\ c\text{是常数}.$$

但是 $h^0(F, \mathcal{O}_F(mD)) = O(m^{n-1})$, 这意味着对充分大的 m,

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) > h^0(F, \mathcal{O}_F(mD)),$$

故由正合列可知 $H^0(X, \mathcal{O}_X(mD - F)) \neq 0$. ■

5.1.2 覆盖技巧

在研究向量丛的消失定理等等问题中, 经常会用到构造覆盖的技巧. 首先回顾循环覆盖的构造.

定理 5.1.2 (**循环覆盖**) *设 X 是光滑射影簇, L 是 X 的线丛. 假设对某个 $m \geq 1$, 存在 $s \in H^0(X, L^{\otimes m})$. 设 $D = div(s)$ 是对应的有效除子. 那么存在循环覆盖*

$$\pi : Y \to X.$$

它以 D 为分歧轨迹, 并且 $\pi^*D = mD'$, 这里有效除子 $D' \in |\pi^*L|$. 我们有典范同构

$$\pi_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X \oplus L^{-1} \oplus \cdots \oplus L^{-m+1}.$$

利用循环覆盖技巧, 我们可以得到下面的 Bloch-Gieseker 覆盖.

定理 5.1.3 (Bloch-Gieseker **覆盖**) 设 X 是光滑射影簇, $D = \sum\limits_{i=1}^{r} D_i$ 是简单正规交除子 (D_i 是光滑不可约分支), L 是 X 上的线丛, m 是给定的正整数. 那么存在有限平坦满态射 $\pi : Y \to X$ 以及 Y 上的线丛 N, 满足

(1) $\pi^*L = N^{\otimes m}$.

(2) Y 是光滑的.

(3) π^*D 仍是简单正规交. 进一步, 当 $\dim X > 1$ 时, π^*D_i 仍是不可约的.

证明 这里介绍证明的思路, 具体细节参见 [Laz04I, 定理 4.1.10]. 先讨论 L 是非常丰富除子的情形. 此时 L 诱导了嵌入态射 $\phi : X \to \mathbb{P}^r$, $L = \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. 取有限态射

$$\nu : \mathbb{P}^r \longrightarrow \mathbb{P}^r, \quad [X_0, \cdots, X_r] \to [X_0^m, \cdots, X_n^m],$$

此时 $\nu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)$. 再取 $g \in GL(\mathbb{C}, r+1)$, 我们定义复合映射 $\nu_g := g \circ v$. 这样, 可构造纤维积 $Y_g := X \times_{\mathbb{P}^r} \mathbb{P}^r$, 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
Y_g \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "f_g"'] & \mathbb{P}^r \arrow[d, "\nu_g"] \\
X \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{P}^r
\end{tikzcd}$$

只要 g 充分一般, 那么 $f_g : Y_g \to X$ 就能满足命题条件.

一般情形下, 可以利用 Moving 引理, 设 $L = A - B$, 这里 A, B 是非常丰富的. 这样就归结到丰富除子的情形. ■

注 5.1.1 如果不考虑 Y 的光滑性, 我们可以给一种更简便的方式构造满足定理 5.1.3 (1)(3) 的循环覆盖. 由 Moving 引理, $L \equiv H_1 - H_2$, 这里 H_1, H_2 是非常丰富除子. 今取另一个非常丰富除子 H_3, 以及充分大的整数 ν. 分别取光滑有效除子

$$A \in |H_1|, \quad B \in |H_2|, \quad C \in |m\nu H_3 - H_1 - H_2|.$$

于是 $A + B + C \in |m\nu H_3|$. 因此可构造循环覆盖 $\pi : Y \to X$ 以 $A + B + C$ 为分歧轨迹, 并且存在 $A', B' \geq 0$, 使得 $\pi^*A = m\nu A'$, $\pi^*B = m\nu B'$. 因此 $\pi^*L \equiv m\nu(A' - B')$. 令 $N = \nu(A' - B')$, 则得 $\pi^*L \cong N^{\otimes m}$. 由于 A, B, C 取得充分一般, 因而可以满足 (3). ■

结合这两种覆盖, 我们可以得到 Kawamata 覆盖.

定理 5.1.4 (Kawamata **覆盖**) 设 X 是光滑射影簇, $D = \sum\limits_{i=1}^{r} D_i$ 是简单正规交除子, $m_1, \cdots, m_r$ 是给定的正整数. 那么存在有限平坦覆盖 $\pi : Y \to X$, 使得

$$\pi^*D_i = m_iD_i',$$

这里 D_i' 是光滑除子, $D' = \sum\limits_i D_i'$ 是简单正规交.

证明 通过对 D 的不可约分支个数做归纳法, 我们只需要证明 $m_2 = \cdots = m_r = 1$ 的情形就足够了. 首先构造 Bloch-Gieseker 覆盖 $\pi_1 : Y_1 \to X$, 使得 $\pi_1^* D_1 \equiv m_1 A$ (A 是 X 上的某个除子, 但未必有效), 并且 $\pi_1^* D$ 仍然是简单正规交. 再构造循环覆盖 $\pi_2 : Y \to Y_1$ 以 $\pi_1^* D_1$ 为分歧轨迹, 使得 $\pi_2^*(\pi_1^* D) = m_1 D_1'$, 这里 D_1' 是 Y 上的有效除子. 令 $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$, D 在 π 下的拉回仍是简单正规交. ■

利用覆盖, 我们可以把向量从同调的消失性归结到覆盖簇上.

引理 5.1.3 (单性引理) 设 $\pi : Y \to X$ 是有限满态射, X 是正规的, E 是 X 上的向量丛, 那么我们有单态射

$$H^i(X, E) \longrightarrow H^i(Y, \pi^* E).$$

特别地, 若对某 i 有 $H^i(Y, \pi^* E) = 0$, 那么 $H^i(X, E) = 0$.

证明 利用射影公式,

$$H^i(Y, \pi^* E) = H^i(X, \pi_* \pi^* E) = H^i(X, \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes E) \supseteq H^i(X, E).$$

由此即得结论. ■

5.2 Kodaira-Nakano 消失定理

定理 5.2.1 (Kodaira 消失定理) 设 X 是 n 维不可约光滑复射影簇, H 是 X 上丰富除子, 那么

$$H^k(X, \mathcal{O}_X(H)^\vee) = 0, \quad \forall k < n.$$

证明 因为 H 是丰富的, 所以可找正整数 m 以及光滑除子 $D \in |mH|$. 构造以 D 为分歧轨迹的 m 次循环覆盖 $\pi : Y \to X$. 特别地, D 的拉回是 mD', 这里 $D' \in |\pi^* H|$ 是光滑的丰富除子. 由循环覆盖的性质

$$\pi_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \oplus (\oplus_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_X(-iD))$$

及射影公式, 我们只需要验证

$$H^k(Y, \mathcal{O}_Y(-D')) = 0, \quad k < n$$

即可. 今对正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-D') \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0$$

取上同调, 即得

$$H^{k-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^{k-1}(D', \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow H^k(Y, \mathcal{O}_Y(-D')) \longrightarrow H^k(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^k(D', \mathcal{O}_{D'}).$$

由 Lefschetz 超平面定理 (见定理 1.2.4) 可推出 $H^k(Y, \mathcal{O}_Y(-D')) = 0$ 对任意 $k \leq n-1$ 均成立. ■

这个证明实际上只用到 Lefschetz 超平面定理中很少的一部分信息. 如果进一步利用该定理, 可以得到更一般的消失定理. 为此我们需要一些准备工作. 首先回顾 $\Omega_X^p(\log D)$ 的一些性质. 这里我们仅需要讨论 D 是光滑除子的情形 (参见例 4.5.1).

引理 5.2.1 设 D 是 X 上的光滑除子.
(1) 我们有正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^p(\log D) \longrightarrow \Omega_D^{p-1} \longrightarrow 0$$

及

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_D^p \longrightarrow 0.$$

(2) 设 $\pi : Y \to X$ 是以 D 为分歧轨迹的 m 次循环覆盖, $\pi^*D = mD'$. 那么

$$\pi^*(\Omega_X^p(\log D)) = \Omega_Y^p(\log D').$$

现在我们要将 Kodaira 消失定理推广为 Nakano 消失定理.

定理 5.2.2 (Nakano 消失定理) 设 X 是 n 维不可约光滑复射影簇, A 是丰富除子, 那么

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(A)) = 0, \quad p + q > n.$$

对偶地, 也可写为

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(-A)) = 0, \quad p + q < n.$$

证明 对充分大 m, 找光滑除子 $D \in |mA|$. 构造以 D 为分歧轨迹的 m 次循环覆盖 $\pi : Y \to X$. 由引理 5.2.1, 我们有

$$\pi^*(\Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-A)) = \Omega_Y^p(\log D') \otimes \mathcal{O}_Y(-D'),$$

这里 D' 来自于 $\pi^*D = mD'$, 满足 $D' \in |\pi^*A|$.

由引理 5.2.1 的第二个正合列, 我们取同调可得正合列

$$H^{q-1}(D', \Omega_{D'}^p) \longrightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p(\log D') \otimes \mathcal{O}_Y(-D')) \longrightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p).$$

由 Lefschetz 超平面截口定理, 当 $p + q < n$ 时, 上面正合列两端都为零. 因而

$$0 = H^q(Y, \Omega_Y^p(\log D') \otimes \mathcal{O}_Y(-D') = H^q(X, \pi^*(\Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-A))).$$

利用射影公式及循环覆盖性质, 这就推出

$$H^q(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-A)) = 0.$$

对引理 5.2.1 的第一个正合列张量 $\mathcal{O}_X(-A)$ 并取同调, 可得正合列

$$H^{q-1}(D, \Omega_D^{p-1} \otimes \mathcal{O}_X(-A)) \longrightarrow H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(-A)) \longrightarrow H^q(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(-A)) = 0.$$

现在我们只需要对 $\dim X$ 施归纳法, 即可得结论. ■

5.3 Mumford 消失定理

Kodaira 消失定理中的丰富除子条件可以改为 nef,big 条件. 为了证明这个结论. 我们先引入一个引理.

引理 5.3.1 (Norimatsu 引理) 设 X 是 n 维光滑射影簇, A 是丰富除子, $D = \sum_{i=1}^{r} D_i$ 是简单正规交除子, 那么

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + A + D)) = 0, \quad i > 0,$$

亦即 $H^j(X,\mathcal{O}_X(-A-D))=0\ (j<n)$.

证明 我们对 D 的不可约分支个数 r 做归纳. $r=0$ 时就是 Kodaira 消失定理. 假设 $r\le k$ 的情形已证. 考虑正合列

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_X\left(-A-\sum_{i=1}^{k+1}D_i\right)\longrightarrow \mathcal{O}_X\left(-A-\sum_{i=1}^{k}D_i\right)\longrightarrow \mathcal{O}_{D_{k+1}}(-A-\sum_{i=1}^{k}D_i)\longrightarrow 0.$$

由归纳假设

$$H^j(D_{k+1},\mathcal{O}_{D_{k+1}}(-A-\sum_{i=1}^{k}D_i))=0,\quad j<n-1,$$

$$H^j(X,\mathcal{O}_X(-A-\sum_{i=1}^{k}D_i)=0,\quad j<n.$$

这就迫使

$$H^j(X,\mathcal{O}_X(-A-\sum_{i=1}^{k+1}D_i))=0,\quad j<n.$$

由此即得结论. ■

定理 5.3.1 (Mumford **消失定理**) 设 X 是 n 维光滑射影簇, D 是 nef,big 除子, 那么

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+D))=0,\quad i>0,$$

亦即 $H^j(X,\mathcal{O}_X(-D))=0\ (j<n)$.

证明 因为 D 是 big, 所以存在充分大整数 m, 使得

$$mD\equiv H+N,$$

这里 H 是丰富除子, N 是有效除子 (引理 5.1.1 (1)). 进一步, 由引理 5.1.1 (2), 我们不妨假设 N 具有简单正规交支集. 设

$$N=\sum_{i=1}^{r}e_iE_i,$$

这里 E_i 是不可约分支, $e_i>0$. 今构造 Kawamata 覆盖 (定理 5.1.4) $h:Y\to X$, 满足

$$h^*E_i=me_i^*E_i',\quad e_i^*:=\frac{e^*}{e_i},\quad e^*=\prod_{k=1}^{r}e_k,$$

并且 $E':=\sum\limits_i E_i'$ 是简单正规交的. 此时

$$mh^*D\equiv h^*H+me^*E'.$$

由于 D 是 nef 的, 所以 h^*D 亦然, 从而

$$me^*(h^*D-E')\equiv h^*H+m(e^*-1)h^*D$$

是丰富除子, 故 $A:=h^*D-E'$ 亦然.

由 Norimatsu 引理 5.3.1,

$$H^j(Y,\mathcal{O}_Y(-h^*D))=H^j(Y,\mathcal{O}_Y(-A-E'))=0,\quad j>0.$$

再由单性引理 5.1.3 即得结论. ■

注 5.3.1　在曲面情形, 我们可以用 Bogomolov 不等式给出 Mumford 消失定理. 具体见命题 7.2.1. ■

5.4 Griffiths-Le Potier 消失定理

以下设 X 是光滑不可约复射影簇, $\dim X = n$, $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ 是典范线丛. 考虑秩 r 向量丛 E 及其射影丛 $\bar{\pi}: \mathbb{P}(E^\vee) \to X$.

定理 5.4.1 (Griffiths **消失定理** [Gri69])　*如果 E 是丰富层, 那么对任何 $m \geq 0$, 都有*

$$H^i(X, \omega_X \otimes S^m E \otimes \det E) = 0, \quad \forall i > 0.$$

证明　利用命题 1.3.2,

$$\begin{aligned}\omega_X \otimes S^m E \otimes \det E &= \omega_X \otimes \det E \otimes \bar{\pi}_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(E^\vee)(m))\\ &= \bar{\pi}_*(\bar{\pi}^*(\omega_X \otimes \det E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m))\\ &= \bar{\pi}_*(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m+r)).\end{aligned}$$

进一步, $R^i\bar{\pi}_*(\omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m+r)) = 0$ $(i > 0)$. 因此

$$H^i(\mathbb{P}(E^\vee), \omega_{\mathbb{P}(E^\vee)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(m+r)) = H^i(\omega_X \otimes S^m E \otimes \det E).$$

因为 E 是丰富的, 即 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的丰富线丛, 故由 Kodaria 消失定理即得结论. ■

定理 5.4.2 (Le Potier **消失定理** [LeP75])　*设 E 是丰富层, 那么*

(1) $H^q(X, \omega_X \otimes \wedge^q E) = 0$, $p > 0$, $p + q > r$.

(2) $H^q(X, \Omega_X^p \otimes E) = 0$, $p + q \geq n + r$.

证明　利用命题 1.3.3 (4),

$$H^q(\mathbb{P}(E^\vee), \Omega^{n+p-1}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(p)) = H^i(X, \omega_X \otimes \wedge \wedge^p E).$$

因为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(a)$ 是丰富的, 故由 Nakano 消失定理即得 (1).

(2) 由命题 1.3.3 (5), 类似上面的证明可得. ■

注 5.4.1　由 Serre 对偶定理, Le Potier 消失定理可以对偶地写为

$$\begin{aligned}&H^q(X, \wedge^p E^\vee) = 0, \qquad \text{当 } p > 0,\ q < n - r + p \text{ 时},\\ &H^q(X, \Omega_X^p \otimes E^\vee) = 0, \text{ 当 } p + q \leq n - r \text{ 时}.\end{aligned}$$

当 E 是线丛时, 这就是 Kodaira-Nakano 消失定理.

Le Potier 消失定理的条件依赖于 E 的秩. 这些条件一般情形下是不能改进的. 比如取 $X = \mathbb{P}^n$, $E = T_X$ 切丛. 由 Bott 公式, $h^a(X, \wedge^a E^\vee) = 1$ $(a > 0)$. ■

推论 5.4.1　*若 E 是丰富层, 且 $\operatorname{rk} E < \dim X$, 那么 $H^1(X, E^\vee) = 0$.*

证明　这是 Le Potier 消失定理的特例. 另一个不同的证明也可参看 [BoOl03]. ■

推论 5.4.2 *若 E 是丰富层, 且 $\operatorname{rk} E \leq \dim X$, $s \in H^0(X, E)$, 那么 s 必有零点.*

证明 假设 s 无零点, 则有正合的 Koszul 复形 (见例 3.1.4)

$$0 \longrightarrow \wedge^r E^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^2 E^\vee \longrightarrow E^\vee \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

由 Le Potier 消失定理, $h^{j-1}(X, \wedge^j E^\vee) = 0$. 将上述正合列拆分成短正合列, 并应用前面的等式, 最终可迫使 $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 0$, 矛盾! ■

5.5 Kawamata-Viehweg 消失定理

定理 5.5.1 (Kawamata-Viehweg **消失定理**) *设 X 是 n 维光滑射影簇, L 是 X 上的除子. 假设 L 能分解为*

$$L \overset{num}{\sim} P + N,$$

这里 P 是 nef,big 的 $\mathbb{Q}$-除子, $N = \sum_i a_i E_i$ 是简单正规交的有效 $\mathbb{Q}$-除子, 每个系数 a_i 均满足 $0 \leq a_i < 1$. 那么

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) = 0, \quad \forall i > 0,$$

亦即 $H^j(X, \mathcal{O}_X(-L)) = 0$ $(\forall j < n)$.

证明 为方便证明, 我们允许 $N = \sum_i^r a_i E_i$ 中的 E_i 包含多个连通分支 (相同系数的合并在一起). 我们对 N 的表达式中项数 r 施归纳法. 如果 $N = 0$, 那么 L 是 nef,big 除子, 因而由定理 5.3.1 即得. 现在我们假设 $a_1 = \frac{c}{d}$, $0 < c < d$.

我们构造 Bloch-Gieseker 覆盖 $p : X' \to X$, 使得 $E_i' := p^* E_i$, $\sum_i E_i'$ 仍是简单正规交, 并且

$$E_1' \equiv dA,$$

这里 A 是 X' 上的除子. 我们记 $L' = p^* L$, $P' = p^* P$.

我们再构造 d 次循环覆盖

$$q : X'' \longrightarrow X'$$

以 E' 为分歧轨迹. 记 $E_i'' = q^* E_i'$ (注意, 这里 E_i'' 可以包含多个连通分支). 于是

$$q^* L' \equiv q^* P' + c q^* A + \sum_{i \geq 2} a_i E_i''.$$

因此

$$q^* L' - c q^* A \overset{num}{\sim} q^* P' + \sum_{i \geq 2} a_i E_i''$$

满足命题条件, 并且 E_i'' 的个数比原来的少. 因此由归纳假设,

$$H^j(X'', \mathcal{O}_{X''}(-q^* L' + c q^* A)) = 0, \quad j < n.$$

因而

$$H^j(X', q_* \mathcal{O}_{X''}(-q^* L' + c q^* A)) = 0, \quad j < n.$$

利用循环覆盖 $q_*\mathcal{O}_{X''}$ 的直和分解及射影公式, 这也推出

$$H^j(X',\mathcal{O}_{X'}(-L'+(c-k)A))=0,\quad j<n,\quad k=0,\cdots,d-1.$$

注意到 $c\leq d-1$，, 故取 $k=c$ 时即得

$$H^j(X',\mathcal{O}_{X'}(-L'))=0.$$

由单性引理 5.1.3 即得

$$H^j(X,\mathcal{O}_X(-L))=0,\quad j<n.$$

这就完成了证明. ■

Kawamata-Viehweg 消失定理也可以改述成其他形式. 这里想引入一些记号. 对任意实数 x, 我们用 $\ulcorner x\urcorner$ (相应地, $\llcorner x\lrcorner$) 表示不小于 (相应地, 不大于) x 的最小 (相应地, 最大) 整数. 出于传统, $\ulcorner x\urcorner$ 通常也记为 $[x]$. 设 $D=\sum\limits_i a_iD_i$ 是 $\mathbb{Q}$-除子. 我们定义

$$\ulcorner D\urcorner=\sum_i \ulcorner a_i\urcorner D_i,$$
$$\llcorner D\lrcorner=\sum_i [a_i]D_i,$$

$\ulcorner D\urcorner$ 称为 D 的上整部分 (Round-up); $\llcorner D\lrcorner$ 称为 D 的下整部分 (Round-down)，也称为整数部分 (Integral part), 也常记为 $[D]$. D 的分数部分

$$\{D\}:=D-[D].$$

在上面的记号下, Kawamata-Viehweg 消失定理有以下两种改述形式.

推论 5.5.1 设 X 是光滑射影簇.

(1) 设 A 是 nef,big 的 $\mathbb{Q}$-除子, 其分数部分具有简单正规交的支集, 那么

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+\ulcorner A\urcorner))=0,\quad i>0.$$

(2) 设 L 是整除子, D 是具有单正规交支集的 $\mathbb{Q}$-除子, 如果 $L-D$ 是 nef, big 的, 那么

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+L-[D]))=0,\quad i>0.$$

5.6 相对消失性

5.6.1 Grauert-Riemenschneider 消失定理

引理 5.6.1 设 $f:X\to Y$ 是射影簇之间的态射, A 是 Y 上的丰富除子, $\mathcal{F}$ 是 X 上的凝聚层, 满足

$$H^j(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(f^*(mA)))=0,\quad \forall j>0,\quad \forall m\gg 0.$$

那么 $R^jf_*\mathcal{F}=0$ 对所有 $j>0$ 成立.

证明 假设 $R^jf_*\mathcal{F}$ 非零. 取充分大 m, 我们有

$$H^i(Y,R^jf_*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_Y(mA))=0,\quad i>0,\ j\geq 0,$$

并且 $R^j f_*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_Y(mA)$ 由整体截面生成. 由谱序列知

$$H^j(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(f^*(mA)))=H^0(Y,R^jf_*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_Y(mA)).$$

由命题条件, 上式左边等于零, 但是右边非零 (因为 $R^jf_*\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_Y(mA)$ 由整体截面生成), 这就得到矛盾! ■

定理 5.6.1 (Grauert-Riemenschneider **消失定理**) 设 $f:X\to Y$ 是簇之间的一般有限的满态射, X 是光滑的. 那么

$$R^if_*\mathcal{O}_X(K_X)=0,\quad i>0.$$

证明 通过紧化, 我们可以假设 X,Y 是射影簇 (具体细节参见 [**?** , 定理 4.3.9]). 任取 Y 上的丰富除子 A. $f^*(mA)$ 显然是 X 上的 nef 除子. 由于 f 是一般有限的, 因而 $f^*(mA)$ 也是 big 的. 由定理 5.3.1,

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+f^*(mA)))=0,\quad i>0,\quad m\geq 1.$$

由引理 5.6.1 即得结论. ■

5.6.2 相对 Kawamata-Viehweg 消失定理

Kawamata-Viehweg 消失定理也可以过渡到高次正像层上. 设 $f:X\to Y$ 是射影簇的满态射, X 是光滑的. A 是 X 上的 $\mathbb{Q}$-除子. 如果 B 限制在 f 的任何纤维上都是 nef 的, 就称其为 f-nef 的; 若 B 限制在一般纤维上是 big 的, 则称其为 f-big 的.

定理 5.6.2 (**相对** Kawamata-Viehweg **消失定理**) 设 $f:X\to Y$ 是射影簇的满态射, X 是光滑的. A 是 X 上的 $\mathbb{Q}$-除子. 如果 A 是 f-nef 且 f-big 的, 并且其分数部分具有简单正规交支集, 那么

$$R^if_*\mathcal{O}_X(K_X+\ulcorner A\urcorner)=0,\quad i>0.$$

5.6.3 Kollár 定理

定理 5.6.3 (Kollár **单性定理**) 设 X 是光滑射影簇, L 是 semiample 线丛 (即存在某个正整数 p, 使得 $|pL|$ 无基点), 给定 $k\geq 1$ 以及 $D\in|kL|$, 那么自然态射

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+mL))\xrightarrow{\cdot D}H^i(X,\mathcal{O}_X(K_X+(m+k)L)),\quad i\geq 0,\ m\geq 1,$$

是单射.

定理 5.6.4 (Kollár **消失定理**) 设 $f:X\to Y$ 是射影簇之间的满态射, X 是光滑的, 那么

(1) $R^jf_*\mathcal{O}_X(K_X)$ 无挠 ($j\geq 0$).

(2) $R^jf_*\mathcal{O}_X(K_X)=0$ ($j>\dim X-\dim Y$).

(3) 设 A 是丰富除子, 则

$$H^i(Y,R^jf_*\mathcal{O}_X(K_X)\otimes\mathcal{O}_Y(A))=0,\quad i\geq 1,\ j\geq 0.$$

本章习题

习题 5.1 设 E 是丰富层, L 是 nef 线丛, 证明改进的 Griffiths 消失定理:

$$H^i(X,\omega_X\otimes S^mE\otimes\det E\otimes L)=0,\quad\forall i>0.$$

如果 E 是 nef, L 是丰富的, 证明上述结论仍成立.

习题 5.2 设 X 是光滑射影簇, D 是 nef 除子, H 是丰富除子. 假设存在某个 $k \geq 0$, 满足 $D^{n-k}H^k \geq 0$, 证明:

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0, \quad i > k.$$

(提示: 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X + D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X + D + H) \longrightarrow \mathcal{O}_H(K_H + D) \longrightarrow 0.$$

这里不妨设 H 是非常丰富的.)

第六章　曲线上的向量丛

6.1　滤过

6.1.1　极大完全滤过

设 X 是光滑代数曲线. 由前面结论, X 上的无挠层和局部自由层是等同的. 特别地, 局部自由层的子层也是局部自由的. 设 $\mathcal{E}$ 是秩 r 局部自由层, $\mathcal{L}$ 是它的子层. 我们可构造 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的极大正规扩张 $\widetilde{\mathcal{L}}$. 这就有正合列

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{E}/\widetilde{\mathcal{L}}$ 是无挠的, 因而也是局部自由的. 有时我们也将 $\widetilde{\mathcal{L}}$ 称为 $\mathcal{L}$ 的饱和子层 (Saturated subsheaf). 饱和子层 $\widetilde{\mathcal{L}}$ 也是唯一能使对应商层 $\mathcal{E}/\widetilde{\mathcal{L}}$ 无挠的扩张.

秩 1 的饱和子层即极大子线丛. 极大子线丛总是存在的. 具体构造如下: 丰富线丛 $\mathcal{H}$, 则 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{H}^{\otimes m}$ 有整体截面, 从而 $\mathcal{O}_X\subseteq\mathcal{E}\otimes\mathcal{H}^{\otimes m}$, 即 $\mathcal{O}_X\otimes(\mathcal{H}^\vee)^{\otimes m}\subseteq\mathcal{E}$. 我们再取其饱和层即可.

定义 6.1.1　$\mathcal{E}$ 的滤过 (Filtration) 是指饱和子层的序列

$$0=\mathcal{E}_0\subsetneqq\mathcal{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_n=\mathcal{E}.$$

如果 $n=r$ 且 $\operatorname{rk}\mathcal{E}_i=i$ $(i=1,\cdots,r)$, 则称该滤过为完全滤过 (Total filtration).

命题 6.1.1　光滑曲线 X 上的秩 r 局部自由层 $\mathcal{E}$ 必有完全滤过.

证明　利用归纳法, 我们只需要证明 $\mathcal{E}$ 存在饱和可逆层即可 (其存在性上面已证). ■

完全滤过的选取并不唯一. 我们希望对它做一定的限制. 除了秩之外, 另一个控制的量就是次数. 我们首先说明 $\mathcal{E}$ 的子层次数上界被 $\mathcal{E}$ 控制. 设 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}$,$\operatorname{rk}\mathcal{F}=s$, 则 $\det\mathcal{F}\subseteq\wedge^s\mathcal{E}$. 因此不失一般性, 可设 $\mathcal{F}$ 是可逆层.此时 $H^0(\mathcal{F})\leq H^0(\mathcal{E})$. 利用 Riemann-Roch 定理即知 $\deg\mathcal{F}$ 的上界被 $\mathcal{E}$ 控制. 请读者注意, 这个上界不能由 $\operatorname{rk}\mathcal{E},\deg\mathcal{E}$ 确定. 比如 $\mathcal{E}=\mathcal{O}_X(n)\oplus\mathcal{O}_X(-n)$ 是次数为零的秩 2 向量丛, 它的子层 $\mathcal{O}_X(n)$ 的次数为 n.

现在我们在 $\mathcal{E}$ 中寻找次数最大的饱和可逆层 $\mathcal{E}_1$, 然后再在包含 $\mathcal{E}_1$ 的秩 2 饱和层中找次数最大者 $\mathcal{E}_2$, 以此类推, 即得到一个完全滤过

$$0=\mathcal{E}_0\subsetneqq\mathcal{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_r=\mathcal{E}.$$

它称为 $\mathcal{E}$ 的极大完全滤过 (Maximal total filtration).

定理 6.1.1 (Atiya **滤过定理** [Ati57])　设 X 是亏格 $g>0$ 的光滑代数曲线, $\mathcal{E}$ 是 X 上的秩 r 局部自由层. 假设 $\mathcal{E}$ 不可分解层 (non-decomposable sheaf), 即不能分解为两个饱和子层的直和, 那么对任何极大完全滤过

$$0=\mathcal{E}_0\subsetneqq\mathcal{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_r=\mathcal{E},$$

都有

$$\deg\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}\geq\deg\mathcal{E}_i-(i-1)(2g-2).$$

证明 对下标 i 施归纳法. 设 $\mathcal{E}_i' = \mathcal{E}/\mathcal{E}_i$. 因为 $\mathcal{E}$ 不可分解, 所以正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_i' \longrightarrow 0$$

蕴含着 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_i', \mathcal{E}_i) \neq 0$. 由 Serre 对偶定理, 即 $H^0((\mathcal{E}_i)^\vee \otimes \mathcal{E}_i' \otimes \omega_X) \neq 0$, 亦即 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i' \otimes \omega_X) \neq 0$. 取非零映射 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i' \otimes \omega_X)$. 找最小的下标 j, 使得限制映射 $\varphi : \mathcal{E}_j \to \mathcal{E}_i' \otimes \omega_X$ 非零. 由此可诱导非零映射 $\bar{\varphi} : \mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1} \to \mathcal{E}_i' \otimes \omega_X$. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{Im}\bar{\varphi} \otimes \omega_X^\vee$ 在 $\mathcal{E}_i'$ 中的饱和可逆层. 由极大滤过的选取, 我们有

$$\deg \mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i \geq \deg \mathcal{F} \deg(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1} \otimes \omega_X^\vee) = \deg \mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1} - 2(g-1).$$

现在利用归纳假设于上面不等式右端, 即得结论. ■

推论 6.1.1 *椭圆曲线上的不可分解秩 2 局部自由层必是半稳定的.*

(更精细的讨论见推论 6.4.1)

6.1.2 Harder-Narasimhan 滤过

我们在这一节中引入一类更为重要的滤过.

定义 6.1.2 *设 $\mathcal{E}$ 是光滑代数曲线 X 上的局部自由层, 如果 $\mathcal{E}$ 的一个滤过*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneqq \mathcal{E}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$$

满足如下性质, 我们就称其为 Harder–Narasimhan 滤过 (或简称 Harder 滤过):

(1) *$\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 都是半稳定的 $(i = 1, \cdots, n)$,*

(2) *令 $\mu_i = \mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$, 则 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{n-1} > \mu_n$.*

我们通常记 $\mu^+(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}_1)$, $\mu^-(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})$. $\mu^+(\mathcal{E})$ *称为极大斜率* (Maximal slope), $\mu^-(\mathcal{E})$ *称为极小斜率* (Minimal slope) *或最后斜率* (Final slope). 若 $\mu^-(\mathcal{E}) > 0$ (相应地, ≥ 0), 则称 $\mathcal{E}$ 是 (半) 正定的 (Positive/Semipositive).

命题 6.1.2 *任何局部自由层都存在唯一的 Harder–Narasimhan 滤过.*

证明 我们对 $rk(\mathcal{E})$ 施归纳法. 当 $\mathcal{E}$ 是半稳定层时, 结论显然. 特别地, 当它是可逆层时, 必是半稳定的. 因此我们不妨设 $\mathcal{E}$ 不是半稳定的.

设 $\mu_1 = \max\{\mu(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}\}$ 及 $r_1 = \max\{\mathrm{rk}\,(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}, \mu(\mathcal{F}) = \mu_1\}$. 我们取子层 $\mathcal{E}_1$ 使得 $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu_1$, $\mathrm{rk}\,(\mathcal{E}_1) = r_1$. 由定义显见 $\mathcal{E}_1$ 是半稳定的, 且 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 是局部自由的, 其秩比 $\mathcal{E}$ 的秩小. 因此由归纳假设, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 有 Harder-Narashimhan 滤过, 从而也诱导了 $\mathcal{E}$ 如下的滤过:

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneqq \mathcal{E}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}.$$

这里 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 是半稳定的 $(1 \leq i \leq n)$ 且 $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}) < \mu(\mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_{i-2})$, $3 \leq i \leq n$.

令 $\mu_2 = \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1)$, $r_2 = \mathrm{rk}\,(\mathcal{E}_2)$. 于是由 $\mathcal{E}_1$ 的选取立得

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{r_2(\mu(\mathcal{E}_1) - \mu(\mathcal{E}_2))}{r_2 - r_1} > 0.$$

这样就证明了上述滤过是 $\mathcal{E}$ 的 Harder-Narashimhan 滤过.

假设 $\mathcal{E}$ 有另一 Harder-Narashimhan 滤过:

$$0=\mathcal{E}'_0\subsetneqq\mathcal{E}'_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}'_m=\mathcal{E}.$$

由上面 $\mathcal{E}_1$ 的选取, 我们有 $\mu(\mathcal{E}_1)\geq\mu(\mathcal{E}'_1)$. 此时存在下标 i, 使得 $\mathcal{E}_1\subseteq\mathcal{E}'_i$, $\mathcal{E}_1\nsubseteq\mathcal{E}'_{i-1}$. 于是存在半稳定层之间的非零映射 $\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}$. 我们有 $\mu(\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1})\geq\mu(\mathcal{E}_1)\geq\mu(\mathcal{E}'_1)$ (习题 1.18). 这就推出 $i=1$, $\mu(\mathcal{E}_1)=\mu(\mathcal{E}'_1)$, $\mathcal{E}_1\subseteq\mathcal{E}'_1$, 从而由 $\mathcal{E}_1$ 的选取知 $\mathrm{rk}\,(\mathcal{E}_1)=\mathrm{rk}\,(\mathcal{E}'_1)$, $\deg\mathcal{E}_1=\deg\mathcal{E}'_1$. 因此 $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{E}'_1$ (习题 1.9). 由 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 上的归纳假设, 我们就导出了滤过的唯一性. ■

注 6.1.1 上面的证明其实也蕴含了一个事实: 如果 $\mathcal{E}$ 的子层 $\mathcal{F}$ 具有极大斜率, 则必有 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}_1$. 因此有时我们也将 $\mathcal{E}_1$ 称为 $\mathcal{E}$ 的*极大不稳定子层* (Maximal destabilizing subsheaf). ■

推论 6.1.2 *$\mathcal{E}^\vee$ 的 Harder 滤过恰好是*

$$0=(\mathcal{E}/\mathcal{E}_n)^\vee\subsetneqq(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})^\vee\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}^\vee. \tag{6-1}$$

特别地, $\mathcal{E}$ 正定 (半正定) 当且仅当 $\mathcal{E}$ 的任何商层的斜率 >0 (≥ 0).

设 $\pi:\widetilde{X}\to X$ 是 d 次有限覆盖, 那么 $\mathcal{E}$ 在 π 下的拉回 $\widetilde{\mathcal{E}}=\pi^*\mathcal{E}$ 也是局部自由层, 显然有

$$\mathrm{rk}\,(\widetilde{\mathcal{E}})=\mathrm{rk}\,(\mathcal{E}),\ \ \deg\widetilde{\mathcal{E}}=d\cdot\deg\mathcal{E},\ \ \mu(\widetilde{\mathcal{E}})=d\cdot\mu(\mathcal{E}).$$

进一步, X 上的正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{E}_1\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}_2\longrightarrow 0$$

在 π 下的拉回是 $\tilde{X}$ 上的正合列. 类似地, 一个局部自由层滤过的拉回是相应的层滤过.

命题 6.1.3 *(1) $\widetilde{\mathcal{E}}=\pi^*\mathcal{E}$ 半稳定当且仅当 $\mathcal{E}$ 半稳定.*
(2) 设 $\mathcal{E}$ 的 Harder 滤过为

$$0=\mathcal{E}_0\subsetneqq\mathcal{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathcal{E}_n=\mathcal{E},$$

则

$$0=\pi^*\mathcal{E}_0\subsetneqq\pi^*\mathcal{E}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\pi^*\mathcal{E}_n=\widetilde{\mathcal{E}}$$

是 $\widetilde{\mathcal{E}}$ 的 Harder 滤过.
(3) $\widetilde{\mathcal{E}}=\pi^*\mathcal{E}$ 正定 (相应地, 半正定, 负定, 半负定) 当且仅当 $\mathcal{E}$ 正定 (相应地, 半正定, 负定, 半负定).

证明 (1) $(\Longrightarrow)$ 显然. 下证 $(\Longleftarrow)$. 不失一般性, 可设 $\pi:\widetilde{X}\to X$ 是 Galois 覆盖. 如果 $\widetilde{\mathcal{E}}$ 不是半稳定, 那么由 Harder 滤过, 存在唯一的极大斜率子层 $\widetilde{\mathcal{E}}_1$, 且秩达到极大. 对任何 $g\in Gal(\widetilde{X}/X)$, 显见 $g(\tilde{\mathcal{E}}_1)$ 也满足此条件, 因此由唯一性知 $g(\widetilde{\mathcal{E}}_1)=\widetilde{\mathcal{E}}_1$. 这表明 $\widetilde{\mathcal{E}}_1=\pi^*\mathcal{E}_1$, 对某个子层 $\mathcal{E}_1\subseteq\mathcal{E}$. 于是

$$\mu(\mathcal{E}_1)=\mu(\widetilde{\mathcal{E}}_1)/(\deg\pi)>\mu(\widetilde{\mathcal{E}})/(\deg\pi)=\mu(\mathcal{E}).$$

所以 $\mathcal{E}$ 不是半稳定的.

(2)(3) 都是直接推论. ■

上面所有结论和概念都能推广到 $\mathbb{Q}$-扭丛上. 比如我们定义斜率

$$\mu(E\langle\delta\rangle)=\mu(E)+\deg\delta.$$

$E\langle\delta\rangle$ 半稳定是指它的每个扭子丛 $F\langle\delta\rangle \subseteq E\langle\delta\rangle$ 都满足 $\mu(F\langle\delta\rangle) \leq \mu(E\langle\delta\rangle)$. 类似地还能定义 $E\langle\delta\rangle$ 的 Harder 滤过等等. 特别地, $E\langle\delta\rangle$ 半稳定当且仅当 E 半稳定. 此外, 利用 Grothendieck 关系 (见命题 1.3.4), 可以证明

$$\deg E\langle\delta\rangle = (\xi_E + \bar{\pi}^*\delta)^r.$$

其余的推广结论不再一一赘述.

命题 6.1.4 如果 $E\langle\delta\rangle$ 是丰富的 (相应地, nef), 那么 $\deg E\langle\delta\rangle > 0$ (相应地, ≥ 0).

证明 如果 $E\langle\delta\rangle$ 是丰富的, 那么 $\lambda := \xi_E + \bar{\pi}^*\delta$ 是丰富除子类. 因此

$$\deg E\langle\delta\rangle = \lambda^r > 0.$$

类似地, 如果 $E\langle\delta\rangle$ 是 nef, 那么由 Kleiman 定理亦知 $\deg E\langle\delta\rangle = \lambda^r \geq 0$. (也可以利用丰富扭技巧证明这个结论.) ■

6.2 斜率与稳定性

6.2.1 Miyaoka 半稳定性判则

令 $E_{\mathrm{norm}} = E\langle -\frac{\det E}{\mathrm{rk}\, E}\rangle$. 此时 $\mu(E_{\mathrm{norm}}) = 0$.

定理 6.2.1 (Miyaoka **半稳定性判则** [Miy85]) 设 E 是光滑曲线 X 上的向量丛, 则以下条件彼此等价:

(1) E 是半稳定的.

(2) E_{norm} 是半稳定.

(3) E_{norm} 是半正定的.

(4) E_{norm} 是 nef.

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) 是显然的.

下面证 (4) $\Longrightarrow$ (3). 因为 E_{norm} 是 nef 的, 所以 E_{norm} 的任何商丛都是 nef 的 (命题 2.3.2), 因此由命题 6.1.4 知其商丛的次数都是非负的, 即 E_{norm} 是半正定的.

再证 (1) $\Longrightarrow$ (4). 已知 E 是半稳定的. 假若 E_{norm} 不是 nef, 那么由 Barton-Kleiman 判则, 存在光滑曲线之间的有限态射 $f : X' \to X$, 使得 f^*E_{norm} 有一个次数小于 0 的商线丛. 这表明 f^*E_{norm} 不是半稳定的 (由 (1)(3) 的等价性). 由命题 6.1.3, 这也推出 E_{norm} 不是半稳定的, 矛盾! ■

Miyaoka 半稳定性判则也可以直接叙述成 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上除子类的语言.

定理 6.2.2 设 E 是光滑曲线 X 上的秩 r 向量丛, $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E^\vee) \to X$ 是诱导的射影丛, 则以下条件彼此等价:

(1) E 是半稳定的.

(2) $(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})$ 是数值有效的.

(3) $\overline{NA}(\mathbb{P}(E^\vee)) = \mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}) \oplus \mathbb{R}_{\geq 0}\bar{\pi}^*p$, 这里 $p \in X$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示非负实数集合.

(4) $\overline{NE}(\mathbb{P}(E^\vee)) = \mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})^{r-2} \oplus \mathbb{R}_{\geq 0}(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})^{r-2}\bar{\pi}^*p$.

(5) $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的有效除子都是数值有效的.

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 由 Miyaoka 半稳定性判则, E 半稳定等价于 E_{norm} 是 nef. 按定义, 后者相当于

$$-\frac{K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}}{r} = \xi_E + \bar{\pi}^*(-\frac{\det E}{r})$$

是 nef 的 (该等式见例 1.3.4).

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) 来自于命题 1.3.5.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 假设 E 不是半稳定, 即可找具有极大斜率的子丛 E_1 以及有理数 c, 使得 $\mu(E_1) > c > \mu(E)$. 对充分可除的正整数 N 以及 $p \in X$, 我们有

$$H^0(X, S^N E_1(-Ncp)) \subseteq H^0(X, S^n E(-Ncp)) \cong H^0(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(N) \otimes \bar{\pi}^*\mathcal{O}_X(-Ncp)).$$

由 Riemann-Roch 定理, 上式左端非零. 因此 $|N((-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}) + \bar{\pi}^*\mathcal{O}_X(\mu(E) - c))|$ 含有有效除子. 假如 $(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})$ 是数值有效的, 那么由前面讨论, $\mu(E) - c \geq 0$, 矛盾! 因此 $(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X})$ 不是数值有效的, 即存在不可约曲线 C, 使得 $C(-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}) < 0$, 因而

$$N((-K_{\mathbb{P}(E^\vee)/X}) + \bar{\pi}^*\mathcal{O}_X(\mu(E) - c))C < 0,$$

这和假设条件矛盾! 因此 E 是半稳定的. ■

利用 Miyaoka 判则, 我们可以很容易证明如下经典结果 (以下简单证明来自于 [Gie79]).

命题 6.2.1 (Narasimhan-Seshadri **定理** [NaSe65]) 设 $E\langle\delta\rangle$ 和 $\mathcal{F}\langle\lambda\rangle$ 是曲线 X 上的半稳定 $\mathbb{Q}$-扭向量丛, 则 $E\langle\delta\rangle \otimes \mathcal{F}\langle\lambda\rangle$ 以及 $S^m E\langle\delta\rangle$ 都是半稳定的.

证明 由基变换技巧, 我们只需要考虑 $\delta = \lambda = 0$ 的情形. 因为 E, F 是半稳定的, 所以 $E_{\text{norm}}, F_{\text{norm}}$ 是 nef 的. 因此

$$(E \otimes F)_{\text{norm}} = E_{\text{norm}} \otimes F_{\text{norm}}$$

也是 nef 的, 故由判则知 $E \otimes F$ 是半稳定的.

由归纳法, E 的任意次张量积也都是半稳定的. 因为 $S^m E$ 是 m 次张量积的直和项, 所以它也是半稳定的 (命题 1.2.13). ■

Miyaoka 判则的另一个应用是如下的漂亮定理.

定理 6.2.3 (Hartshorne **定理**) 设 $E\langle\delta\rangle$ 是光滑曲线 X 上的 $\mathbb{Q}$-扭向量丛. 那么以下条件彼此等价:

(1) $E\langle\delta\rangle$ 是丰富的 (相应地, nef).

(2) $E\langle\delta\rangle$ 是正定的 (相应地, 半正定).

证明 我们只需要考虑 $\delta=0$ 的情形.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 因为 E 是丰富的 (相应地, nef), 所以它的任何商丛都是丰富的 (相应地, nef). 由命题 6.1.4, 任何商丛的次数都是正的 (相应地, 非负的).

(2) $\Longrightarrow$ (1) 先证明 E 是半稳定的情形. 此时 (半) 正定性相当于 $\deg E>0$ (≥ 0). 由 Miyaoka 判则, E_{norm} 是 nef. 我们有

$$E=E_{\text{norm}}\langle\frac{\det E}{\operatorname{rk}E}\rangle=E_{\text{norm}}\otimes\mathcal{O}_X\langle\frac{\det E}{\operatorname{rk}E}\rangle.$$

如果 $\deg E>0$ (≥ 0), 那么 $\mathcal{O}_X\langle\frac{\det E}{\operatorname{rk}E}\rangle$ 是丰富的 (nef). 因而 E 是丰富的 (nef).

再考虑一般情形. 假设 E 不是 nef, 我们来导出矛盾. 因为 $\deg E\geq 0$, 所以由上面讨论和假设条件, E 不可能是半稳定的. 考虑 E 的 Harder 滤过

$$0=E_0\subsetneqq E_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq E_n=E.$$

首先, 我们说明 $\mu_i:=\mu(E_i/E_{i-1})$ 不可能都是非负的. 若不然, E_i/E_{i-1} 都是 nef 的半稳定丛. 由于 E_1 也是 nef 的, E_2 是 E_1 通过 E_2/E_1 的扩张, 所以 E_2 也是 nef 的. 以此类推, 最终 $E_n=E$ 也是 nef, 矛盾!

这样, 存在下标 k, 使得

$$\mu_n<\mu_{n-1}<\cdots<\mu_{n-k}<0.$$

因此 $\deg(E/E_{n-k-1})<0$. E/E_{n-k-1} 作为 E 的商丛具有负的次数. 也就是说, E 不是半正定的, 矛盾! 这就证明了 E 是 nef. 类似可讨论 E 是正定的情形. ■

推论 6.2.1 ([Fuj78], 引理 3) *设 E 是亏格 $g(\geq 2)$ 的光滑曲线 X 上的向量丛, 满足 $h^1(X,E)=0$, 则 E 是丰富的.*

证明 如果 E 不是丰富的, 那么存在某商丛 Q 具有负的次数. 由 Riemann-Roch 定理, $h^1(X,Q)\neq 0$. 因此 $h^1(X,E)\neq 0$, 矛盾! ■

定义 6.2.1 *若 $E\langle\delta\rangle$ 的对偶 $E^\vee\langle-\delta\rangle$ 是 (半)正定的, 则称 $E\langle\delta\rangle$ 是 (半) 负定的 (Negative/Semi-negative).*

$E\langle\delta\rangle$ (半) 负定也可以理解为它的任何 $\mathbb{Q}$-扭子丛的斜率 <0 (相应地, ≤ 0).

推论 6.2.2 *E 是半稳定的当且仅当 E_{norm} 是半负定的.*

证明 E 半稳定当且仅当 $E^\vee$ 半稳定. 将 Miyaoka 判则应用到 $E^\vee$ 上即得. ■

由 Hartshorne 定理的证明, 我们直接有以下推论.

推论 6.2.3 *设 E 是半稳定的, 那么 E 是丰富的 (相应地, nef, 半负定, 负定) 当且仅当 $\deg E>0$ (相应地, ≥ 0, ≤ 0, <0).*

例 6.2.1 由例 2.1.1, 在曲线 X 上, $E=\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ 是半稳定的, 也是半正定的. 因此对任何线丛 L, $E(L)$ 是半稳定的. $E(L)$ 丰富 (相应地, nef, 半负定, 负定) 当且仅当 $\deg L>0$ (相应地, ≥ 0, ≤ 0, <0). E 的半稳定性当然也可以由 Miyaoka 判则 (定理 6.2.2) 获得. ■

6.2.2 极 (小) 斜率

对偶层的极大 (小) 斜率满足

$$\mu^+(\mathcal{E}^\vee) = -\mu^-(\mathcal{E}), \quad \mu^-(\mathcal{E}^\vee) = -\mu^+(\mathcal{E}).$$

因此它们的性质基本上是对偶的. 关于这两种斜率, 我们有一些经典性质.

命题 6.2.2 考虑曲线上向量丛的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

则有

$$\mu^+(\mathcal{F}) \le \mu^+(\mathcal{E}) \le \max\{\mu^+(\mathcal{F}), \mu^+(\mathcal{G})\}, \quad \mu^-(\mathcal{G}) \ge \mu^-(\mathcal{E}) \ge \min\{\mu^-(\mathcal{F}), \mu^-(\mathcal{G})\}.$$

证明 首先, 因为 $\mathcal{F}$ 的子丛也是 E 的子丛, 故有 $\mu^+(\mathcal{F}) \le \mu^+(\mathcal{E})$. 设 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$ 是具有极大斜率的子丛, $\mathcal{G}_1$ 是 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$ 在 $\mathcal{G}$ 中的像, 我们有正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注意到 $\mu(\mathcal{F}_1) \le \mu^+(\mathcal{F})$ 及 $\mu(\mathcal{G}_1) \le \mu^+(\mathcal{G})$, 我们利用例 1.2.14 可得

$$\mu^+(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}_1) \le \max\{\mu(\mathcal{F}_1), \mu(\mathcal{G}_1)\} \le \max\{\mu^+(\mathcal{F}), \mu^+(\mathcal{G})\}.$$

类似可得其余结论. ■

推论 6.2.4 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是曲线 C 上的向量丛, 则

(1) $\mu^+(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}) + \mu^+(\mathcal{F})$ 且 $\mu^-(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) = \mu^-(\mathcal{E}) + \mu^-(\mathcal{F})$.

(2) $\mu^+(\mathcal{E}^{\otimes n}) = \mu^+(S^n\mathcal{E}) = n\mu^+(\mathcal{E})$ 且 $\mu^-(\mathcal{E}^{\otimes n}) = \mu^-(S^n\mathcal{E}) = n\mu^-(\mathcal{E})$.

(3) $\mu^+(\bigwedge^n \mathcal{E}) \le n\mu^+(\mathcal{E})$ 且 $\mu^-(\bigwedge^n \mathcal{E}) \ge n\mu^-(\mathcal{E})$.

证明 (1) 若 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 皆半稳定, 则由命题 6.2.1 立得结论. 如果其中一个向量丛半稳定, 比如 $\mathcal{F}$, 则 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ 有 Harder-Narasimhan 滤过

$$0 = \mathcal{E}_0\otimes\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}_1\otimes\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}_2\otimes\mathcal{F} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{m-1}\otimes\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}_m\otimes\mathcal{F} = \mathcal{E}\otimes\mathcal{F}. \tag{6-2}$$

这就有

$$\mu^+(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1) + \mu(\mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}) + \mu^+(\mathcal{F}).$$

现在我们假设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 不是半稳定的. 考虑 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ 的滤过 (6-2) (未必是Harder-Narasimhan 滤过).

注意到 $\mathcal{E}_1$ 是半稳定的, 由前面的讨论, 我们得到

$$\mu^+(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}_1) + \mu^+(\mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}) + \mu^+(\mathcal{F}). \tag{6-3}$$

现在我们证明

$$\mu^+(\mathcal{E}_2\otimes\mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}) + \mu^+(\mathcal{F}). \tag{6-4}$$

考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

由命题 6.2.2, 我们有

$$\mu^+(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}) \leq \mu^+(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F}) \leq \max\{\mu^+(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}), \mu^+(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F})\}.$$

因为 $\mu^+(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) + \mu^+(\mathcal{F})$ 及 (6-3), 所以这就证明了 (6-4). 依次类推, 我们可以归纳地证明 $\mu^+(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \mu^+(\mathcal{E}) + \mu^+(\mathcal{F})$. 同理可证另一等式.

(2) 因为 $S^n\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^{\otimes n}$, 所以由命题 6.2.2 以及 (1) 可知

$$\mu^+(S^n\mathcal{E}) \leq \mu^+(\mathcal{E}^{\otimes n}) = n\mu^+(\mathcal{E}).$$

另一方面, 由 $S^n\mathcal{E}_1 \subsetneqq S^n\mathcal{E}$ 可知

$$\mu^+(S^n\mathcal{E}) \geq \mu(S^n\mathcal{E}_1) = n\mu(\mathcal{E}_1) = n\mu^+(\mathcal{E}).$$

这就得到等式 $\mu^+(S^n\mathcal{E}) = n\mu^+(\mathcal{E})$. 其余式子类似可得.

(3) 的证明与 (2) 类似. ■

命题 6.2.3 设 $\mathcal{E}$ 是亏格 b 曲线 C 上的向量丛, 则有

(1) 如果 $\mu^+(\mathcal{E}) < 0$, 那么 $h^0(C, \mathcal{E}) = 0$.
(2) 如果 $\mu^-(\mathcal{E}) > 2b-2$, 那么 $h^1(C, \mathcal{E}) = 0$.
(3) 如果 $\mu^-(\mathcal{E}) > 2b-1$, 那么 $\mathcal{E}$ 由整体截面生成.
(4) 如果 $\mu^-(\mathcal{E}) > 2b$, 那么 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)}(1)$ 是非常丰富层.

证明 (1) 假若 $h^0(C, \mathcal{E}) > 0$, 则存在单射 $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{E}$, 这就推出 $\mu^+(\mathcal{E}) \geq 0$.

(2) 由推论 6.2.4 及条件,

$$\mu^+(\Omega_C \otimes \mathcal{E}^\vee) = \mu^+(\Omega_C) + \mu^+(\mathcal{E}^\vee) = 2b-2-\mu^-(\mathcal{E}) < 0.$$

因此 (1) 蕴含 $h^1(C, \mathcal{E}) = h^0(C, \Omega_C \otimes \mathcal{E}^\vee) = 0$.

(3) 对任何点 $p \in C$,

$$\mu^-(\mathcal{E}(-p)) = \mu^-(\mathcal{E}) - 1 > 2b-2.$$

由 (2) 得 $h^1(C, \mathcal{E}(-p)) = 0$. 再由命题 2.1.1, 这就推出所需结论.

(4) 与 (3) 的证明类似. ■

作为上面讨论的简单应用, 我们给出射影丛上的除子丰富性的数值判则 (本质上取决于 [Miy85]).

命题 6.2.4 设 $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E^\vee) \to C$ 是曲线 C 上的射影丛.

$$A \overset{num}{\sim} aD_0 + bF$$

是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的除子, 这里 D_0 对应 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 的除子, F 是一般纤维. 那么 A 是丰富除子当且仅当以下两个条件成立:

(1) $\mathrm{rk}\,\bar{\pi}_*A \geq \mathrm{rk}\,E$ (即 $a > 0$),
(2) $\mu^-(\bar{\pi}_*A) > 0$ (即 $b > -a\mu^-(E)$).

证明 先证充分性. 此时 $a>0$, $\mu^-(\bar{\pi}_*A)=a\mu^-(E)+b>0$, 因而对充分大的整数 k, $\mu^-(\bar{\pi}_*A^{\otimes k})>2b$. 我们只要证明 $A^{\otimes k}$ 是充分丰富的即可. 设 $F=\bar{\pi}_*A^{\otimes k}$. 我们可以诱导嵌入映射 $\mathbb{P}(E^\vee)\subseteq\mathbb{P}(F^\vee)$, 它限制在纤维上, 就是由 $A^{\otimes k}|_{\mathbb{P}^{r-1}}$ 诱导的线性系映射. 因为 $\mu^-(F)>2b$, 故由命题 6.2.3 知 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1)$ 是非常丰富的. 因此 $A^{\otimes k}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1)\big|_{\mathbb{P}(E^\vee)}$ 也是非常丰富的.

再证必要性. 此时 $a>0$ 是显然的. 设 $\mathbb{Q}$ 是 E 的商丛, 且斜率达到极小, 即 $\mu(Q)=\mu^-(E)$. 这样的 Q 当然是半稳定的. 我们有自然的包含关系 $\mathbb{P}(Q^\vee)\subseteq\mathbb{P}(E^\vee)$. 设$\bar{\pi}_*A=S^aE\otimes L$, 则

$$\bar{\pi}_*(A|_{\mathbb{P}(W^\vee)})=S^aQ\otimes L.$$

因为 Q 是半稳定的, 所以由 Miyaoka 定理 6.2.2 (3), 这就推出 $\mu(S^aQ\otimes L)>0$. 因此

$$\mu^-(\bar{\pi}_*A)=\mu^-(S^aE\otimes L)=\mu(S^aQ\otimes L)>0.$$

至此完成证明. ■

推论 6.2.5 E 是光滑的亏格 b 曲线 C 上的秩 r 向量丛, $\bar{\pi}:\mathbb{P}(E^\vee)\to C$ 是射影丛. 设 $H_1,\cdots,H_m$ $(m\geq r)$ 是 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 上的丰富除子, $D=K_X+H_1+\cdots+H_m$. 那么 D 关于 $\bar{\pi}$ 是 $(r-m)$-正则的, 并且

$$\mu^-(\bar{\pi}_*D)\geq 2b-2+\frac{m}{r}+r(\mu(E)-\mu^-(E))\geq 2b-2+\frac{m}{r}.$$

证明 Let $H_i\sim a_iD_0+b_iF$ $(i=1,\cdots,n)$, 这里 D_0,F 同命题 6.2.4. 于是

$$D\sim\left(-r+\sum_{i=1}^m a_i\right)D_0+\left(2b-2+\det E+\sum_{i=1}^m b_i\right).$$

由命题 6.2.4 及 H_i 的丰富性, 可设 $\frac{p_i}{q_i}=b_i+a_i\mu^{-1}(E)$, 这里 p_i,q_i 是互素的正整数. 由 $\mu^-(E)$ 的定义, $q_i\leq r$. 因此由推论 6.2.4,

$$\begin{aligned}\mu^-(\bar{\pi}_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(D))&=\left(-r+\sum_{i=1}^m a_i\right)\mu^-(E)+\left(2b-2+\det E+\sum_{i=1}^m b_i\right)\\&=r(\mu(E)-\mu^-(E))+2b-2+\sum_{i=1}^m\frac{p_i}{q_i}\\&\geq 2b-2+r(\mu(E)-\mu^-(E))+\frac{m}{r}.\end{aligned}$$

注意到

$$-r+\sum_{i=1}^m a_i\geq m-r$$

以及 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则, 所以 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(D)$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 $(r-m)$-正则 (命题 3.2.5). ■

6.2.3 核丛

设 C 是亏格 b 光滑代数曲线, E 是由 $V\subseteq H^0(C,E)$ 生成的秩 r 向量丛. 因此我们有向量丛正合列

$$0\longrightarrow M_{V,E}\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_C\xrightarrow{\alpha}E\longrightarrow 0.\tag{6-5}$$

$M_{V,E}$ 是 E 的核丛 (Kernel bundle). 如果 $V=H^0(C,E)$, 就简记核为 M_E. 对 (6-5) 取正合列立得 $H^0(C,M_{V,E})=0$. 因而 $M_{V,E}$ 不可能含平凡的直和项. 如果 E 是平凡线丛, 那么 $V=H^0(X,E)$, $M_{V,E}=0$. 以下如无特别声明, 我们总假设 E 不是平凡丛.

推论 6.2.6 设 C 是有理曲线, E 由 $H^0(C,E)$ 生成, 则 M_E 是一些 $\mathcal{O}_C(-1)$ 的直和.

证明 由于 C 上的向量丛分裂 (见定理 6.4.1), 我们只需要考虑线丛情形即可, 即设 $E=\mathcal{O}_C(n)$. 此时 $\mathrm{rk}M_E=n$. 因为 $h^0(C,M_E)=0$, 所以

$$E=\mathcal{O}_C(-a_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(-a_n),$$

这里诸 $a_i>0$. 注意 $\deg M_E=-n$, 这就迫使 $a_i=-1$, $\forall i$. ■

核丛的斜率估计及稳定性研究, 在今后的许多研究中都有着重要的作用. 这里先叙述一个关于典范层的核丛的经典结论.

定理 6.2.4 (Paranjape-Ramanan **定理** [PaRa88]) 典范丛 Ω_C 的核丛 M_{Ω_C} 是半稳定的. 进一步, 当 C 是非超椭圆曲线时, M_{Ω_C} 是稳定的.

证明 设 F 是 M_{Ω_C} 的秩 r 饱和子层. 利用推论 2.1.1, 我们可以诱导正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_C^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{O}_C^{\oplus b} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & M_{\Omega_C}^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r] & \mathcal{O}_C^{\oplus r+1} \arrow[r] & F^\vee \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里 $W=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_C^{\oplus r+1}\to F^\vee)$ 是线丛. 由例 2.1.2, σ,α,γ 都是非零的.

将交换图作对偶得

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_C^{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & W^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\Omega_C} \arrow[r] & \mathcal{O}_C^{\oplus b} \arrow[r] & \Omega_C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 M_{Ω_C} 没有整体截面, 故 F 亦然. 因而 $r+1\le h^0(W^\vee)$. 又因为 $W^\vee$ 是 Ω_C 的子线丛, 故由 Clifford 定理知

$$\deg W^\vee\ge 2h^0(W^\vee)-2=2r.$$

因此 $\deg F\le -2r$, 即 $\mu(F)\le -2=\mu(M_{\Omega_C})$. ■

我们希望能够给出 $M_{V,E}$ 的斜率与极大斜率的上界估计 (依赖于 E 的斜率与极大斜率). 为此需要一些准备工作. 首先, 我们来说明, $M_{V,E}$ 的斜率在一定条件下, 可以被 E 的斜率控制.

引理 6.2.1 设 E 同式 (6-5).

(1) 如果 E 满足 $h^1(C,E)=0$, 那么

$$\mu(\mathcal{M}_{V,E})\le -\frac{\mu(E)}{\mu(E)-b}=\mu(M_E),$$

等号成立当且仅当 $V=H^0(C,E)$.

(2) 如果 E 没有平凡直和项, $h^1(C,E)\ne 0$ 且 $M_{V,E}$ 是稳定的, 那么

$$\mu(M_{V,E})\le -2,$$

等号成立蕴含着: 要么 C 是超椭圆; 要么 $E=\Omega_C$, $M_{V,E}=M_{\Omega_C}$.

证明 (1) 由 Riemann-Roch 定理, 我们有

$$\mu(M_{V,E})=\frac{-\deg E}{\dim V-r}\leq\frac{-\deg E}{h^0(C,E)-r}=\frac{-\deg E}{r(\mu(E)+1-b)-r}=\frac{-\mu(E)}{\mu(E)-b}=\mu(M_E).$$

其余结论显然.

(2) 因 $h^0(C,\Omega_C\otimes E^\vee)=h^1(C,E)>0$, 故存在非零映射 $\sigma:E\to\Omega_C$. 我们可诱导交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{V,E} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & V\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{\Omega_C} \arrow[r] & H^0(C,\Omega_C)\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] & \Omega_C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由例 2.1.2 的讨论, γ 和 α 都是非零映射. 我们令 $S=\mathrm{Im}(M_{V,E}\to M_{\Omega_C})$.

由经典结论, 如果 C 是非超椭圆 (相应地, 超椭圆) 曲线, 那么 M_{Ω_C} 是稳定的 (相应地, 半稳定的). 结合 $M_{V,E}$ 的稳定性, 我们有

$$\mu(M_{V,E})\leq\mu(S)\leq\mu(M_{\Omega_C})=-2.$$

第一个等号成立当且仅当 $M_{V,E}=S$ (利用习题 1.9); 第二个等号成立当且仅当 $S=M_{\Omega_C}$ 或者 C 是超椭圆的 (定理 6.2.4). 因此 $\mu(M_{V,E})=-2$ 蕴含着 $M_{V,E}=M_{\Omega_C}$ 或者 C 是超椭圆的.

下面我们来证明, $M_{V,E}=M_{\Omega_C}$ 的情形可推出 $E=\Omega_C$. 首先, 通过秩的比较可得

$$h^0(X,E)\geq\dim V=b+r-1.$$

另一方面, 由例 2.1.1, $\mathrm{Ker}\gamma=\mathrm{Ker}\sigma$ 是秩 $r-1$ 平凡丛, 记为 $K\otimes\mathcal{O}_C$ ($\dim K=r-1$). 对正合列

$$0\longrightarrow K\otimes\mathcal{O}_C\longrightarrow E\longrightarrow\Omega_C\longrightarrow 0$$

取同调, 我们有 $h^0(C,E)\leq r-1+b$. 结合上面的讨论, 即得 $h^0(C,E)=r-1+b=\dim V$. 因而 $V=H^0(C,E)$.

对正合列

$$0\longrightarrow M_E(\Omega_C)\longrightarrow H^0(C,E)\otimes\Omega_C\longrightarrow E(\Omega_C)\longrightarrow 0$$

取同调, 并利用 $H^1(C,E(\Omega_C))=0$ (命题 2.1.3), 我们有满射

$$H^1(C,M_E(\Omega_C))\longrightarrow H^0(C,E)\otimes H^1(C,\Omega_C)\longrightarrow 0,$$

故

$$h^1(C,M_E(\Omega_C))\geq h^0(C,E)=b+r-1.$$

另一方面, 由习题 6.1,

$$h^1(C,M_E(\Omega_C))=h^1(C,M_{\Omega_C}(\Omega_C))=b.$$

这就迫使 $r=1$, 即 E 是线丛, 因而 $\sigma:E\to\Omega_C$ 是单射. 通过比较次数, 我们有 $\deg E=\deg\Omega_C$. 因此 $E\cong\Omega_C$. ■

注 6.2.1 上述证明实际上也蕴含着如下简单事实: 若 E 由整体截面生成且 $h^1(C,E)=0$, 那么 $\mu(E)>b$. ■

推论 6.2.7 设 E,F 都是满足 $h^1=0$ 的向量丛, E 由整体截面生成, F 由 $V\subseteq H^0(C,F)$ 生成. 如果 $\mu(E)\geq\mu(F)$ (相应地, $\mu(E)>\mu(F)$), 那么 $\mu(M_E)\geq\mu(M_{V,F})$ (相应地, $\mu(M_E)>$

$\mu(M_{V,F}))$.

证明 注意到 $f(x)=\frac{-x}{x-b}$ 当 $x>b$ 时是严格递增函数. 由引理 6.2.1 即得结论. ■

引理 6.2.2 设 E 是非有理曲线 C 上由整体截面生成且不含平凡直和项的向量丛, $N\subseteq M_E$ 是具有极大斜率的子丛, 则存在不含平凡直和项的向量丛 F, 满足 $\mu(F)\le\mu^+(E)$, 它由 $V\subseteq H^0(C,F)$ 生成, 并有 $N=M_{V,F}$. 进一步, 当 $\mu(F)=\mu^+(E)$ 时, 有 $F\subseteq E$.

证明 取正合列 (6-5) 的对偶, 可得满态射

$$H^0(C,E)^\vee\otimes\mathcal{O}_C^\vee\longrightarrow M_E^\vee\longrightarrow 0.$$

这就诱导满射 $H^0(C,E)^\vee\otimes\mathcal{O}_C^\vee\to N^\vee$. 我们设 $V^\vee=\mathrm{Im}(H^0(C,E)^\vee\to H^0(C,N^\vee))$. 因此 $V^\vee$ 生成了 $N^\vee$. 设 $F^\vee=\mathrm{Ker}(V^\vee\otimes\mathcal{O}_C^\vee\to N^\vee)$.

由对偶可得正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & V\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_E \arrow[r] & H^0(C,E)\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

如果 α 是零映射, 则 $V\otimes\mathcal{O}_C\hookrightarrow M_E$, 矛盾!

设 $S=\mathrm{Im}(\alpha:F\to E)$. 我们有正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & V\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_S \arrow[r] & H^0(C,S)\otimes\mathcal{O}_C \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 $N\hookrightarrow M_S\hookrightarrow M_E$, 我们有 $\mu(N)\ge\mu(M_S)$. 注意到

$$\mu(N)=-\frac{\deg F}{\mathrm{rk}N},\quad \mu(M_S)=-\frac{\deg S}{\mathrm{rk}M_S}$$

这就得到

$$\deg F\le\deg S\cdot\frac{\mathrm{rk}N}{\mathrm{rk}M_S}\le\deg S.$$

因此 $\mu(F)\le\mu(S)$, 等号成立当且仅当 $F=S$ 且 $N=M_S$. 注意到 $S\subseteq E$, 所以这就有 $\mu(F)\le\mu^+(E)$. 等号成立蕴含着 $F\subseteq E$. ■

命题 6.2.5 设 E 是亏格 b 曲线 C 上由整体截面生成的向量丛, 则有

$$\mu^+(M_E)\le\max\left\{-2,\frac{-\mu^+(E)}{\mu^+(E)-b}\right\}.$$

进一步, 当 $\mu^+(E)<2b$ 时, 要么 $\mu^+(M_E)<-2$, 要么 C 是超椭圆, 要么 $\Omega_C\hookrightarrow E$.

证明 不失一般性, 我们可假设 E 不含平凡直和项且 C 是非有理的 (习题 6.2). 设 $N \subseteq M_E$ 是具有极大斜率的稳定子丛. 我们可找到向量丛 F 满足引理 6.2.2. 因而 $N = M_{V,F}$. 不妨设 $\mu(N) > -2$. 由引理 6.2.1 (2), $h^1(C,F) = 0$. 再由引理 6.2.1 (1), $\mu(N) \leq \frac{-\mu(F)}{\mu(F)-b}$. 因为 $\mu(F) \leq \mu^+(E)$ (引理 6.2.2), 故得 $\mu(N) \leq \frac{-\mu^+(E)}{\mu^+(E)-b}$. 此时也有 $2b < \mu^+(E)$.

现在我们讨论 $\mu^+(E) < 2b$ 的情形. 由上面讨论可知, $\mu(N) \leq -2$. 进一步假设 $\mu(N) = -2$. 此时若 $h^1(C,F) = 0$, 则由引理 6.2.1 (1) 得 $-2 = \mu(N) \leq \frac{\mu(F)}{\mu(F)-b}$, 因而 $2b \leq \mu(F) \leq \mu^+(E)$, 矛盾! 因而 $h^1(C,F) \neq 0$. 由引理 6.2.1 (2) 可知, 此时要么 C 是超椭圆, 要么 $F = \Omega_C$ (因而有单射 $\Omega_C \to E$). ■

推论 6.2.8 *设 E 是亏格 b 曲线 C 上的半稳定向量丛, $\mu(E) \geq 2b$, 则 M_E 是半稳定的, 并且*

$$\mu(M_E) = \frac{-\mu(E)}{\mu(E)-b} \geq -2. \tag{6-6}$$

进一步, 假设 E 是稳定的, 那么除以下情形之外, M_E 也是稳定的: $\mu(E) = 2b$ 并且要么 C 是超椭圆要么 $\Omega_C \hookrightarrow E$.

证明 如果 C 是有理曲线, 则由推论 6.2.6 立得结论. 今设 C 是非有理的.

由命题 6.2.3, E 由整体截面生成并且 $h^1(C,E) = 0$. 故由引理 6.2.1 得 (6-6). 再应用命题 6.2.5，

$$\mu^+(M_E) \leq \max\left\{-2, \frac{-\mu^+(E)}{\mu^+(E)-b}\right\} = \frac{-\mu(E)}{\mu(E)-b} = \mu(M_E).$$

因此 M_E 是半稳定的.

现在假设 E 是稳定的, 但 M_E 不是稳定的. 于是可找稳定子丛 N, 满足 $\mu(N) = \mu(M_E)$. 由命题 6.2.5 的证明, 存在向量丛 F, 使得 $M_{V,F} = N$, $\mu(F) \leq \mu(E)$, 等号成立时蕴含着 $F \subsetneq E$ 且 $N = M_E$. 如果 $h^1(C,F) = 0$, 那么由

$$\mu(M_E) = \mu(N) \leq \frac{-\mu(N)}{\mu(N)-b} \leq \frac{-\mu(E)}{\mu(E)-b} = \mu(M_E)$$

这就迫使 $M_E = N$, 因而 M_E 稳定, 与假设矛盾! 故 $h^1(C,F) \neq 0$. 由引理 6.2.1, $\mu(M_E) = \mu(N) \leq -2$, 因而 $\mu(M_E) = \mu(N) = -2$, 即 $\mu(E) = 2b$. 该等号成立蕴含着要么 C 是超椭圆; 要么 $F = \Omega_C$, $N = M_{\Omega_C}$. 在后一情形中, 由于 $F = \Omega_C \to E$ 是非零映射, 因而是单射. ■

推论 6.2.9 *设 C 是非有理曲线, E 是 C 上的向量丛, 有 Harder-Narasimhan 滤过*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots E_{m-1} \subsetneq E_m = E.$$

假设 $\mu^-(E) \geq 2b$, 则 M_E 有 Harder-Narasimhan 滤过

$$0 = M_{E_0} \subsetneq M_{E_1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_{E_m} = M_E,$$

并且 $\mu^-(M_E) \geq \frac{-\mu^-(E)}{\mu^-(E)-b} \geq -2$.

证明 因为 $\mu^-(E) \geq 2b$, 故 $\mu(E_{i+1}/E_i) \geq 2b$. 由命题 6.2.3, $h^1(C, E_{i+1}/E_i) = 0$. 这就推出 $h^1(C,E_i) = 0$ 对任何 i 成立. 由命题 6.2.3, E_i 和 E_{i+1}/E_i 由整体截面生成. 这样, 我们有正

合列交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M_{E_i} & \longrightarrow & H^0(C,E_i)\otimes\mathcal{O}_C & \longrightarrow & E_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
0 & \longrightarrow & M_{E_{i+1}} & \longrightarrow & H^0(C,E_{i+1})\otimes\mathcal{O}_C & \longrightarrow & E_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M_{E_{i+1}/E_i} & \longrightarrow & H^0(C,E_{i+1}/E_i)\otimes\mathcal{O}_C & \longrightarrow & E_{i+1}/E_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

因而 $M_{E_{i+1}}/M_{E_i}=M_{E_{i+1}/E_i}$. 由推论 6.2.8 和 E_{i+1}/E_i 的半稳定性以及 $\mu(E_{i+1}/E_i)\geq 2b$, 我们得到 $M_{E_{i+1}}/M_{E_i}$ 的半稳定性. 由推论 6.2.7, $\mu(M_{E_{i+1}}/M_{E_i})$ 随 i 递增. 这就得到 M_E 的 Harder-Narasimhan 滤过. 因此

$$\mu^-(M_E)=\mu(M_{E_m}/M_{E_{m-1}})=\frac{-\mu^-(E)}{\mu^-(E)-b}.$$ ■

定理 6.2.5 (推广的 Mumford 定理 [But94]) 设 E,F 是亏格 b 曲线 C 上的向量丛, $\mu^-(E)\geq 2b$, $\mu^-(F)>2b$, 那么我们有满态射

$$\tau: H^0(C,E)\otimes H^0(C,F)\longrightarrow H^0(E\otimes F).$$

证明 由推论 6.2.9, $\mu^-(M_E)\geq -2$. 利用推论 6.2.4 得 $\mu^-(M_E\otimes F)>2b-2$. 因此再由命题 6.2.3, $h^1(C,M_E\otimes F)=0$. 对正合列

$$0\longrightarrow M_E\longrightarrow H^0(C,E)\otimes\mathcal{O}_C\stackrel{\alpha}{\longrightarrow}E\longrightarrow 0 \tag{6-7}$$

张量 F 并取同调, 即得结论. ■

例 6.2.2 设 C 是非超椭圆曲线, E 是斜率为 $\mu(E)=2b$ 的稳定向量丛, $F=M_E^\vee\otimes\Omega_C$. 此时 $\mu(F)=2b$.

因为 $M_E\otimes F\to\Omega_C$ 是满态射, 故 $h^1(C,M_E\otimes F)\neq 0$. 注意到 $h^1(C,F)=0$, 所以对正合列 (6-7) 张量 F 并取同调, 即知

$$\tau: H^0(C,E)\otimes H^0(C,F)\longrightarrow H^0(E\otimes F)$$

不是满射. ■

6.3 直纹簇上的应用

我们在这一节讨论曲线上的向量丛技巧如何应用在直纹簇上. 直纹簇上向量丛的几何信息可以通过正像层归结到底曲线上, 从而可以有效地讨论正规生成等等合冲问题. 这些工作主要取决于 [But94].

以下如无特别声明, 我们设 C 是光滑的亏格 b 曲线, E 是 C 上的秩 r 向量丛,

$$\bar{\pi}: X(:=\mathbb{P}(E^\vee))\to C$$

是其射影丛, V, W 是 X 上的向量丛.

6.3.1 截面乘法映射的满性

这一节要证明如下结论. 它可以视为定理 6.2.5 的推广.

定理 6.3.1 ([But94], **定理** 4.1) 设 B_1, B_2 为 X 上关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的线丛. 若 V, W 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则, 且满足

$$\mu^-(\bar{\pi}_*V)+\mu^-(\bar{\pi}_*B_1)\geq 2b, \quad \mu^-(\bar{\pi}_*W)+\mu^-(\bar{\pi}_*B_2)>2b,$$

那么

$$\tau: H^0(X, V\otimes B_1)\otimes H^0(X, W\otimes B_2)\longrightarrow H^0(X, V\otimes W\otimes B_1\otimes B_2) \tag{6-8}$$

是满态射.

研究截面乘法映射满性的一个自然想法是考虑正合列

$$0\longrightarrow M_{V\otimes B_1}\otimes W\otimes B_2\longrightarrow H^0(X, V\otimes B_1)\otimes W\otimes B_2\longrightarrow V\otimes B_1\otimes W\otimes B_2\longrightarrow 0.$$

为了证明映射 (6-8) 是满的, 我们只需要证明

$$h^1(X, M_{V\otimes B_1}\otimes W\otimes B_2)=0.$$

为书写方便起见, 我们令

$$\mathcal{F}:=M_{V\otimes B_1}\otimes W\otimes B_2. \tag{6-9}$$

如果 $\mathcal{F}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则的, 那么由命题 3.2.5 (2), 相当于证明

$$h^1(X, \bar{\pi}_*\mathcal{F})=0.$$

再由命题 6.2.3, 只要满足 $\mu^-(\bar{\pi}_*\mathcal{F})>2b-2$ 即可证明该同调消失.

为证明 $\mathcal{F}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则的, 我们只需要证明 $M_{V\otimes B_1}$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的. 利用命题 3.2.5 (5) 以及 $V\otimes B_1$ 关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的条件, 我们只需要验证 $\bar{\pi}_*(V\otimes B_1)$ 由整体截面生成就足够了. 再利用命题 6.2.3 (3), 这又可以归结为证明 $\mu(\bar{\pi}_*(V\otimes B_1))>2b-1$. 这个不等式实际上可以从命题 3.2.5 (6) 和命题条件得到, 即

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(V\otimes B_1))\geq\mu^-(\bar{\pi}_*V)+\mu^-(\bar{\pi}_*B_1)\geq 2b.$$

因此定理 6.3.1 最终归结为证明

$$\mu^-(\bar{\pi}_*\mathcal{F})>2b-2.$$

为了估计 $\mu^-(\bar{\pi}_*\mathcal{F})$ 的下界, 我们需要一些准备工作.

回顾命题 3.2.5 (3) 中的正合列

$$0\longrightarrow K_V\longrightarrow\bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V\longrightarrow V\longrightarrow 0. \tag{6-10}$$

引理 6.3.1 如果 V 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则的, 那么

$$\bar{\pi}_*(K_V(1))=\bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_X(1)}\otimes V),$$

并且它为如下满态射的核

$$\bar{\pi}_*V\otimes E\longrightarrow\bar{\pi}_*(V(1)). \tag{6-11}$$

证明 对正合列 (6-10)(相应地, 欧拉序列 (1-9)) 张量 $\mathcal{O}_X(1)$ (相应地, V), 并取正像层, 我们得到同样的映射 (6-11). 因而它的核是 $\bar{\pi}_*(K_V(1)) = \bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_X 1} \otimes V)$. 利用 V 的正则性可知它是满射 (命题 3.2.5). ■

我们定义

$$\nu(V, W) = \min_i \left\{ \mu^- \left(R^i \bar{\pi}_*(V(-i-1) \otimes \bigwedge^{i+2} E) \right) \right\} + \mu^-(\bar{\pi}_* W(-1)).$$

引理 6.3.2 设 V 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则, W 关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的, 那么

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(K_V \otimes W)) \geq \nu(V, W).$$

证明 因为 $K_V \otimes W = K_V(1) \otimes W(-1)$, 所以由正则性的条件、命题 3.2.5 及引理 6.3.1 得

$$\mu^-(\bar{\pi}_* K_V \otimes W) \geq \mu^-(\bar{\pi}_* K_V(1)) + \mu^-(\bar{\pi}_* W(-1)) = \mu^-(\bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) + \mu^-(\bar{\pi}_* W(-1)).$$

结合命题 6.2.2, 我们只需证明

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) \geq \mu^- \left(\bigoplus_{i=0}^{r-2} \left(R^i \bar{\pi}_*(V(-i-1)) \oplus \bigwedge^{i+2} E \right) \right).$$

对 Koszul 复形

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \wedge^r \bar{\pi}^* E(-r+1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^2 \bar{\pi}^* E(-1) \\ \longrightarrow \bar{\pi}^* E \longrightarrow \mathcal{O}_{X(1)} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

张量 V, 并取短正合列

$$0 \longrightarrow K'_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V \longrightarrow \wedge^2 \bar{\pi}^* E \otimes V(-1) \longrightarrow K_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V \longrightarrow 0.$$

对它取正像层得

$$\wedge^2 E \otimes \bar{\pi}_*(V(-1)) \longrightarrow \bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V) \longrightarrow R^1 \bar{\pi}_*(K'_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V) \longrightarrow 0.$$

由命题 6.2.2,

$$\mu^-(\bar{\pi}_*(K_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) \geq \min \left\{ \mu^- \left(\wedge^2 E \otimes \bar{\pi}_*(V(-1)) \right), \mu^-(R^1 \bar{\pi}_*(K'_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) \right\}.$$

再从上面的 Koszul 复形提取短正合列

$$0 \longrightarrow K''_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V \longrightarrow \wedge^3 \bar{\pi}_* E \otimes V(-2) \longrightarrow K'_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V \longrightarrow 0.$$

类似上面的讨论, 我们有

$$\mu^-(R^1 \bar{\pi}_*(K'_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) \geq \min \left\{ \mu^- \left(\wedge^3 E \otimes R^1 \bar{\pi}_*(V(-2)) \right), \mu^-(R^2 \bar{\pi}_*(K''_{\mathcal{O}_{X(1)}} \otimes V)) \right\}.$$

以此类推, 即得结论. ■

引理 6.3.3 设 V 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则并且 $\bar{\pi}_* V$ 由整体截面生成, W 关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的, 那么

$$\mu^-(\bar{\pi}_* K_V \otimes W) \geq \min\{\mu^-(M_{\bar{\pi}_* V}) + \mu^-(\bar{\pi}_* W), \nu(V, W)\}.$$

证明 由蛇形引理可得正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & K_V \otimes W \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bar{\pi}^*(M_{\bar{\pi}_*V}) \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V) \otimes W \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar{\pi}^*\bar{\pi}_*V \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_V \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, V) \otimes W \arrow[r] & V \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & K_V \otimes W \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

对左列的正合列取正像层得

$$0 \longrightarrow M_{\bar{\pi}_*V} \otimes \bar{\pi}_*W \longrightarrow \bar{\pi}_*(M_V \otimes W) \longrightarrow \bar{\pi}_*(K_V \otimes W) \longrightarrow 0.$$

由命题 6.2.2 及 引理 6.3.3, 我们得到

$$\begin{aligned}
\mu^-(\bar{\pi}_*(M_V \otimes W)) &\geq \min\{\mu^-(M_{\bar{\pi}_*V} \otimes \bar{\pi}_*W), \mu^-(\bar{\pi}_*(K_V \otimes W))\} \\
&\geq \min\{\mu^-(M_{\bar{\pi}_*V}) + \mu^-(\bar{\pi}_*W), \mu^-(\bar{\pi}_*(K_V \otimes W))\} \\
&\geq \min\{\mu^-(M_{\bar{\pi}_*V}) + \mu^-(\bar{\pi}_*W), \nu(V, W)\}.
\end{aligned}$$

这就完成了证明. ■

引理 6.3.4 设 B_1, B_2 为 X 上关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的线丛. 若 V, W 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则, 那么

$$\nu(V \otimes B_1, W \otimes B_2) \geq \mu^-(\bar{\pi}_*V) + \mu^-(\bar{\pi}_*B_1) + \mu^-(\bar{\pi}_*W) + \mu^-(\bar{\pi}_*B_2).$$

证明 因为 $V \otimes B_1, W \otimes B_2$ 是 (-1)-正则的, 所以它们的高次正像层都为零. 因而

$$\nu(V \otimes B_1, W \otimes B_2) = \mu^-(\bar{\pi}_*(V \otimes B_1(-1)) \otimes \wedge^2 E) + \mu^-(\bar{\pi}_*(W \otimes B_2(-1))).$$

利用习题 6.4、命题 3.2.5 (6) 及推论 6.2.4 (3), 即得不等式 (留给读者验证). ■

定理 6.3.1 的证明. 由前面讨论, 已知 $\bar{\pi}_*(V \otimes B_1)$ 由整体截面生成且 $\mu^-(\bar{\pi}_*(V \otimes B_1)) \geq 2b$. 由推论 6.2.9, $\mu^-(M_{\bar{\pi}_*(V \otimes B_1)}) \geq -2$. 类似地, $\mu^-(\bar{\pi}_*W \otimes B_2) > 2b$.

由引理 6.3.3,

$$\mu^-(\mathcal{F}) \geq \min\{\mu^-(M_{\bar{\pi}_*(V \otimes B_1)}) + \mu^-(\bar{\pi}_*W \otimes B_2), \nu(V \otimes B_1, W \otimes B_2)\},$$

这里 $\mathcal{F}$ 定义见式 (6-9).

由于

$$\mu^-(M_{\bar{\pi}_*(V \otimes B_1)}) + \mu^-(\bar{\pi}_*W \otimes B_2) > -2 + 2b,$$

以及 (引理 6.3.4)

$$\nu(V \otimes B_1, W \otimes B_2) \geq \mu^-(\bar{\pi}_*V) + \mu^-(\bar{\pi}_*B_1) + \mu^-(\bar{\pi}_*W) + \mu^-(\bar{\pi}_*B_2) > 4b,$$

故得

$$\mu^-(\mathcal{F}) > 2b - 2.$$

由前面的讨论, 即得结论. ■

6.3.2 直纹簇上的合冲问题

定理 6.3.2 ([But94], **定理** 5.1 A) 设 B 是 $X = \mathbb{P}(E^\vee)$ 上关于 $\bar{\pi}$ 的 (-1)-正则线丛, 且满足 $\mu^-(\bar{\pi}_* B) > 2b$, 那么 B 是正规生成的.

证明 令 $F = \bar{\pi}_* B$. 因为 $\mu^-(F) > 2b$, 故由命题 6.2.3, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)$ 是非常丰富的. 由嵌入映射 $X \hookrightarrow \mathbb{P}(F)$ (参见命题 6.2.4 的证明) 及 $B = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)|_X$, B 是非常丰富的.

为证正规生成性, 我们只需证明

$$H^0(X, B)^{\otimes 2} \to H^0(X, B^{\otimes 2})$$

是满射. 此时, 我们在定理 6.3.1 中取 $V = W = \mathcal{O}_X$, $B_1 = B_2 = B$. 它们满足定理 6.3.1 的条件, 由此知上述态射是满的. ■

推论 6.3.1 设 $H_1, \cdots, H_m$ 是丰富除子 $(m \geq 2r+1)$, 则 $D = K_X + H_1 + \cdots + H_m$ 是正规生成的. 特别地, 对任何丰富除子 H, $B = K_X + mH$ 是正规生成的.

证明 由推论 6.2.5, D 关于 $\bar{\pi}$ 是 $(-r-1)$-正则 且 $\mu^-(\phi_* D) > 2b$. 因此由定理 6.3.2, D 是正规生成的. ■

定理 6.3.3 ([But94], **定理** 5.1 B) 给定正整数 p, 设 B 是 X 上关于 $\bar{\pi}$ 的 $(-p-1)$-正则线丛, 且满足 $\mu^-(\bar{\pi}_* B) \geq 2b + 2p$, 那么 B 满足 N_p 性质.

证明 对 p 施归纳法. 不妨假设 N_{p-1} 性质成立. 我们需要证明

$$h^1(X, B^{\otimes n} \otimes \bigwedge^{p+1} M_B) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

因为 $\wedge^{p+1} M_B$ 是 $T^{p+1} M_B$ 的直和项, 所以我们只需要证明

$$h^1(X, T^{p+1} M_B \otimes B^{\otimes n}) = 0.$$

今证上式对 $n = 1$ 成立. 其余情形类似可证. 设 $U = T^{p+1} M_B \otimes B$. 由命题 3.2.5 (6) 及命题 6.2.3, M_B 关于 $\bar{\pi}$ 是 1-正则的; 另一方面, B 关于 $\bar{\pi}$ 是 $(-p-1)$-正则, 因此 U 关于 $\bar{\pi}$ 是 0-正则 (命题 3.2.5 (1)). 再次利用命题 3.2.5 (2), 我们只需要证明 $h^1(C, \phi_* U) = 0$ 即可. 进一步由命题 6.2.3, 最终可归结为证明 $\mu^-(\phi_* U) > 2b - 2$.

我们将 U 写为

$$U = T^{p+1}(M_B(1)) \otimes B(-p-1).$$

注意到, $M_B(1)$ 和 $B(-p-1)$ 都是关于 $\bar{\pi}$ 的 0-正则丛, 故由命题 3.2.5 (4), 我们有

$$\begin{aligned} \mu^-(\bar{\pi}_* U) &\geq (p+1)\mu^-(\phi_* M_B(1)) + \mu^-(\phi_* B(-p-1)) \\ &= (p+1)(\mu^-(\phi_* M_B(1)) - \mu^-(E)) + \mu^-(\phi_* B). \end{aligned} \tag{6-12}$$

(最后等式来自于习题 6.4.)

在定理 6.3.1 中取 $V = W = \mathcal{O}_P$, $B_1 = B$, $B_2 = \mathcal{O}_P(1)$, 并结合引理 6.3.3, 引理 6.3.4 以及 $\mu^-(M_{\phi_* B}) \geq -2$ (推论 6.2.8), 可得 $\mu^-(\phi_* M_B(1)) > -2 + \mu^-(E)$. 将之代入式 (6-12), 并由假设条件 $\mu^-(\phi_* B) \geq 2b + 2p$ 即得 $\mu^-(\phi_* U) > 2b - 2$. ■

推论 6.3.2 给定正整数 p, 设 $H_1, \cdots, H_m$ 是丰富除子 $(m \geq 2r + 2rp)$, 则 $D = K_X + H_1 + \cdots + H_m$ 满足 N_p 性质. 特别地, 对任何丰富除子 H, $D = K_X + mH$ 满足 N_p 性质.

6.4 小亏格曲线上的向量丛

6.4.1 $\mathbb{P}^1$ 上的向量丛

这一节将证明如下经典结论.

定理 6.4.1 (Grothendieck **分裂性定理** [Gro56]) 设 E 是射影直线 $X = \mathbb{P}^1$ 上的秩 r 全纯向量丛, 则 E 可以唯一分裂成一些线丛的直和. 换言之,

$$\mathcal{O}(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r),$$

这里 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ 是整数.

证明 我们对秩 r 施归纳法. $r = 1$ 是结论显然,. 假设该结论已对秩 $< r$ 的向量丛成立. 今讨论秩为 r 的向量丛 E.

首先, 我们找最小的整数 k_0, 使得

$$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_0)) \neq 0, \quad h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = 0, \forall k < k_0.$$

取非零截面 $s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_0))$. 我们要证明 s 没有零点. 若不然, 存在 $p \in \mathbb{P}^1$, 使得

$$s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{I}_p(k_0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_0 - 1)),$$

矛盾! 故 s 无零点. 这样, 我们就得到局部自由层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_0) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F) \longrightarrow 0. \tag{6-13}$$

由归纳假设,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_{r-1}).$$

在正合列 (6-13) 上张量 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, 并取上同调, 可得

$$0 = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_0 - 1)) = \sum_{i=1}^{r-1} h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - 1)).$$

这就推出诸 $b_i \leq 0$.

这样, 我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F)^\vee) = \oplus_{i=1}^{r-1} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b_i)) = 0.$$

这意味着, 正合列(6-13) 是分裂的, 从而

$$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k_0) \oplus \oplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_i - k_0).$$

这就证明了存在性.

下面证分裂的唯一性. 设有两种不同的分裂:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1')\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r'),$$

这里 $a_1\geq\cdots\geq a_r$ 且 $a_1'\geq\cdots\geq a_r'$. 找最小的下标 j, 使得 $a_i=a_i'$ $(i<j)$, $a_j\neq a_j'$. 不妨设 $a_j>a_j'$. 我们有

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1-a_j)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r-a_j)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1'-a_j)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r'-a_j).$$

计算上式两边的整体截面维数, 可得

$$\sum_{i=1}^{j-1}h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i-a_j))+1=\sum_{i=1}^{j-1}h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i'-a_j)).$$

注意 $a_i=a_i'$ $(i<j)$, 故上式不可能成立, 矛盾! 这就证明了分裂的唯一性. ■

6.4.2 椭圆曲线上的向量丛

设 X 是光滑椭圆曲线. 我们的第一个主要结论是分类 X 上的秩 2 向量丛. 这一结果来自于 [Ati57]. 为论证方便, 先给出如下引理.

引理 6.4.1 *E 是 X 上不分裂的秩 2 向量丛, 且 $\deg E=0$. 如果存在线丛 L 及非零映射 $L\to E$, 且 $\deg L\geq 0$, 那么存在次数为零的线丛 L', 使得 $E\otimes L'$ 来自非分裂扩张*

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow E\otimes L'\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow 0.$$

进一步, 若 $H^0(X,L)>0$, 则上述 L' 可取为平凡线丛.

证明 找极大子线丛 L_1 分解这个映射 $L\to E$. 这样我们得到正合列

$$0\longrightarrow L_1\longrightarrow E\longrightarrow L_2\longrightarrow 0,$$

且 $\deg L_1=-\deg L_2\geq 0$. 由于 E 不分裂, 所以上述正合列不分裂, 故提供了 $\mathrm{Ext}(L_2,L_1)$ 的非零元. 由 Serre 定理,

$$\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)\cong H^1(X,L_1\otimes L_2^\vee)=H^0(X,L_1^\vee\otimes L_2)^\vee\neq 0.$$

因此 $0\leq\deg(L_1^\vee\otimes L_2)=-2\deg L_1$. 这就迫使 $\deg L_1=\deg L_2=0$, $L_1^\vee\otimes L_2\cong\mathcal{O}_X$ (即 $L_1\cong L_2$). 这样, $E\otimes L_1{}^{-1}$ 来自于非分裂扩张

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow E\otimes L_1{}^{-1}\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow 0.$$

此时 $\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)$ 仅有一个非零元生成. 因此该扩张在弱同构意义下唯一.

假设 $H^0(X,L)>0$, 那么 $H^0(L_1)>0$. 因 $\deg L_1=0$, 故 L_1 是平凡线丛. ■

定理 6.4.2 (Atiya 分类定理) *设 X 是光滑椭圆曲线, E 是 X 上的秩 2 向量丛. 假设 E 不能分裂成线丛直和, 那么 E 必是以下情形之一:*

(1) *$E=E'\otimes L$, 这里 L 是线丛, E' 来自于非分裂扩张*

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow E'\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow 0.$$

(2) *$E=F_q\otimes L$, 这里 L 是线丛, $q\in X$, F_q 来自于非分裂扩张*

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow F_q\longrightarrow\mathcal{O}_X(q)\longrightarrow 0.$$

上面的扩张在弱同构意义下都是唯一的.

证明 注意到, 对任何线丛 L, $\deg E\otimes L^\vee-\deg E=2\deg L$, 因此可取合适的线丛 L 使得 $\deg E\otimes L^\vee=0,1$. 以下我们不妨假设 $\deg\det E=0,1$. 分两种情形讨论.

情形 1: 假设 $\deg E=0$.

首先考虑 $h^0(E)>0$ 的情形. 此时 $\mathcal{O}_X\hookrightarrow E$. 由引理 6.4.1 即得结论.

其次考虑 $h^0(E)=0$ 的情形. 取 $p\in C$, $E'=E\otimes\mathcal{O}_X(p)$. 由 Riemann-Roch 定理, $h^0(E')\geq 2$. 因此可取 $H^0(E')$ 中的两个截面, 它们诱导非零映射 $\varphi:\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\to E'$. 如果 $\mathrm{Im}\varphi$ 是线丛, 那么我们可以构造极大子线丛 $L_0\subseteq E'$ 使得 $H^0(L)\geq 2$, 因而 $\deg L_0\geq 2$. 这样, 我们有极大子线丛 $L_1=L_0(-p)\subseteq E$, $\deg L_1\geq 1$. 但由引理 6.4.1, 这将迫使 $\deg L_1=0$, 矛盾! 因此 $\mathrm{Im}\varphi$ 是包含映射.

因为 $\deg\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X=0$, $\deg E'=2$, 所以 $\det\varphi$ 不可能处处非退化, 即存在一点 $x\in X$, 使得 $\det\varphi_x=0$. 这也说明 φ_x 是退化的, 即存在 $v\in(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X)_x$ 使得 $\varphi_x(v)=0$. 由于 $(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X)_x\cong H^0(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X)$ (即平凡丛), 所以可找 $s\in H^0(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X)$, 使得 $s(x)=v$. 因而 $\varphi(s)$ 在 x 处取零. 由此可以构造 E 的极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D)\subseteq E'$, 使得 D 是包含 x 的有效除子. 因而 $\mathcal{O}_X(D-p)$ 是 E 的极大子线丛, 且 $\deg(D-p)\geq 0$. 应用引理 6.4.1 即知 E 满足类型 (1).

情形 2: 假设 $\deg E=1$.

由 Riemann-Roch 定理推出 $h^0(E)$, 因此存在包含映射 $\mathcal{O}_X\hookrightarrow E$. 这样, 我们能找到一个极大子线丛 $L_1\subseteq E$ 来分解这个包含映射. 考虑它诱导的正合列

$$0\longrightarrow L_1\longrightarrow E\longrightarrow L_2\longrightarrow 0.$$

我们有$\deg L_2=1-\deg L_1$. 由于上述扩张非分裂, 所以

$$\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1)=H^0(L_2\otimes L_1^\vee)^\vee\neq 0.$$

这表明 $\deg L_2\otimes L_1^\vee\geq 0$, 即 $\deg L_1\leq 0$, 故 $\deg L_1=0$, 从而 $L_1\cong\mathcal{O}_X$. 因此 $\mathcal{O}_X\to E$ 给出的截面处处非零, 诱导正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow E\longrightarrow\mathcal{O}_X(q)\longrightarrow 0,$$

这里 $q\in X$. 此时 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(q),\mathcal{O}_X)$ 仅有一个非零元生成. 因此该扩张在弱同构意义下唯一. ■

推论 6.4.1 *设 E 是秩 2 向量丛. 那么*

(1) *若 E 分裂, 则 E 半稳定的充分必要为 $\mathcal{O}_X(E)=\mathcal{O}_X(L_1)\oplus\mathcal{O}_X(L_2)$, 其中 $\deg L_1=\deg L_2$. 此外, 它不可能稳定.*

(2) *若 E 满足定理 6.4.2 的情形 (1), 则 E 是严格半稳定的.*

(3) *若 E 满足定理 6.4.2 的情形 (2), 则 E 是稳定的.*

证明 我们只需要证明 E 满足定理 6.4.2 的情形 (2) 时是稳定的即可. 其余结论都可以从命题 1.2.13 直接得出.

不妨设 $E=F_p$, L 是 E 的极大子线丛. 此时 $\mu(F_p)=\frac{1}{2}$. 如果诱导映射 $L\to\mathcal{O}_X(p)$ 是零映射, 那么 $\mathcal{O}_X(L)\subseteq\mathcal{O}_X$, 因而 $\deg L\leq 0<\mu(F_p)$.

如果 $L \to \mathcal{O}_X(p)$ 是非零映射, 那么 $\deg L \le \deg \mathcal{O}_X(p) = 1$. 假如 $\deg L = 1$, 则

$$\operatorname{Ext}(E/L, L) = H^1(X, L \otimes (F_p/L)^\vee) = H^0(X, (F_p/L) \otimes L^\vee) = 0.$$

最后等式来自于 $\deg(F_p/L) \otimes L^\vee = -1$. 这就意味着 $\mathcal{F}_p$ 分裂, 矛盾! 因此 $\deg L \le 0$, 从而 $\deg L < \mu(F_p)$.

综上, $\mu(L) < \mu(F_p)$. 这就证明了 F_p 是稳定的. ■

本章习题

习题 6.1 设 C 是亏格 b 光滑非超椭圆曲线, M_{Ω_C} 是微分层 Ω_C 的核丛, 证明: $h^1(C, M_{\Omega_C}(\Omega_C)) = h^0(C, M_{\Omega_C}^\vee) = b$. (提示: 利用诺特定理, 即在非超椭圆曲线 C 上截面的乘法映射 $H^0(C, \Omega_C)^{\otimes 2} \to H^0(C, \Omega_C^{\otimes 2})$ 是满射.)

习题 6.2 设 C 是亏格 b 光滑曲线, E 是 C 上向量丛, F 是 E 的直和项. 证明:
(1) $\mu^+(E) = \max\{\mu^+(F), \mu^+(E/F)\}$.
(2) 设 $E = F \oplus \mathcal{O}_C^\ell$ 由整体截面生成, F 不含平凡直和项, 那么 $\mu^+(E) = \mu^+(F)$, 且核丛 $M_E = M_F$.

习题 6.3 设 $\operatorname{prop}^+(E) = \sup_S\{\mu(S) | S \subsetneq E\}$. 证明:

$$\operatorname{prop}^+(M_E) \le \max\left\{-2, \frac{-\operatorname{prop}^+(E)}{\operatorname{prop}^+(E) - b}\right\}.$$

习题 6.4 设 E 是曲线 C 上的秩 r 向量丛, $\bar{\pi} : X(:= \mathbb{P}(E^\vee)) \to C$ 是射影丛, B 为 X 上关于 $\bar{\pi}$ 是 (-1)-正则的线丛, 证明:

$$\mu^-(E) + \mu^-(\bar{\pi}_* B(-1)) = \mu^-(\bar{\pi}_* B).$$

(提示: 利用 $\bar{\pi}_* B = S^k E \otimes L$.)

第七章　曲面上的向量丛

在曲面上, 我们主要关心线丛及秩 2 向量丛的性质.

7.1　稳定性与极大子线丛

设 E 是曲面 X 上的秩 2 向量丛. H 是非常丰富除子. 我们定义斜率 $\mu_H(E)=\frac{c_1(E)H}{\operatorname{rk}E}$. 有时为方便起见, 在不至于引起混淆的情形下, 我们简记为 $\mu(E)$.

引理 7.1.1　*如果 E 有两个极大子线丛 L_1, L_2, 那么存在有效除子 D 满足 $D\equiv c_1(E)-L_1-L_2$. 进一步, $D=0$ 当且仅当 $E\equiv L_1\oplus L_2$.*

证明　不失一般性, 我们不妨假设 $\mathcal{O}_X(L_1)=\mathcal{O}_X$. 考虑正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\alpha_1"] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & E \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, equal] & \mathcal{I}_{\Delta_1}(c_1(E)) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(L_2) \arrow[r, "\alpha_2"] & E \arrow[r, "\beta_2"] & \mathcal{I}_{\Delta_2}(c_1(E)-L_2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

如果 $\beta_2\alpha_1$ 是零映射, 那么 $\mathcal{O}_X\subseteq L_2$, 与极大性矛盾! 故 $\beta_2\alpha_1$ 非零, 这样, 如下复合映射作为线丛的非零同态是单的,

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\beta_2\alpha_1} \mathcal{I}_{\Delta_2}(c_1(E)-L_2)\hookrightarrow \mathcal{O}_X(L_2).$$

这也说明 $\beta_2\alpha_1$ 是单同态, 因而存在 $D\in H^0(X,\mathcal{I}_{\Delta_2}(c_1(E)-L_2))$. 从而 $D\equiv c_1(E)-L_2$ 且 D 通过 Δ_2.

若 $D=0$, 那么 $\Delta_2=\emptyset$. 由 $\beta_2\alpha_1$ 的单射性及命题 1.2.14, 可知 $\beta_2\alpha_1$ 是同构 (即数乘映射). 适当调整 β_2, 我们就有分裂正合列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & E \arrow[r, shift left, "\beta_2"'] & \mathcal{O}_X \arrow[l, shift left, "\alpha_1"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

因此 $E=\mathcal{O}_X\oplus L_2$. ■

推论 7.1.1　*如果 E 不是半稳定的, 那么存在唯一的极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D)\subseteq E$, 使得 $\mu(D)>\mu(E)$. 具体言之, 若 E 的子线丛 L 满足 $\mu(L)\geq\mu(E)$, 则 $L\subseteq\mathcal{O}_X(D)$, 且 $\mu(L)\leq\mu(D)$, 等号成立当且仅当 $L=\mathcal{O}_X(D)$.*

证明　$\mathcal{O}_X(D)$ 的存在性来自于定义. 假若存在另一极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D')$, 满足 $\mu(D')\geq\mu(E)$. 由引理 7.1.1, $\deg D+\deg D'\leq\deg E$, 即 $\mu(D)+\mu(D')\leq 2\mu(E)$. 但由命题条件, $\mu(D)+\mu(D')>2\mu(E)$, 矛盾! 这表明除了 $\mathcal{O}_X(D)$ 外, 其余极大子线丛的斜率必定严格小于 $\mu(E)$. 特别地, 这也证明了 $\mathcal{O}_X(D)$ 是唯一满足命题条件的极大子线丛.

设 $L'\subseteq E$ 是包含 L 的极大子线丛, 则 $\mu(L')\geq\mu(L)\geq\mu(E)$. 由上面讨论, 这就迫使 $L'=\mathcal{O}_X(D)$. ■

推论 7.1.2 如果 E 是半稳定的但不是稳定的, 那么集合

$$\Sigma := \{L \subseteq E |\ L \text{ 是 } E \text{ 的极大子线丛且 } \mu(L) = \mu(E)\}$$

非空, 并且 E 必定满足以下条件之一:

(1) $|\Sigma| = 1$, 即存在唯一的极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D) \subseteq E$ 满足 $\mu(D) = \mu(E)$. 具体言之, 除了 $\mathcal{O}_X(D)$ 之外, E 的其余子线丛的斜率都严格小于 $\mu(E)$.

(2) $|\Sigma| = 2$, 即仅存在两个不同的极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D), \mathcal{O}_X(D')$, 满足 $\mu(D) = \mu(D') = \mu(E)$. 此时必有 $E = \mathcal{O}_X(D) \oplus \mathcal{O}_X(D')$.

(3) $|\Sigma| = \infty$, 即存在无穷多个极大子线丛都有斜率 $\mu(E)$. 此时 $V = \mathcal{O}_X(D) \oplus \mathcal{O}_X(D)$, 它的斜率为 $\mu(E)$ 的子线丛一一对应于 $H^0(X, E(-D))$ 中的直线 (这里的同调做为平面看).

反过来, 若一个向量丛 E 有极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D)$ 满足 $\mu(D) = \mu(E)$, 那么 E 是半稳定的 (但显然不是稳定的). 此时要么除 $\mathcal{O}_X(D)$ 以外的子线丛斜率均严格小于 $\mu(E)$, 要么 $\mathcal{O}_X(D)$ 是 E 的直和项.

证明 由定义, 可找极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D)$, 使得 $\mu(D) = \mu(E)$. 因而 Σ 非空.

如果 $\mathcal{O}_X(D)$ 是唯一满足 $\mu(D) = \mu(E)$. 那么类似推论 7.1.1 的证明, 可知除此之外的其余子线丛斜率均严格小于 $\mu(E)$. 如果存在两个不同的极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D), \mathcal{O}_X(D')$, 满足 $\mu(D) = \mu(D') = \mu(E)$. 那么由引理 7.1.1, $E = \mathcal{O}_X(D) \oplus \mathcal{O}_X(D')$. 以下我们假设 $|\Sigma| > 2$. 此时有第三个极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D'')$, 满足 $\mu(D'') = \mu(E)$. 由引理 7.1.1,

$$c_1(E) \equiv D + D' \equiv D + D'' \equiv D' + D''.$$

这就迫使 $D \equiv D' \equiv D''$ 以及 $E \cong \mathcal{O}_X(D) \oplus \mathcal{O}_X(D)$.

现在我们证明命题最后一部分. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta(D') \longrightarrow 0.$$

由于 $\mu(D) = \mu(E)$, 所以 $\mu(D') = \mu(E)$. 由命题 1.2.13 即知 E 是半稳定的. 其余结论都来自以上讨论. ∎

为后面讨论方便, 我们设置一些记号与概念. 我们定义迹映射 (Trace map)

$$\mathrm{Tr}_E : Hom(E, E) \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

它的核记为 $\mathrm{ad}E$. 由陈数计算公式得 $c_2(\mathrm{ad}E) = 4c_2(E) - c_1^2(E)$. 我们定义

$$p_1(\mathrm{ad}E) := -c_2(\mathrm{ad}E) = c_1^2(E) - 4c_2(E).$$

此外, 定义

$$w_2(E) \in Num(X)/2Num(X)$$

为 $c_1(E)$ 在 X 的数值等价群 $Num(X)$ 之 $\mathrm{mod}\ 2$ 中的类. E 张量任何线丛, 都不改变 w_2 和 p_1 的值.

定义 7.1.1 设 $w \in Num(X)/2Num(X)$, p 是负整数, $\xi \in Num(X)$, $NA(X)$ 是丰富锥. 如果 $\xi = w \pmod 2$ 且 $p \le \xi^2 < 0$, 我们就称 ξ 是 (w, p) 型类 (Class). ξ 的 (w, p) 型墙 (Wall) 定义为

$$W^{\xi} := \xi^{\perp} \cap NA(X) = \{H \in NA(X) |\, H\xi = 0\}.$$

$NA(X) - W^{\xi}$ 的连通分支称为 (w, p) 型腔 (Chamber).

设 H_1, H_2 是两个丰富除子. 我们关心的一个问题是: 是否存在秩 2 向量丛, 它是 H_1-(半) 稳定但不是 H_2-(半) 稳定? 设 $w = w_2(E)$, $p = p_1(adE)$. 下面我们将用 (w, p) 型类的语言来讨论这个问题.

命题 7.1.1 设 E 是曲面 X 上的向量丛, H_1, H_2 是两个丰富除子. 如果 E 是 H_1-稳定但不是 H_2-稳定, 那么存在极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D) \subseteq E$, 使得 $\xi = 2D - c_1(E)$ 是 (w, p) 型类且满足

$$H_1\xi < 0 \le H_2\xi.$$

满足上述条件的子线丛是唯一的, 并且存在实数 $t \in [0, 1]$, 使得 E 是 H_t-半稳定但不是 H_t-稳定, 这里 $H_t := tH_1 + (1-t)H_2$.

证明 由于 E 不是 H_2-稳定, 所以存在极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D) \subseteq E$, 使得 $\xi = 2D - c_1(E)$ 满足 $H_2\xi \ge 0$. 又因为 E 是 H_1-稳定, 所以 $H_1\xi < 0$. 因此存在实数 $t \in [0, 1]$, 使得 $H_t\xi = 0$ 并且 ξ 不是数值等价于 0, 故由 Hodge 指标定理推出 $\xi^2 < 0$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_{\Delta}(\det E - D) \longrightarrow 0.$$

由陈数计算 (见习题 1.13),

$$c_2(E) = \deg \Delta + D(c_1(E) - D) \ge D(c_1(E) - D).$$

因此

$$\xi^2 = 4D(D - c_1(E)) + c_1^2(E) \ge p.$$

现在我们来证明子线丛的唯一性. 假如 E 不是 H_2-半稳定, 那么由推论 7.1.1, $\mathcal{O}_X(D)$ 是唯一的极大不稳定子丛. 假如 E 是 H_2-半稳定但不是 H_2-稳定, 那么由推论 7.1.2, 要么 $\mathcal{O}_X(D)$ 是唯一的极大不稳定子丛, 要么 $\mathcal{O}_X(D)$ 是 E 的直和子项. 但是 E 是 H_1-稳定的, 所以后一情形不可能出现. 因而 $\mathcal{O}_X(D)$ 是唯一的.

最后, 我们取 H_t 同上, 使得 $\xi H_t = 0$. 这样, $\mu_{H_t}(D) = \mu_{H_t}(\det E - D)$. 由命题 1.2.13, E 是 H_t-半稳定的. ■

命题 7.1.2 设 E 是曲面 X 上的向量丛, H_1, H_2 是两个丰富除子, $\mathcal{O}_X(D)$ 是 E 的极大子线丛 (但不是 E 的直和项), $\xi = 2D - \det E$ 满足 $\xi H_1 < 0 < \xi H_2$. 设 $w = w_2(E)$, $p = p_1(E)$. 如果 W^{ξ} 是唯一分隔 H_1, H_2 的 (w, p) 型墙, 那么 E 必定是 H_1-半稳定且不是 H_2-半稳定.

证明 首先, $0 < \xi H_2$ 已表明 E 不是 H_2-半稳定的. 今假设 E 不是 H_1-半稳定的. 那么存在极大子线丛 $\mathcal{O}_X(D')$, 使得 $H_1(2D' - \det E) > 0$. 记 $\eta = 2D' - \det E$. 显然 $\mathcal{O}_X(D')$ 不可能是 $\mathcal{O}_X(D)$ 的子层. 因此由推论 7.1.1, $H_2\eta < 0 (< H_1\eta)$. 因此 W^{η} 也是分隔 H_1, H_2 的 (w, p) 型墙. 由命题条件, $W^{\eta} = W^{\xi}$, 即 ξ, η 相差一个常数倍 (习题 7.1). 取 $H \in W^{\xi}$, 于是 E 是0H-半稳定的 (命题 1.2.13). 又由推论 7.1.2 以及 $\mathcal{O}_X(D) \not\cong \mathcal{O}_X(D')$, 可知 $E = \mathcal{O}_X(D) \oplus \mathcal{O}_X(D')$, 与命题条件矛盾! 故 E 不是 H_1-半稳定的. ■

7.2 Bogomolov 不等式及其应用

7.2.1 Bogomolov 不等式

定理 7.2.1 (Bogomolov-Gieseker **不等式**) 设 E 是光滑射影曲面 X 上的秩 r 向量丛, H 是 X 上的丰富除子. 如果 E 是 H-半稳定的, 那么

$$(r-1)c_1^2(E) \leq 2rc_2(E).$$

证明 取 E_{norm} 同命题 2.4.1. 由 Riemann-Roch 定理,

$$\chi(X, S^{rn}E_{\mathrm{norm}}) = \frac{(rn)^{r+1}}{(r+1)!}\left(\frac{r-1}{2r}c_1^2(E) - c_2(E)\right) + O(n^r).$$

另一方面, 由命题 2.4.1,

$$h^0(X, S^{rn}E_{\mathrm{norm}}) = O(n^{r-1}), \qquad h^2(X, S^{rn}E_{\mathrm{norm}}) = h^0(X, S^{rn}E_{\mathrm{norm}}^{\vee} \otimes \omega_X) = O(n^{r-1}).$$

这就得到结论. ■

对秩 2 向量丛 E, Bogomolov 不等式相当于说, E 的半稳定性蕴含着 $p_1(\mathrm{ad}E) \leq 0$.

推论 7.2.1 设 E 是光滑射影曲面 X 上的秩 2 向量丛. 如果 $c_1^2(E) > 4c_2(E)$, 则存在线丛 L, 使得

(1) 对任何 nef 除子 A, 有

$$(2L - c_1)A \geq \sqrt{A^2} \cdot \sqrt{c_1^2 - 4c_2}.$$

(2) $(2L - c_1)^2 \geq c_1^2 - 4c_2$.

证明 令 $B = 2L - c_1$. 取定丰富除子 H_0. 由 Bogomolov 不等式, E 不是半稳定的, 所以存在极大线丛 L, 使得

$$LH_0 = \mu_{H_0}(L) > \mu_{H_0}(E) = \frac{c_1(E)H_0}{2},$$

即 $BH_0 > 0$.

考虑正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta(c_1(E) - L) \longrightarrow 0.$$

这里 $\mathcal{I}_\Delta$ 是理想层, Δ 是 $H^0(E(-L))$ 中某截面的零点集. 由习题 1.13,

$$c_2(E) = L(c_1 - L) + \deg \Delta.$$

因此

$$B^2 = (c_1^2 - 4c_2) + 4\deg \Delta \geq c_1^2 - 4c_2 > 0.$$

我们来说明, 对充分大整数 m, $|mB|$ 含有效除子. 首先, 因为 $BH_0 > 0$, 所以 $h^2(X, mB) = h^0(X, K_X - mB) = 0$. 因此

$$h^0(X, mB) \geq \chi(mB) = \frac{B^2}{2}m^2 + O(m) \gg 0.$$

这样, 对任何 nef 除子 A, $AB \geq 0$. 由 Hodge 指标定理

$$(AB)^2 \geq A^2B^2 \geq A^2(c_1^2 - 4c_2)^2.$$

这就得到所需的结论. ■

Bogomolov 不等式的一个直接应用, 是证明曲面上的 Mumford 消失定理.

命题 7.2.1 (Mumford 消失定理) 设 A 是光滑射影曲面 X 上的 nef, big 除子, 则

$$H^1(X, A^{-1}) = 0.$$

证明 如果 $H^1(X, A^{-1}) \neq 0$, 所以存在不分裂的秩 2 向量丛满足如下正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X(A) \longrightarrow 0.$$

此时 $c_1(E) = A$, $c_2(E) = 0$, $\mathcal{O}_X$ 是 E 的极大子线丛. 因此 $c_1^2 > 4c_2$. 这样, 我们可以找到 E 的极大不稳定子线从 L, 满足推论 7.2.1 的条件. 这就有

$$L^2 \geq LA \geq A^2 > 0$$

另一方面, 由引理 7.1.1, 存在有效除子 D 满足 $D \equiv c_1(E) - L$. 因此

$$DA = (A - L)A = A^2 - LA \geq 0.$$

结合上面的不等式, 即推出 $D^2 \geq DA = 0$. 由 Hodge 指标定理 及 $D \geq 0$, 这就迫使 $D = 0$. 因此 $E = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(L)$ (引理 7.1.1), 矛盾! ■

7.2.2 限制定理

以下设 E 是光滑射影曲面 X 上的秩 2 向量丛, H 是丰富除子. 令 $p(E) = c_1^2(E) - 4c_2(E)$.

命题 7.2.2 如果 E 是 H-稳定的, 那么当 $k \geq -p(E)$ 时, 对任何光滑曲线 $C \in |kH|$, $E|_C$ 都是半稳定的.

证明 假设 $E|C$ 不是半稳定的, 则存在 $E|_C$ 的商线丛 L, 使得 $2\deg L < \deg E|_C = kc_1(E)H$. 设 $j: C \to X$ 是包含映射, 我们诱导正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow j_*L \longrightarrow 0.$$

F 是 E 的初等修正. 由命题 4.2.1,

$$p(F) = p(E) + 2kHc_1(E) + k^2H^2 - 4\deg L \geq p(E) + 2 + k^2H^2 > p(E) + p(E)^2 \geq 0.$$

因此 F 不是半稳定的. 设 M 是 F 的极大不稳定子线丛, 满足推论 7.2.1 的诸条件. M 也可以看成 E 中的子线丛, 因而由 E 的稳定性可知 $2MH < c_1(E)H$.

令 $m = (c_1(E) - 2M)H$. 由上面讨论, 我们有以下诸不等式

(1) $0 < m < kH^2$ (来自 M 的选取以及 E 的稳定性).

(2) $(2M - c_1(E))^2 \leq \frac{m^2}{H^2}$ (Hodge 指标定理).

(3) $(2M - c_1(F))^2 \geq p(F)$ (推论 7.2.1).

因此

$$p+k^2H^2<p(F)\le(2M-c_1(F))^2\le\frac{m^2}{H^2}-2km+k^2H^2.$$

这就推出

$$2k<\frac{m}{H^2}-\frac{p(E)}{m}\le k+\frac{k}{m}\le 2k,$$

矛盾! 故 $E|_C$ 是半稳定的. ■

7.2.3 Serrano 不等式

设 C 是光滑射影曲面 X 上的既约不可约曲线, $\phi:C\to\mathbb{P}^1$ 是 d 次覆盖, 满足 $C^2>4d$. 设 $j:C\hookrightarrow X$ 是包含映射. 令

$$A=\phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),\quad V=\phi^*H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)).$$

考虑 $V\otimes\mathcal{O}_X\to j_*A$ 诱导的初等修正 $\mathcal{F}$, 即如下正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow j_*A\longrightarrow 0.$$

由命题 4.2.1,

$$c_1(\mathcal{F})=-C,\qquad c_2(\mathcal{F})=d.$$

此时 $c_1^2(\mathcal{F})>4c_2(\mathcal{F})$, 因而由 Bogomolov 不等式, $\mathcal{F}$ 不是半稳定的, 并且存在极大子线丛 $\mathcal{O}_X(-D)\subseteq\mathcal{F}$, 满足

(1) $(C-2D)A\ge\sqrt{A^2}\cdot\sqrt{C^2-4d}$, 对任何 nef 除子 A 成立. 特别地,

$$(C-2D)C\ge\sqrt{C^2}\cdot\sqrt{C^2-4d}>0. \tag{7-1}$$

(2)

$$(C-2D)^2\ge C^2-4d>0. \tag{7-2}$$

进一步, 因为 $\mathcal{O}(-D)$ 是 $\mathcal{F}$ 的子线丛, $\mathcal{F}$ 嵌入到 $V\otimes\mathcal{O}_X$ 中, 所以有单同态 $\mathcal{O}_X(-D)\hookrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X$, 即有单同态 $\mathcal{O}_X\hookrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X(D)$. 这表明 $H^0(X,D)\ne0$. 因此我们可以取 D 为有效除子.

引理 7.2.1 *在上述假设条件与记号下, 我们有*

(1) *$\mathcal{O}_X(-D)$ 也是 $V\otimes\mathcal{O}_X$ 的极大子线丛.*

(2) *如果 $D\ne0$, 那么 $0\le D^2<CD-D^2\le d$.*

(3) *假设 $D^2\ne0$. 如果 $CD>d$, 则*

$$(d+1)^2\ge\frac{(CD)^2}{CD-d}\ge\frac{(D^2+d)^2}{D^2}\ge C^2>4d.$$

如果 $CD\le d$, 则 $4d<C^2\le(CD)^2\le d^2$.

证明 假设 $\mathcal{O}_X(-D)$ 不是 $V\otimes\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_X^2$ 的极大子线丛. 由例 4.2.1, $\mathcal{O}_X(C-D)\subseteq\mathcal{O}_X^{\oplus2}$. 因而 $D-C\ge0$, 故有 $DC\ge C^2>0$. 这就与不等式 (7-1) 矛盾! 这样, 我们有正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-D)\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_X(D)\otimes\mathscr{I}_Z\longrightarrow 0,$$

这里 Z 是零维子概型, $D^2=\deg Z\ge0$.

式 (7-2) 相当于 $D^2+d\ge CD$. 两边平方该不等式, 并用 Hodge 指标定理, 可得

$$(D^2+d)^2\ge D^2C^2.$$

因为 $C^2 > 2DC$ (不等式 (7-1)), 所以由 Hodge 指标定理得

$$DC \geq \frac{2(DC)^2}{C^2} \geq 2D^2. \tag{7-3}$$

显见, 如果 $DC > 0$, 那么我们有严格不等式 $DC > 2D^2$. 如果 $DC = 0$, 那么由 Hodge 指标定理可知 $D = 0$.

如果 $DC \leq d$, 其余诸式都是显然的. 以下假设 $DC > d$. 由式 (7-1),

$$C^2 - 2DC > C^2 - 4d,$$

即 $2d > DC$. 再由式 (7-3), $D^2 < d$. 由函数 $\frac{x^2}{x-d}$ 的递减性 ($d < x < 2d$) 以及上面讨论, 我们有

$$\frac{(CD)^2}{CD-d} \geq \frac{(D^2+d)^2}{D^2} \geq C^2 > 4d.$$

这就完成了证明. ■

由引理 7.2.1 立得

推论 7.2.2 在前面的假设与记号下, 若 $C^2 > (d+1)^2$, 则 $D^2 = 0$, 从而有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow 0.$$

定理 7.2.2 ([Ser87]) 设 C 是光滑曲面 X 上的光滑不可约曲线, $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ 是 d 次覆盖, 满足 $C^2 \geq (d+1)^2$, 则以下情形之一成立:

(1) ϕ 可以延拓为一个纤维化 $\bar{\phi} : X \to \mathbb{P}^1$.

(2) $d \geq 2$, $C^2 = (d+1)^2$, $D^2 = 1$, $DC = d+1$, $\phi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \subseteq \mathcal{O}_C(D)$.

(3) $d = 1$, $C^2 = 4$.

证明 我们仍采用前面的记号. 首先讨论 $C^2 > (d+1)^2$ 的情形. 由推论 7.2.2, 我们有正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-D) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{I}_\Delta(D-C) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-D) \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] & \mathcal{O}_X(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里 $\Delta \subseteq C$ 是零维子概型. 由蛇形引理得 $A \cong \mathcal{O}_C(D)$. 因为 $(D-C)C < 0$, 所以 $h^0(X, \mathcal{O}_X(D-C)) = 0$. 这就得到单射

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D)).$$

注意到 $\mathcal{O}_X(D)$ 是 $\mathcal{O}_X^2$ 的商, 故可取 $s_1, s_2 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, 它们生成的线束没有基点, 且 $s_1|_C, s_2|_C \in H^0(C, A)$ 仍线性无关. 因而它诱导的覆盖 $\phi_{[s_1|_C, s_2|_C]} : C \to \mathbb{P}^1$ 与 ϕ 只相差一个 $\mathbb{P}^1$ 的自同构.

最后, 我们讨论 $d \geq 2$, $C^2 = (d+1)^2$ 的情形. 此时 Bogomolov 不等式 $C^2 > 4d$ 仍成立. 由引理 7.2.1 推出 $D^2 = 1$, $CD = d+1$. 类似可证 $\phi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \mathcal{O}_C(D) \otimes \mathscr{I}_{Z \cap C}$. ■

推论 7.2.3 设 C 是光滑曲面 X 上的不可约光滑曲线满足 $C^2 > 0$, 则要么 $\mathrm{gon}(C) \geq \sqrt{C^2} - 1$, 要么对任何 C 上极小线束 A, 存在 X 的无基点线束 $\mathcal{O}_X(D)$ 满足 $\mathcal{O}_C(D) = A$.

推论 7.2.4　设 C 是射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上的光滑 d 次曲线, 则 $\mathrm{gon}(C)=d-1$, C 上无基点线束 A 都来自于从 C 上给定点做投影.

对上述的讨论做更细致的分析, 我们可以改进 Serrano 结论.

推论 7.2.5　设 C 是光滑曲面 X 上的不可约光滑曲线满足 $C^2>0$. 如果 ϕ 不能延拓为一个纤维化 $\bar{\phi}: X\to\mathbb{P}^1$, 那么存在 X 上的有效除子 D, 使得

$$0<D^2<D(C-D)\le d,\quad C^2D^2\le(d+D^2)^2.$$

推论 7.2.6　在推论 7.2.5 的假设条件下, 如果 K_X 是偶除子且 $C^2>\frac{1}{2}(d+2)^2$, 则 ϕ 可以延拓为 $\bar{\phi}: X\to\mathbb{P}^1$.

注 7.2.1　高维情形的 Serrano 不等式证明可以参看 [Pao95]. ■

7.3 秩 2 向量丛的存在性判则

我们将定理 4.3.3 应用到曲面上的秩 2 向量丛, 得到如下存在性判则 (也可参看 [Tan11]).

定理 7.3.1　设 X 是光滑射影代数曲面, $\Delta\subseteq X$ 是零维子概型, L 是 X 上的除子. 那么以下条件彼此等价:

(1) 存在秩 2 向量丛 E 及截面 $s\in H^0(X,E)$ 满足

$$Z(s)=\Delta,\quad \det E=L.$$

(2) 存在三条曲线 F_1,F_2,F_3, 使得 F_1,F_2 无公共分支, 且满足

$$\begin{cases}\Delta=F_1\cap F_2-F_1\cap F_2\cap F_3,\\ L\equiv F_1+F_2-F_3.\end{cases}$$

(3) 存在秩 2 向量丛 $\mathcal{E}$, 截面 $s\in H^0(X,\mathcal{E})$ 以及曲线 F, 满足 $\dim Z(s)=0$, 且

$$\begin{cases}\Delta=Z(s)-Z(s)\cap F,\\ L\equiv\det\mathcal{E}-F.\end{cases}$$

(4) 要么 $\Delta=\emptyset$, 要么存在 $\eta\in H^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X+L))^\vee$ 满足: 对任何子概型 $\Delta'\subsetneqq\Delta$, η 不落在下面包含映射的像中,

$$H^1(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X+L))^\vee\hookrightarrow H^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X+L))^\vee,$$

亦即

$$\bigcup_{\Delta'\subsetneqq\Delta}H^1(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X+L))^\vee\subsetneqq H^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X+L))^\vee.$$

注 7.3.1　上述结论中, (1) 与 (4) 的等价性即所谓的 Serre 构造法. ■

上述定理对应 $\Delta=$ 情形, 相当于如下结论.

推论 7.3.1　在定理 7.3.1 的条件下, 以下条件等价:

(1) 存在秩 2 向量丛 E 及 $s \in H^0(E)$, 使得 $\dim Z(s) = 0$ 且有正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{s} E \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

(2) 存在三条曲线 F_1, F_2, F_3, 使得 F_1, F_2 无公共分支, $F_1 \cap F_2 \subseteq F_3$, 且满足 $L \equiv F_1 + F_2 - F_3$.

(3) 存在 (E, s, F), 使得 $Z(s) \subseteq F$, $\dim Z(s) = 0$ 且 $c_1(E) \equiv L + F$.

(4) $\Delta = \emptyset$.

注 7.3.2 进一步对应到平凡情形, 则得等价叙述:

(1) $E \cong \mathscr{O}_X \oplus L$.

(2) $f = g_1 f_1 + g_2 f_2$, 这里 $g_i \in H^0(X, \mathscr{O}_X(\det E - L - F_i))$.

(3) $f \in \mathrm{Im} s$.

(4) $\eta = 0$. ■

引理 7.3.1 以下条件彼此等价:

(1) 对任何真子概型 $\Delta' \subsetneq \Delta$, 都有

$$h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) < h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)).$$

(2) 对任何满足 $\deg \Delta' = \deg \Delta - 1$ 的子概型 $\Delta' \subsetneq \Delta$, 都有

$$h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) < h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)).$$

(3) (Cayley-Bacharach 性质) 对任何满足 $\deg \Delta' = \deg \Delta - 1$ 的子概型 $\Delta' \subsetneq \Delta$, 如果曲线 $F \in |K_X + L|$ 经过 Δ', 则它经过 Δ.

证明 (1) 与 (2) 的等价性是显然的。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $\deg \Delta' = \deg \Delta - 1$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L) \longrightarrow \mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L) \longrightarrow \mathscr{O}_{\Delta - \Delta'}(K_X + L) \longrightarrow 0.$$

由此得正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(\mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) \longrightarrow H^0(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \longrightarrow H^1(\mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) \longrightarrow H^1(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

结合条件知,

$$h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) - h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) = 1,$$

从而 $H^0(\mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) \cong H^0(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L))$. 若 $F \in |K_X + F|$ 满足 $\Delta' \subseteq F$, 则 $\Delta \subseteq F$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) 此时 $H^0(\mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) \cong H^0(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L))$, 从而有正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^1(\mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) \longrightarrow H^1(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) \longrightarrow 0.$$

因此 $h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) = h^1(X, \mathscr{I}_{\Delta}(K_X + L)) - 1$. ■

推论 7.3.2 定理 7.3.1 的条件 (4) 成立当且仅当 Δ 是局部完全交，且 $|K_X+L|$ 满足引理 7.3.1 的 Cayley-Bacharach 条件.

证明 Δ 是局部完全交时, 满足 $\deg\Delta'=\deg\Delta-1$ 的子概型 Δ' 只有有限个. ■

7.4 余切丛

余切丛与叶状结构存在着密切的联系. 这一节将讨论曲面上余切丛的性质.

7.4.1 全纯 1-形式

以下均设 X 为光滑射影代数曲面, Ω_X 是余切丛.

引理 7.4.1 若存在非零全纯 1-形式 $\omega\in H^0(X,\Omega_X)$, 那么必有 $d\omega=0$.

证明 由 Stockes 公式,

$$\int_X d\omega\wedge d\bar{\omega}=\int_X d(\omega\wedge\bar{\omega})=\int_{\partial X}\omega\wedge\bar{\omega}=0.$$

考虑局部表示 $d\omega=f dz\wedge dw$, 这里 (z,w) 是局部坐标, f 是局部全纯全纯函数. 设 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 于是

$$d\omega\wedge d\bar{\omega}=4|f|^2dx\wedge dy\wedge du\wedge dv.$$

这就迫使 $f\equiv 0$, 即 $d\omega=0$. ■

引理 7.4.2 设 $h\in Rat(X)$ 是 X 上的有理函数, 且不是常数, 那么
(1) h 诱导了有理映射 $h: X\dashrightarrow\mathbb{P}^1$;
(2) 存在极小次数的解消 $\sigma:\overline{X}\to X$, 将 h 提升为全纯映射 $\bar{h}:\overline{X}\to\mathbb{P}^1$;
(3) 考虑 $\bar{h}$ 的 Stein 分解(见以下交换图), 这里 $h_0: C\to\mathbb{P}^1$ 是有限覆盖, $f: X\to C$ 纤维连通.

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\bar{h}"] & C \arrow[d, "h_0"] \\
X \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}\tag{7-4}$$

如果 h 不是全纯映射 (即 $\sigma\neq id$), 那么 $C\cong\mathbb{P}^1$.
(4) dh 不可能是 X 上的非零全纯 1-形式.

证明 (1) $div(h)=H_0-H_\infty=div(s_0)-div(s_\infty)$, 这里 H_0 (H_1) 是 h 零点 (极点) 对应的除子部分. 于是诱导有理 $h: X\dashrightarrow\mathbb{P}^1$, $h(x)=[s_0(x),s_\infty(x)]$.

(2) 爆发由 H_0,H_∞ 构成的子线性系中所有基点即得.

(3) 此时 $\overline{X}$ 中有水平的 (-1)-曲线 E, 从而诱导有限覆盖 $f\mid_E: E\to C$. 由 Hurwitz 公式可知, $g(C)=0$.

(4) $dh=\frac{\partial h}{\partial z}dz+\frac{\partial h}{\partial w}dw$. 若 dh 是全纯 1-形式, 那么 $\frac{\partial h}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial w}$ 全纯, 推出 h 全纯, 从而 h 是常数, 矛盾! ■

引理 7.4.3 设 $0 \neq \omega \in H^0(X, \Omega_X)$. 如果存在有理函数 $\varphi, h \in Rat(X)$, 使得 $\omega = hd\varphi$. 那么存在纤维化 $f : X \to C$ 以及有理函数 $\varphi_0, h_0 \in Rat(C)$, 满足以下条件:
(1) $\alpha = h_0 d\varphi_0 \in H^0(C, \Omega_C)$ 是全纯的, 从而 $g(C) > 0$;
(2) $\varphi = f^*\varphi_0$, $h = f^*h_0$, $\omega = f^*\alpha$.

证明 由引理 7.4.2 知, h 不是常数, $div(h) = H_0 - H_\infty$, 且有交换图 (7-4). 这里 $\bar{h} = f^*h_0 = \sigma^*h$ 可以看作是 $\overline{X}$ 上的函数, 记

$$div(\bar{h}) = \overline{H}_0 - \overline{H}_\infty = div(\bar{s}_0) - div(\bar{s}_\infty).$$

同样地, 可以考虑有理函数 $\bar{\varphi} = \sigma^*\varphi$, 记 $div(\bar{\varphi}) = G_0 - G_\infty$. 我们分几步来完成证明.

Claim 1. $\overline{H}_0 \geq G_\infty + (G_\infty)_{red}$. 这里 $(G_\infty)_{red}$ 指 G_∞ 的既约部分.

假设 Γ 是 G_∞ 的不可约分支, 在 G_∞ 中重数为 n. 我们只需要证明 $\overline{H}_0 \geq (n+1)\Gamma$ 即可. 设 $p \in \Gamma$ 是一般的光滑点, Γ 的局部方程 $z = 0$, $\bar{\varphi} = \frac{1}{z^n}$. 注意到 $\sigma^*\omega = -n\bar{h}\frac{dz}{z^{n+1}}$ 是全纯的, 这就意味着 $z^{n+1} \mid \bar{s}_0$, 即 $\overline{H}_0 \geq (n+1)\Gamma$.

Claim 2. $\bar{\varphi} : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$ 是全纯态射.

$\overline{H}_0 = \bar{h}^*(0) = f^*h_0^*(0) = f^*(p_1 + \cdots + p_k) = F_1 + \cdots + F_k$ 显然由一些纤维构成. 由 Claim 1 知, G_∞ 落在纤维中, 从而由 Zariski 引理推出 $G_\infty^2 \leq 0$. 另一方面, $G_\infty \equiv G_0$, 所以 $G_\infty^2 = G_\infty G_0 \geq 0$, 故 $G_\infty G_0 = G_\infty^2 = 0$, 即 $G_0 \cap G_\infty = \emptyset$. 这表明 $\bar{\varphi} : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$ 是全纯的.

Claim 3. 存在 C 上有理函数 φ_0, 使得 $\bar{\varphi} = f^*\varphi_0$.

注意到 $\bar{\varphi}$ 的纤维都与 G_0 线性等价, 且 $G_0F = 0$, 这就表明 $\bar{\varphi}$ 的纤维都被 f 收缩, 即存在有限覆盖 $\varphi_0 : C \to \mathbb{P}^1$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"'] & C \arrow[d, "\varphi_0"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

这等价于 $\bar{\varphi} = f^*\varphi_0$.

Claim 4. $\alpha = h_0 d\varphi_0$ 是全纯的, 从而 $g(C) \geq 1$. 进一步由引理 7.4.2 知, h 是全纯的 (即 $\sigma = id$).

这是一个局部问题. 我们不妨设 F 是任意纤维, Γ 是 F 中的一条不可约分支, 重数为 n; 设 $q \in \Gamma$ 是一般的光滑点. f 在 q 处的局部方程可写为 $t = z^n$, 这里 t 是 $p = f(F)$ 的局部坐标. 设

$$\alpha = h_0(t)d\varphi_0(t) = t^\nu dt \cdot u(t),$$

这里 $u(0) \neq 0$. 于是

$$\sigma^*\omega = \bar{h}d\bar{\varphi} = f^*(\alpha) = f^*(t^\nu dt \cdot u(t)) = nx^{n-1+n\nu}dx \cdot u(x^n).$$

注意到 $\sigma^*\omega$ 是全纯的, 因此 $n - 1 + n\nu \geq 0$, 即 $\nu \geq 0$. 这就证明了 α 的全纯性. ■

下面的定理是非常重要的结论, 在代数曲面研究中有许多重要的应用.

定理 7.4.1 设 ω_1, ω_2 是 X 上 $\mathbb{C}$-线性无关的全纯 1-形式, 满足 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. 那么存在纤维化 $f : X \to C$ 以及 $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(C, \Omega_C)$, 使得 $\omega_1 = f^*\alpha_1$, $\omega_2 = f^*\alpha_2$. 此时显然有 $g(C) \geq 2$.

证明 在局部邻域上,

$$\omega_1 = f_1 dz + g_1 dw, \quad \omega_2 = f_2 dz + g_2 dw.$$

条件 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ 相当于 $(f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge dw = 0$, 因此可以定义局部有理函数 $\varphi = \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}$. 由直接计算可验证 φ 的定义不依赖于坐标选取, 因此可以延拓为 X 上的有理函数. 因此 $\omega_1 = \varphi\omega_2$. 由于 ω_1, ω_2 是 $\mathbb{C}$-线性无关, 所以 φ 不是常数.

注意到 $0 = d\omega_1 = d\varphi \wedge \omega_2$ (引理 7.4.1), 类似上面讨论, 我们有

$$\omega_2 = h d\varphi, \quad h \in Rat(X).$$

由引理 7.4.3, 存在纤维化 $f: X \to C$ 以及 C 上有理函数 h_0, φ_0, 使得 $h = f^* h_0$, $\varphi = f^* \varphi_0$. 令 $\alpha_1 = \varphi_0 h_0 d\varphi_0$, $\alpha_2 = h_0 d\varphi_0$, 那么我们有 $\omega_1 = f^* \alpha_1$, $\omega_2 = f^* \alpha_2$. 类似于引理 7.4.3的证明, 可检验 α_i 的全纯性. ■

注 7.4.1 如果 $\omega_3 \in H^0(X, \Omega_X)$ 也满足 $\omega_1 \wedge \omega_3 = 0$, 那么它们诱导的纤维化和 f 相同. 这是因为 $div(\omega_1) = f^* div(\alpha_1)$ 由 f 的一些纤维组成. ■

7.4.2 余切丛的子线丛

这一节的主要目的是估计余切丛的子线丛对应的多重线性系的维数.

引理 7.4.4 设 L 是光滑曲面 X 上的除子, $h^0(X, nL) \geq 2$ 对某个 $n \geq 2$ 成立. 那么存在一般有限覆盖 $\pi: Y \to X$, 使得 Y 是光滑的, 并且有 $h^0(Y, \pi^* L) \geq 2$.

证明 设 $|nL| = |M| + Z$, 这里 Z 是固定部分. 我们取没有公共分支的既约除子 $D_1, D_2 \in |M|$. 设 $D_i = div(s_i)$, $Z = div(s_0)$. 构造阿贝尔覆盖 $\pi: S \to X$, 由如下方程定义:

$$z_1^n = s_1 s_0, \quad z_2^n = s_2 s_0.$$

此时 $\pi_* \mathcal{O}_S$ 包含直和项 $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$. 因而由射影公式可得

$$2 \leq H^0(\mathcal{O}_S(\pi^* L)).$$

设 $\sigma: Y \to S$ 是奇点解消. $\pi\sigma: Y \to X$ 就是我们需要的一般有限覆盖. ■

定理 7.4.2 设 $\mathcal{O}_X(L) \subseteq \Omega_X$ 是极大可逆子层. 如果 $h^0(nL) \geq 2$ 对某个 $n \geq 1$ 成立, 则存在纤维化

$$f: X \to C$$

满足如下条件:

(1) 若 $n = 1$, 那么 $L \equiv f^* K_C + D(f)$, 这里 $D(f) = \sum_F (F - F_{red})$, F 跑遍所有奇异纤维.

(2) 若 $n \geq 2$, 则对任意 $D \in |nL|$, D 含于 f 的若干纤维内.

证明 (1) 由正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(L) \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta(K_X - L) \longrightarrow 0$$

可得 $H^0(X, L) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)$. 因为 $H^0(L) \geq 2$, 所以可取 $l_1, l_2 \in H^0(L)$ 是两个线性无关的截面. 它们对应了线性无关的 1-形式 $\omega_1, \omega_2 \in H^0(X, \Omega_X)$. 设 φ 是 X 上的半纯函数, 使得

$l_1 = \varphi l_2$, 于是 $\omega_1 = \varphi\omega_2$. 因此由定理 7.4.1, 存在纤维化 $f : X \to C$, 以及 $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(C, \Omega_C)$, 使得 $\omega_i = f^*\alpha_i$ $(i = 1, 2)$. 类似 Hurwitz 公式的计算, 我们有 ω_i 的零点集

$$Z(\omega_i) = f^* div(\alpha_i) + div(df), \tag{7-5}$$

这里

$$div(df) = Z\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \bigcup Z\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) = D(f) + \{\text{若干孤立点}\}.$$

结合 $L \equiv div(l_i) = div(\omega_i)$ 即得结论.

(2) 由引理 7.4.4, 存在一般有限覆盖 $\pi : Y \to X$ 使得 Y 光滑并且 $h^0(Y, \pi^*L) \geq 2$. 此时

$$\mathcal{O}_Y(\pi^*L) \subseteq \pi^*\Omega_X \subseteq \Omega_Y.$$

我们在 Ω_Y 中找一个包含 $\mathcal{O}_Y(\pi^*L)$ 的极大子线丛 $\mathcal{O}_Y(L')$. 此时可设 $L' \equiv \pi^*L + E$, 这里 E 是有效除子.

由 (1), 存在纤维化 $h : Y \to B$, 使得

$$L' \equiv \pi^*L + E \equiv h^*K_B + D(h).$$

设 F' 是 h 的纤维, 那么 $F'(\pi^*L + E) = 0$. 对任意的 $D' \in |\pi^*L|$, 这就有 $F'D' = F'E = 0$, 即 $D' + E$ 落在 h 的纤维中.

设 $|nL| = |M| + Z$, 类似讨论, $F'\pi^*M = F'\pi^*Z = 0$. 因而 $(\pi^*M)^2 \leq 0$, 即 $M^2 \leq 0$ (因为 π 是有限的). 这就迫使 $M^2 = 0$, 从而 $|M|$ 无基点. 由 Stein 分解, 我们得到纤维化 $f : X \to C$ 满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi_{|M|}"'] & C \arrow[d] \\ & \mathrm{Im}\varphi_{|M|} \end{tikzcd}$$

设 F 是 f 的纤维. 由于 M 由 f 的纤维组成, 因而 $FM = 0$.

注意到 $F'\pi^*F = F'\pi^*Z = 0$, 所以 π^*F 和 π^*Z 分别落在 h 的一些纤维中. 由于 M 无基点, 因而我们可以选取合适的 F, 使得 π^*F, π^*Z 不落在公共的纤维中. 这样就有

$$FZ = \frac{1}{\deg \pi}\pi^*F \cdot \pi^*Z = 0.$$

因此对 $D \in |nL|$, 我们有 $DF = (M + Z)F = 0$, 即 D 落在 f 的若干纤维中. ■

定理 7.4.3 (Bogomolov 定理) 设 $\mathcal{O}_X(L) \subseteq \Omega_X$, 则 $h^0(X, \mathcal{O}_X(nL)) = O(n)$.

证明 不妨设 L 是极大子线丛, 如果对某 $n_0 \geq 1$, $h^0(n_0L) \geq 2$, 则由定理 7.4.2, 存在纤维化 $f : X \to C$, 使得对任何 $D \in |nL|$, 有 $FD = 0$, 故 $FL = 0$.

给定丰富除子 H 以及充分大正整数 s, 并令

$$A = F_1 + \cdots + F_s,$$

这里 F_i 是 f 的一般纤维. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(nL - (k+1)A) \longrightarrow \mathcal{O}_X(nL - kA) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{F_i}(nL - kA) \longrightarrow 0.$$

由于 $\deg_{F_i}(nL-kA)=0$, 故 $h^0(\mathcal{O}_{F_i}(nL-kA))\le 1$, 因而

$$h^0(nL-kA)-h^0(nL-(k+1)A)\le s,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

由于 $(L-A)H<0$, 所以 $h^0(nL-nA)=0$. 叠加上面诸式, 即得 $h^0(nL)\le sn$. ■

7.4.3 Miyaoka-Yau 不等式

引理 7.4.5 设 E 是 X 上的秩二向量丛, $s\in H^0(S^nE\otimes L)$, 则存在一般有限覆盖 $\varphi:Y\to X$, 使得 Y 是光滑的, Y 上有线丛 $L_1,\dots,L_n$ 及截面 $s_i\in H^0(Y,\varphi^*E\otimes L_i)$, 满足
(1) $\varphi^*s=s_1\cdots s_n$ (看成 $\mathbb{P}(\varphi^*E^\vee)$ 的线丛截面),
(2) $\varphi^*L=L_1+\cdots+L_n$.

证明 s 可以看成 $\mathbb{P}(E^\vee)$ 中的 n 次截面. 设 $D(s)\subseteq\mathbb{P}(E^\vee)$ 是对应的除子. 取 $D(s)$ 的一个不可约分支 D_1. 设 $Y\to D_1$ 是 D_1 的奇点解消. 这就诱导了一般有限覆盖 $\varphi_1:Y\to X$. 由交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\varphi^*E^\vee) \arrow[r] \arrow[d, "\bar\pi_1"'] & \mathbb{P}(E^\vee) \arrow[d, "\bar\pi"] \\
Y \arrow[r, "\varphi_1"] & X
\end{tikzcd}$$

可得一截面 $s_1:Y\to\mathbb{P}(\varphi^*E^\vee)$, s_1 可以看成线性系 $|\varphi^*\mathscr{H}+\bar\pi_1^*L_1|$ 中的元, 这里 L_1 是 Y 上的除子. $\varphi^*s=s_1s'$. 由直接计算, $\deg s'=n-1$. 因此我们可以以此类推构造一系列覆盖, 在有限步后得到满足命题条件的一般有限覆盖. ■

引理 7.4.6 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 是秩 2 局部自由子层且 $c_1(\mathcal{F})$ 是 nef, 设线丛 $\mathcal{O}_X(L)\subseteq S^n\mathcal{F}$, 则

$$c_1(\mathcal{F})L\le\max\{nc_2(\mathcal{F}),0\}.$$

证明 先考虑 $n=1$ 的情形. 考虑正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{F}(-L)\longrightarrow\mathscr{I}_\Delta\otimes c_1(F)\longrightarrow 0.$$

注意到 Δ 是零维子概型 (因为 L 极大), 由习题 1.12, 我们有

$$0\le\deg\Delta=c_2(\mathcal{F}(-L))=L^2-c_1(\mathcal{F})L+c_2(\mathcal{F}).$$

若 $L^2\le 0$, 则由上式立得 $c_1(\mathcal{F})L\le c_2(\mathcal{F})$. 今假设 $L^2>0$. 由定理 7.4.3, L 不是 big, 故 $(-L)$ 是 big. 因为 $c_1(\mathcal{F})$ 是 nef, 所以 $c_1(\mathcal{F})L\le 0$. 综上可知结论对 $n=1$ 成立.

现在考虑一般情形. 此时存在截面 $s\in H^0(X,S^n\mathcal{F}(-L))$. 由引理 7.4.5, 存在一般有限覆盖 $\varphi:Y\to X$ 以及 Y 上线丛 $L_1,\cdots,L_n$, 使得 $\varphi^*L=L_1+\cdots+L_n$ 并且有截面 $s_i\in H^0(Y,\varphi^*\mathcal{F}(-L_i))$ 满足 $\varphi^*s=s_1\cdots s_n$. 因此

$$\mathcal{O}_Y(L_i)\subseteq\varphi^*\mathcal{F}\subseteq\varphi^*\Omega_X\subseteq\Omega_Y,$$

故由上面讨论得

$$c_1(\varphi^*\mathcal{F})L_i\le\max\{c_2(\varphi^*\mathcal{F}),0\},\quad i=1,\cdots,n.$$

叠加诸式即得结论. ■

定理 7.4.4 (Miyaoka-Yau 不等式) 设 X 是一般型极小曲面, 则 $c_1^2(X)\le 3c_2(X)$.

证明 设
$$E_n := S^{3n}\Omega_X(-nK_X).$$
由黎曼洛赫定理
$$h^0(X,E_n)+h^2(X,E_n)\geq \frac{3n^3}{2}(c_1^2-3c_2)+O(n^2),\quad n\gg 0. \tag{7-6}$$

若 $h^0(X,E_n)\neq 0$, 则 $\mathcal{O}_X(nK_X)\subseteq S^{3n}\Omega_X$. 由引理 7.4.6,
$$nK_X^2\leq \max\{nc_2(X),0\}=3nc_2(X).$$
因而得所需不等式.

若 $h^2(E_n)\neq 0$. 由 Serre 对偶,
$$h^0(X,S^{3n}\Omega_X\otimes((1-2n)K_X))\neq 0.$$
再次利用引理 7.4.6 得 $(2n-1)K_X^2\leq 3nc_2$. 当 $n\gg 0$, 这就推出 $K_X^2\leq \frac{3}{2}c_2$.

若 $h^0(X,E_n)=h^2(X,E_n)=0$, 则由不等式 (7-6) 即得 $c_1^2\leq 3c_2$. ■

7.4.4 Albanese 映射

这一节中, 我们回顾 Albanese 映射的基础知识. 它和一般消失定理等等有着密切联系.

设 X 是光滑代数曲面. 对每个同调类 $[\gamma]\in H_1(X,\mathbb{Z})$, 我们可以定义 $H^0(X,\Omega_X)$ 上的映射
$$\int_\gamma : H^0(X,\Omega_X)\longrightarrow \mathbb{C},\quad [\omega]\to\int_\gamma\omega.$$
由 Stockes 定理可知, 上述定义是合理的, 即不依赖于同调类的选取.

这样我们就诱导了如下映射
$$i: H_1(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^0(X,\Omega_X)^\vee,\quad [\gamma]\to\int_\gamma.$$

引理 7.4.7 设 $q(X)$ 是 X 的非正则性.
(1) $\mathrm{Ker}i$ 恰好是 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 的挠子群;
(2) $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}i=2q(X)$. 因此 $H^0(X,\Omega_X)^\vee/\mathrm{Im}i$ 是复环面.

我们定义
$$Alb(X)=H^0(X,\Omega_X)^\vee/\mathrm{Im}i$$
为 X 的 Albanese 簇. 可以证明它是一个 Abel 簇. 取定 X 中的一点 p_0, 那么对任意 $p\in X$, 可定义 $Alb(X)$ 中的元素 $\int_{p_0}^p(\cdot)\in Alb(X)$. 显然这里的积分路径只相差 $H_1(X,\mathbb{Z})$ 中的闭合回路, 因此 $\int_{p_0}^p(\cdot)$ 只相差 $\mathrm{Im}i$ 里的元素, 故定义是合理的. 这样就诱导了 Albanese 映射.
$$\alpha: X\longrightarrow Alb(X),\quad p\to\int_q^p(\cdot).$$

这些概念都可以过渡到任意的紧 Kähler 流形上. 此处不再赘述.

命题 7.4.1 设 $A=Alb(X)$, $\alpha: X\to A$ 是 Albanese 映射, $\alpha(p_0)=0$. 那么
(1) $\alpha^*: H^0(A,\Omega_A)\to H^0(X,\Omega_X)$ 是同构.
(2) (泛性质) 设 T 是任意 Abel 簇, $f: X\to T$ 是任意映射, 使得 $f(p_0)=0$. 那么存在唯一的全

纯映射 $g: A \to T$ 使得 $g\alpha = f$.
(3) $\alpha(X)$ 生成 A (作为抽象群).

证明 (1) 设 $H^0(X, \Omega_X) = \mathbb{C}\langle \omega_1, \cdots, \omega_q \rangle$. 令 $z_i(p) = \int_{p_0}^{p} \omega_i$ (商去格), 那么由 A 定义可知 $z_1, \cdots, z_q$ 是 A 的局部参数坐标. 显然有 $H^0(A, \Omega_A) = \mathbb{C}\langle dz_1, \cdots, dz_q \rangle$.

设 $\sum\limits_{i=1}^{q} \beta_i dz_i \in \mathrm{Ker}\alpha^*$, 则有

$$0 = \alpha^*(\sum_{i=1}^{q} \beta_i dz_i) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i d(\int_{p_0}^{p} \omega_i) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \omega_i.$$

因此 $\beta_i = 0, \forall i$. 这就证明了 α^* 是单射. 由于 $H^0(A, \Omega_A)$ 和 $H^0(X, \Omega_X)$ 有相同维数, 因此 α^* 是同构.

(2) 由交换图

$$\begin{tikzcd} H^0(X, \Omega_X)^\vee \arrow[r, "(f^*)^\vee"] & H^0(T, \Omega_T)^\vee \\ H_1(X, \mathbb{Z}) \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "f_*"] & H_1(T, \mathbb{Z}). \arrow[u, "i_T"'] \end{tikzcd}$$

可诱导 $g: A \to Alb(T) \cong T$, 也就是以下交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[d] \\ T \arrow[r] & Alb(T). \end{tikzcd}$$

其唯一性直接来自于 (3).

(3) 假设 $H = \langle \alpha(X) \rangle$ 是 $\alpha(X)$ 在 A 中生成的子群. 由泛性质, 存在映射 $h: A \to H$, 并有交换图 ($i: H \to A$ 包含映射, $j: H \to Alb(H) \cong H$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "h"] & A \\ H \arrow[r, "j"'] & H \arrow[r, equal] & H \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

由此可知 $H \cong A$. ■

推论 7.4.1 设 $f: X \to C$ 是纤维化, 那么存在 *Abel* 簇的满同态 $g: Alb(X) \to J(C)$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Alb(X) \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r] & J(C) \end{tikzcd}$$

这里 $J(C)$ 是 C 的雅可比簇.

定理 7.4.5 设 X 是光滑曲面.
(1) 如果 $\dim \alpha(X) = 2$, 那么 $p_g(X) > 0$.
(2) 如果 $\alpha(X) = C$ 是曲线, 那么 C 光滑, 且 α 纤维连通. 此时 $Alb(X) = J(C)$, $q(X) = g(C)$.

证明 (1) 因为 $q(X) \geq 2$, 所以存在线性无关的全纯 1-形式 ω_1, ω_2. 假设 $p_g(X) = h^0(X, \Omega_X) = 0$, 则 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. 由定理 7.4.1, 存在纤维化 $f: X \to C$ 以及 C 上全纯 1-形式 α_1, α_2, 使得 $\omega_i = f^*\alpha_i$. 我们有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "j"'] & J(C) \end{tikzcd}$$

这里 $A := Alb(X)$. 因为 $g(C) \geq 2$, 所以 j 是单射. 注意到 $h\alpha(X) = jf(X) = j(C)$, 且 $\alpha(X)$ (相应地, $j(C)$) 生成 A (相应地, $J(C)$), 所以 $h(A)$ 生成 $J(C)$, 从而 $h(A) = J(C)$. 因此 $q(X) \geq g(C)$.

取定一组基 $H^0(X, \Omega_X) = \mathbb{C}\langle \omega_1, \cdots, \omega_q(X) \rangle$. 由注记 7.4.1, $\omega_1 \wedge \omega_i = 0$ 诱导的纤维化都是相同的, 从而 $\omega_i = f^*\alpha_i$, $\alpha_i \in H^0(C, \Omega_C)$. 这就推出 $g(C) \geq q(X)$. 因此 $g(C) = q(X)$.

这样, $f^*: H^0(C, \Omega_C) \to H^0(X, \Omega_X)$ 是同构, 从而 $h: A \to J(C)$ 是有限映射. 因此 $h|_{\alpha(X)}: \alpha(X) \to J(C)$ 也是有限映射. 但是 $\dim \alpha(X) > \dim J(C)$, 矛盾!

(2) 考虑 $\alpha: X \to \alpha(X)$ 的 Stein 分解.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & C \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & \alpha(X) \end{tikzcd}$$

分别利用 α 及 ε 对应的 Albanese 映射泛性质, 我们得到 $h: A \to J(C)$ 及 $g: J(C) \to A$, 且有以下交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "h"] & A \\ C \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, "\varepsilon"] & J(C) \arrow[r, equal] & J(C) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

由此易知 $A \cong J(C)$. 此时 $g(C) \geq 1$, 故 j 是嵌入, 因此 $\varepsilon = gj$ 是同构, 即 $\alpha(X) \cong C$. ■

7.5 射影平面上的秩 2 向量丛

7.5.1 Schwarzenberger 定理

设 $x_1, \cdots, x_m$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的 m 个不同点, $\sigma: X \to \mathbb{P}^2$ 是关于这些 x_i 的爆发, $C_i = \sigma^* x_i$ 是例外曲线, $C = C_1 + \cdots + C_m$.

我们将在这一节讨论 $\mathbb{P}^2$ 上的秩 2 向量丛的存在性. 首先做一些准备工作.

引理 7.5.1 设 $U \subseteq \mathbb{C}^2$ 是原点的 Stein 邻域. $\sigma: V \to U$ 是关于原点的爆发, $C = \sigma^*(0,0) \subseteq V$ 是例外曲线. 如果 V 的一个扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(C) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_V(-C) \longrightarrow 0$$

限制在 C 上是欧拉序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_C^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_C(1) \longrightarrow 0,$$

那么必有 $E=\mathcal{O}_V\oplus\mathcal{O}_V$.

证明　首先, 由习题 7.4, 我们有单射

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_V(-C),\mathcal{O}_V(C))\hookrightarrow\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(1),\mathcal{O}_C(-1)).$$

因此, 只需要构造如下正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_V(C)\longrightarrow\mathcal{O}_V^{\oplus 2}\longrightarrow\mathcal{O}_V(-C)\longrightarrow 0 \tag{7-7}$$

即可迫使 $E\cong\mathcal{O}_V\oplus\mathcal{O}_V$.

今构造 $s\in H^0(V,\mathcal{O}_V(-C)^{\oplus 2})$, 使得 s 在 C 上恒有一阶零点, 在 $V\setminus C$ 上有 $s(p)=(x,y)$, 这里 (x,y) 是 $\sigma(p)$ 的局部坐标. 这就诱导了所需的扩张 (7-7). ■

引理 7.5.2　设 $a<b$, 则存在 X 上的扩张

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(C)\otimes\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)\longrightarrow E\longrightarrow\mathcal{O}_X(-C)\otimes\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)\longrightarrow 0, \tag{7-8}$$

使得它限制到每个不可约分支 C_i 上都是欧拉序列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{C_i}(C)\longrightarrow\mathcal{O}_{C_i}^{\oplus 2}\longrightarrow\mathcal{O}_{C_i}(-C)\longrightarrow 0, \tag{7-9}$$

并且这样的 E 必是 $\mathbb{P}^2$ 上的向量丛的拉回.

证明　不失一般性, 我们设 $b=0$, $a<0$. 由习题 7.5, 我们有满态射

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C)\otimes\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a),\mathcal{O}_X(C))\twoheadrightarrow\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(-C),\mathcal{O}_C(C))$$

并且存在 C 上的扩张

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_C(C)\longrightarrow\mathcal{O}_C^{\oplus 2}\longrightarrow\mathcal{O}_C(-C)\longrightarrow 0,$$

其限制在每个 C_i 上都有欧拉序列 (7-9). 因此它可延拓为扩张类

$$\xi\in\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C)\otimes\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a),\mathcal{O}_X(C)),$$

使得 $\xi|_C=\eta$. 这就找到了所需要的扩张 (7-8).

考虑每个点 x_i 的小邻域 U_i. 设 $V_i=\sigma^{-1}(U_i)$. 为了证明 E 是 $\mathbb{P}^2$ 上的向量丛拉回, 我们只需要证明 $E|_{V_i}\cong\mathcal{O}_{V_i}^{\oplus 2}$. 这直接来自于引理 7.5.1. ■

我们首先证明如下结论.

定理 7.5.1 (Schwarzenberger 定理)　任意给定整数 c,d, 都存在 $\mathbb{P}^2$ 上的全纯秩 2 向量丛 E, 满足

$$\deg c_1(E)=c,\quad \deg c_2(E)=d.$$

证明　对给定的 c,d, 我们可以构造两个整数 a,b 以及正整数 m, 满足 $a<b$ 以及

$$c=a+b,\quad d=m+ab.$$

考虑 m 个点 $x_1,\cdots,x_m\in\mathbb{P}^2$, 并考虑关于这些点 x_i 的爆发

$$\sigma:X\to\mathbb{P}^2,\quad C_i:=\sigma^{-1}(x_i).$$

令
$$C = \sum_{i=1}^{m} C_i.$$

由引理 7.5.2, 存在 X 上的向量丛 E', 满足正合列
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(C) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b) \longrightarrow E' \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \longrightarrow 0,$$
$E'|_{C_i} = \mathcal{O}_{C_i}^{\oplus 2}$, 并且 $E' = \sigma^* E$, 这里 E 是 $\mathbb{P}^2$ 上的向量丛. 由陈类计算
$$c_1(E) = a + b = c, \quad \deg c_2(E) = \deg c_2(\sigma^* E) = m + ab = d.$$
因此 E 满足命题条件. ■

根据 [Tho74] 的结果, $(\deg c_1, \deg c_2)$ 唯一确定了 $\mathbb{P}^2$ 上的秩 2 拓扑向量丛.

推论 7.5.1 $\mathbb{P}^2$ 上的每个秩 2 拓扑向量丛都至少有一个全纯结构.

7.5.2 稳定秩 2 向量丛

设 E 是 $\mathbb{P}^2$ 上的秩 2 向量丛. 我们将在这一节给出 E 的半稳定性的刻画.

引理 7.5.3 存在整数 k_E, 满足如下条件:

(1) 当 $k > k_E$ 时, $H^0(\mathbb{P}^2, E(-k)) = 0$;

(2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_E)$ 是 E 的极大子线丛;

(3) 对 E 的任何极大子线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)$, 都有
$$k \le k_E \le \max\{k, \deg E - k\}. \tag{7-10}$$

(4) E 稳定 (相应地, 半稳定) 当且仅当 $k_E < \mu(E)$ (相应地, $k_E \le \mu(E)$).

证明 取 $\ell \ll 0$, 使得 $V(-\ell)$ 由整体截面生成, 因而 $H^0(\mathbb{P}^2, E(-\ell)) \neq 0$, 即存在单射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\ell) \hookrightarrow E$. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\ell)$ 未必是 E 的极大子线丛, 因此可找到 $k \ge \ell$, 使得 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)$ 是 E 的极大子线丛. 我们有正合列
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta(\det E - k) \longrightarrow 0,$$
这里 Δ 是零维子概型.

我们要证明, 对 $n > \max\{k, \deg E - k\}$, 总有 $H^0(\mathbb{P}^2, E(-n)) = 0$. 若不然, 可找 $n' \ge n (> k)$, 使得 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n')$ 是 E 的极大子线丛. 由引理 7.1.1, 我们有 $\deg E - k - n' \ge 0$, 这迫使 $n \le \deg E - k$, 矛盾! 这样, 我们可找到最大的整数 k_E, 使得 $H^0(\mathbb{P}^2, E(-k_E)) \neq 0$. 由上面的讨论, 对任意极大子线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \subseteq E$, 都有不等式 (7-10) 成立.

若 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_E)$ 不是 E 的极大子线丛, 那么可找到 $k' > k_E$, 使得 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k')$ 是 E 的极大子线丛, 因而 $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k')) \neq 0$, 这与 k_E 的选取矛盾! 故 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_E) \subseteq E$ 是极大的.

若 E 是稳定的, 则由定义知 $k_E < \mu(E)$. 反过来, 若 $k_E < \mu(E)$, 那么对任何子线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \subseteq E$, 都有 $k \le k_E < \mu(E)$, 故 E 是稳定的. 半稳定情形类似可证. ■

推论 7.5.2 E 稳定当且仅当 E 是单的.

证明 若 E 是稳定的, 则由 Schur 引理 (推论 1.2.2) 知它是单的.

今假设 E 是单的, 要证其稳定. 若不然, 存在正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta(\deg E - k) \longrightarrow 0,$$

满足 $2k \geq \deg E$, 即 $\deg E - k < k$. 这样, 我们可诱导 E 的非零态射

$$E \twoheadrightarrow \mathscr{I}_\Delta(\deg E - k) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\deg E - k) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \hookrightarrow E.$$

这显然不是数乘映射, 因而 E 不是单的, 矛盾! ■

通过张量合适的线丛, 我们总是可以假设 E 满足 $\deg E = 0, 1$. 这当然并不影响我们讨论 E 的稳定性.

推论 7.5.3 *设 E 是 $\mathbb{P}^2$ 上的向量丛, 满足 $0 \leq \deg E \leq 1$, 那么*

(1) *E 是稳定的当且仅当 $k_E < \deg E$, 也当且仅当 $h^0(\mathbb{P}^2, E^\vee) = 0$.*

(2) *若 $k_E = \deg E - 1$, 即存在正合列*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k_E) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta(1) \longrightarrow 0, \tag{7-11}$$

则 E 稳定当且仅当 $h^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{I}_\Delta(-k_E)) = 0$. 换言之, E 稳定当且仅当 Δ 不在一条直线上 (当 $\deg E = 0$ 时) 或者 $\Delta \neq \emptyset$ (当 $\deg E = 1$ 时).

(3) *若 E 稳定且 $\deg c_2(E) \leq 5 - 2\deg E$, 那么 $k_E = \det E - 1$, 即存在正合列如 (7-11). 此时 $\deg c_2(E) \geq 1 - k_E$.*

证明 (1) 引理 7.5.3 已证 E 稳定当且仅当 $2k_E < \deg E$. 由于 $\deg E = 0, 1$, 故该数值条件等价于 $k_E < \det E$.

若 $H^0(\mathbb{P}^2, E^\vee) \neq 0$, 则 $k_E \geq \deg E$, 即 E 不是稳定的. 反过来, 若 E 不是稳定的, 那么存在 E 的极大线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)$, 满足 $2k \geq \deg E$, 从而 $k \geq \det E$. 因此存在非零复合映射

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\deg E) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k) \hookrightarrow E,$$

即 $H^0(\mathbb{P}^2, E^\vee) \neq 0$.

(2) 对正合列 (7-11) 张量 $\det E^\vee$, 并取同调得

$$H^0(\mathbb{P}^2, E^\vee) \cong H^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{I}_\Delta(-k_E)).$$

再由 (1) 即得结论.

(3) 由黎曼-洛赫定理,

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(1 - \deg E)) + h^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) \geq 6 - 2\deg E - \deg c_2(E) \geq 1.$$

由于 $k_E \leq 0$, 所以 $h^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) = 0$, 故 $h^0(\mathbb{P}^2, E(1 - \deg E)) \geq 1$. 因此 $k_E \geq \deg E - 1$. 由于 E 稳定, 故 $k_E < \deg E$, 这就迫使 $k_E = \det E - 1$.

由 (2), 当 $\deg E = 0$ 时, $\deg \Delta \geq 3$; 当 $\deg E = 1$ 时, $\deg \Delta \geq 1$. 注意到 $c_2(E) = k_E + \deg \Delta$. 这就得到结论. ■

7.6 直纹面上的秩 2 向量丛

本章习题

习题 7.1 设 $\xi \in Num(X)$, $W^{\xi} := \xi^{\perp} \cap NA(X)$.

(1) 证明: $W^{\xi} = NA(X)$ 当且仅当 $\xi = 0$ (在 $Num(X)$ 中).

(2) 证明: 若 $W^{\xi} = \emptyset$, 那么对任何丰富除子 H, ξH 恒正或恒负. (提示: 假设有丰富除子 H_1, H_2 满足 $H_1\xi < 0 < H_2\xi$, 取合适的实数 $t \in [0,1]$, 使得 $(tH_1 + (1-t)H_2)\xi = 0$.)

(3) 证明: 若 $W^{\xi} \neq NA(X)$ 且非空, 那么 $NA(X) - W^{\xi}$ 有两个连通分支, 在其中一个分支上, 任一元与 ξ 的相交数恒取正值; 另一分支上取恒负值. (提示: 假若对任何 $H \in NA(X) - W^{\xi}$, 都有 $H\xi > 0$, 则利用 Zariski 分解可证明 ξ 是 nef; 再用 Hodge 指标定理进一步证明其为零.)

(4) 证明: 若 $W^{\xi} = W^{\eta}$ (非空), 则 $\xi = \lambda\eta$, 这里 $\lambda \in \mathbb{Q}$. (提示: 在 $NA(X) - W^{\xi}$ 的两个连通分支上各自任取丰富除子 H_1, H_2. 数 $t_0 \in [0,1]$, 使得 $(t_0H_1 + (1-t_0)H_2)\xi = 0$. 由此证明 $\lambda_H := \frac{H\eta}{H\xi}$ 不依赖 $H \in NA(X) - W^{\xi}$ 的选取.)

习题 7.2 验证式 (7-5).

习题 7.3 设 D 是曲面 X 上有效除子, $C = \sum\limits_{i=1}^{r} C_i$ 是负定曲线, $N = \sum\limits_{i=1}^{r} a_iC_i$ 是 $\mathbb{Q}$-除子.
(1) 若 $(D-N)C_i \leq 0$ 对任何 C_i 都成立, 证明: $D - N$ 是有效 $\mathbb{Q}$-除子.
(2) 设 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ 是满足 $D\Gamma_i \leq 0$ 的不可约曲线, 证明: $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_s$ 是负定的.

习题 7.4 设 $U \subseteq \mathbb{C}^2$ 是原点的 Stein 邻域. $\sigma : V \to U$ 是关于原点的爆发, $C = \sigma^*(0,0) \subseteq V$ 是例外曲线.

(1) 证明: $H^1(V, \mathcal{O}_V(C)) = 0$. (提示: 考虑正合列 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_V(C) \longrightarrow \mathcal{O}_C(C) \longrightarrow 0$ 及 $H^1(V, \mathcal{O}_V) \cong H^1(U, \mathcal{O}_U) = 0$.)

(2) 证明: $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_V(-C), \mathcal{O}_V(C)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(-C), \mathcal{O}_C(C))$ 是单射. (提示: 考虑正合列 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(C) \longrightarrow \mathcal{O}_V(2C) \longrightarrow \mathcal{O}_C(2C) \longrightarrow 0$ 及 Serre 对偶.)

习题 7.5 设 $x_1, \cdots, x_m$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的 m 个不同点, $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ 是关于这些 x_i 的爆发, $C_i = \sigma^* x_i$ 是例外曲线, $C = C_1 + \cdots + C_m$, $L = \sum\limits_{i=1}^{m} k_iC_i \geq 0$.

(1) 证明: 对任意正整数 n 及负整数 m, 都有 $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-3)) = 0$.

(2) 证明: 对任意正整数 n, 都有 $H^2(X, \mathcal{O}_X(2L - C) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) = 0$.

(3) 证明: 对任意负整数 m, 限制映射

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-L) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m), \mathcal{O}_X(L)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C(-L), \mathcal{O}_C(L))$$

是满射.

(4) 证明: 存在扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(L) \longrightarrow \mathcal{O}_C^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_C(-L) \longrightarrow 0.$$

(提示: 限制到 C_i 上, 并利用推论 2.1.1.)

(5) 设 W 是 $\mathbb{P}^2$ 上秩 2 向量丛, $s \in H^0(\mathbb{P}^2, W)$, 使得 s 的零点集 $Z(s) = \{x_1, \cdots, x_m\}$. 证明: 存在正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(C) \longrightarrow \sigma^* E \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

这里 Q 是线丛. 它限制到 C_i 上为欧拉序列. (提示: s 诱导了截面 $\sigma^* s \in H^0(X, \sigma^* E \otimes \mathscr{I}_C)$, 使得 $\sigma^* s$ 无零点.)

第八章 射影空间上的向量丛

8.1 Bott 公式

在这一节中, 我们将精确计算同调群 $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))$ 的维数.

定理 8.1.1 (Bott 公式 [Bot57])

$$h^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{n+k-p}{n-p}\binom{k-1}{p}, & \text{若 } q=0,\ 0\le p\le n \text{ 且 } k>p, \\ 1 & \text{若 } k=0 \text{且 } 0\le p=q\le n, \\ \binom{-k-1}{n-p}\binom{-k+p}{p}, & \text{若 } q=n,\ 0\le p\le n \text{ 且 } k<p-n, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

为此, 我们分几步完成这个计算. 在例 1.2.9 中, 我们利用 Lefschetz 超平面定理得出 $h^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$ 对任意正整数 q 成立.

引理 8.1.1

$$h^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{n+k}{n}, & \text{当 } q=0 \text{ 且 } k\ge 0 \text{ 时}, \\ \binom{-k-1}{n}, & \text{当 } q=n \text{ 且 } k\le -n-1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

证明 对空间维数 n 施归纳法. $n=1,2$ 的情形可由例 1.1.2, Riemann-Roch 定理 及 Serre 对偶得到. 今假设 $<n$ 的情形已证 $(n\ge 3)$.

当 $q=0,n$ 时, 例 1.1.2 及 Serre 对偶同样能推出 $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k))$ 与 $h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k))$ 满足结论. 因此我们只需要验证 $1\le q\le n-1$ 的情形. 考虑限制映射正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(k) \longrightarrow 0 \tag{8-1}$$

诱导的同调正合列

$$H^{q-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(k)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \longrightarrow H^q(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(k)).$$

当 $1<q<n-1$ 时, 由归纳假设即得

$$H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)) \cong H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)), \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

结合例 1.1.2 就得到 $h^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$.

下面证 $q=1$ 的情形. 对正合列 (8-1) 取同调正合列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \longrightarrow \\ & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)). \end{aligned}$$

在上面的同调正合列中, 前三项的同调维数已经由上面讨论得到, 最后一项的维数为零. 这就推出

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-1)) \cong H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)), \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

结合例 1.1.2 即得 $h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = 0$.

类似可证 $q=n-1$ 的情形. 综上可知, 命题结论对所有 n 成立. ■

引理 8.1.2 当 $0<q<n$ 时,

$$h^q(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=\begin{cases}0, & \text{若 } p\neq q,\\ h^1(\mathbb{P}^n,\Omega_{\mathbb{P}^n}(k)), & \text{若 } p=q.\end{cases}$$

证明 对正合列 (参见例 1.2.3)

$$0\longrightarrow\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)^{\oplus\binom{n+1}{p}}\longrightarrow\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k)\longrightarrow 0 \tag{8-2}$$

诱导同调正合列

$$H^{q-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)^{\oplus\binom{n+1}{p}})\longrightarrow H^{q-1}(\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k))\longrightarrow H^q(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))\longrightarrow H^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)^{\oplus\binom{n+1}{p}}).$$

因此当 $1<q<n$ 时,

$$H^{q-1}(\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^q(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k)).$$

此时我们分三种情形讨论.
当 $q>p$ 时,

$$0=H^{q-p}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k))\cong\cdots\cong H^{q-1}(\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^q(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k)).$$

当 $q<p$ 时,

$$H^q(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^{q+1}(\Omega^{p+1}_{\mathbb{P}^n}(k))\cong\cdots\cong H^{q+n-p}(\omega_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^{p-q}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k))^\vee=0.$$

当 $p=q$ 时,

$$H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^q(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))\cong H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n}(k)).$$

当 $q=1$ 时, 由上讨论可知

$$H^1(\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=H^{n-1}(\Omega^{n-p}_{\mathbb{P}^n}(-k))^\vee=0,\quad p\neq 1.$$ ■

引理 8.1.3

$$h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=\begin{cases}\binom{k+n-p}{n-p}\binom{k-1}{p}, & \text{若 } k>p,\ 0\leq p\leq n,\\ 1, & \text{若 } p=k=0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 对正合列 (8-2) 取上同调正合列

$$0\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p))^{\oplus\binom{n+1}{p}}\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n,\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k))\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k)). \tag{8-3}$$

当 $k<p$ 时, 因为 $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p))=0$, 所以 $h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=0$.

以下不妨设 $k\geq p$. 当 $p>1$ 时, $H^1(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=0$, 因此

$$h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))+h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(k))=\binom{n+1}{p}\cdot h^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)).$$

依次取 $p=2,\cdots,k+1$, 上面诸式可推出 $h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(k))=0$ 以及

$$h^0(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=\binom{k+n-p}{n-p}\binom{k-1}{p},\quad 1\leq p\leq k-1.$$

$p=0$ 的情形直接来自于引理 8.1.1. ■

由 Serre 对偶定理, 可得

推论 8.1.1

$$h^n(\mathbb{P}^n,\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k))=\begin{cases}\binom{-k-1}{n-p}\binom{-k+p}{p}, & 若\ k<p-n,\ 0\le p\le n,\\ 1, & 若\ p=n, k=0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

引理 8.1.4 当 $n>1$ 时, $h^1(\mathbb{P}^n,\Omega_{\mathbb{P}^n})=\delta_{k0}$.

证明 在正合列 (8-3) 中取 $q=1$. 由前面的讨论即得结论. ■

综上讨论, 我们得到 Bott 公式.

8.2 向量丛的分裂性

8.2.1 Horrocks 分裂性判则

定理 8.2.1 (Horrocks **分裂性判则** [Hor64]) 设 E 是 $X=\mathbb{P}^n$ 上的全纯向量丛, $\mathcal{E}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(E)$, 则以下条件彼此等价:

(1) E 能分裂成线丛的直和,

(2) 对任意整数 k, 都有 $H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{E}(k))=0$, $i=1,\cdots,n-1$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 直接来自于 Bott 公式.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 对 n 施归纳法. $n=1$ 时, 条件是空的, 此时由 Grothendieck 定理可知向量丛分裂. 今假设对维数 $<n$ 的射影空间上的向量丛, 结论已成立.

对正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}\longrightarrow 0$$

张量 $\mathcal{E}(k)$ 并取正合列得同调正合列

$$H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{E}(k))\longrightarrow H^i(\mathbb{P}^{n-2},\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(k))\longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{E}(k-1)).$$

由假设条件知 $H^i(\mathbb{P}^{n-1},\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(k))=0$, $1\le i\le n-2$. 因此由归纳假可知 $\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}}$ 有分裂

$$\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}}\cong\oplus_{i=1}^r\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(a_i).$$

我们定义 $\mathcal{F}=\oplus_{i=1}^r\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$, F 是 $\mathcal{F}$ 对应的向量丛.

我们显然有一个同构 $\phi:F|_{\mathbb{P}^{n-1}}\to E|_{\mathbb{P}^{n-1}}$. 因为由假设条件知

$$H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}^\vee\otimes\mathcal{E}(-1))=\oplus_{i=1}^r H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{E}(-a_i-1))=0,$$

故 ϕ 可以延拓为 $\phi:F\to E$ (见习题 1.10). 因为 $\operatorname{rk}F=\operatorname{rk}E=r$, 并且 $c_1(E)=c_1(F)$, 所以由习题 1.10 可知 $\phi:E\to F$ 是同构. 这就证明了 E 的分裂性. ■

例 8.2.1 由 Bott 公式及 Horrocks 分裂性判则, $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}:=\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}$ 不能分裂成线丛的直和. ■

上述分裂性判则蕴含了如下经典结论.

定理 8.2.2 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的全纯向量丛, 那么以下条件彼此等价:

(1) E 在 $\mathbb{P}^n$ 上分裂成线丛的直和,

(2) E 限制到某个平面 $\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^n$ 上可以分裂成线丛的直和.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 是平凡的.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $n \geq 3$, $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ 是某超平面. 我们只需要证明: 若 $E|_{\mathbb{P}^{n-1}}$ 可以分裂成线丛的直和, 那么 E 亦然.

设 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(E)$. 由 Horoocks 分裂性判则, 对任意的整数 k, $H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}(k)|_{\mathbb{P}^{n-1}}) = 0$ $(1 \leq i \leq n-2)$. 对正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(k-1) \longrightarrow \mathcal{E}(k) \longrightarrow \mathcal{E}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \longrightarrow 0$$

取上同调, 可得正合列

$$H^{i-1}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}(k)|_{\mathbb{P}^{n-1}}) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k-1)) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) \longrightarrow H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}(k)|_{\mathbb{P}^{n-1}}).$$

因此对任意整数 k, 我们有 $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) = 0$ $(1 \leq i \leq n-2)$ 以及

$$h^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k-1)) \leq h^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)).$$

由于对成分大的整数 k, $h^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) = 0$, 所以 $H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) = 0$ 实际上对任何整数 k 都成立. 另一方面, 由 Serre 对偶得

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(k)) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^\vee(-k-n-1))^\vee = 0.$$

因此由分裂性判则立知, E 可以分裂成线丛直和. 结论得证. ■

Horrocks 分裂性判则对秩较小的向量丛, 可以改进为如下结论.

定理 8.2.3 设 E 是 $X = \mathbb{P}^n$ 上的秩 $r(\geq 2)$ 向量丛, 满足

$$H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

那么 E 可以分裂成线丛直和.

证明 假设 E 不包含线丛直和项. 由注记 3.2.1, 我们不妨假设 E 是 (-1)-正则, 但不是 (-2) 正则. 因此存在 $\ell \geq 1$, 使得

$$H^\ell(\mathbb{P}^n, E(-2-\ell)) \neq 0.$$

由定理 3.2.1, $E(-1)$ 由整体截面生成, 故 E 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus m}$ 的商 $(m = H^0(\mathbb{P}^n, E(-1)))$, 从而 E 是丰富层. 这样, $E(n-1-i)$ 也是丰富的 $(i \leq n-1)$. 将 Le Potier 消失定理应用到 $E(n-1-i)$ 上, 并注意到 $\omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$, 则得

$$H^i(\mathbb{P}^n, E(-2-i)) = 0, \quad r \leq i \leq n-1.$$

结合命题条件, 这就迫使 $\ell = n$, 即 $H^n(\mathbb{P}^n, E(-2-n)) \neq 0$, 亦即 $H^0(\mathbb{P}^n, E^\vee(1)) \neq 0$. 这表明存在非零态射 $\sigma : E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. 由于 E 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus m}$ 的商层, 因此 σ 诱导了 E 的直和项 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (类似命题 2.1.3 证明中的讨论), 与假设条件矛盾! 因此 E 必含某个线丛作为直和项, 即 $E = L \oplus E'$. 对 E' 做同样的讨论, 以此类推即得结论. ■

8.2.2 跃变直线与一致向量丛

设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的秩 r 向量丛. 对 $\mathbb{P}^n$ 中的任一条直线 ℓ, 根据定理 6.4.1, $E|_\ell$ 可以唯一分裂成一些线丛的直和

$$E|_\ell = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1(\ell)) \oplus \cdots \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r(\ell)), \quad a_1(\ell) \geq \cdots \geq a_r(\ell).$$

我们用 G_n 表示 $\mathbb{P}^n$ 中所有直线构成的 Grassmann 流形. 上面的分裂表示诱导了映射

$$a_E : G_n \longrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus r}, \quad \ell \to a_E(\ell) := (a_1(\ell), \cdots, a_r(\ell)).$$

$a_E(\ell)$ 称为 E 在直线 ℓ 上的*分裂型* (Splitting type). 如果 a_E 是常值映射, 那么 E 被称为*一致向量丛* (Uniform vector bundle).

我们可以对 $\mathrm{Im} a_E$ 作字典式排序:

$$(a_1, \cdots, a_r) \leq (b_1, \cdots, b_r) \text{ 若首个非零差 } b_i - a_i > 0.$$

还可定义 E 的*一般分裂型* (Generic splitting type)

$$\alpha_E = \inf_{\ell \in G_n} a_E(\ell).$$

设

$$S_E = \{\ell \in G_n | \, a_E > \alpha_E\}.$$

S_E 中的元素称为*跃变直线* (Jump line).

例 8.2.2　设 $E = T_{\mathbb{P}^n}$ 是 $\mathbb{P}^n$ 上的切丛. 我们证明 E 是一致向量丛.

$$a_E(\ell) = (2, 1, \cdots, 1).$$

为此目的, 我们只需要证明, 对任何超平面 H, 都有

$$T_{\mathbb{P}^n} = T_H \oplus \mathcal{O}_H(1).$$

然后由归纳法即得所需.

考虑正合列

$$0 \longrightarrow T_H \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}\big|_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(1) \longrightarrow 0.$$

为证它是分裂的, 我们只需要证明对应的扩张群等于零. 这来自于直接计算:

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_H(1), T_H) \cong H^1(H, T_H(-1)) \cong H^{n-2}(H, \Omega_H^1(-n+1)) = 0.$$

其中最后一个等号来自于 Bott 公式.

请注意, 尽管 E 没有跃变直线, 但它并不分裂. ■

例 8.2.3　给定 $\mathbb{P}^2$ 上的 m 个不同点 $x_1, \cdots, x_m$. 设 $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ 是关于这些 x_i 的爆发, $C_i = \sigma^* x_i$ 是例外曲线, $C = C_1 + \cdots + C_m$. 由引理 7.5.2, 存在 $\mathbb{P}^2$ 上的秩 2 向量丛 E, 满足:
(1) 有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(C) \longrightarrow \sigma^* E \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow 0. \tag{8-4}$$

(2) 正合列 (8-4) 限制到 C_i 上为欧拉序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i}^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{C_i}(1) \longrightarrow 0.$$

取直线 $L \subseteq \mathbb{P}^2$. 不妨假设它经过 $x_1, \cdots, x_r$. 设 $\widetilde{L}$ 是 L 在 σ 下的严格原像. 易知 $\widetilde{L}C = r$. 将正合列 (8-4) 限制到 $\widetilde{L}$ 上得

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(r) \longrightarrow \sigma^* E|_{\widetilde{L}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-r) \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-r), \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(r)) = H^1(\widetilde{L}, \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(2r)) = 0$, 故上面的正合列是分裂的. 这样就有

$$E\big|_L \cong \sigma^* E\big|_{\widetilde{L}} \cong \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(r) \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(-r).$$

如果 L 没有经过任何 x_i, 那么 $E|_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$. 因此 $\alpha_E = (0,0)$. 跃变直线集合 S_E 相当于那些至少经过一个 x_i 的直线集合. 换言之, S_E 就是对偶平面 $\mathbb{P}^\vee$ 中 m 条不同直线的并集. ■

S_E 实际上只是 G_n 中的一个解析闭子集, 因此 E 限制在充分一般的直线上都有相同的分裂. 这来自于以下更一般的结论.

命题 8.2.1 给定 $a = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, 设

$$M_a = \{\ell \in G_n |\ a_E(\ell) > a\}.$$

那么 M_a 是 G_n 中的解析闭子集. 特别地, S_E 是解析闭子集.

证明 我们定义

$$M_k(a_1, \cdots, a_k) = \{\ell \in G_n |\ (a_E(\ell)_1, \cdots, a_E(\ell)_k) > (a_1, \cdots, a_k)\},$$
$$M_k'(a_1, \cdots, a_k) = \{\ell \in G_n |\ h^0(L, E(-a_k - 1)|_L) > \sum_{i=1}^{k}(a_i - a_k)\}.$$

由直接计算, 它们满足 $M_1(a_1) = M_1'$,

$$M_1(a_1) \subseteq M_2(a_1, a_2) \subseteq \cdots \subseteq M_r(a_1, \cdots, a_r) = M_a$$

以及

$$M_k(a_1, \cdots, a_k) = M_{k-1}(a_1, \cdots, a_{k-1} - 1) \cap \left(M_{k-1}(a_1, \cdots, a_{k-1}) \cup M_k'(a_1, \cdots, a_k)\right). \quad (8\text{-}5)$$

由半连续性定理, $M_k'(a_1, \cdots, a_k)$ 及 $M_1(a_1)$ 都是 G_n 中的解析闭子集. 利用式 (8-5), 可以归纳地证明每个 $M_k(a_1, \cdots, a_k)$ 都是解析闭子集, 因而 M_a 亦然. ■

如果 $\mathbb{P}^n$ 上的向量丛能分裂成线丛直和, 那么它显然是一致丛; 反之则未必. 一个有趣的问题是, 哪些一致向量丛能分裂为线丛的直和? 下面几个结论在特定条件下给出了部分回答. 我们的讨论将用到第 4.4 节的标准构造的诸记号与假设. 回顾交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(x) \arrow[rr, shift right, "f"'] \arrow[dr, "\subseteq"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & G(x) \arrow[ll, bend right, "s"'] \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
& \mathbb{F}_n \arrow[rr, "q"'] \arrow[d, "p"] & & G_n \\
& \mathbb{P}^n & &
\end{tikzcd}$$

命题 8.2.2 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的秩 r 向量丛, $x \in \mathbb{P}^n$. 如果对任何过 x 的直线 L, 都有 $E|_L = \mathcal{O}_L^{\oplus r}$, 那么 E 必是平凡丛.

证明 由推论 4.4.1, 我们只需要证明, 对局部自由层 $F = f_*\sigma^*E$, 有 $f^*F = \sigma^*E$ 即可. 限制典范态射 $f^*F \to \sigma^*E$ 到 f 的每个纤维 $\widetilde{L} = f^{-1}(\ell)$ 上, 此时的限制映射就是 $\sigma^*E\big|_{\widetilde{L}}$ 的赋值映射. 由于 $\sigma^*E\big|_{\widetilde{L}} \cong E|_L$ 是平凡层, 故赋值映射就是同构. 因而典范态射也是同构. ∎

推论 8.2.1 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上由整体截面生成的向量丛, 且 $c_1(E) = 0$. 那么 E 必是平凡丛.

证明 将赋值映射的正合列

$$0 \longrightarrow M_E \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

限制到直线 $L \subseteq \mathbb{P}^n$ 上得

$$0 \longrightarrow M_E|_L \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, E) \otimes \mathcal{O}_L \longrightarrow E|_L \longrightarrow 0.$$

由于 $E|_L$ 也是整体截面生成的, 因而

$$E|_L = \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \cdots \mathcal{O}_L(a_r), \quad a_1 \geq \cdots \geq a_r \geq 0.$$

再由 $c_1(E) = 0$ 推得 $a_i = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$. 结合命题 8.2.2 即得结论. ∎

定理 8.2.4 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上秩 $r(< n)$ 的一致向量丛, 那么 E 必能分裂为线丛的直和.

证明 对 r 施归纳法. $r = 1$ 的情形是显然的. 今假设所有秩 $r' < r(< n)$ 的一致向量丛, 均已证命题结论. 通过张量适当的线丛, 我们不妨设 $E|_L$ 分裂的线丛的次数都小于等于 0. 若 E 平凡丛, 那么由命题 8.2.2, E 是平凡丛, 结论得证. 以下不妨设

$$a_E = (0, 0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots, a_r), \quad 0 > a_{k+1} \geq \cdots > a_r, \quad k < r.$$

此时 $h^0(L, E|_L) = k$ 是不依赖于 $\ell \in G_n$ 选取的, 故由引理 4.4.1, $F := q_*p^*E$ 是 G_n 上的秩 k 向量丛. 考虑典范态射在 $\widetilde{L} = q^{-1}(\ell)$ 上的限制,

$$\begin{tikzcd}
q^*F|_{\widetilde{L}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & p^*E|_L \arrow[d, equal] \\
\mathcal{O}_{\widetilde{L}}^{\oplus k} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathcal{O}_{\widetilde{L}}^{\oplus k} \oplus \left(\oplus_{i=1}^{r-k} \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_{k+i})\right)
\end{tikzcd}$$

这就给出了向量丛正合列

$$0 \longrightarrow q^*F \longrightarrow p^*E \longrightarrow V \longrightarrow 0,$$

这里 $V|_{\widetilde{L}} = \oplus_{i=1}^{r-k} \mathcal{O}_{\widetilde{L}}(a_{k+i})$.

下面我们要证明 $p^*p_*(q^*F) = q^*F$ 及 $p^*p_*V = V$. 为此我们只需要限制到 $\mathbb{F}(x) = p^{-1}(x)$ 上证明其对应的典范态射是同构即可. 此时有正合列

$$0 \longrightarrow q^*F|_{\mathbb{F}(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}(x)}^{\oplus r} \longrightarrow V|_{\mathbb{F}(x)} \longrightarrow 0.$$

注意到 $\mathbb{F}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $r < n$, 由习题 8.3 知 $V|_{\mathbb{F}(x)}$ 及 $q^*F|_{\mathbb{F}(x)}$ 都是平凡丛. 此时典范态射 $p^*p_*(q^*F) \to q^*F$ 及 $p^*p_*V \to V$ 限制在 $\mathbb{F}(x)$ 上是平凡的赋值映射, 故这些典范态射是同构.

今令 $F_0 = p_*q^*F$, $V_0 = p_*V$. 于是 $q^*F \cong p^*F_0$, $V = p^*V_0$, 故有正合列

$$0 \longrightarrow p^*F_0 \longrightarrow p^*E \longrightarrow p^*V_0 \longrightarrow 0.$$

由于高次正像层消失 (利用 Bott 公式及射影公式), 这就得到正合列

$$0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow E \longrightarrow V_0 \longrightarrow 0.$$

F_0, V_0 仍然是一致向量丛. 由归纳假设, 它们都是线丛的直和. 此时 $H^1(\mathbb{P}^n, V_0^\vee \otimes F_0) = 0$ (Bott 公式), 因此上面的正合列是分裂的, 从而 E 也分裂. ■

8.2.3 秩 2 向量丛的分裂判则

设 E 是 $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ 上的秩 2 向量丛, $s \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$, Δ 是 s 的零点集. 不妨假设 $\mathrm{codim}\Delta = 2$. 因而 $\Delta \subseteq \mathbb{P}^n$ 是局部完全交.

命题 8.2.3 E 分裂当且仅当 Δ 是整体完全交.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$, $s = (s_1, s_2)$, 这里

$$s_1 \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)), s_2 \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)).$$

因此 $\Delta = div(s_1) \cap div(s_2)$ 是整体完全交.

$(\Longleftarrow)$ 设 $\Delta = div(s_1) \cap div(s_2)$ 同上. 那么我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a-b) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-b) \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta \longrightarrow 0. \tag{8-6}$$

这就给出了

$$\mathrm{Ext}\,^1_{\mathbb{P}^n}(\mathscr{I}_\Delta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a-b)) \cong H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

中的非零元. 因此我们只要证明 $H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = 1$, 即知 $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$.

考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_\Delta \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0.$$

注意到 $h^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_\Delta) = 0$, 因而我们只需要证明 $h^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_\Delta) = 0$ 即可. 为此对正合列 (8-6) 取同调. 注意到 $n \geq 3$ 及 $a, b > 0$, 由此即得 $h^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_\Delta) = 0$. ■

本章习题

习题 8.1 验证式 (8-5).

习题 8.2 设 E 是 $\mathbb{P}^n$ 上的向量丛, 证明: 以下两个条件彼此等价:
(i) E 是一致向量丛, 且在直线 L 上分裂为

$$E|_L = \mathcal{O}_L(a_1)^{\oplus r_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_L(a_k)^{\oplus r_k}, \quad a_1 > a_2 > \cdots > a_k.$$

(ii) E 有向量丛的滤过

$$0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F^k = p^*E,$$

满足 $F^i/F_{i-1} = q^*V_i \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$, 这里 V_i 是 G_n 上的秩 r_i 向量丛, p, q 等的含义见第 4.4 节.

习题 8.3 考虑 $\mathbb{P}^n$ 上的向量丛正合列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r} \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

这里 $r \leq n$.

(1) 证明: 陈类多项式 $c(E) = 1$, $c(F) = 1$.(提示: 若不然, 考虑这两个多项式的最高次数的非零项乘积, 它是 h^m 的倍数, 这里 $h \in H^2(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z})$, $m < n$.)

(2) 证明: E, F 都是平凡丛. (提示: 利用推论 8.2.1.)

第九章　秩二向量丛与二元型

9.1　二元型的共变量

我们考虑 n 次二元型

$$f(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}a_k\binom{n}{k}x_1^{n-k}x_2^k.$$

考虑 x_1,x_2 的线性变换 φ,

$$x_1=c_{11}\bar{x}_1+c_{12}\bar{x}_2,\quad x_2=c_{21}\bar{x}_1+c_{22}\bar{x}_2,$$

或写为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{pmatrix}.$$

它给出了新变量 $\bar{x}_1,\bar{x}_2$ 下的二元型

$$\bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\binom{n}{k}\bar{x}_1^{n-k}\bar{x}_2^k.$$

定义 9.1.1　*一个非零齐次多项式 $I(a_0,\cdots,a_n,x_1,x_2)$ 如果对任何 n 二元型 $f(x_1,x_2)$ 及变量 x_1,x_2 的线性变换 φ, 都有*

$$I(\bar{a}_0,\cdots,\bar{a}_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(\det\varphi)^p\cdot I(a_0,\cdots,a_n,x_1,x_2),$$

则称为 n 次二元型的权 p 共变量 (Covariant of weight p). 进一步, 如果 $I(a_0,\cdots,a_n,x_1,x_2)$ 中不出现 x_1,x_2, 则称之为不变量 (Invariant).

例 9.1.1　$I_0(a_0,\cdots,a_n):=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\binom{n}{k}x_1^{n-k}x_2^k=f(x_1,x_2)$ 显然是共变量, 它是 n 阶 0 权 1 次共变量. 另一个常见的不变量是判别式 $D(f)$, 它是 0 阶 n^2-n 权 $2n-2$ 次多项式. ■

例 9.1.2 (二元二次型)　设 $f(x_1,x_2)=a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2$. 线性变换 φ 下的新变量多项式 $\bar{f}$ 的系数满足

$$\begin{pmatrix}\bar{a}_0&\bar{a}_1\\\bar{a}_1&\bar{a}_2\end{pmatrix}={}^t\varphi\cdot\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_2\end{pmatrix}\cdot\varphi=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}\\c_{12}&c_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}.$$

两边取行列式即得 $\bar{a}_1^2-\bar{a}_0\bar{a}_2=(\det\varphi)^2(a_1^2-a_0a_2)$. 因此判别式 $D(f):=a_1^2-a_0a_2$ 是权 2 的不变量. ■

我们将 f 的共变量 I 写成

$$I(a_0,\cdots,a_n,x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{m}C_k\binom{m}{k}x_1^{m-k}x_2^k,$$

这里 $C_k=C_k(a_0,\cdots,a_n)$ 是齐次多项式. $\deg C_k=g$ 称为 I 的次数 (Degree), m 称为 I 的阶 (Order). m,p,g 满足关系式 $2p=ng-m$.

我们引入两个算子

$$\boldsymbol{D} := \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k\frac{\partial}{\partial a_{k+1}},$$
$$\boldsymbol{\Delta} := \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_{k+1}\frac{\partial}{\partial a_k}.$$

定理 9.1.1 二元型

$$I = \sum_{k=0}^{m} C_k\binom{m}{k}x_1^{m-k}x_2^k$$

是 n 次二元型 $f(x_1, x_2)$ 的共变量当且仅当以下条件成立:

(1) $C_0 = C_0(a_0, \cdots, a_n)$ 是 g 次权 p 齐次多项式, $2p = ng - m$. 这里, 每个 a_i 赋权值 i.

(2) $\boldsymbol{D}C_0 = 0$.

(3) $C_i = \frac{(m-i)!}{m!}\boldsymbol{\Delta}^i C_0$.

C_0 称为该共变量的源 (Source), 简记为 $c(I(f))$.

定理 9.1.2 ([Gor68]) 设 I_i 是 m_i 阶 p_i 权 g_i 次共变量 $(i = 1, 2)$, 则对任何 $h \geq 0$,

$$\varphi_h(I_1, I_2)(f) = \sum_{k=0}^{h}(-1)^k\binom{h}{k}\frac{\partial^h I_1(f)}{\partial x_1^{h-k}\partial x_2^k}\cdot\frac{\partial^h I_2(f)}{\partial x_1^k\partial x_2^{h-k}}$$

是 $m_1 + m_2 - 2h$ 阶 $p_1 + p_2 + h$ 权 $g_1 + g_2$ 次共变量. 所有共变量都可以由此方法得到.

例 9.1.3 (Hessian)

$$H(f) = \frac{\varphi_2(I_0, I_0)}{2n^2(n-1)^2} = \frac{1}{n^2(n-1)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

它是 $2n-4$ 阶 2 权 2 次共变量. ■

例 9.1.4 (Jacobian)

$$\varphi_1(I_1, I_2)(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial I_1(f)}{\partial x_1} & \frac{\partial I_2(f)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial I_1(f)}{\partial x_2} & \frac{\partial I_2(f)}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

是 $m_1 + m_2 - 2$ 阶 $p_1 + p_2 + 1$ 权 $g_1 + g_2$ 次共变量. 特别地,

$$J(f) = \varphi_1(H(f), f)$$

称为 f 的 Jacobian. 它是 $3n-6$ 阶 3 权 3 次共变量. ■

所有共变量生成一个双分次 $\mathbb{C}$-代数, 且双次数为 (g, m).

例 9.1.5 (1) 一次型的双分次代数是 $\mathbb{C}[I_0]$.
(2) 二次型的双分次代数 $\mathbb{C}[I_0, D]$, 这里 D 是判别式.
(3) 三次型 $f = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3$. 我们已经有 I_0, 判别式 $D(f)$ 以及 Hessian

$$H(f) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2,$$

这里

$$A = a_0a_2 - a_1^2, \quad B = a_0a_3 - a_1a_2, \quad C = a_1a_3 - a_2^2.$$

我们还有 Jacobian

$$J(f) = a_0'x_1^3 + 3a_1'x_1^2x_2 + 3a_2'x_1x_2^2 + a_3'x_2^3,$$

这里

$$a_0' = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3, \quad a_1' = a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2,$$
$$a_2' = 2a_1^2a_3 - a_1a_2^2 - a_0a_2a_3, \quad a_3' = 3a_1a_2a_3 - 2a_2^3 - a_0a_3^2.$$

这些共变量满足关系式

$$4H^4 + J^2 = DI_0^2.$$

对应的双分次代数为 $\mathbb{C}[I_0, H, J, D]/(4H^3 + J^2 - DI_0^2)$. ■

定理 9.1.3 (Gordan-Hilbert **定理**) *n-次型的共变量环是有限生成的.*

如果一个 n 次二元型的所有不变量都为零, 则称它为零形式 (Nullform).

定理 9.1.4 (Hilbert **零形式**) *n 次二元型 f 是零形式当且仅当存在整数 $h > n/2$ 以及线性型 ℓ 使得 $\ell^h \mid f$.*

9.2 秩二向量丛的共变量

设 E 是光滑射影簇 X 上的秩二向量丛, L 是线丛. 我们要把二次型的共变量概念及结论推广到向量丛 $E^\vee$ 上. 这里之所以用 $E^\vee$ 替代 E, 是因为 $E^\vee$ 的局部基是局部函数, 有自然的环结构.

考虑开覆盖 $X = \cup_{\alpha\in I}U_\alpha$, 使得

$$E^\vee|_{U_\alpha} = \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot x_{\alpha 1} \oplus \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot x_{\alpha 2}, \quad L|_{U_\alpha} = \mathcal{O}_{U_\alpha} \cdot e_\alpha.$$

整体截面 $f \in H^0(X, S^nE^\vee \otimes L)$ 在 U_α 上的局部表示是 n 次二元型 $f_\alpha(x_{\alpha1}, x_{\alpha2}) \otimes e_\alpha$. 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上,

$$f_\alpha(x_{\alpha1}, x_{\alpha2}) \otimes e_\alpha = f_\beta(x_{\beta1}, x_{\beta2}) \otimes e_\beta.$$

它称为 (广义) n 次型 (Generalized n-form).

考虑转移函数

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha1} \\ x_{\alpha2} \end{pmatrix} = \varphi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} x_{\beta1} \\ x_{\beta2} \end{pmatrix}, \qquad e_\alpha = \ell_{\alpha\beta}e_\beta.$$

设 $\bar{f}_\beta(x_{\beta1}, x_{\beta2}) = f_\alpha(x_{\alpha1}, x_{\alpha2})$. 由此可得

$$f_\beta(x_{\beta1}, x_{\beta2}) = \ell_{\alpha\beta}\bar{f}_\beta(x_{\beta1}, x_{\beta2}). \tag{9-1}$$

设 I 是 (n, m, p, g) 型共变量. 我们希望将它推广为向量丛的整体截面. 我们验证

$$\{(U_\alpha, I(f_\alpha)(x_{\alpha1} \wedge x_{\alpha2})^p \otimes e_\alpha^g)\}_{\alpha\in I}$$

给出了 $S^mE^\vee \otimes (\det E^\vee)^p \otimes L^g$ 的整体截面 $I(s)$. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&I(f_\beta)(x_{\beta 1} \wedge x_{\beta 2})^p \otimes e_\beta^g = \\
&\quad I(\ell_{\alpha\beta}\bar{f}_\beta)(x_{\beta 1} \wedge x_{\beta 2})^p \otimes e_\beta^g = I(\bar{f}_\beta)(x_{\beta 1} \wedge x_{\beta 2})^p \otimes (\ell_{\alpha\beta}e_\beta)^g = I(f_\alpha)(x_{\alpha 1} \wedge x_{\alpha 2})^p \otimes e_\alpha^g.
\end{aligned}
$$

这样, 我们就有

定理 9.2.1 设 I 是 (n, m, p, g) 型共变量, 则它给出了向量丛的代数映射

$$I : S^nE^\vee \otimes L \longrightarrow S^mE^\vee \otimes (\det E^\vee)^p \otimes L^g, \quad s \to I(s).$$

特别地, 如果 I 是不变量, 则有映射

$$I : S^nE^\vee \otimes L \longrightarrow (\det E^\vee)^{\frac{ng}{2}} \otimes L^g. \tag{9-2}$$

设 $L^\vee$ 是 E 的极大子线丛, $(U_\alpha, z_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 E 中生成 $L^\vee$ 的一组基. 在每个开集 U_α 上, 我们可以找 E 的局部基 z_α, w_α, 其中 z_α 来自 $L^\vee$ 对应的上述基. 设 $x_{\alpha 1} = z_\alpha^*$, $x_{\alpha 2} = w_\alpha^*$ 是 $E^\vee$ 的对偶基. 在交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中, 我们有转换关系

$$z_\beta = \lambda_{\alpha\beta} z_\alpha, \quad w_\beta = \delta_{\alpha\beta} z_\alpha + \mu_{\alpha\beta} w_\alpha,$$

这里 $\ell_{\alpha\beta}$ 是 L 的转换函数. 相应的对偶基之间的转换关系为

$$x_{\alpha 1} = \lambda_{\alpha\beta} x_{\beta 1} + \delta_{\alpha\beta} x_{\beta 2}, \quad x_{\alpha 2} = \mu_{\alpha\beta} x_{\beta 2}.$$

设 $M = \{\ell_{\alpha\beta}\}$ 是任意线丛, $f \in H^0(X, S^nE^\vee \otimes M)$. 由式 (9-1) 以及上述的转换关系, 我们可以得到源的转换关系

$$c(f_\alpha)\lambda_{\alpha\beta}^n \ell_{\alpha\beta} = c(f_\beta).$$

这意味着 $c(f) = \{c(f_\alpha)\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, L^n \otimes M)$. 综上讨论, 我们即得如下结论.

命题 9.2.1 设 $L^\vee$ 是 E 的极大子线丛, M 是任意线丛, 那么源给出了诱导同态

$$c : S^nE^\vee \otimes M \longrightarrow L^n \otimes M, \quad f \to c(f).$$

接下来, 我们要将 Hilbert 零形式定理推广到向量丛情形. 这里做一些准备工作.

命题 9.2.2 设 L 是线丛, 满足斜率关系 $\mu(L) < \mu(S^nE)$ $(n \geq 2)$. 那么对任何截面 $s \in H^0(X, S^nE^\vee \otimes L)$, s 必是零形式.

证明 设 I 是不变量, $M = L^g \otimes (\det E^\vee)^{\frac{ng}{2}}$. 我们有整体映射 (9-2), 即 $I : S^nE^\vee \otimes L \to M$. 由假设条件,

$$\mu(M) = g(\mu(L) - n\mu(E)) < 0.$$

因此 $H^0(M) = 0$, 从而 $I(s) = 0$. ■

现在我们假设

$$s = \{(U_\alpha, f_\alpha(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}) \otimes e_\alpha)\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, S^nE^\vee \otimes L)$$

是零形式, 这里 $L = \{\ell_{\alpha\beta}\}$, $e_\alpha = \ell_{\alpha\beta} e_\beta$. 注意到 $f_\alpha(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2})$, $f_\beta(x_{\beta 1}, x_{\beta 2})$ 都是零形式, 因而由 Hilbert 零形式定理, 我们有

$$f_\alpha(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}) = g_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2})^{h_\alpha} f_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}), \quad f_\beta(x_{\beta 1}, x_{\beta 2}) = g_{\beta 1}(x_{\beta 1}, x_{\beta 2})^{h_\beta} f_{\beta 1}(x_{\beta 1}, x_{\beta 2}).$$

利用分解的唯一性可知, $h_\alpha = h_\beta := h$, $\deg f_{\alpha 1} = \deg f_{\beta 1} = n - h$ 以及 $g_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}) = t_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta 1}(x_{\beta 1}, x_{\beta 2})$, 这里 $t_{\alpha\beta}$ 是 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的非零全纯函数. 由此可得线丛 $T = \{t_{\alpha\beta}\}$.

设 $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ 是 T 的局部基表示, $\{(U_\alpha, z_\alpha^*)\}_\alpha$ 是 $T^\vee$ 的局部对偶基. 由上讨论, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上,

$$g_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}) \otimes z_\alpha^* = g_{\beta 1}(x_{\beta 1}, x_{\beta 2}) \otimes z_\beta^*.$$

这表明

$$g_1 := \{(U_\alpha, g_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}) \otimes z_\alpha^*)\}_{\alpha \in I} \in H^0(X, E^\vee \otimes T^\vee).$$

由式 (9-1), 我们有 $g_{\alpha 1}^h f_{\alpha 1} \otimes e_\alpha = g_{\beta 1}^h f_{\beta 1} \otimes e_\beta$, 从而 $t_{\alpha\beta}^h f_{\alpha 1} \otimes e_\alpha = f_{\beta 1} \otimes e_\beta$. 这就推出

$$f_{\alpha 1} \otimes e_\alpha \otimes z_\alpha^h = f_{\beta 1} \otimes e_\beta \otimes z_\beta^h.$$

因此

$$s_1 = \{(U_\alpha, f_{\alpha 1}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}))\} \in H^0(S^{n-h} E^\vee \otimes L \otimes T^h).$$

结合命题 9.2.2, 这就得到 Hilbert 零形式在向量丛上的推广.

命题 9.2.3 (**零形式**) *在命题 9.2.2 的条件下, 假设 $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L) \neq 0$, 则对其中每个非零截面 s, 都存在线丛 T, 正整数 $h > n/2$ 以及非零截面*

$$g_1 \in H^0(X, E^\vee \otimes T^{-1}), \quad s_1 \in H^0(X, S^{n-h} E^\vee \otimes L \otimes T^h).$$

注 9.2.1 若以 $E^\vee$ 代替 E, 上面的讨论也有对偶形式的叙述, 具体参见习题 9.3. ■

利用上述讨论, 我们可以得到秩二向量丛的半稳定性判则.

定理 9.2.2 *设 E 是秩二向量丛, 则以下条件彼此等价:*

(1) *E 不是半稳定的,*

(2) *存在整数 $n \geq 2$ 以及线丛 L, 使得 $\mu(L) < \mu(S^n E)$ 且 $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L) \neq 0$.*

(3) *存在整数 $n \geq 2$ 以及线丛 L, 使得 $\mu(L) > \mu(S^n E)$ 且 $H^0(X, S^n E \otimes L^\vee) \neq 0$.*

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 因为 E 不是半稳定的, 所以存在线丛 L_0 及非零态射 $E \to L_0$, 使得 $\mu(L_0) < \mu(E)$. 对任意正整数 n, 令 $L = L_0^n$, 则有非零态射 $S^n E \to L$. 因而 $H^0(X, S^n E^\vee \otimes L) \neq 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设存在线丛 L 及正整数 $n \geq 2$, 使得 $\mu(L) < \mu(S^n E)$, 且存在非零截面 $s \in H^0(X, S^n E^\vee \otimes L)$. 我们假设 n 是满足此条件的最小正整数. 由命题 9.2.3, 存在 $h > n/2$, 线丛 T 以及非零截面 g_1, s_1. 令 $n_1 = n - h < n$, $L_1 = L \otimes T^h$. 由 $s_1 \neq 0$ 可得 $H^0(X, S^{n_1} E^\vee \otimes L_1) \neq 0$. 由 $g_1 \neq 0$ 可得非零态射 $E \to T^{-1}$.

今假设 E 是半稳定的. 这就有 $\mu(E) \leq \mu(T^\vee) = -\mu(T)$. 于是

$$\mu(L_1) = \mu(L) + h\mu(T) \leq \mu(L) - h\mu(E) < \mu(S^{n_1} E).$$

若 $n_1 = 0$, 则上式等价于 $\deg L_1 < 0$, 这与 $H^0(X, L_1) \neq 0$ 矛盾! 若 $n_1 = 1$, 则 $H^0(X, E^\vee \otimes L_1) \neq 0$ 表明存在非零态射 $E \to L_1$, 从而 $\mu(E) \leq \mu(L_1)$. 这与上面的不等式矛盾! 因此 $n_1 \geq 2$. 这就与 n 的最小性矛盾! 因此 E 不是半稳定的.

注意到 $E^\vee$ 与 E 具有相同的稳定性, 因而可得 (3) 与 (1) 的等价性 (也可以利用习题 9.3 直接证明). ■

本章习题

习题 9.1 对共变量 $I=\sum\limits_{k=0}^{m}C_k\binom{m}{k}x_1^{m-k}x_2^k$, 证明:
(1) $\boldsymbol{D}C_0=\boldsymbol{\Delta}C_m=0$,
(2) $\boldsymbol{D}I=x_2\frac{\partial I}{\partial x_1}$,
(3) $\boldsymbol{\Delta}I=x_1\frac{\partial I}{\partial x_2}$,
(4) C_i 的权是 $p+i$.

习题 9.2 设 f 是 3 次二元型, 证明:
(1) $H(J(f))=-D(f)H(f)$, $D(J(f))=D(f)^3$, $J(J(f))=-D(f)^2f$.
(2) $D(f)=H(f)=0$ 当且仅当 $f=0$ 有三重根.

习题 9.3 设 L 是线丛, $n\geq 2$, 且满足斜率关系 $\mu(S^nE)<\mu(L)$, 证明:
(1) $H^0(X,S^nE\otimes L^{-1})$ 中的任意截面 s 都是零形式.
(2) 若 $s\neq 0$, 那么存在线丛 T 和整数 $h>n/2$, 以及非零截面

$$g_1\in H^0(X,E\otimes T^{-1}),\quad s_1\in H^0(X,S^{n-h}E\otimes L^{-1}\otimes T^h).$$

第十章 向量丛的模空间

10.1 秩 2 向量丛的模空间

本章习题

习题 10.1 设

第二部分

应用篇

第十一章　曲面上的线性系

以下假设 X 是光滑射影代数曲面.

11.1　Zariski 分解

定义 11.1.1　设 D 是曲面 X 上的除子. 如果对任何丰富除子 H, 都有 $DH \geq 0$, 我们就称 D 是伪有效的 (Pseudo-effective).

有效除子和丰富除子显然是伪有效的.

命题 11.1.1　(1) D 是伪有效的充分必要条件为 $DA \geq 0$, 这里 A 是任意 nef 除子.
(2) 如果 D 不是伪有效的, 那么对任意除子 L, 当 n 充分大时, 都有 $H^0(X, nD+L)=0$.

证明　(1) 充分性是显然的. 下面证明必要性. 设 $H_1 = nA + H$, $n \gg 0$. 此时 H_1 也是丰富的. 由假设条件, $DH_1 \geq 0$, 因而有 $DA = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{DH_1}{n} \geq 0$.

(2) 取丰富除子 H, 使得 $DH < 0$. 因此 $(nD+L)H < 0$. 这就迫使 $H^0(X, nD+L) = 0$. ■

在引入伪有效除子的 Zariski 分解之前, 我们需要一些准备工作.

引理 11.1.1　设 D 是伪有效除子, $C = \cup_{i=1}^r C_i$ 是负定曲线, $N = \sum\limits_{i=1}^r n_i C_i$. 如果 $(D-N)C_i \leq 0$ 对每个不可约分支 C_i 都成立, 那么 $D-N$ 也是伪有效的.

证明　任取丰富除子 H. 我们构造支集在 C 上的 $\mathbb{Q}$-除子 Z, 满足

$$ZC_i = -HC_i, \quad i = 1, \cdots, r.$$

由负定性, Z 存在且唯一, 并且 $Z \geq 0$. 由于 $(H+Z)C_i = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$, 所以 $H+Z$ 是 nef 的, 并且 $(H+Z)N = 0$. 由命题 11.1.1, 我们有 $D(H+Z) \geq 0$. 另一方面, 由假设条件, 我们也有 $(D-N)Z \leq 0$. 因此

$$(D-N)H = DH - NH = DH + NZ \geq -DZ + NZ = -(D-N)Z \geq 0.$$

由 H 的任意性即得结论. ■

引理 11.1.2　设 $C = \cup_{i=1}^r C_i$ 是半负定曲线, 其相交矩阵 $(C_i \cdot C_j)_{1\leq i,j\leq r}$ 有 t 个负特征值, 且 $C' = C_1 \cap \cdots \cap C_t$ 是负定的. 那么存在支集在 C' 上的 $\mathbb{Q}$-有效除子 $D_1, \cdots, D_{r-t}$, 满足

$$(D_j + C_{t+j})C_i = 0, \quad i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, r-t.$$

证明　令

$$V = \mathbb{Q}\langle C_1, \cdots, C_r\rangle, \quad V_1 = \mathbb{Q}\langle C_1, \cdots, C_t\rangle, \quad V_2 = \{D \in V | DD' = 0, \forall D' \in V_1\}.$$

由于 $C_1 + \cdots + C_t$ 负定, 所以 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. 另一方面, $\dim V_2 = r - t$. 因此 $V = V_1 \oplus V_2$. 请注意, 对任何 $D \in V_2$, $D^2 = 0$ (否则负特征值个数 $> t$). 这也推出 V_2 中任何两个元的相交数为零.

今对任何 C_{t+j}, 存在 $-D_j \in V_1$, $E_j \in V_2$, 满足 $C_{t+j} = -D_j + E_j$. 因此 $(D_j + C_{t+j})C_i = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$. 对任何 C_{t+k}, 我们有 $C_{t+k}E_j = -D_kE_j + E_kE_j = 0$. 因此 $D + C_j$ 与 C 的任何分支的相交数均为零. 由于 $D_jC_i = -C_{j+t}C_i \leq 0$ $(i = 1, \cdots, t)$, 所以 $D_j \geq 0$. ■

引理 11.1.3 设 D 是伪有效 $\mathbb{Q}$-除子, $C = C_1 + \cdots + C_r$ 是既约曲线, 满足 $DC_i \leq 0$. 如果存在 $t < r$ 使得, $DC_i < 0$ $(i = t + 1, \cdots, r)$ 并且 $C_1 + \cdots + C_t$ 是负定的, 那么 C 是负定的.

证明 先证明 C 是半负定. 若不然, 存在支集在 C 上的除子 Z, 满足 $Z^2 > 0$. 设 $Z = A - B$, 这里 $A, B \geq 0$ 且无公共分支. $Z^2 > 0$ 迫使 A^2, B^2 中有一个也大于 0. 因此我们不妨一开始就设 $Z \geq 0$. 由黎曼-洛赫定理可知 $h^0(X, nZ) = O(n^2)$. 因此 $|nZ|$ 诱导的线性系映射的像是曲面. 设 $|nZ| = |M| + F_n$, 这里 F_n 是固定部分, 于是 $M^2 > 0$. 因此, 我们不妨一开始就以 $M(= nZ - F)$ 代替 Z. 这样, 我们可以假定 Z 是 nef 的有效除子, 且 $Z^2 > 0$.

由假设条件, $DZ \leq 0$. 又因为 D 是伪有效的, 故由命题 11.1.1, $DZ \geq 0$. 这就推出 $DZ = 0$. 因为 $DC_i < 0$ (当 $i > t$ 时), 所以 Z 的支集只能在 $C_1 + \cdots + C_t$ 上, 从而由假设条件知 $Z^2 \leq 0$, 矛盾! 因此 C 是半负定的.

不失一般性, 我们可以假设 $(C_i \cdot C_j)_{1 \leq i,j \leq r}$ 中负特征值个数就是 t (若不然, 从 $C_{t+1}, \cdots, C_r$ 中挑元素添入到前面 r 个负定元中, 使得它们仍然负定). 如果 C 不是负定的, 那么存在有效 $\mathbb{Q}$-除子 D_j 同引理 11.1.2, 满足 $(D_j + C_{t+j})C_i = 0$ $(1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq r - t)$. 因此 $D_j + C_{t+j}$ 是 nef. 由假设条件, $D(D_j + C_{t+j}) \leq DC_j < 0$. 但是 D 是伪有效的, 根据命题 11.1.1, $D(D_j + C_{t+j}) \geq 0$, 矛盾! ■

推论 11.1.1 设 D 是伪有效的, 那么最多只有有限条既约不可约曲线 C 满足 $DC < 0$.

证明 假设存在 C 满足 $DC < 0$, 那么 $C^2 < 0$ (否则 C 是 nef, 从而 $DC \geq 0$). 因此由引理 11.1.3, 所有满足此条件的曲线的并是负定的, 因而这类曲线的个数不能超过 $\dim_{\mathbb{Q}} NS(X)$. ■

定理 11.1.1 (Zariski **分解** [Fuj79]) 设 D 是伪有效的, 那么 D 可以唯一分解为

$$D = P + N,$$

这里 P 是 nef 的 $\mathbb{Q}$-除子, N 是支集为负定曲线的有效 $\mathbb{Q}$-除子, 且其任意不可约分支 C 均满足 $PC = 0$.

证明 设 $C_1, \cdots, C_{r_1}$ 是所有满足 $DC_i < 0$ 的不可约曲线. 因此 $\cup_i C_i$ 是负定的, 故存在 $N_1 \in V\langle C_1, \cdots, C_{r_1}\rangle$, 使得 $N_1C_i = DC_i$ $(i = 1, \cdots, r_1)$, 从而 $N_1 \geq 0$. 令 $D_1 = D - N_1$. 于是 $D_1C_i = 0$. 由引理 11.1.1, D_1 是伪有效的. 若 D_1 是 nef, 那么令 $P = D_1, N = N_1$ 即可.

今假设 D_1 不是 nef. 那么类似地可构造 $N_2 \in V\langle C_{r_1+1}, \cdots, C_{r_2}\rangle$ 及 $D_2 = D_1 - N_2$. 此时我们有

$$D_1C_i = 0\ (i = 1, \cdots, r_1), \quad DC_j < 0\ (j = r_1 + 1, \cdots, r_2).$$

再次利用引理 11.1.3, 可知 $C_1 + \cdots + C_{r_2}$ 仍是负定曲线. 以此类推, 有限步后, D_n 是 nef, 记为 P, 并令 $N = N_1 + \cdots + N_n$. 于是 $D = P + N$.

对任何 $C \in N$, 不妨设 i 是最大的下标, 使得 $C \in N_i$. 那么

$$0 = D_iC = PC + N_{i+1}C + \cdots + N_nC \geq D_nC.$$

由于 P 是 nef, 故 $PC=0$.

最后我们证明唯一性. 设 $D=P'+N'$ 是另一个满足条件的分解. 对任何不可约分支 $C\in Supp(N)$,

$$(N'-N)C=PC-P'C=-P'C\le 0.$$

我们设 $N'=A+B$, 这里 $A,B\ge 0$ 无公共分支, $Supp(A)\cap Supp(N)=\emptyset$, $Supp(B)\subseteq Supp(N)$, 因此 $(B-N)C\le(N'-N)C\le 0$. 由 C 的任意性, $B-N\ge 0$, 从而 $N'\ge N$. 类似可证 $N\ge N'$, 因此 $N=N'$, $P=P'$. ■

引理 11.1.4　设 A 是曲面 X 上的除子, E 是支集在负定曲线上的有效除子. 如果对 E 中任何不可约分支 Γ, 都有 $A\Gamma=0$, 那么 $H^0(X,A)=H^0(X,A+E)$.

证明　不妨设 $|A+E|=|M|+Z$ 非空, 这里 Z 是其固定部分. 取最大的有效除子 F, 使得 $F\le E$ 且 $F\le Z$, 并令 $E'=E-F$, $Z'=Z-F$. 于是 $A+E'\equiv M+Z'$. 对 E' 的任何不可约分支 Γ,

$$E'\Gamma=A\Gamma+E'\Gamma=M\Gamma+Z'\Gamma\ge 0.$$

因而 $E'^2\ge 0$. 由 E' 的负定性, $E'=0$, 即 $E\le Z$. 因而 $|A+E|=|A|+E$. ■

推论 11.1.2　设 D 是伪有效除子, $D=P+N$ 是 Zariski 分解, 其中 N 是负定部分. 那么对充分可除的正整数 n, 我们有 $H^0(X,nD)=H^0(X,nP)$.

11.2　k-分离性判则

定义 11.2.1　设 $k\ge 0$, D 是除子. 如果 $|D|$ 满足以下条件, 则称它是 k-分离的 或 $(k-1)$-非常丰富:

(1) 对任何满足 $\deg\Delta=k$ 的零维子概型 Δ, 限制映射 $\rho_\Delta: H^0(\mathcal{O}_X(D))\to H^0(\mathcal{O}_\Delta(D))$ 是满射 $(k\ge 1)$.

(2) $H^1(\mathcal{O}_X(D))=0$ $(k=0)$.

上述定义中的 Δ 称为对 $|K_X+L|$ 给出独立条件, 或者称 Δ 被 $|K_X+L|$ 分离.

$|D|$ 是 k-分离 $(k\ge 1)$ 的等价于有正合列

$$0\longrightarrow H^0(\mathscr{I}_\Delta(D))\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D))\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\Delta(D))\longrightarrow 0.$$

因此 $|D|$ 的 k-分离性也等价于

$$h^0(X,D)-h^0(X,\mathscr{I}_\Delta(D))=h^0(\mathcal{O}_\Delta(D))=k.$$

定理 11.2.1 (**k-分离的向量丛判则**)　设 L 是给定的除子, $k\ge 1$, 那么以下条件彼此等价:

(1) 设 E 是秩 2 向量丛, $c_1(E)\equiv L$, $s\in H^0(E)$, $\dim Z(s)=0$, 则要么 $Z(s)=\emptyset$, 要么 $c_2(E)=\deg Z(s)\ge k+1$.

(2) 设 F_1, F_2 是两条无公共分支的曲线, $Z = F_1 \cap F_2$, $Z' \subseteq Z$ 满足 $\deg Z' \geq \deg Z - k$. 设 $F \in |F_1 + F_2 - L|$, 若 $Z' \subseteq F$, 则 $Z \subseteq F$.

(3) 设 E 是秩 2 向量丛, $s \in H^0(E)$, $\dim Z(s) = 0$, $Z' \subseteq Z(s)$ 满足$\deg Z' \geq \deg Z(s) - k$. 设 $F \in |\det E - L|$, 若 $Z' \subseteq F$, 则 $Z \subseteq F$.

(4) $|K_X + L|$ 是 k-分离的.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $\Delta = Z - Z \cap F$. 由定理 7.3.1, 存在 (E, s) 满足 $c_1(E) \equiv L,$, $c_2(E) = \deg \Delta$. 由 (1) 的假设条件, 要么 $\Delta = \emptyset$, 要么 $\deg \Delta \geq k + 1$.

如果 $Z \not\subseteq F$, 则 $\Delta \neq \emptyset$, 故 $\deg \Delta \geq k + 1$. 因此

$$\deg Z' \geq \deg Z - k = \deg \Delta + \deg Z \cap F - k \geq 1 + \deg Z \cap F \geq 1 + \deg Z',$$

矛盾! 故 $Z \subseteq F$.

(2) $\Longrightarrow$ (4) 假若 $|K_X + L|$ 不是 k-分离, 那么由定义, 可找零维子概型 Δ, 使得 $\deg \Delta = k$ 且限制映射

$$\rho_\Delta : H^0(\mathcal{O}_X(K_X + L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\Delta(K_X + L))$$

不是满射. 由正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathscr{I}_\Delta(K_X + L)) \longrightarrow H^0(K_X + L) &\xrightarrow{\rho_\Delta} H^0(\mathcal{O}_\Delta(K_X + L)) \\ &\longrightarrow H^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X + L)) \longrightarrow H^1(K_X + L) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

可知 $h^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X + L)) > h^1(K_X + L)$. 我们可以找到非空的子概型 $\Delta' \subseteq \Delta$, $\deg \Delta' \leq k$, 使得对任何 $\Delta'' \subsetneqq \Delta'$, 都有

$$h^1(\mathscr{I}_{\Delta'}(K_X + L)) > h^1(\mathscr{I}_{\Delta''}(K_X + L)) = h^1(K_X + L).$$

由定理 7.3.1, 存在曲线 F_1, F_2, F, 使得

$$\begin{cases} \Delta' = F_1 \cap F_2 - Z', \\ L \equiv F_1 + F_2 - F, \end{cases}$$

这里 $Z' = F_1 \cap F_2 \cap F$. $\deg Z' = \deg F_1 \cap F_2 - \deg \Delta' \geq \deg F_1 \cap F_2 - k$. 由假设条件, $F_1 \cap F_2 \subseteq F$, 即 $\Delta' = \emptyset$, 矛盾! 故 $|K_X + L|$ 是 k-分离.

(4) $\Longrightarrow$ (1) 因为 $|K_X + L|$ 是 k-分离, 所以 $h^1(\mathscr{I}_\Delta(K_X + L)) = h^1(K_X + L)$ 对任何满足 $\deg \Delta \leq k$ 的零维子概型 Δ 成立. 如果 $\deg Z(s) \leq k$, 则 $h^1(\mathscr{I}_{Z(s)}(K_X +_L)) = h^1(K_X + L)$. 这与定理 7.3.1 矛盾! 故 $\deg Z(s) \geq k + 1$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 由定理 7.3.1, 存在秩 2 向量丛 E', $s' \in H^0(E')$, $\dim Z(s') = 0$, $Z(s') = Z(s) - Z(s) \cap F$, $L \equiv c_1(E')$. 因此要么 $Z(s) \subseteq F$ (即 $Z(s') = 0$), 要么 $\deg Z(s) - \deg Z(s) \cap F \geq k + 1$.

如果 $Z' \subseteq Z \cap F$, 但 $Z(s) \not\subseteq F$, 那么

$$\deg Z' \geq \deg Z - k \geq 1 + \deg Z(s) \cap F \geq 1 + \deg Z',$$

矛盾! 故 $Z(s) \subseteq F$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) 令 $E = \mathcal{O}_X(F_1) \oplus \mathcal{O}_X(F_2)$, 则 $L \equiv c_1(E) - F$, $Z(s) = F_1 \cap F_2$. 设 $Z' \subseteq F_1 \cap F_2$, $\deg Z' \geq \deg F_1 \cap F_2 - k$, 且 $Z' \subseteq F$. 由假设条件, $Z(s) \subseteq F$, 即 $F_1 \cap F_2 \subseteq F$. ■

结合上述定理以及定理 7.3.1 可得如下结论.

推论 11.2.1 设 Δ 是零维子概型, L 是除子. 以下条件彼此等价:

(1) Δ 是没有对 $|K_X+L|$ 给出独立条件的极小概型.

(2) Δ 没有对 $|K_X+L|$ 给出独立条件, 且 Δ 的任何真子概型都对 $|K_X+L|$ 给出独立条件.

(3) 存在向量丛 E 以及 $s\in H^0(E)$, 满足 $c_1(E)\equiv L$ 及 $z(s)=\Delta$.

上面的讨论建立了线性系的 k-分离性判定与秩 2 向量丛存在性判定之间的关系. 如果我们能够结合秩 2 向量丛的 Bogomolov 不等式, 那么将会得到 k-分离性的数值判则.

命题 11.2.1 设 L 是 big 除子, Δ 是满足 $L^2>4\deg\Delta$ 零维子概型 (允许为空). 假设存在秩 2 向量从 E 以及 $s\in H^0(E)$, 满足 $c_1(E)\equiv L$, $Z(s)=\Delta$, 并且 $E\not\cong\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X(L)$. 那么存在非零有效除子 D 经过 Δ, 并且满足

(1) $DL-\deg\Delta\le D^2$.

(2) $DA\le\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4\deg\Delta})$, 对任何 nef 除子 A 成立.

(3) 若 $A^2>0$, 那么 $D^2<\frac{\ell}{2}DA$, 这里 $\ell=\frac{AL}{A^2}>0$.

进一步, 如果 L 是伪有效的, $L=P+N$ 是 Zariski 分解, 其中 P 是 nef 的 $\mathbb{Q}$-除子满足 $PN=0$, N 是支集在负定曲线上的有效 $\mathbb{Q}$-除子, 那么有
$$DL-\deg\Delta\le D^2<\frac{1}{2}DP<\frac{1}{4}(-N^2)+\deg\Delta.$$
特别地, L 是 nef 时, 必有 $\Delta\ne\emptyset$, 且
$$DL-\deg\Delta\le D^2<\frac{1}{2}DL<\deg\Delta.$$

证明 由于 $L^2>4\deg\Delta$, 故由推论 7.2.1, 存在极大子线丛 $\mathcal{O}_X(M)\subseteq E$, 满足
$$(2M-L)^2\ge L^2-4\deg\Delta,$$
$$(2M-L)A\ge\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4\deg\Delta},$$
这里 A 是任意 nef 除子.

若取 A 为丰富除子, 由于 L 是 big 除子, 所以 $LA>0$, 故 $MA>0$, 从而 $\mathcal{O}_X(M)$ 与 $\mathcal{O}_X$ 是 E 的两个不同的极大子线丛. 由引理 7.1.1, 存在有效除子 D 经过 Δ, 满足 $D\equiv L-M$. 由 E 的假设条件, $D\ne 0$ (引理 7.1.1). 因此
$$(2D-L)^2=(2M-L)^2\ge L^2-4\deg\Delta,$$
即 $D^2\ge DL-\deg\Delta$. 同样地, 对任何不数值等价于零的 nef 除子,
$$DA\le\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4\deg\Delta})<\frac{1}{2}AL.$$

以下假设 $A^2>0$. 由 Hodge 指标定理, $(AL)^2\ge A^2L^2>0$, 所以 $\ell>0$. 若 $DA=0$, 则 $D^2\le 0$. 由于 $D\ne 0$, 所以 $D^2<0=\frac{\ell}{2}DA$. 若 $DA>0$, 则
$$D^2A^2\le(DA)^2<\frac{1}{2}(LA)(DA),$$

故 $D^2 < \frac{\ell}{2}DA$.

假设 L 是伪有效的. 取 $A = P$. 此时 $\ell = 1$, $P^2 = L^2 - N^2 > 0$, 因而 $D^2 < \frac{1}{2}DP$,

$$PL - \sqrt{P^2}\sqrt{L^2 - 4\deg\Delta} = \frac{P^2(-N^2 + 4\deg\Delta)}{P^2 + \sqrt{P^2}\sqrt{L^2 - 4\deg\Delta}} < -N^2 + 4\deg\Delta.$$

因此 $DP < \frac{1}{2}(-N^2) + 2\deg\Delta$.

当 L 是 nef 除子时, 我们只需要证明 $\Delta \neq \emptyset$. 若不然, 取 $A = L$, 得

$$0 \leq DL \leq \frac{1}{2}(L^2 - \sqrt{L^2}\sqrt{L^2 - 4\deg\Delta}) = 0.$$

因此 $DL = 0$. 由于 $L^2 > 0$ 且 $D \not\sim 0$, 所以 $D^2 < 0$. 但另一方面, $D^2 \geq DL - \deg\Delta = 0$, 矛盾! 故 $\Delta \neq \emptyset$. ■

综合上述讨论, 我们得到

定理 11.2.2 (k-**分离性的数值判则**) 设 Δ 是不能被 $|K_X + L|$ 分离的极小零维子概型, L 是满足 $L^2 > 4\deg\Delta$ 的 big 除子. 那么存在非零有效除子 D 经过 Δ, 使得对任意不数值等价于零的 nef 除子 A, 有

(1) $DL - \deg\Delta \leq D^2$,

(2) $DA \leq \frac{1}{2}(AL - \sqrt{A^2}\sqrt{L^2 - 4\deg\Delta}) < \frac{1}{2}AL$.

(3) 若 $A^2 > 0$, 那么 $D^2 < \frac{\ell}{2}DA$, 这里 $\ell = \frac{AL}{A^2} > 0$.

特别地, 如果 L 是 nef 的, 那么 $\Delta \neq \emptyset$ 且

$$DL - \deg\Delta \leq D^2 < \frac{1}{2}DL < \deg\Delta.$$

作为一个经典的应用, 我们就得到著名的 Rieder 方法.

定理 11.2.3 (Rieder **方法**) 设 L 是 nef 除子.

(1) 如果 $L^2 \geq 5$, p 是 $|K_X + L|$ 的基点, 那么存在经过 p 的曲线 $D > 0$, 使得

$$\begin{cases} DL = 0, \\ D^2 = -1. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} DL = 1, \\ D^2 = 0. \end{cases}$$

(2) 如果 $L^2 \geq 9$, $|K_X + L|$ 不能分离 $\Delta = p + q$, 那么存在经过 Δ 的曲线 $D > 0$, 使得

$$\begin{cases} DL = 0, \\ D^2 = -1, -2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} DL = 1, \\ D^2 = -1, 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} DL = 2, \\ D^2 = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} DL = 3, \\ D^2 = 1 (L \sim 3D). \end{cases}$$

推论 11.2.2 设 L 是 nef 除子, $L^2 \geq 10$, φ 是由完全线性系 $|K_X +_L|$ 诱导的映射. 如果 φ 不是双有理的, 则 X 包含一个无基点的线束 D', 使得 $1 \leq LD' \leq 2$.

证明 由定理 11.2.3, 对任何不能被 φ 区分的次数为 2 的零维子概型 Δ, 都有曲线 D 经过 Δ 且满足定理 11.2.3 的条件. 由于 φ 不是双有理, 因而这样的 D 在某个代数簇中移动. 设 D' 是 D 的移动部分. 因为 $LD' \leq LD \leq 2$, 故由 Hodge 指标定理推知 $D'^2 = 0$, $LD' > 0$. 因而 $LD' = 1, 2$. ■

定理 11.2.4 (Sakai **消失定理**[Sak90]) 假设 L 是光滑曲面 X 上的 big 除子, 且 $L^2>0$. 如果 $H^1(X,\mathcal{O}_X(-L))\neq 0$, 那么存在非零有效除子 D, 使得 $L-2D$ 是 big 除子且 $(L-D)D\leq 0$.

证明 因为 $H^1(X,\mathcal{O}_X(-L))\neq 0$, 所以存在不分裂的秩二向量丛 E, 满足 $c_1(E)=L$, $c_2(E)=0$. 因为 $L^2=c_1(E)^2>4c_2(E)=0$, 所以由命题 11.2.1, 存在非零有效除子 D 满足 $DL\leq D^2$, $(L-2D)^2\geq L^2>0$ 并且 $(L-2D)$ 是伪有效的. 因此 $L-2D$ 是 big 的. ■

定义 11.2.2 设 L 是曲面 X 上的线丛, $\varphi_{|L|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim|L|}$ 是 $|L|$ 诱导的线性系映射. 如果 $|L|$ 满足以下诸条件, 则称 $\varphi_{|L|}$ 是 C 同构:

(1) $|L|$ 既无固定部分亦无基点 (因而 φ_L 是态射);

(2) $\Sigma := \mathrm{Im}\varphi_L$ 是正规簇, 并且只有有限个 ADE-奇点;

(3) $\varphi_L: X\to\Sigma$ 是极小解消.

作为 Reider 方法的应用, 我们考察一般型极小曲面的多重典范映射. 我们将改进 Bombirei [Bom73] 的如下经典结果.

定理 11.2.5 (Bombieri) 设 X 是一般型极小曲面, $\varphi_n := \varphi_{|nK_X|}$ 是多重典范映射, 那么

(1) 当 $n\geq 5$ 时, φ_n 是 C 同构;

(2) 当 $K_X^2\geq 2$ 时, φ_4 是 C 同构;

(3) 当 $K_X^2\geq 3$ 时, φ_3 是 C 同构; 当 $K_X^2=2$ 时, φ_3 是态射;

(4) 当 $K_X^2\geq 5$ 时, φ_2 是态射;

(5) 当 $K_X^2\geq 10$ 时, φ_2 是双有理当且仅当 X 不是亏格 2 纤维化.

证明 在定理 11.2.3 中取 $L=(n-1)K_X$ $(n\geq 3)$. 当 $L^2\geq 5$ 时, 定理 11.2.3 中的 D 不存在 (否则 D^2+DK_X 不是偶数), 故 φ_n 是态射. 对 $L=K_X$ 且 $K_X^2\geq 5$ 的情形, 类似可证 φ_2 也是态射.

当 $L^2\geq 10$ 时, 定理 11.2.3 中的 D 只能是 (-2)-曲线, 因而 φ_m 是 C 同构. 这就证明了 (1)(2)(3)(4).

下面证 (5). 取 $L=K_X$, 设 $K_X^2\geq 10$. 如果 φ_2 不是双有理的, 那么由推论 11.2.2, X 上存在无基点线束 F, 使得 $FK_X=1,2$. 注意到 $F^2=0$, 故 $FK_X=2$, 即 X 有亏格 2 曲线束. 反过来, 假设 X 上有亏格 2 纤维化, 那么由于 $\mathcal{O}_F(2K_S)=\mathcal{O}_F(2K_F)$ 并且 $\varphi_2|_F$ 是 $2:1$ 映射, 所以 $|2K_X|$ 不是双有理的. ■

11.3 多重线性系

设 A 是 nef,big 除子, B 是给定除子. 我们考虑 $|nA+B|$ 的 k-分离性.

定义 11.3.1 (1) 令

$$\mathcal{B}(A,B)=\frac{((K_X-B)A+2)^2-A^2(K_X-B)^2}{4A^2},$$

以及 $\beta(A,B)=[\mathcal{B}(A,B)]$.

(2) 我们定义 $|nA+B|$ 的 Artin 指数:

$$\alpha(A,B)=\begin{cases}+\infty, & \text{如果 } A \text{ 是丰富的},\\ \min\limits_{DA=0,D>0}\{BD-K_XD-D^2\}, & \text{如果 } A \text{ 不是丰富的}.\end{cases}$$

(3) 定义 A 的例外曲线集

$$E(A)=\{C\mid C \text{ 既约不可约且 } CA=0\}.$$

定理 11.3.1 设 Δ 是不能被 $|nA+B|$ 分离的极小子概型. 如果 n 满足以下条件之一, 那么存在曲线 $D>0$ 经过 Δ, 满足

$$\begin{cases}BD-K_XD-D^2\le\deg\Delta,\\ DA=0.\end{cases}$$

(1) $n\ge\deg\Delta+\beta(A,B)+1$;

(2) $\Delta=\emptyset$, $n=\mathcal{B}(A,B)$, $B\sim K_X+\gamma A$, $\gamma\in\mathbb{Q}$.

证明 取 $L=nA+B-K_X$, $k=\deg\Delta$, $h=(A(T-K_X))^2-A^2(T-K_X)^2$. 由 Hodge 指标定理, $h\ge 0$. 设

$$g(n):=L^2-4k=(A^2)n^2+2((B-K_X)A)n+((B-K_X)^2-4k).$$

$g(n)=0$ 的交大根是

$$n_k=\frac{(K_X-B)A+\sqrt{h+4kA^2}}{A^2}.$$

注意

$$k+\mathcal{B}(A,B)-n_k=\frac{1}{A^2}(1-\frac{1}{2}\sqrt{h+4kA^2})^2\ge 0.$$

因此当 $n>k+\mathcal{B}\ge n_k$ 时, $L^2>4k$.

类似地, 考虑二次函数

$$f(n)=n^2-(AL)n+(\frac{h}{4}+kA^2).$$

$f(n)=0$ 的较小根 $n'_k=\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4k})$. 由于 $f(0)\ge 0$, $f(1)=A^2(k+\mathcal{B}(A,B)-n)<0$, 故 $0\le n'_k<1$, 即

$$0\le\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4k})<1.$$

当 n 满足条件 (2) 时, $k=h=0$,

$$n=\mathcal{B}(A,B)=\frac{(K_X-B)A+1}{A^2}>n_0=\frac{A(K_X-B)}{A^2}.$$

此外, $n'_0=0$ ($f(0)=f(1)=0$). 因此也有 $L^2>4k$, $0\le\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4k})<1$.

结合定理 11.2.2, 存在除子 $D>0$, 满足

(1) $DA\le\frac{1}{2}(AL-\sqrt{A^2}\sqrt{L^2-4\deg\Delta})<1$, 即 $DA=0$.

(2) $DB - DK_X = DL \leq D^2 + \deg\Delta$. ■

推论 11.3.1 如果 $H^1(nA+B) \neq 0$, 那么当 $n > \mathcal{B}(A,B)$ 或者 $n = \mathcal{B}(A,B)$ (此时 $B \sim K_X + \gamma A$, $\gamma \in \mathbb{Q}$) 时, 存在曲线 $D > 0$, 满足

$$\begin{cases} BD - D^2 - K_X D \leq 0, \\ DA = 0. \end{cases}$$

推论 11.3.2 令 $k = \min\{\alpha(A,B)-1, n-\beta(A,B)-1\}$. 如果 $k \geq 0$, 那么 $|nA+B|$ 是 k-分离的.

推论 11.3.3 设 H 是丰富除子, $\beta = \beta(H,B)$. 当 $n \geq \beta+1$ 时, $|nH+B|$ 是 $(n-\beta-1)$-分离的. 特别地,

(1) 当 $n \geq \beta+1$ 时, $H^1(nH+B) = H^2(nH+B) = 0$.

(2) 当 $n \geq \beta+2$ 时, $|nH+B|$ 无基点.

(3) 当 $n \geq \beta+3$ 时, $|nH+B|$ 是非常丰富的.

如果进一步取 $B = K_X$, 我们就证明了曲面情形著名的Fujita 猜想.

定理 11.3.2 设 H 是丰富除子, 那么

(1) 当 $n \geq 3$ 时, $|K_X + nH|$ 无基点.

(2) 当 $n \geq 4$ 时, $|K_X + nH|$ 非常丰富.

(3) 如果 $H^2 > 1$, 那么 $|K_X + 2H|$ 无基点, $|K_X + 3H|$ 非常丰富.

推论 11.3.4 设 A 是 nef,big 除子且 $|A|$ 无固定部分, $\dim|A| \geq 2$, 则当 $n \geq \beta(A,0)+2$ 时, $|nA|$ 无基点.

证明 如果 $\alpha(A,0) \geq 2$, 则由推论 11.3.2, $|nA|$ 无基点. 不妨设 $\alpha(A,0) \leq 1$. 假设 $|nA|$ 有基点 p, 此时存在曲线 D 经过 p, 且满足 $-K_X D - D^2 \leq 1$. 因为 $|nA|$ 没有固定部分, 故存在不含 D 中任何分支的曲线 $C \in |nA|$. 这样, $DC = nDA = 0$, 但 $p \in C \cap D$, 矛盾! ■

本章习题

习题 11.1 假设 $K_X \equiv_{num} 0$, H 是丰富除子, 证明: $|2H|$ 无基点, $|3H|$ 非常丰富.

习题 11.2 设 X 是一般型曲面, $n \in \mathbb{Z}$ 且 $n \neq 0, 1$, 证明: X 是极小的当且仅当 $h^1(X, nK_X) = 0$. (提示: 设 $\sigma: X \to X'$ 收缩 (-1)-曲线, 证明 $h^1(X, nK_X) > h^1(X, nK_{X'})$.)

习题 11.3 设 X 是一般型极小曲面, $n \geq 1$, 证明:
(1) $D \in |nK_X|$ 是 1-连通的;
(2) 除了 $n=2$, $K_X^2 = 1$ 的情形, D 也是 2-连通.
(提示: 设 $D = D_1 + D_2$, $D_1, D_2 \geq 0$. 先讨论 $K_X D_1 = 0$ 的情形; 再讨论 $K_X D_i \geq 1$ $(i=1,2)$ 的情形. 后一情形中, 证明 $D_1 D_2 \geq n - \frac{1}{K^2}$.)

习题 11.4 设 X 是一般型极小曲面, $K_X^2 = 1$, $p_g = 2$, 证明: 多重典范映射 φ_3, φ_4 都不是双有理的.

习题 11.5 设 X 是一般型极小曲面, $K_X^2 = 2$, $p_g = 3$, 证明:
(1) 多重典范映射 φ_n 是态射 $(n \geq 1)$, $\varphi_1 : X \to \mathbb{P}^2$ 是一般二次覆盖.
(2) φ_3 是二次态射.

习题 11.6 设 A 是 nef 除子, 满足 $A^2 = 0$ 但 $A \not\equiv_{num} 0$, B 是满足 $(B - K_X)A > 0$ 的除子, Δ 是不被 $|nA + B|$ 分离的极小子概型. 设

$$n > \frac{4\deg\Delta - (B - K_X)^2}{2(B - K_X)A},$$

证明: 存在曲线 $D > 0$ 经过 Δ, 使得
(1) $nDA \leq \deg\Delta - (BD - K_XD - D^2)$,
(2) $0 \leq DA < \frac{1}{2}(B - K_X)A$.

第十二章　向量丛与叶状结构

在这一章中, 我们将讨论微分方程中的叶化结构与向量丛的关系. 以下如无特别声明, X 均假设为光滑复射影曲面. 当然, 实际上, 许多概念和结论并不需要对 X 有如此强的条件. 具体内容可以参看 [Bru15].

12.1　基本概念

12.1.1　叶状结构的定义

设 T_X 是 X 的全纯切丛, Ω_X 是余切丛. $L^{-1} \subseteq T_X$ 是 T_X 的极大子线丛, $s \in H^0(X, T_X \otimes L)$ 是全纯截面. 我们将 s 称为 X 上的*叶状结构* (Foliation), 通常记为 $\mathcal{F}$. L^{-1} 称为叶状结构 $\mathcal{F}$ 的*切丛* (Tangent bundle), 记为 $T_{\mathcal{F}}$. L 称为 $\mathcal{F}$ 的*余切丛* (Cotangent bundle), 记为 $T_{\mathcal{F}}^{\vee}$. 今后它也经常被称为 $\mathcal{F}$ 的*典范丛* (Canonical bundle), 记作 $K_{\mathcal{F}}$.

叶状结构也可以从局部上来描述. 考虑 X 的仿射开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, U_α 的局部坐标为 (x_α, y_α), $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ 是 U_α 上的全纯向量场 (只有孤立零点). s_α 在局部上表示为

$$s_\alpha = \left(A(x_\alpha, y_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B(x_\alpha, y_\alpha) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \otimes \ell_\alpha,$$

这里 ℓ_α 是 $T_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 的局部基.

有时我们用

$$v_\alpha = A(x_\alpha, y_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B(x_\alpha, y_\alpha) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \tag{12-1}$$

简单地代替 s_α. 此时, $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 在交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上满足转换关系

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v_\beta,$$

这里 $g_{\alpha\beta}$ 是线丛 $T_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 的转移函数 (满足 $\ell_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \ell_\beta$).

由于 $\mathcal{O}_X$ 是 $T_X \otimes L$ 的极大子线丛 (由 s 诱导), 所以 s 的零点集 $Z(s)$ 是零维子概型. 我们通常记为 $Sing(\mathcal{F})$, 称为 $\mathcal{F}$ 的*奇点集* (Singular set). 从局部上看, 即

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_\alpha = Z(s_\alpha).$$

奇点集以外的点称为 $\mathcal{F}$ 的*正则点* (Regular point).

一个叶状结构 $\mathcal{F}$ 给出了正合列

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \longrightarrow T_X \longrightarrow I_{Z(s)}(N_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0,$$

这里 $I_{Z(s)}$ 是 $Sing(\mathcal{F})$ 上的理想层, $N_{\mathcal{F}}$ 是线丛, 称为 $\mathcal{F}$ 的*法丛* (Normal bundle) . $N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 称为 $\mathcal{F}$ 的*余法丛*. 对上述正合列做对偶, 即得

$$0 \longrightarrow N_{\mathcal{F}}^{\vee} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow I_Z(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0. \tag{12-2}$$

由陈数公式, 我们有

$$K_X = K_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}}^{\vee}. \tag{12-3}$$

通过上面的正合列, $\mathcal{F}$ 也可以对偶地理解为某个 1-形式截面

$$\omega = \{\omega_\alpha \otimes e_\alpha\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, \Omega_X \otimes N_{\mathcal{F}}),$$

这里 e_α 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的局部基,

$$\omega_\alpha = B(x_\alpha, y_\alpha)dx_\alpha - A(x_\alpha, y_\alpha)dy_\alpha. \tag{12-4}$$

注 12.1.1　设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数 $(e_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} e_\beta)$. 我们可以把 $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 看成 $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 的一组基. $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 视为 Ω_X 的子层. ■

本节最后, 我们讨论同一个曲面上具有两个不同叶状结构的情形. 设 X 是光滑代数曲面, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是两个不同的叶状结构. 设

$$\omega_\alpha = A_\alpha dx_\alpha + B_\alpha dy_\alpha, \quad \omega'_\alpha = A'_\alpha dx_\alpha + B'_\alpha dy_\alpha$$

分别是 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 对应的 1-形式. 我们可以定义有效除子

$$D = \left\{A_\alpha B'_\alpha - A'_\alpha B_\alpha = 0\right\}.$$

D 被称为*相切除子* (Tangency divisor), 它有明确的几何意义: 对 $p \in D$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 在 p 处不是横截交. 根据引理 7.1.1 及其证明, 实际上我们有

命题 12.1.1 ([Bru97b], **引理** 4)　$\mathcal{O}_X(D) = N_{\mathcal{F}} \otimes K_{\mathcal{G}} = N_{\mathcal{G}} \otimes K_{\mathcal{F}}$.

注 12.1.2　D 实际上可以直接从引理 7.1.1 得到. ■

12.1.2　叶状结构的经典例子

下面两个例子是最常见的叶状结构.

例 12.1.1 (**纤维化**)　设 $f: X \to B$ 是代数曲面纤维化. 令

$$D(f) := \sum_F (F - F_{\mathrm{red}}),$$

这里 F 跑遍所有奇异纤维, F_{red} 是 F 的既约部分. 我们有叶状结构

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{F}} &= K_{X/B} \otimes \mathcal{O}_X(-D(f)), \\ N_{\mathcal{F}} &= f^*T_B \otimes \mathcal{O}_X(-D(f)). \end{aligned}$$

它来自于微分场

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

为了让奇点集是零维的, 还需要除以某个公共因子, 这个公共因子对应了除子 $D(f)$.

特别地, 当 f 是椭圆纤维化时,

$$K_{\mathcal{F}} = f^*(f_*\omega_{X/B}) \otimes \mathcal{O}_X(\sum_F (F_{\mathrm{red}} - F_{\mathrm{prime}})),$$

这里 $F_{\mathrm{prime}} = \frac{1}{m}F$, m 是 F 中分支重数的最大公因子. ■

例 12.1.2 (**射影平面上的叶状结构**)　设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构. 考虑标准投影

$$\pi: \mathbb{C}^3 - \{0\} \to \mathbb{P}^2, \quad (X_0, X_1, X_2) \to [X_0, X_1, X_2] = (1, x_1, x_2).$$

那么 $\mathcal{F}$ 对应的微分场拉回到 $\mathbb{C}^3-\{0\}$ 上, 可写为

$$\omega=\sum_{i=0}^{2}A_i(X_0,X_1,X_2)dX_i,$$

这里 A_i 都是 ν 次齐次多项式, 没有公共因子且满足 $\sum\limits_{i=0}^{2}X_iA_i=0$. 我们定义 $\deg\omega:=\nu$. $\mathcal{F}$ 对应的微分场在仿射坐标卡上可写为

$$\begin{aligned}\omega_0 &:= A_1(1,x_1,x_2)dx_1+A_2(1,x_1,x_2)dx_2,\\ \omega_1 &:= A_0(y_0,1,y_2)dy_0+A_2(y_0,1,y_2)dy_2,\\ \omega_2 &:= A_0(z_0,z_1,1)dz_0+A_1(z_0,z_1,1)dz_1.\end{aligned}$$

计算转移函数

$$\omega_i=\left(\frac{X_j}{X_i}\right)^{\nu+1}\omega_j.$$

因此 $N_{\mathcal{F}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\nu+1)$, 从而 $K_{\mathcal{F}}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\nu-2)$. 我们定义 $\mathcal{F}$ 的次数(Degree)为 $\deg\mathcal{F}:=\nu-1$.

ω 在仿射坐标卡上也可以写成如下形式 (参见[GMOB89])

$$(P(x,y)+xR(x,y))\frac{\partial}{\partial x}+(Q(x,y)+yR(x,y))\frac{\partial}{\partial y}\in H^0(X,T_X(d-1)),\tag{12-5}$$

这里 $d=\deg\mathcal{F}$, R 是 d 次齐次多项式, P,Q 是次数不超过 d 的多项式.当 $\deg\mathcal{F}=0$ 时, 通过选取合适的坐标, $\mathcal{F}$ 可以写为标准形式

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

我们可以直接将式 (12-5)延拓到无穷远直线 L_∞ 上, 即考虑坐标变换

$$x=\frac{1}{v},\quad y=\frac{u}{v}.$$

于是 $\mathcal{F}$ 在无穷远直线 $v=0$ 附近表达为

$$\left(v^dQ\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)-uv^dP\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}-\left(v^{d+1}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)+R(1,u)\right)\frac{\partial}{\partial v}.$$

类似地, 我们也可以给出有理曲面上的叶状结构表达式 (习题 12.21). ■

此外, 我们可以通过对曲面光滑点的爆发, 从已知的叶状结构诱导出新的叶状结构. 这是研究叶状结构的一种常用方法.

例 12.1.3 (通过爆发得到的叶状结构) 设 $p\in X$, $\sigma:(\widetilde{X},E)\to(X,p)$ 是关于 p 点的爆发, E 是例外曲线. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构. 我们希望这个结构能够搬到 $\widetilde{X}$ 上. 考虑拉回 $\sigma^*\omega:=\{\sigma^*\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 但此时 $\sigma^*\omega$ 的零点集可能包含 E. 不妨设 $l(p)=\mathrm{ord}_E\sigma^*\omega$. 从上述拉回中去掉 $l(p)E$ 后, 就可构造出 $\widetilde{X}$ 上的叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\tilde{\omega}\in H^0\left(\widetilde{X},\Omega_{\widetilde{X}}\otimes\sigma^*N_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-l(p)E)\right).$$

此时

$$N_{\widetilde{\mathcal{F}}}=\sigma^*N_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-l(p)E),\quad K_{\widetilde{\mathcal{F}}}=\sigma^*K_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{X}}((1-l(p))E).\tag{12-6}$$

因此, 如果从切丛的角度看, 相当于从拉回 $\sigma^*v = \{\sigma^*v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中去除 $(l(p)-1)E$ 得到 $\widetilde{\mathcal{F}}$. 今后为了方便, 我们也常常将 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 记为 $\sigma^*\mathcal{F}$. ■

例 12.1.4 (Riccati **叶状结构**) 设 $\varphi : X \to C$ 是一个直纹面 (未必相对极小), $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 使得 $\mathcal{F}$ 与 φ 的一般纤维横截相交. 我们称这样的 $\mathcal{F}$ 为 Riccati *叶状结构*. 有时也说 $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的, 或 φ 适配于 $\mathcal{F}$.

由 $\mathcal{F}$ 的横截性, $\mathcal{F}$ 限制在一般纤维 F 上, 自然诱导了 F 的法丛 $\mathcal{O}_F(F)$. 局部上看, 就是把 $\{v_\alpha\}$ 理解成法丛的基 (横截性保证了基的非退化性), 它们满足关系 $v_\alpha = g_{\alpha\beta}v_\beta$. 因此 F 的法丛同构于 $T_{\mathcal{F}}|_F$. 这就推出 $T_{\mathcal{F}}F = 0$, 即 $K_{\mathcal{F}}F = 0$. 因而 $N_{\mathcal{F}}F = 2$.

不妨假设 φ 是相对极小的 (即几何直纹面). 设 F_0 是 φ 的一条纤维, 它不是 $\mathcal{F}$-横截的. 考虑 F 的管状邻域 $\Delta\times\mathbb{P}^1$, 这里 Δ 是圆盘, F 是其圆心的拉回, (z,w) 是局部坐标. 设 $p=(0,0)$ 是 $\mathcal{F}$ 的奇点. 后面将证明 $\mathcal{F}$ 可在 $\Delta\times\mathbb{P}^1$ 上写为

$$\omega = (a(z)w^2 + b(z)w + zc(z))dz + zd(z)dw, \tag{12-7}$$

这里 a,b,c,d 皆为 Δ 上的全纯函数. $\mathcal{F}$ 在 $w=\infty$ 处的表达式可以由坐标变换 $w=\frac{1}{u}$ 得到, 即

$$\omega = (a(z) + b(z)u + zc(z)u^2)dz - zd(z)du.$$

(见例 12.2.12 的讨论.) ■

例 12.1.5 (**湍流叶状结构**) 设 $\varphi : X \to C$ 是椭圆纤维化 (未必相对极小), $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 使得 $\mathcal{F}$ 与 φ 的一般纤维横截相交. 我们称这样的 $\mathcal{F}$ 为*湍流叶状结构* (Turbulent Foliation). 与 Riccati 叶状结构类似的讨论, 此时 $K_{\mathcal{F}}F = 0$. 反过来, 若一个叶状结构 $\mathcal{G}$ 满足 $K_{\mathcal{G}}F = 0$, 则 $\mathcal{G}$ 要么是湍流叶状结构, 要么与 φ 一致. ■

例 12.1.6 (**非常特殊叶状结构** [Bru15]) 考虑 $X=\mathbb{P}^2$ 上的群作用

$$G : [X,Y,Z] \to [Z,X,Y]$$

以及线性叶状结构 $\mathcal{L}$

$$v = \lambda_1 x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 $(x,y) = (\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z})$ 是仿射坐标 ($\mathcal{L}$ 可以通过齐次化延拓到整个平面上). G 在 $\mathcal{L}$ 上的诱导作用为

$$Gv = \lambda_2 x\frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2-\lambda_1)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

如果 $\mathcal{L}$ 能保持 $v\wedge Gv = 0$ 处处成立, 我们就说 $\mathcal{L}$ 是 G-不变的. 由直接计算可知, G-不变的充要条件是 $\lambda_1/\lambda_2 = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$. 因此 G 不变的叶状结构 L 即为

$$x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})y\frac{\partial}{\partial y}.$$

实际上这两种叶状结构只相差一个坐标变换 $(x,y)\to(y,x)$. 从这个角度说, 它是唯一的.

现在考虑商簇 $Y_0 = \mathbb{P}^2/G$. G 在 $\mathbb{P}^2$ 上有三个不动点

$$q_1 = [1,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})],\quad q_2 = [1,\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}),\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})],\quad q_3 = [1,1,1].$$

它们对应了 Y_0 上的三个 A_2 型有理奇点 Q_1, Q_2, Q_3. 考虑它们的极小解消 $\rho : Y \to Y_0$, 例外集 $\rho^{-1}(Q_i) = D_i + E_i$ 是两条 (-2)-曲线组成的链. 另一方面, $\mathcal{L}$ 有三个奇点

$$p_1 = [0, 0, 1], \quad p_2 = [1, 0, 0], \quad p_3 = [0, 1, 0].$$

它们都映到 Y 上一点 P. 过 p_i 中两点的直线共有三条, 它们也都映到 Y 中的曲线 C. $C^2 = 3$ 且有唯一结点 P.

$\mathcal{L}$ 自然诱导了 Y_0 上的叶状结构 $\mathcal{F}_0$, 拉回到 Y 上, 则得叶状结构 $\mathcal{F}$, 称之为*非常特殊叶状结构* (Very special foliation). 根据 [Per05] 的计算结果, 非常叶状结构双有理于平面上的如下二次叶状结构

$$\omega = X_1(X_0X_1 + X_1X_2 - 2X_2^2)dX_0 + X_0(2X_1X_2 - X_2^2 - X_0X_1)dX_1 + 3X_1X_0(X_2 - X_1)dX_2. \quad (12\text{-}8)$$

群作用诱导的三次覆盖双有理于如下三次有理映射

$$\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [L_0^3, L_0L_1L_2, L_2^3],$$

这里 $L_i = X_0 + \lambda^i X_1 + \lambda^{-i} X_2$, $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. ■

例 12.1.7 (Kronecker 叶状结构) 设 $X = \mathbb{C}^2 / \bigwedge$ 是 Abel 曲面. 此时 $T_X \cong \Omega_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. 因此存在两个整体的全纯切向量场 v_1, v_2, 它们处处线性无关. 任何整体全纯切向量场都可以写成 $c_1v_1 + c_2v_2$ $(c_i \in \mathbb{C})$. 这样的叶状结构也可以看成由 $\mathbb{C}^2$ 上具有相同斜率 θ 的直线诱导 (取适当的 v_1, v_2 可使 $\theta = \frac{c_1}{c_2}$). 当 θ 是有理数时, 这些直线在 X 上的像是椭圆曲线, 因而 $\mathcal{F}$ 由椭圆纤维从诱导. 当 θ 不是有理数时, 这些直线的投影像不是 X 上的紧曲线, 而且在 X 中是稠密的. 此时 $\mathcal{F}$ 被称为*Kronecker 叶状结构*. ■

例 12.1.8 (Lins Neto 叶状结构 [Mov15]) 设 $\mathcal{F}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{P}^1)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构, 由如下微分场得到

$$\omega_\lambda = (X_1^3 - X_2^3)(\lambda X_0^2 - X_1X_2)dX_0 + (X_2^3 - X_0^3)(\lambda X_1^2 - X_0X_2)dX_1 + (X_0^3 - X_1^3)(\lambda X_2^2 - X_0X_1)dX_0.$$

这是 4 次叶状结构. ■

例 12.1.9 (Jouanolou 叶状结构 [MoVi09]) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上由如下微分场

$$\omega = (X_1X_0^d - X_2^{d+1})dX_0 + (X_2X_1^d - X_0^d)dX_1 + (X_0X_2^d - X_1^d)dX_2.$$

生成的 d 次叶状结构. 考虑循环群 $G = \{g^k | k = 0, 1, \ldots, d^2 + d\}$ (这里 g 是 $d^2 + d + 1$ 次本原单位根) 在 $\mathbb{P}^2$ 上的群作用

$$g : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [X_0, X_1, X_2] \to [X_0, g^{d+1}X_1, gX_2].$$

这个群作用下的不动点恰好是 $p_1 = [1, 0, 0]$, $p_2 = [0, 1, 0]$, $p_3 = [0, 0, 1]$. 因为 $g^*\omega = g^{d+1}\omega$, 所以 $\mathcal{F}$ 在 G 作用下不变. 它的奇点集是

$$Sing(\mathcal{F}) = \{[1, g^k, g^{-dk}] | k = 0, \ldots, d^2 + d\}.$$

G 可迁地作用在该奇点集上. ■

12.1.3 不变曲线

定义 12.1.1 设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, C 是不可约曲线. 如果对任一点 $p \in C$, $\mathcal{F}$ 在 p 处的向量恰好与 C 相切, 我们就称 C 是 $\mathcal{F}$-不变的 ($\mathcal{F}$-invariant).

$\mathcal{F}$ 在一点 p 处的分界线 (Separatrix) 是指 p 的某小邻域内的全纯定义的不可约曲线 C (允许奇异), 使得 C 经过 p 且是 $\mathcal{F}$-不变的. 若有无数条分界线通过 p, 我们就称 p 是多临界点 (Dicritical singularity).

利用局部表示 (12-1) 和 (12-4), 我们也可以给出 $\mathcal{F}$ -不变曲线的其他描述.

命题 12.1.2 设 C 是不可约曲线, 以下条件彼此等价:

(1) C 是 $\mathcal{F}$ 不变的.

(2) 设 $f_\alpha = 0$ 是 C 在 U_α 上的局部方程, 它满足 $f_\alpha \mid v_\alpha(f_\alpha)$.

(3) f_α 是微分方程 $\omega_\alpha = 0$ 的解.

(4) 存在全纯函数 g_α, h_α 及全纯 1-形式 η_α, 满足 $\gcd(h_\alpha, f_\alpha) = \gcd(g_\alpha, f_\alpha) = 1$ 以及

$$g_\alpha \omega_\alpha = h_\alpha df_\alpha + f_\alpha \eta_\alpha. \tag{12-9}$$

(5) $df_\alpha \wedge \omega_\alpha = f_\alpha \tilde{\eta}_\alpha$, 这里 $\tilde{\eta}_\alpha$ 是全纯 2-形式.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 我们只需要证明, 对一般点 $p \in C$, 都有

$$A(p)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\Big|_p + B(p)\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\Big|_p = 0.$$

设 C 的 $p = (0,0)$ 处的局部参数方程

$$x_a = x_\alpha(t), \quad y_\alpha = y_\alpha(t).$$

于是 C 在 $p = (x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ 处的切方向为 $(x'_\alpha(t), y'_\alpha(t))$. 因此

$$A/x'_\alpha(t) = B/y'_\alpha(t) \tag{12-10}$$

再结合

$$0 = f'(x_\alpha(t), y_\alpha(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(t) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}(t) \tag{12-11}$$

即得所需.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 此时已知

$$A(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(t) + B(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}(t) \equiv 0. \tag{12-12}$$

结合式 (12-11) 可得式 (12-10). 由此推出

$$B(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{dx_\alpha}{dt} - A(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{dy_\alpha}{dt} \equiv 0, \tag{12-13}$$

即 f_α 是微分方程 $\omega_\alpha = 0$ 的解.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 设

$$w_\alpha = \frac{A_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + B_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}}{f_\alpha}.$$

此时已知式 (12-13) 成立, 因而结合式 (12-11) 可知式 (12-12) 成立, 即 w_α 是全纯的. 令

$$\begin{cases} g_\alpha &= u_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} - k_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \\ h_\alpha &= -u_\alpha A_\alpha - k_\alpha B_\alpha \\ \eta_\alpha &= w_\alpha(u_\alpha dx_\alpha + k_\alpha dy_\alpha), \end{cases}$$

这里 u_α, k_α 是全纯函数. 取适当的 u_α, k_α, 可使 $\gcd(h_\alpha, f_\alpha) = \gcd(g_\alpha, f_\alpha) = 1$.

(4) $\Longrightarrow$ (5) 此时 $df_\alpha \wedge \omega_\alpha = f_\alpha \frac{df_\alpha \wedge \eta}{g_\alpha}$. 注意到左边是全纯的, $\gcd(f_\alpha, g_\alpha) = 1$, 因而 $\tilde{\eta}_\alpha := \frac{df_\alpha \wedge \eta}{g_\alpha}$ 是全纯 2-形式.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 对 $p = (0,0) \in C$, $\omega(p) \wedge df|_p = f(p)\tilde{\eta} = 0$, 因此 $B(p)/\frac{\partial f}{\partial x}\big|_p = -A(p)/\frac{\partial f}{\partial y}\big|_p$. 由式 (12-11), 可知 C 在 $p = (0,0)$ 处的切向量 $(x'(0), y'(0))$ 与 $A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ 方向一致. ■

例 12.1.10 (1) $\omega = ydx - xdy$ (相应地, $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$) 在 $p = (0,0)$ 处的分界线有无数条, 它们定义为 $f(x,y) := y - \lambda x = 0$ ($\lambda \in \mathbb{P}^1$). 此时 $v(f) = f$.

(2) $\omega = 2ydx - 3xdy$ (相应地, $v = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$) 在 $p = (0,0)$ 处也有无数条分界线, 它们定义为 $f(x,y) := x^2 - \lambda y^3 = 0$ ($\lambda \in \mathbb{P}^1$). 此时 $v(f) = 6f$.

(3) $\omega = nydx + mxdy$ (n, m 是正整数) 仅有两条分界线过 $p = (0,0)$, 即 $x = 0$ 及 $y = 0$. ■

例 12.1.11 在例 12.1.2 中, 无穷远直线 $L_\infty = \{X_0 = 0\}$ 是 $\mathcal{F}$-不变当且仅当 $R \equiv 0$. ■

例 12.1.12 设 m, n 是正整数. 考虑 1 次平面叶状结构 $\mathcal{F}$:

$$-(n+m)X_1X_2dX_0 + nX_0X_2dX_1 + mX_0X_1dX_2 = 0.$$

所有的 $\mathcal{F}$-不变曲线可表为

$$X_1^n X_2^m - \lambda X_0^{n+m} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{P}^1.$$

其中包含三条 $\mathcal{F}$-不变的直线 $X_i = 0$ $(i = 0,1,2)$. ■

例 12.1.13 (非常特殊叶状结构的不变曲线) 在例 12.1.6 的记号下, D_i, E_i 和 C 都是 $\mathcal{F}$-不变曲线. 除此之外, 没有其他 $\mathcal{F}$-不变曲线 (因为 $\mathcal{L}$ 仅有三条直线是 $\mathcal{F}$-不变的). 此外, P 是 $\mathcal{F}$ 在 C 上唯一的奇点.

如果我们采用表达式 (12-8), 那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上的不变曲线仅有直线 $X = 0$ 与 $Z = 0$, 以及三次曲线 $F = 0$, 这里

$$F := XZ^2 + X^2Z + Y^3 - 3XYZ.$$

由计算可知, 在仿射坐标下, $\omega \wedge df = f \cdot (6x - 3y)dx \wedge dy$, 这里 $f(x,y) = F(x,y,1)$. ■

例 12.1.14 (叶状结构的拉回) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\pi : Y \to X$ 是一般有限态射. 设 ω 是 $\mathcal{F}$ 对应的微分场. 那么 $\pi^*\omega$ 给出了 Y 上的叶状结构 $\mathcal{G}$, 通常记为 $\pi^*\mathcal{F}$. 现在我们分析 $\pi^*\mathcal{F}$ 的典范丛和法丛. 设 C 是分歧轨迹, 我们取一般点 $p \in C$. 考虑 p 附近的小邻域 U, 不妨设 C 的局部方程为 $x = 0$.

如果 C 在 U 内不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么不妨设 $\omega = dy$. 此时 $\pi^*(\omega|_U)$ 仍为全纯的, 并且没有一维零点集. 因而在局部上有 $N_\mathcal{G}|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(N_\mathcal{F}|_U)$. 注意

$$K_Y|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(K_X|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)},$$

这里 k 是 C 的分歧指数. 因而

$$K_{\mathcal{G}}|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(K_{\mathcal{F}}|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)}.$$

如果 C 在 U 内是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么不妨设 $\omega = dx$, 并且 π 在 C 上完全分歧, 局部方程 $z^k = x$. 因而 $\pi^*\omega = kz^{k-1}dz$ 有一维零点除子 $(k-1)C$, 故

$$N_{\mathcal{G}}^{\vee}|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}^{\vee}|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)}, \quad K_{\mathcal{G}} = \pi^* K_{\mathcal{F}}.$$

整体情形下, 我们可以找到有效除子 E, 使得 $N_{\mathcal{G}}^{\vee} = \pi^* N_{\mathcal{F}}^{\vee} + E$. ■

例 12.1.15 (Lins Neto **叶状结构的不变曲线**) 考虑例 12.1.8 的 Lins Neto 叶状结构 $\mathcal{F}_\lambda$. 设 L_{ijk} 是由方程 $X_i - \omega^k X_j = 0$ 定义的直线 $(i<j)$, 这里 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$. 可以验证, L_{ijk} 是 $\mathcal{F}_\lambda$- 不变曲线. 这九条直线共有 12 个交点

$$p_{ij} = [1, \omega^i, \omega^j]\ (0 \le i, j \le 2), \quad q_0 = [1,0,0], \quad q_1 = [0,1,0], \quad q_2 = [0,0,1].$$

这些交点都是 $\mathcal{F}$ 的奇点. 对每个 p_{ij}, 恰有三条直线 $L_{01,-i}, L_{02,-j}, L_{12,i-j}$ 经过它. 每条直线 L_{ijk} 上恰有四个交点. 为了后面讨论方便, 我们把这些交点分成四类:

$$P_0 = \{p_{00}, p_{12}, p_{21}\}, \quad P_1 = \{p_{01}, p_{10}, p_{22}\}, \quad P_2 = \{p_{02}, p_{11}, p_{02}\}, \quad Q = \{q_1, q_2, q_3\}.$$

它们可以通过平面自同构变换到彼此.

当考虑 $\lambda = \infty$ 的情形. 此时 $\omega \wedge dH = 0$, 这里 $H = \frac{y^3-1}{x^3-1}$. 因此 $\mathcal{F}$ 有无数 $\mathcal{F}$-不变曲线, $H = c\ (c \in \mathbb{P}^1)$. 类似地, 对 $\lambda = \omega^k$ 时, $\omega \wedge dH_k = 0$, 这里

$$H_k = \frac{(1-x)(\omega^k - y)(\omega^k x - y)}{(\omega - x)(\omega^{k+2} - y)(\omega^{k+1}x - y)}.$$

$\mathcal{F}$ 的所有 $\mathcal{F}$-不变曲线为 $H_k = c\ (c \in \mathbb{P}^1)$. ■

对一个整体全纯 1-形式 η, 如果它在任何点的分界线上恒为零, 我们就说 η 在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 根据注记 12.1.1, 这等价于说 η 落在映射 $H^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee}) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)$ 的像中 (这个单射来自于正合列 (12-2)). 我们有下面的有趣结论.

命题 12.1.3 *设 $\mathcal{F}$ 是曲面 X 上的叶状结构, 且 $q(X) > 0$, 那么以下情形之一成立:*
(1) 存在一个整体全纯 1-形式 $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$, 使得 ω 在 $\mathcal{F}$ 上不恒为零. 这推出 $h^0(X, K_{\mathcal{F}}) > 0$.
(2) 任何整体 1-形式 ω 都在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 此时 Albanese 映射 $\alpha: X \to Alb(X)$ 是纤维化 (称为 Albanese 纤维化) 并且 $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导.

证明 我们假设情形 (1) 不成立. 那么 $H^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee}) \cong H^0(X, \Omega_X)$, 也就是任何整体 1-形式 ω 都在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 取定一点 q, 考虑 Albanese 映射

$$\alpha: X \longrightarrow Alb(X), \quad x \to \int_q^x (\cdot).$$

对任何分界线 C (局部或整体) 以及任何两点 $x, y \in C$, 由于任何全纯 1 形式都在分界线上消失, 所以它们沿着道路 C 从 y 到 x 积分均为零. 这就推得

$$\alpha(x) - \alpha(y) = \int_y^x (\cdot) = 0.$$

即 $\alpha(x) = \alpha(y)$. 这样, C 被 α 收缩. 对 $\mathcal{F}$ 的每个光滑点, 都有分界线通过它, 因而 $\dim \mathrm{Im}\alpha \le= 1$. 注意到 $q(X) > 0$, 因而 α 不是平凡的 (由命题 7.4.1 (3)), 所以 α 是纤维化, $\mathcal{F}$ 由 α 诱导. ■

推论 12.1.1 如果 $q(X)>0$, 那么当以下条件之一成立时, $\mathcal{F}$ 必由 Albanese 纤维诱导:
(1) $h^0(X,K_{\mathcal{F}})=0$;
(2) $K_{\mathcal{F}}\equiv 0$ 且 $Sing(\mathcal{F})\neq\emptyset$.

证明 在任何一种条件下, 命题 12.1.3 的情形 (2) 都成立. ■

本节最后, 我们讨论带有纤维化结构的曲面上的叶状结构.

命题 12.1.4 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\varphi: X\to B$ 是纤维化, 且它诱导的叶状结构 $\mathcal{G}$ 不等于 $\mathcal{F}$. 那么

$$K_{\mathcal{F}}=\varphi^*K_B+D+D(\varphi),$$

这里 D 是有效除子, 使得对任何 $p\in D$, $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 在 p 处不是横截交.

特别地, 如果 $\mathcal{F}$ 与 f 的一般纤维横截交, 那么 D 的支集是落在 f 的纤维中的 $\mathcal{F}$-不变曲线.

证明 直接来自于命题 12.1.1. ■

12.2 叶状结构的奇点

12.2.1 奇点重数

在式 (12-1) 或 (12-4) 中, 我们规定 $\mathcal{F}$ 在 $p=(0,0)$ 处的重数 (Multiplicity)

$$m(p):=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{X,p}/\langle A,B\rangle.$$

在整体上, 则可定义

$$m(\mathcal{F}):=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})}m(p).$$

由零维子概型的次数定义, 实际上

$$m(\mathcal{F})=\deg Sing(\mathcal{F}).$$

因此由习题 1.13 以及式 (12-3) 可得

$$\begin{aligned} m(\mathcal{F}) &= K_{\mathcal{F}}\cdot K_{\mathcal{F}}-K_{\mathcal{F}}\cdot K_X+c_2(X)\\ &= N_{\mathcal{F}}\cdot N_{\mathcal{F}}+N_{\mathcal{F}}\cdot K_X+c_2(X)\\ &= c_2(X)+K_{\mathcal{F}}\cdot N_{\mathcal{F}}. \end{aligned} \tag{12-14}$$

设 $n=mult_p(A)$, $m=mult_p(B)$. 我们定义 $a(p)=\min(n,m)$. 它是 ω 在 p 处零点阶数, 也常被记为 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F})$, 并称作 $\mathcal{F}$ 在 p 处的代数重数 (Algebraic multiplicity).

由式(12-14), 我们立刻得到如下经典结论.

定理 12.2.1 (Darboux 定理 [Dar78]) 对平面上的 d 次叶状结构 $\mathcal{F}$, 我们有

$$m(\mathcal{F})=d^2+d+1.$$

例 12.2.1 我们构造两例平面上的 1 次叶状结构 $\mathcal{F}$. 根据 Darboux 定理, $m(\mathcal{F})=3$.
(1) $\mathcal{F}$ 由如下微分场诱导

$$\omega=X_1X_2dX_0+2X_0X_2dX_1-3X_0X_1dX_2.$$

它恰有三个奇点

$$P=[1,0,0],\quad Q=[0,1,1],\quad R=[0,0,1].$$

(2) $\mathcal{F}$ 取为

$$\omega=X_2^2dX_0+X_1X_2dX_1-(X_1^2+X_0X_2)dX_2.$$

此时仅有一个奇点 $P=[1,0,0]$. ■

命题 12.2.1 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\sigma:\widetilde{X}\to X$ 是爆发, 那么
(1) $m(\sigma^*\mathcal{F})-N_{\sigma^*\mathcal{F}}^2>m(\mathcal{F})-N_{\mathcal{F}}^2$.
(2) 如果 X 是一般型极小曲面, 那么 $m(\mathcal{F})-N_{\mathcal{F}}^2\geq 0$.

证明 (1) 由例 12.1.3 及式 (12-14),

$$m(\sigma^*\mathcal{F})-N_{\sigma^*\mathcal{F}}^2=m(\mathcal{F})-N_{\mathcal{F}}^2+l(p)+1.$$

由此即得结论.

(2) 若 $N_{\mathcal{F}}^2\leq 0$, 则结论显然. 不妨设 $N_{\mathcal{F}}^2>0$. 由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0(X,(N_{\mathcal{F}}^{\vee})^{\otimes n})+h^0(X,K_X\otimes N_{\mathcal{F}}^{\otimes n})\geq O(n^2).$$

由 Bogomolov 定理 7.4.3, $h^0(X,(N_{\mathcal{F}}^{\vee})^{\otimes n})=O(n)$, 这就推出 $h^0(X,K_X\otimes N_{\mathcal{F}}^{\otimes n})>0$ (n 充分大). 因此 $K_X(K_X+nN_{\mathcal{F}})\geq 0$. 这就有 $K_XN_{\mathcal{F}}\geq 0$. 现在, 我们有 $m(\mathcal{F})-N_{\mathcal{F}}^2=c_2(X)+N_{\mathcal{F}}K_X\geq 0$. ■

12.2.2 奇点解消

基于例 12.1.3, 我们从局部上来描述叶状结构奇点爆发. 令 $t=\frac{y}{x}$. 我们有

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{x^{l(p)}}\Big((B(x,xt)-tA(x,xt))dx-xA(x,xt)dt\Big).$$

设 $n=mult_p(A)$, $m=mult_p(B)$. 我们回顾 $\mathcal{F}$ 在 p 处的代数重数 $a(p)=\min(n,m)$. 记

$$A(x,xt)=x^n\widetilde{A}(x,t),\quad B(x,xt)=x^m\widetilde{B}(x,t).$$

于是

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{x^{l(p)-a(p)}}\Big((x^{m-a(p)}\widetilde{B}(x,t)-tx^{n-a(p)}\widetilde{A}(x,t))dx-x^{n+1-a(p)}\widetilde{A}(x,t)dt\Big).\tag{12-15}$$

因此

$$l(p)=\begin{cases}a(p)+1, \text{若 } m=n \text{ 且 } \mathrm{ord}_x(\widetilde{B}-t\widetilde{A})>0,\\ a(p),\quad \text{其他情形}.\end{cases}$$

另一种等价的说法是: $l(p)=a(p)$ 当且仅当 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的 (留给读者验证).

如果我们需要考虑 $\widetilde{F}$ 在 $t=\infty$ 附近的性态, 可以利用 $s=\frac{x}{y}$ (即 $s=\frac{1}{t}$) 来做爆发.

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{y^{l(p)}}\Big(-(A(ys,y)-sB(ys,y))dy+yB(ys,y)ds\Big).$$

$s=0$ 处的点就是 $t=\infty$ 处的点. 进一步设

$$A(ys,y)=y^nA'(y,s),\quad B(ys,y)=y^mB'(y,s).$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{y^{l(p)-a(p)}}\Big(-(y^{n-a(p)}A'(y,s) - sy^{m-a(p)}B'(y,s))dy + y^{m+1-a(p)}B'(y,s)ds\Big). \quad (12\text{-}16)$$

例 12.2.2　考虑原点 p 附近的叶状结构 $\omega = \lambda ydx - xdy$ (λ 是非零常数) 的爆发. 当 $\lambda \neq 1$ 时,

$$\tilde{\omega} = (\lambda-1)tdx - xdt = (\lambda-1)sdy + \lambda yds.$$

例外曲线 E 上恰有两个奇点 $t = 0, \infty$, 并且 $l(p) = a(p) = m(p) = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$\tilde{\omega} = -dt = ds.$$

此时 E 上没有奇点, 并且 $l(p) = 2$, $a(p) = m(p) = 1$. ■

命题 12.2.2 (Van den Essen **重数公式**)　*设 $p_1, \cdots, p_r$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 E 上的所有奇点. 那么*

$$\sum_{i=1}^{r} m(p_i) = m(p) - l(p)^2 + l(p) + 1.$$

证明　这个等式直接来自于式 (12-6) 和式 (12-14). 此时有整体表达式

$$m(\widetilde{\mathcal{F}}) = m(\mathcal{F}) - l(p)^2 + l(p) + 1.$$

下面我们直接从局部上重新证明该公式. 设 $n = mult_p(A)$, $m = mult_p(B)$. 我们需要分情形讨论.

情形 1: $m > n$. 由式 (12-15) 及式 (12-16),

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (x^{m-n}\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))dx - x\widetilde{A}(x,t)dt \\ &= -(A'(y,s) - sy^{m-n}B'(y,s))dy + y^{m+1-n}B'(y,s)ds.\end{aligned}$$

于是 Van den Essen 公式的左边就是相交数之和

$$(A' - sy^{m-n}B', y^{m+1-n}B')_{s=0} + (x^{m-n}\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x\widetilde{A})_{s\neq 0}.$$

利用相交数的计算法则, 上式等于

$$(A', B')_{s=0} + (m+1-n)(A', y)_{s=0} + (m-n)(x, \widetilde{A})_{s\neq 0} + (\widetilde{A}, \widetilde{B})_{s\neq 0} + (x, \widetilde{A})_{s\neq 0} + (t, x)_{t=0}.$$

注意到

$$(A', y)_{s=0} + (x, \widetilde{A})_{s\neq 0} = n, \quad (A', B')_{s=0} + (\widetilde{A}, \widetilde{B})_{s\neq 0} = (A, B) - nm = m(p) - nm,$$

我们得到

$$\sum_{i=1}^{r} m(p_i) = m(p) - nm + (m+1-n)n = m(p) - n^2 + n + 1.$$

公式得证.

情形 2: $m < n$. 类似情形 1 的证明.

情形 3. $m = n$ 且 $l(p) = n$. 此时

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))dx - x\widetilde{A}(x,t)dt \\ &= -(A'(y,s) - sB'(y,s))dy + yB'(y,s)ds.\end{aligned}$$

类似上面的讨论, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} m(p_i) &= (A' - sB', yB')_{s=0} + (\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x\widetilde{A})_{s\neq 0} \\ &= (A' - sB', y)_{s=0} + (\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x)_{s\neq 0} + m(p) - n^2 \\ &= mult_p(yA - xB) + m(p) - n^2 \\ &= m(p) - n^2 + n + 1.\end{aligned}$$

情形 4. $m = n$ 且 $l(p) = n + 1$. 此时

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))\tfrac{dx}{x} - \widetilde{A}(x,t)dt \\ &= -(A'(y,s) - sB'(y,s))\tfrac{dy}{y} + B'(y,s)ds.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} m(p_i) &= \left(\frac{A' - sB'}{y}, B'\right)_{s=0} + \left(\frac{\widetilde{B} - t\widetilde{A}}{x}, \widetilde{A}\right)_{s\neq 0} \\ &= -(B', y)_{s=0} - (\widetilde{A}, x)_{s\neq 0} + m(p) - n^2 \\ &= -(B', y)_{s=0} + (A', y)_{s=0} - n + m(p) - n^2 \\ &= -\deg_s B'(0,s) + \deg_s A'(0,s) + m(p) - n^2 - n \\ &= m(p) - n^2 - n + 1 \\ &= m(p) - l(p)^2 + l(p) + 1.\end{aligned}$$

至此, 我们完成了证明. ■

推论 12.2.1 *存在有限步的爆发 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得叶状结构的拉回 $\widetilde{F}$ 的所有奇点 p 都满足 $l(p) = 1$.*

证明 由 Van den Essen 重数公式, 当 $l(p) \geq 2$ 时, 总有严格的不等式 $m(p_i) < m(p)$. 因此我们可以做有限步爆发, 使得所有奇点 p 都满足 $l(p) = 1$. ■

下面我们考察 $l(p) = 1$ 的奇点. 设

$$Dv_\alpha(p) = (ax_\alpha + by_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + (cx_\alpha + dy_\alpha)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

是 $v_\alpha = A\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ 在奇点 p 处的线性部分. 因为 $l(p) = 1$, 所以 $Dv(p)$ 非零. 它对应矩阵

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

M 有两个特征值 $\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}$. 在坐标转换中, $M_\alpha = g_{\alpha\beta}M_\beta$, 因而 $\lambda_{i\alpha} = g_{\alpha\beta}\lambda_{i\beta}$. 如果两个特征值不全为零 (比如 $\lambda_{2\alpha} \neq 0$), 我们令 $\lambda_\alpha = \frac{\lambda_{1\alpha}}{\lambda_{2\alpha}}$, 那么上面的转换关系蕴含着 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, 即比值 λ_α 不依赖于坐标的选取. 此时, 通过选取合适的坐标, Dv_α 局部上可以写成

$$Dv_\alpha = x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \lambda_\alpha y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

或

$$Dv_\alpha = (x_\alpha + h_\alpha y)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\lambda_\alpha = 1),$$

这里 h_α 是非零常数.

如果 $\lambda_{1\alpha}=\lambda_{2\alpha}=0$, 那么 $Dv_\alpha=0$ 或者 $Dv_\alpha=y_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

定义 12.2.1 *如果 $\mathcal{F}$ 在奇点 p 处的特征值不全为零, 并且其比值 λ 不是正有理数, 那么我们称 p 是既约奇点 (Reduced singularity) 或简单奇点 (Simple singularity). 如果 $\lambda\neq 0$, 则称 p 是非退化的; 否则称其为鞍- 结点 (Saddle-node).*

今后为方便起见, 该比值 λ 也称为 $\mathcal{F}$ 在 p 处的特征值 (Eigenvalue).

例 12.2.3 (**既约奇点分类**) 设 p 是既约奇点. 由定义, λ 不是正有理数.

(1) (Poincaré 区域) 假设特征值 $\lambda\notin\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ (我们把满足这类条件的数构成的集合称为*庞加莱区域*). 由庞加莱线性化定理, 在选取合适的坐标后, $\mathcal{F}$ 对应的切向量场局部可写为
$$x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12-17}$$
等价地, 其 1-形式可写为 $\lambda ydx-xdy$. $\mathcal{F}$ 恰有两条分界线 $x=0$ 及 $y=0$. 在例 12.2.2 中, 我们已经讨论了它的奇点解消. 此处不再赘述.

(2) (Siegel 区域) 假设特征值 λ 是负实数 (我们把负实数集合称为*西格尔区域*). 在适当的坐标选取下, 仍然精确地有两条分界线 $x=0$ 及 $y=0$. 一般说来, 这类情形下未必能通过坐标变换将切向量场写成形如 (12-17) 的形式.

(3) (鞍-结点) 此时切向量场可写为 Dulac *形式*
$$\left(x+axy^k+yF(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial x}+y^{k+1}\frac{\partial}{\partial y},$$
这里 $a\in\mathbb{C}$, k 是正整数, F 是在 $p=(0,0)$ 处的零点阶数为 k 的局部全纯函数. 它的重数为 $k+1$. 爆发一次后, 例外曲线上有两个奇点 p_0,p_∞ 满足 $m(p_0)=1$, $m(p_\infty)=k+1$. 它有一条分界线 $y=0$, 称为*强分界线* (Strong separatrix). 一般说来, 未必存在另一条与之横截相交的分界线. 若有这样的分界线, 则称之为*弱分界线* (Weak separatrix).

对既约奇点来说, 所有的分界线的并在局部小邻域内都是正规交曲线, 因而解消中出现的例外曲线都是 $\mathcal{F}$-不变的. 它们在解消后奇点仍然是既约的. ■

注 12.2.1 关于既约奇点表达式如何线性化的讨论可以参看 [Mov15]. ■

例 12.2.4 (**非既约奇点分类**) 设 p 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的非既约奇点. 我们分几类情形讨论.

(1) $\lambda\in\mathbb{Q}^+$ 但 $\lambda,\frac{1}{\lambda}$ 均不是正整数. 此时由庞加莱线性化定理, 通过选取合适的坐标, 叶状结构的切向量场可以局部写为
$$v=nx\frac{\partial}{\partial x}+my\frac{\partial}{\partial y},\quad \lambda=\frac{n}{m}>1,\quad nm\in\mathbb{Z}^+.$$
对奇点 p 爆发一次, 在例外曲线 E 上恰有两奇点 p_0,p_∞ (分别对应 E 上的坐标点 $t=0,\infty$). p_0 对应切向量场
$$\tilde{v}_0=nx\frac{\partial}{\partial x}-(n-m)t\frac{\partial}{\partial t},$$

其特征值 $\lambda_0 = \frac{n}{m-n} < 0$, 因而属于西格尔区域. 这表明 p_0 是既约奇点.

p_∞ 对应切向量场

$$\tilde{v}_\infty = (n-m)s\frac{\partial}{\partial s} + my\frac{\partial}{\partial y}, \quad s = \frac{1}{t}. \tag{12-18}$$

其特征值 $\lambda_\infty = \frac{m}{n-m} > 0$.

(2) $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ 至少有一个是正整数. 为方便起见, 不妨设 $\lambda = n$ 是正整数. 此时由庞加莱-Dulac 规范型定理, 对应的切向量场局部可表为

$$v = x\frac{\partial}{\partial x} + (ny + \epsilon x^n)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \epsilon = 0, 1.$$

当 $\epsilon = 0$ 时, p 爆发一次后的例外曲线上有两个奇点 p_0, p_∞, 分别对应切向量场

$$\tilde{v}_0 = (n-1)t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{v}_\infty = -ny\frac{\partial}{\partial y} + (n-1)s\frac{\partial}{\partial s}.$$

当 $\epsilon = 1$ 时, p_0, p_∞ 分别对应切向量场 (注意, 当 $n = 1$ 时, p_0 不再是奇点)

$$\tilde{v}_0 = x\frac{\partial}{\partial x} + ((n-1)t + x^{n-1})\frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{v}_\infty = -(ny + y^n s^n)\frac{\partial}{\partial y} + ((n-1)s + y^{n-1}s^{n+1})\frac{\partial}{\partial s}.$$

在这两种情形中, p_∞ 都是既约奇点.

(3) 线性部分 Dv 非零且对应幂零阵. 不妨设

$$v = (y + A')\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 A' 最低次项次数 $n \geq 2$, B 有 $m \geq 2$ 重奇点. 爆发一次后, 拉回的叶状结构在例外曲线上对应切向量场

$$\tilde{v} = x(t + x^{n-1}\widetilde{A}')\frac{\partial}{\partial x} + (x^{m-1}\widetilde{B} - t(t + x^{n-1}\widetilde{A}'))\frac{\partial}{\partial t}, \tag{12-19}$$

这里 $A' = x^{n-1}\widetilde{A}', B = x^{m-1}\widetilde{B}$. 此时例外曲线上仅有一个奇点 p_0 (在 $t = 0$ 处), 其阶数为 1 或 2.

(4) 线性部分 Dv 为零. 此时 $l(p) \geq 2$. 利用推论 12.2.1, 经过有限步爆发后, 可以归结到既约奇点或者以上几类非既约奇点. ■

定理 12.2.2 (Seidenberg **解消定理** [Sei68]) *对叶状结构 $\mathcal{F}$ 的任何奇点 p, 存在一系列爆发的复合 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得 $\widetilde{\mathcal{F}} := \sigma^*\mathcal{F}$ 在例外集 $\sigma^{-1}(p)$ 上至多只有既约奇点.*

证明 由推论 12.2.1, 我们只需要讨论 $l(p) = 1$ 的奇点. 假如 p 已经是既约奇点, 则结论已成立. 以下均假设 p 不是既约奇点. 我们按照例 12.2.4 的分类来讨论, 并沿用其中的诸记号.

先考察 p 满足例 12.2.4 (1) 的情形. 此时 p_∞ (见式 (12-18)) 仍满足例 12.2.4 (1), 而剩余的奇点 p_0 已经是既约的. 我们再对 p_∞ 做爆发. 以此类推, 最终得到唯一的非既约奇点 $p_\infty^{(\ell)}$ (其余的奇点均为既约的), 对应切向量场

$$\widetilde{v}_\ell := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

此时 $m(p_\infty^{(\ell)}) = a(p_\infty^{(\ell)}) = 1$, $l(p_\infty^{(\ell)}) = 2$. 因而由 Van den Essen 重数公式可知, 爆发 $p_\infty^{(\ell)}$ 后, 例外曲线上无奇点. 这表明 p 经过有限步解消后, 所有奇点均变成既约奇点.

其次讨论 p 满足例 12.2.4 (2) 的情形. 此时如果 $\epsilon = 0$, 则类似上面的解消, 最终可变为既约奇点. 如果 $\epsilon = 1$, 我们最终可以通过解消得到唯一的非既约奇点 (即 $n = 1$ 情形), 对应切向量场

$$x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

由例 12.2.4 (2) 的讨论, 它在爆发后仅得到既约奇点.

最后考虑 p 满足例 12.2.4 (3) 的情形. 若 p_0 (见式 (12-19)) 的阶数为 1. 此时 p_0 仍满足例 12.2.4 (3) 的情形. 爆发 p_0 后得到唯一的奇点 p_1 (阶数为 2). 再爆发 p_1, 得到三个既约奇点.

今假设 p_0 的阶数为 2, 则爆发 p_0 后得到 2 或 3 个奇点. 结合 $l(p) = 1, l(p_0) = 2$ 及 Van den Essen 重数公式, 这些奇点的重数之和等于 $m(p_0) - 1 = m(p)$. 因而每个奇点的重数都严格小于 $m(p)$. 对这类奇点继续爆发, 有限步后最终可以让这类情形不再出现. ■

注 12.2.2 p 是 $\mathcal{F}$ 的多临界点等价于它的奇点解消中包含一条非 $\mathcal{F}$-不变的例外曲线. ■

例 12.2.5 (Riccati 叶状结构的奇点) 在例12.1.4 的记号与假设下, 我们分情形讨论 Riccati 叶状结构的奇点. 回顾式 (12-7):

$$\omega = (a(z)w^2 + b(z)w + zc(z))dz + zd(z)dw,$$

情形 1. (非退化纤维) $d(0) \neq 0$, $b(0) \neq 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 在 F 上有两个奇点 p_1, p_2, 对应非零特征值 $(1, \lambda)$ 与 $(1, -\lambda)$, 这里 $\lambda \neq 0$. 不妨设 $p_2 = (0, \infty)$.

若 $\lambda \notin \mathbb{Z}$, 那么每个奇点处都有与 F 横截相交的分界线. 由坐标变换 (将分界线变成坐标轴), 最终可得标准型

$$\omega = \lambda w dz - z dw.$$

此时 $w = 0, \infty$ 对应两条分界线. 此外, 请读者注意, 由于 F 是过这两个奇点的分界线, 因此在我们的假设条件下, $\lambda^{-1} \notin \mathbb{Z}$. 若不然, 由例 12.2.4 (2) 的庞加莱-Dulac 模型, F 将不再是分界线.

若 $\lambda \in \mathbb{Z}$,我们可设 p_2 处的特征值为负整数, 那么由奇点分类结果, 它有横截的分界线. p_1 则未必有横截的分界线. 由坐标变换, 最终可得标准型

$$\omega = (nw + \epsilon z^n)dz - z dw, \quad \epsilon = 0, 1.$$

情形 2. (非退化纤维) $d(0) \neq 0$, $b(0) = 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 仅有一个鞍-结点 $p_1 = (0, 0)$, 它有一条强分界线与 F 横截相交, 而 F 是弱分界线. 由坐标变换, 可得标准型

$$\omega = w^2 dz - z dw.$$

如果将奇点移到 $p_2 = \infty$ 处, 也可以将标准型写为

$$\omega = dz - z dw.$$

情形 3. (半退化纤维) $d(0) = 0$, $b(0) \neq 0$. 此时有 $\mathcal{F}$ 在 F 上有两个鞍- 结点. 它们都以 F 为强分界线. 假若每个奇点都有弱分界线, 那么由 [MaRa82] 的结果, 可得标准型

$$\omega = w(1 + \nu z^k)dz - z^{k+1}dw,$$

这里 $\nu \in \mathbb{C}$, k 是正整数. 更一般的情形, 可参看 [MaRa82].

情形 4. (幂零纤维) $d(0) = b(0) = 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 在 F 上仅有一个非既约奇点. 当 $c(0) = 0$ 时, $\mathcal{F}$ 对应的切向量场的线性部分为零; $c(0) \neq 0$ 时, 则其线性部分是幂零的.

利用直纹面的双有理变换 (即爆发纤维上一点, 然后收缩原始纤维的严格原像), 我们可以把情形 (1) 中 $\lambda \in \mathbb{Z}$ 的叶状结构 $(nw + z^n)dz - zdw$ 变为情形 (2) 的叶状结构; 将 $nwdz - zdw$ 变为 $dw = 0$ (即 $\mathcal{F}$ 与该纤维横截相交). ■

例 12.2.6 (**非常特殊叶状结构的奇点**) 在例 12.1.6 和 12.1.13 的记号与假设下. $P \in C$ 是非退化既约奇点, 具有特征值 $\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ (见定义 12.2.1).

如果我们采用表达式 (12-8), 那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上有五个奇点

$$q_0 = [1,0,0], \quad q_1 = [0,1,0], \quad q_2 = [0,0,1], q_3 = [0,2,1], \quad q_4 = [1,1,1].$$

$\mathcal{F}$-不变的三次曲线 $F = 0$ (见例 12.1.13) 经过 q_0, q_1, q_4, 并且在 q_0 (相应地, q_1) 处与 $\mathcal{F}$-不变直线 $X = 0$ (相应地, $Z = 0$) 相切, 相交数为 3. q_2 (相应地, q_3) 是既约奇点, 其特征值 $\lambda = -\frac{1}{2}$ (相应地, $\lambda = -\frac{2}{3}$). q_1, q_0 是多临界点 ($l(q_1) = l(q_0) = 1$).

q_1 爆发一次后, 在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_1 上有既约奇点 q_5 (特征值 $\lambda = -\frac{2}{3}$) 和多临界点 q_6 ($l(q_6) = 1$). 爆发 q_6 后得到 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_2, 其中 $q_7 = E_1 \cap E_2$ 是既约奇点 (特征值 $\lambda = -\frac{1}{2}$), 另有多临界点 q_8 ($l(q_8) = 2$). 爆发 q_8 后, 例外曲线上不再有奇点.

q_0 爆发一次后, 在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_3 上有唯一奇点 q_9 ($l(q_9) = 2$). 爆发 q_9 得到 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_4, 其中有 $q_{10} = E_3 \cap E_4$ 是特征值为 $-\frac{1}{2}$ 的既约奇点以及特征值为 $-\frac{2}{3}$ 的既约奇点 q_{11}, 另有多临界点 q_{12} ($l(q_{12} = 2)$. 爆发 q_{12} 后, 不再有其他奇点. ■

例 12.2.7 (Lins Neto **叶状结构的奇点**) 我们采用例 12.1.15 的记号与假设.

(1) 先考虑 $\lambda^3 \neq 1, \infty$ 的情形. 此时所有的交点 p_{ij}, q_k 均为放射型多临界点 (Diciritical radial type)– 即代数重数为 1 且一次爆发后的例外曲线不是 $\mathcal{F}$-不变的. 具体地说, 它对应的局部切场的线性部分形如 $Dv = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

$\mathcal{F}$ 另外还有 9 个奇点:

$$r_{0k}(\lambda) = [\lambda, \omega^k, \omega^{2k}], \quad r_{1k} = [1, \lambda\omega^k, \omega^{2k}], \quad r_{2k} = [1, \omega^k, \lambda\omega^{2k}] \ (k = 0, 1, 2).$$

它们都是 Siegle 区域的奇点, 对应的局部切场的线性部分为 $Dv = 3x\frac{\partial}{\partial x} + (2\lambda x - y)\frac{\partial}{\partial y}$.

(2) 对于 $\lambda \in \{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ 的情形. 由例 12.1.15 的讨论, $\mathcal{F}$ 的不变曲线实际上来自于一个三次曲线束, 它包含三条奇异纤维, 每一条都是由过 P_k 中某个点的三条直线构成. 这个曲线束有 9 个基点, 它们恰好是其余 P_j ($j \neq k$) 中的九个交点. ■

12.2.3 相切指标

现在我们考虑曲线 C, 其每个分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的. 此时可以定义 C 在 $p \in U_\alpha$ 处的相切指标 (Index of tangency)

$$tang(\mathcal{F}, C, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\langle f_\alpha, v_\alpha(f_\alpha) \rangle},$$

这里 $f_\alpha = 0$ 是 C 在 U_α 中的局部方程. $tang(\mathcal{F}, C, p)$ 主要反映 C 与 $\mathcal{F}$ 在 p 处的相切情况. 特别地, $tang(\mathcal{F}, C, p) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 与 C 在 p 处横截相交 (习题 12.5). 因此我们整体上可定义

$$tang(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} tang(\mathcal{F}, C, p).$$

命题 12.2.3 假设曲线 C 的每个分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的. 那么

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}}C &= \chi(C) + tang(\mathcal{F}, C), \\ K_{\mathcal{F}}C &= -C\cdot C + tang(\mathcal{F}, C). \end{aligned}$$

这里

$$\chi(C) := 2\chi(\mathcal{O}_C) = 2 - 2p_a(C) = -K_X C - C^2$$

是(算术) 欧拉示性数(Arithmetic Euler characteristic).

证明 由式 (12-3), 我们只需要证明第二个式子即可. 首先, 从 $tang(\mathcal{F}, C, p)$ 的定义可知

$$tang(\mathcal{F}, C, p) = \mathrm{ord}_p v_\alpha(f_\alpha)|_C.$$

其次, 我们证明

$$v(f)|_C = \{v_\alpha(f_\alpha)|_C\}_{\alpha\in I} \in H^0(C, K_{\mathcal{F}}\otimes C|_C).$$

注意到

$$v_\alpha(f_\alpha) = g_{\alpha\beta}v_\beta(f_{\alpha\beta}f_\beta) = g_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}v_\beta(f_\beta) + g_{\alpha\beta}f_\beta v_\beta(f_{\alpha\beta}),$$

这里 $f_{\alpha\beta}$ 是 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ 的转换函数 (满足 $f_\alpha = f_{\alpha\beta}f_\beta$). 由于

$$g_{\alpha\beta}f_\beta\cdot v_\beta(f_{\alpha\beta})|_C \equiv 0,$$

所以

$$v_\alpha(f_\alpha)|_C = g_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}\cdot v_\beta(f_\beta)|_C.$$

这就表明 $v(f)|_C \in H^0(C, T_{\mathcal{F}}^\vee \otimes C|_C)$.

结合以上讨论, 即得

$$tang(\mathcal{F}, C) = \deg v(f)|_C = (K_{\mathcal{F}}\otimes C)\cdot C.$$

这就完成了证明. ■

注 12.2.3 (**欧拉示性数**) 读者不要将算术欧拉示性数 $\chi(C)$ 与欧拉拓扑示性数 $\chi_{\mathrm{top}}(C)$ 混淆. 根据 Milnor 公式,

$$\chi_{\mathrm{top}}(C) = \chi(C) + \mu_C,$$

这里 μ_C 是 C 上所有奇点的 Milnor 数总和 (参见 [Mil68][Tan94]).

在其他文献中 (比如[CarM94, CeNe91]), $\chi(C)$ 也被用来表示 C 的正规化的欧拉示性数. 因此读者在阅读文献时要留心. ■

例 12.2.8 在例 12.1.2 中, $\deg\mathcal{F} = tang(\mathcal{F}, L)$, 这里 L 是一般位置上的直线. ■

例 12.2.9 在例 12.1.1 中, 对任何 $\mathcal{F}$-不变曲线 C (即不含纤维中的分支),

$$K_{\mathcal{F}}C + C^2 = r(C) - D(f)C,$$

这里 $r(C) := K_f C + C^2$ 是相对分歧指数. ■

12.2.4 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标

接下来, 我们再考虑每个不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的曲线 C. 对每个点 $p\in C\cap U_\alpha$, 回顾式 (12-9). 我们可以定义 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标

$$Z(\mathcal{F},C,p):=\mathrm{ord}_p\frac{h_\alpha}{g_\alpha}\Big|_C=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial S}\frac{g_\alpha}{h_\alpha}d\left(\frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right).$$

特别地, 若 $p\in C$ 是光滑点, h_α 可取为局部全纯函数 (此时可假设 C 的局部方程为 $x=0$, 并直接计算出这一分解). 因此 $Z(\mathcal{F},C,p)$ 就是 $v_\alpha|_C$ 在 p 处的阶数. $Z(\mathcal{F},C,p)=0$ 等价于 p 不是 $\mathcal{F}$ 的奇点.

在整体上, 也可以定义

$$Z(\mathcal{F},C):=\sum_{p\in C}Z(\mathcal{F},C,p).$$

特别地, 如果 C 光滑且 $Z(\mathcal{F},C)>0$, 那么 $Sing(\mathcal{F})\cap C\neq\emptyset$.

注 12.2.4 在有些文献中 (比如 [Bru97]), $Z(\mathcal{F},C,p)$ 也被记作 $GSV(\mathcal{F},C,p)$. ■

例 12.2.10 (1) $\omega=2ydx-3xdy$ 在 $p=(0,0)$ 附近有不变曲线 $C:x^2-y^3=0$. 取 $\frac{h}{g}|_C=\frac{y}{x}|_C$. 因此 $Z(\mathcal{F},C,p)=-1$.

(2) 设 n,m 是正整数. $\omega=nydx+mxdy$ 在 $p=(0,0)$ 处有不变曲线 $C_1:x=0$ 及 $C_2:y=0$. 易知 $Z(\mathcal{F},C_1,p)=Z(\mathcal{F},C_2,p)=1$. 取 $C=C_1+C_2$, 那么 $Z(\mathcal{F},C,p)=0$. ■

类似命题 12.2.3, 我们有如下结论.

命题 12.2.4 *设曲线 C 的每个不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么*

$$\begin{aligned}N_{\mathcal{F}}\cdot C&=C\cdot C+Z(\mathcal{F},C),\\ K_{\mathcal{F}}\cdot C&=-\chi(C)+Z(\mathcal{F},C).\end{aligned}$$

证明 设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数 (满足 $e_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^{-1}e_\beta$). 于是

$$\frac{\omega_\alpha}{f_\alpha}=\varphi_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}^{-1}\frac{\omega_\beta}{f_\beta}.$$

再利用

$$\frac{\omega_\alpha}{f_\alpha}=\frac{h_\alpha}{g_\alpha}\frac{df_\alpha}{f_\alpha}+\frac{\eta_\alpha}{g_\alpha}.$$

我们得到 $N_{\mathcal{F}}(-C)|_C$ 整体半纯截面 $\{h_\alpha|_C\}_{\alpha\in I}$. 因此

$$Z(\mathcal{F},C)=\deg N_{\mathcal{F}}(-C)|_C=N_{\mathcal{F}}\cdot C-C\cdot C.$$

另一等式直接来自于它. ■

例 12.2.11 在例 12.1.2 中, 无穷远直线 L_∞ 是 $\mathcal{F}$-不变的充要条件为 $R\equiv 0$.

当 $\deg\mathcal{F}=1$ 时, 我们可以找到一条通过 $\mathcal{F}$ 某奇点的直线, 使得该直线是 $\mathcal{F}$ 不变的 (习题 12.11). 通过合适的坐标选取, 不妨设该直线是无穷远直线 L_∞, 因而由上讨论可知, $\mathcal{F}$ 可表为

$$P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 P, Q 是线性函数. 注意到此时 $K_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_X$, 因此任何 $\mathcal{F}$-不变曲线 C 都满足关系式 $Z(\mathcal{F}, C) = \chi(C)$. ■

例 12.2.12 (Riccati **叶状结构的等价描述**) 设 $\varphi : X \to C$ 是一个直纹面, $\mathcal{F}$ 是 X 上满足 $K_{\mathcal{F}}F = 0$ 的叶状结构, 我们来证明 $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的. 此时若一般纤维 F 不是 $\mathcal{F}$- 不变的, 那么 $tang(\mathcal{F}, F) = 0$ (命题 12.2.3), 因而 $\mathcal{G}$ 与 F 横截相交. 若 F 是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 $Z(\mathcal{F}, F) = 2$ (命题 12.2.4). 这意味着 F 上有 $\mathcal{F}$ 的奇点. 由于 $Sing(\mathcal{F})$ 是有限集, 所以对一般纤维 F 来说, 后一情形不会出现. 结合例 12.1.4 的讨论, $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的等价描述为 $T_{\mathcal{F}}F = 0$.

为方便讨论, 我们不妨设 $\varphi : X \to C$ 是相对极小的 (收缩映射诱导了相应的叶状结构). 现在我们考察一条光滑纤维 F, 使得它不是 $\mathcal{F}$-横截的 (即与 $\mathcal{F}$ 不横截相交). 由上面的讨论, 这样的 F 是 $\mathcal{F}$-不变的且 $Z(\mathcal{F}, F) = 2$. 由此可知, $\mathcal{F}$ 在 F 上有一个或两个奇点, 因此 $\mathcal{F}$ 局部可表为式 (12-7). ■

我们还可以从另一个角度去理解 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标. 为此需要引进一个新的指标量. 设 $p \in X$, U 是 p 的小邻域, B 是 U 内过 p 的分界线.$\mathcal{F}$ 在 U 上的局部切场为

$$v = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}.$$

考虑 B 在 p 附近的极小参数化

$$\varphi : \Delta \to B, \quad t \to \varphi(t) = (x(t), y(t)),$$

这里 ($\Delta = \{t \in \mathbb{C} | |t| < 1\}$, $p = \varphi(0)$). 我们定义 $\mathcal{F}$ 在分界线 B 上的*重数*

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \mathrm{ord}_0 \varphi^* v.$$

由定义可得 (请读者自己验证)

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \mathrm{ord}_0 A(x(t), y(t)) - \mathrm{ord}_0 x(t) + 1, \text{ 如果 } x(t) \neq 0, \\ \mathrm{ord}_0 B(x(t), y(t)) - \mathrm{ord}_0 y(t) + 1, \text{ 如果 } y(t) \neq 0. \end{cases} \tag{12-20}$$

$\mu_p(\mathcal{F}, B) = 0$ 当且仅当 $p \notin Sing(\mathcal{F})$ (习题 12.15).

命题 12.2.5 *$Z(\mathcal{F}, B, p) = \mu_p(\mathcal{F}, B, p) - \mu_p(B)$, 这里 $\mu_p(B)$ 指 B 在 p 处的 Milnor 数.*

证明 设$\sigma : (\widetilde{X}, E, \widetilde{\mathcal{F}}) \to (X, p, \mathcal{F})$ 是关于 p 的爆发, E 是例外曲线, $\widetilde{B}$ 是 B 的严格原像, $m = (\widetilde{B}, E)$. 我们有

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}) + m(l(p) - 1), \quad \tilde{p} = \widetilde{B} \cap E. \tag{12-21}$$

这里 $l(p)$ 的定义见例 12.1.3 (读者自己验证). 另一方面, 我们有

$$Z(\mathcal{F}, B, p) = Z(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}, \tilde{p}) - m^2 + ml(p) \quad (\text{习题 } 12.11)$$
$$\mu_p(B) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{B}) + m(m-1) \qquad ([\text{Tan94, Lemma 1.3}]).$$

因而,

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) - \mu_p(B) - Z(\mathcal{F}, B, p) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}) - \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{B}) - Z(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}, \tilde{p}).$$

这样, 由 Seidenberg 解消定理, 即可归结为验证 p 是既约奇点的情形(留给读者完成). ■

对经过 p 的不变曲线 C (允许是局部或可约的), 我们也可以定义

$$\mu_p(\mathcal{F},C):=Z(\mathcal{F},C,p)+\mu_p(C).$$

推论 12.2.2 ([CeNe91]) 令 $C(p)$ 是 C 中所有经过 p 的不可约解析分支构成的集合, $k_p(C)=\sharp C(p)$. 那么

(1) $\mu_p(\mathcal{F},C)=\sum\limits_{B\in C(p)}\mu_p(\mathcal{F},B)-(k_p-1)$.

(2) $\chi(C)+K_{\mathcal{F}}C=\sum\limits_{p\in C}\sum\limits_{B\in C(p)}\mu_p(\mathcal{F},B)$.

证明 (1) 来自于习题 12.12 (3) 和 [Tan94, Lemma 1.2].

(2) 来自于命题 12.2.4, 注记 12.2.3 以及

$$\chi_{\mathrm{top}}(C)=\chi_{\mathrm{top}}(\widetilde{C})-\sum_{p\in C}(k_p(C)-1),$$

这里 $\widetilde{C}$ 是 C 的正规化. ■

12.2.5 变分指标

设 $\omega=B(x,y)dx-A(x,y)dy$ 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 $p\in X$ 附近的微分场. 我们在 p 的小邻域 U 内定义光滑的 $(1,0)$-形式

$$\beta=F\cdot\left(\frac{\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}}{|A|^2+|B|^2}\right)\cdot\left(\overline{A}dx+\overline{B}dy\right) \tag{12-22}$$

这里 F 是局部光滑函数, 使得在 p 的某个邻域 $V\subset U$ 内恒取零, 在某个邻域 $V'\subset U$ 之外恒取 1 $(V\subset V')$. 直接验证可知, 在 $U\setminus V'$ 上有

$$d\omega=\beta\wedge\omega. \tag{12-23}$$

对 $\mathcal{F}$-不变曲线 C, 我们引入变分指标 (Variation)

$$Var(\mathcal{F},C,p)=Res_0\{\beta\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma\beta,$$

这里 γ 是 C 中围绕 p 的小环路. 由简单计算可知, 对于 $\mathcal{F}$ 的光滑点 p, $Var(\mathcal{F},C,p)=0$.

注 12.2.5 变分指标中的 β 也可以替换成其他满足 (12-23) 的光滑 $(1,0)$- 形式. 由于 C 是 $\mathcal{F}$-不变的, 因此这一替换不影响它的值. ■

为了研究变分指标的整体性质, 我们还需要一些准备工作. 首先选取合适的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$. 在每个 U_i 上, 叶状 $\mathcal{F}$ 对应的微分 ω_i 都配备了光滑的 $(1,0)$-形式 β_i 以及开邻域 $V_i\subset U_i$, 使得 $V_i\cap U_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, 并且在 $U_i\setminus V_i$ 上满足

$$d\omega_i=\beta_i\wedge\omega_i. \tag{12-24}$$

这样, 在 $U_i\cap U_j$ 上, 式 (12-24) 处处成立. 设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数. 那么在 $U_i\cap U_j$ 上,

$$\beta_i\wedge\omega_i=d\omega_i=d(\varphi_{ij}\omega_j)=d\varphi_{ij}\wedge\omega_j+\varphi_{ij}d\omega_j$$

$$
\begin{aligned}
&= d\varphi_{ij} \wedge \omega_j + \varphi_{ij}\beta_j \wedge \omega_j = d\varphi_{ij} \wedge \omega_j + \beta_j \wedge \omega_i \\
&= \left(\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j\right) \wedge \omega_i.
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\left(\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j - \beta_i\right) \wedge \omega_i = 0. \tag{12-25}
$$

由注记 12.1.1, ω_i 可以看成 $N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 的基. 因此式 (12-25) 是 $N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 的光滑截面的 1-余链. 由于 $N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 作为光滑截面层是精细层, 故一阶上同调为零. 因此存在 U_i 上的光滑 $(1,0)$-形式 γ_i, 使得 $\gamma_i \wedge \omega_i = 0$ 且在 $U_i \cap U_j$ 上有

$$
\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j - \beta_i = \gamma_i - \gamma_j.
$$

令 $\tilde{\beta}_i = \beta_i + \gamma_i$. 由上面的关系式, 在 U_i 上, 我们仍有

$$
d\omega_i = \tilde{\beta}_i \wedge \omega_i.
$$

现在我们可以定义整体 2-形式

$$
\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\tilde{\beta}_i
$$

Ω 可以分拆为 $(2,0)$-形式与 $(1,1)$- 形式, 后者即为 Dolbeault 意义上的陈类, 亦即 $c_1(N_{\mathcal{F}})$. 容易验证, 在 $U_i \setminus V_i$ 上有

$$
\Omega \wedge \omega_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\tilde{\beta}_i \wedge \omega_i = 0. \tag{12-26}
$$

以及

$$
\Omega \wedge \Omega = 0. \tag{12-27}
$$

命题 12.2.6 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么

$$
N_{\mathcal{F}}C = \sum_{p \in C} Var(\mathcal{F}, C, p).
$$

证明 由式 (12-26), 在 $C \cap (U_i \setminus V_i)$ 上恒有 $\Omega \wedge \omega_i = 0$. 因此对于 $\mathcal{F}$-不变曲线 C, Ω 限制在的 $C \cap (U_i \setminus V_i)$ 上恒为零. 因此 $\int_C \Omega$ 实际上由每个奇点在局部邻域上的贡献所得. 利用 Stockes 公式, 即得

$$
N_{\mathcal{F}}C = \int_C \Omega = \sum_{p \in C \cap Sing(\mathcal{F})} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma(p)} \tilde{\beta} = \sum_{p \in C \cap Sing(\mathcal{F})} Var(\mathcal{F}, C, p).
$$

这就完成了证明. ■

12.2.6 Camacho-Sad 指标

设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$. 回顾式 (12-9), 我们可以局部上改写成

$$
-\frac{\eta}{h} = \frac{df}{f} - \frac{g\omega}{fh},
$$

这里 $f=0$ 是 C 在 p 附近的局部方程, g,h 是全纯函数, η 是全纯 1-形式. 我们定义Camacho-Sad 指标

$$CS(\mathcal{F},C,p)=Res_p\left\{-\frac{\eta}{h}\Big|_C\right\}=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma\frac{\eta}{h},$$

这里 γ 是 C 上围绕 p 的小环路.

例 12.2.13 设 p 是既约奇点.

(1) 若 p 是非退化的, 局部上 $\omega=\lambda y(1+o(1))dx-x(1+o(1))dy$, 则由直接计算可知

$$\begin{aligned}CS(\mathcal{F},x=0,p)=&\frac{1}{\lambda},\\CS(\mathcal{F},y=0,p)=&\lambda.\end{aligned}$$

(2) 若 p 是鞍-结点, 考虑 Dulac 标准型

$$y^{k+1}dx-\left(x+axy^k+yF(x,y)\right)dy.$$

$y=0$ 是强分界线.

$$CS(\mathcal{F},y=0,p)=0.$$

假设 p 也有弱分界线, 我们适当选取坐标后, 可考虑标准型

$$y^{k+1}dx-x\left(1+ay^k+yF(x,y)\right)dy.$$

于是 $CS(\mathcal{F},x=0,p)=a$. ■

命题 12.2.7 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $p\in C\cap Sing(\mathcal{F})$. 我们有

$$Var(\mathcal{F},C,p)=Z(\mathcal{F},C,p)+CS(\mathcal{F},C,p).$$

证明 由 $Z(\mathcal{F},C,p)$ 的定义, 我们可写为积分形式

$$Z(\mathcal{F},C,p)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma\frac{g}{h}d\left(\frac{h}{g}\right).$$

在小环路 γ 的小邻域内, 我们可以要求 $\frac{h}{g}$ 是非零全纯的. 此时我们已有

$$\begin{aligned}g\omega=&hdf+f\eta,\\d\omega=&\beta\wedge\omega.\end{aligned}$$

令 $\beta'=\frac{g}{h}d\left(\frac{h}{g}\right)-\frac{\eta}{h}$. 利用上面的等式可得

$$d\omega=\beta'\wedge\omega+f\eta',$$

这里 η' 是某个 1-形式 (在 γ 的小邻域内全纯). 由于 C 是 $\mathcal{F}$- 不变的, 故得 $\beta'|_\gamma=\beta|_\gamma$. 因此

$$Var(\mathcal{F},C,p)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma\beta'=Z(\mathcal{F},C,p)+CS(\mathcal{F},C,p).$$

至此完成证明. ■

定理 12.2.3 (Camacho-Sad 公式 [CaSa82, Suw98]) 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么

$$C^2=\sum_{p\in C\cap Sing(\mathcal{F})}CS(\mathcal{F},C,p).$$

证明 结合命题 12.2.6 及命题 12.2.4 即得公式. ■

推论 12.2.3 *设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 若 $\mathcal{F}$ 在 C 上没有奇点, 则 $N_{\mathcal{F}}C = C^2 = 0$.*

12.2.7 Baum-Bott 指标

考虑点 $p \in Sing(\mathcal{F})$ 处的叶状结构 $\omega = B(x,y)dx - A(x,y)dy$. 设
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix}$$
是 A, B 关于 x, y 的雅可比矩阵. [BaBo70] 定义了两类指标
$$PH(\mathcal{F},p) = Res_{(0,0)}\left\{\frac{\det J}{AB}dx\wedge dy\right\},$$
$$BB(\mathcal{F},p) = Res_{(0,0)}\left\{\frac{(\mathrm{Tr}J)^2}{AB}dx\wedge dy\right\} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{S^3}\beta\wedge d\beta,$$
根据 [GrHa94, Ch.5, Sec.2, Page 665] 的讨论, $PH(\mathcal{F},p) = m(\mathcal{F},p)$, 即 $\mathcal{F}$ 在 p 处的重数. 我们更关心 $BB(\mathcal{F},p)$, 它被称为 Baum-Bott 指标.

注 12.2.6 $BB(\mathcal{F},p)$ 与 $Var(\mathcal{F},C,p)$ 实际上并不依赖 β 的选取, 只要这样的 β 满足式 (12-24) 即可. ■

由残数计算可知
$$BB(\mathcal{F},p) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{S^3}\beta\wedge d\beta$$
这里 S^3 是围绕 p 的三维球面. 特别地, 若 p 是非退化奇点, 具有特征值 λ, 那么
$$BB(\mathcal{F},p) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2.$$

定理 12.2.4 (Baum-Bott 公式 [BaBo70]) *在上述定义与记号下, 我们有*
$$N_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F},p).$$

证明 由相交型定义,
$$N_{\mathcal{F}}^2 = \int_X \Omega\wedge\Omega.$$
利用式 (12-27), 这个积分实际上可以归结为每个奇点 p 附近的小邻域 V' 上的积分贡献 $\int_{V_p'}\Omega\wedge\Omega$. 由 Stockes 公式, 即得
$$N_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\partial V_p'}\tilde\beta\wedge d\tilde\beta = \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F},p).$$
这就完成了证明. ■

这个结论也可以推广到带边界的情形 (参见 [BaBo70, Bru97]). 具体言之, 设 $Y \subseteq X$ 是相对紧的区域 (也不要求 X 紧), 带有光滑边界 ∂Y, 并且该边界不与 $Sing(\mathcal{F})$ 相交. 假设 $N_{\mathcal{F}}$ 在 ∂Y 的一个邻域内是平凡的. 因此我们仍然可以构造 ∂Y 附近的光滑 $(1,0)$-形式 β, 满足式 (12-23). 因而可以定义
$$BB(\mathcal{F},\partial Y) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\partial Y}\beta\wedge d\beta$$

以及 $c_1^2(N_{\mathcal{F}|_Y})$. 利用 Stockes 公式以及与 Baum-Bott 公式类似的证明, 即得

命题 12.2.8 (**带边界的** Baum-Bott **公式**) $BB(\mathcal{F},\partial Y)=\sum\limits_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap Y}BB(\mathcal{F},p)-c_1^2(N_{\mathcal{F}|_Y})$.

定义 12.2.2 设 p 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点, ω 是 $\mathcal{F}$ 在 p 的小邻域内对应的微分场. 如果局部上存在闭的半纯 1-形式 γ_0 以及全纯 1-形式 γ_1, 使得

$$d\omega=(\gamma_0+\gamma_1)\wedge\omega, \tag{12-28}$$

我们就说 p 是拟刘维尔型的 (Almost Liouvillean). 如果 $\gamma_1=0$, 就称之为刘维尔型 (Liouvillean). 如果 γ_0 中的极点都是一阶的, 我们就称该奇点是简单的 (Simple).

例 12.2.14 考虑例 12.1.8 中的叶状结构 $\mathcal{F}_\lambda$. 在仿射开集 (x,y) 上, 令

$$\beta=\frac{H+1}{3H(H-1)}dH,\quad H=\frac{y^3-1}{x^3-1}.$$

则 $d\omega_\lambda=\beta\wedge\omega_\lambda$, $d\beta=0$. 因此 $\mathcal{F}$ 是刘维尔型的. ■

引理 12.2.1 设 $p\in Sing(\mathcal{F})$ 是拟维尔型的, 则式 (12-28) 中的 γ 的极点的除子部分 $(\gamma)_\infty$ 是 $\mathcal{F}$-不变的.

证明 设 $q\in(\gamma)_\infty-\{p\}$. 在 q 附近可设 $\omega=adx$, a 是局部处处非零的全纯函数; $\gamma_0=bdx+cdy$, b,c 是局部半纯的. 由式 (12-28) 以及 a 局部处处非零, 可推出 c 是全纯的. 再由 $d\gamma_0=0$ 知, $\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial x}$ 是全纯的. 因此 b 的极点部分含于 $z=0$ 中, 即 $(\gamma)_\infty$ 是 $\mathcal{F}$-不变的. ■

设 $(\gamma)_\infty$ 的局部不可约解析分支 $C_1,\dots,C_r$. 根据上面的引理, C_i 是过 p 的分界线. 我们用 $Res(\gamma_0,C_i)$ 表示 γ_0 围绕 C_i 的残数.

命题 12.2.9 ([Bru97]) 设 $p\in Sing(\mathcal{F})$ 是简单的拟刘维尔型奇点, 那么

$$BB(\mathcal{F},p)=\sum_{i=1}^{r}Res(\gamma_0,C_i)\cdot Var(\mathcal{F},C_i,p).$$

证明 设 $C=\cup_iC_i$, V 是 ∂C 的管状邻域, γ' 是 V 上全纯 1-形式, 满足 $d\omega=\gamma'\wedge\omega$. 取 V 上具有紧支集的光滑解析函数 $\phi\in C_c^\infty(V)$, 使得 ϕ 在更小的邻域内恒取 1. 设 $\beta=\phi\gamma'+(1-\phi)\gamma$, 于是 $d\omega=\beta\wedge\omega$. 注意到 γ,γ' 是全纯的, 因而

$$\beta\wedge d\beta=d\phi\wedge\gamma'\wedge\gamma=d\left((1-\phi)\gamma\wedge\gamma'\right).$$

这样,

$$\int_{S^3}\beta\wedge d\beta=\int_{S^3\cap V}\beta\wedge d\beta=\int_{\partial(S^3\cap V)}(1-\phi)\gamma\wedge\gamma'=\int_{\partial(S^3\cap V)}\gamma\wedge\gamma'=\int_{\partial(S^3\cap V)}\gamma_0\wedge\gamma'$$

设 $V=\cup_iV_i$, V_i 是 ∂C_i 的邻域. 现在问题归结为证明

$$\int_{\partial(S^3\cap V_i)}\gamma_0\wedge\gamma'=(2\pi\sqrt{-1})^2Res(\gamma_0,C_i)Var(\mathcal{F},C_i,p). \tag{12-29}$$

取合适的坐标 (z,w), 使得 C_i 由 $w=0$ 定义, $\partial C_i=\{(z,w)|w=0,|z|=1\}$, $S^3\cap V_i=\{(z,w)||w|<\varepsilon,|z|=1\}$ (这里 S^3 不一定需要是球). 此时可写 $\gamma_0=\lambda_i\frac{dw}{w}+g_i$, 其中 g_i 全纯, $\lambda_i=Res(\gamma_0,C_i)$. 再设 $\gamma=adz+bdw$. 这样, 我们有

$$\int_{\partial(S^3\cap V_i)}\gamma_0\wedge\gamma'=\int_{|w|=\varepsilon,|z|=1}\gamma_0\wedge\gamma'=2\pi\sqrt{-1}\lambda_i\int_{|z|=1}a(z,0)dz=2\pi\sqrt{-1}\lambda_i\int_{\partial C_i}\gamma'.$$

由此可得式 (12-29). ■

例 12.2.15 考虑鞍-结点

$$\omega = z^{p+1}dw - w(1+\nu z^p)dz.$$

设 $\gamma = (p+1)\frac{dz}{z} + \frac{dw}{w}$. 我们有 $d\omega = \gamma \wedge \omega$.因而由命题 12.2.9 可得 $BB(\mathcal{F}, p) = 2p + 2 + \nu$. ■

12.2.8 分界线定理

我们将在这一节讨论经过叶状结构奇点的分界线的存在性. 处理此问题的关键工具是 Camacho-Sad 公式.

定理 12.2.5 (**分界线定理** [Cam88]) *设 C 是连通的 $\mathcal{F}$-不变曲线, 且满足以下诸条件:*

(1) *$C \cap Sing(\mathcal{F})$ 中的点都是既约的 (因此 C 是正规交),*

(2) *C 是负定曲线且对偶图构成树.*

那么存在奇点 $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$ 以及过 p 的分界线 C', 使得 C' 不含于 C 中.

证明 反证法, 假设命题不成立. 先考察 $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$. 如果 p 不是 C 的结点, 那么它只能是鞍-结点, 否则将有两条分界线经过, 由假设条件, 它们都是 C 中的分支, 矛盾! 同样地, 由假设条件, 此时过 p 的分支就是强分界线, 并且它没有弱分界线. 这样, $CS(\mathcal{F}, C, p) = 0$.

设 $C = \sum\limits_{i=1}^{r} C_i$. 对任何分支 C_i, 由上面讨论以及 Camacho-Sad 公式, 我们有

$$C_i^2 = \sum_{p \in C_i \cap (C - C_i)} CS(\mathcal{F}, C_i, p) = \sum_{p \in C_i \cap (C - C_i)} Re\left(CS(\mathcal{F}, C_i, p)\right).$$

最后一个等式来自于 C_i^2 是实数的事实.

由 C 的负定性, 对任何非零 $\mathbb{R}$-除子 $D = n_1C_1 + \cdots + n_rC_r$, 我们总有 $D^2 < 0$. 另一方面, 结合上述 Camacho-Sad 公式, 可得

$$D^2 = \sum_{1 \le i < j \le r} \left(n_i^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap C_j)) + n_j^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_j, C_i \cap C_j)) + 2n_in_j\right) C_iC_j.$$

注意 C 是树, 所以上式中的 $C_i \cap C_j$ 要么是空的, 要么是一个结点. 由于每个结点 $C_i \cap C_j$ 要么是 $\mathcal{F}$ 的非退化点, 要么是鞍-结点. 因此由例 12.2.13 的计算,

$$n_i^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap C_j)) + n_j^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_j, C_i \cap C_j)) + 2n_in_j$$

不是负定的二元型. 现在我们利用下面的引理 12.2.2, 即可找到不全为零的实数 $n_1, \cdots, n_r$, 使得 $D^2 = 0$. 这就得到矛盾! 由此即得命题结论. ■

引理 12.2.2 *设 $C = \sum\limits_{i=1}^{r} C_i$ 是树, a_{ij} 是满足 $a_{ij}a_{ji} \le 1$ 的实数 $(i, j = 1, \cdots, r)$. 那么存在不全为零实数 $n_1, \cdots, n_r$ 使得*

$$\sum_{1 \le i < j \le r} \left(a_{ij}n_i^2 + a_{ji}n_j^2 + 2n_in_j\right) C_iC_j = 0.$$

证明 为书写方便, 我们记

$$c_{ij} = a_{ij}n_i^2 + a_{ji}n_j^2 + 2n_in_j.$$

今对 r 施归纳法. $r = 1, 2$ 时是显然的. 假设 $< r$ 的情形已证. 不妨设 C_r 是树的端点, 连接唯一的分支 C_{r-1}. 由归纳假设, 对树 $C - C_r$, 可找到不全为零的实数 $n_1, \cdots, n_{r-1}$, 使得

$$\sum_{1\le i<j\le r-1} c_{ij}C_iC_j = 0.$$

由于 $a_rb_r \ge 1$, 所以存在实数 n_r 满足

$$c_{r-1,r} = a_{r,r-1}n_r^2 + a_{r-1,r}n_{r-1}^2 + 2n_rn_{r-1} = 0.$$

现在我们有

$$\sum_{1\le i<j\le r} c_{ij}C_iC_j = \sum_{1\le i<j\le r-1} c_{ij}C_iC_j + c_{r-1,r}C_{r-1}C_r = 0.$$

综上可知, 对任何 r, 结论均成立. ■

推论 12.2.4 ([CaSa82]) *对任何 $\mathcal{F}$ 的奇点 p, 都存在至少一条经过它的分界线.*

证明 考虑 $\mathcal{F}$ 在 p 处的奇点解消 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得诱导的叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在例外曲线 C 上只有既约奇点. 如果 C 中有一条分支不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 不变的, 那么 p 实际上是多临界点 (即有无数条分界线, 它们来自与该分支横截相交的叶状结构). 如果 C 的任何分支都是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么由分界线定理即得经过 $C \cap Sing(\widetilde{\mathcal{F}})$ 中某点的分界线 (不含于例外曲线中), 其像即为过 p 的分界线. ■

满足分界线定理条件的一类重要曲线是所谓的 $\mathcal{F}$-链.

定义 12.2.3 *如果曲线 C 满足如下条件, 就称为 $\mathcal{F}$-链 ($\mathcal{F}$-chain):*

(1) *$C = \cup_{i=1}^r C_i$ 是 Hirzebruch-Jung 链, 即每个 C_i 都是光滑有理曲线且 $C_i^2 \le -2$, 满足*

$$C_iC_j = \begin{cases} 1, \text{ 若 } |i-j| = 1, \\ 0, \text{ 若 } |i-j| > 1. \end{cases}$$

(2) *每个 C_i 都是 $\mathcal{F}$-不变的.*

(3) *$C \cap Sing(\mathcal{F})$ 都是非退化的既约奇点.*

(4) *$Z(\mathcal{F}, C_1) = 1$, $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$ $(i = 2, \cdots, r)$. C_1 也被简称为该链的第一分支 (曲线).*

进一步, 如果一个 $\mathcal{F}$-链不能严格含于其他 $\mathcal{F}$-链中, 则称其为极大 $\mathcal{F}$-链.

由分界线定理, 极大 $\mathcal{F}$-链上有一奇点, 它有一条分界线不在链中. 因此该奇点只能在最后一条分支上. 特别地, 如果有一条 $\mathcal{F}$-不变曲线与该链相交, 那么它只能通过这个奇点.

推论 12.2.5 *极大 $\mathcal{F}$-链彼此互不相交.*

证明 反证法. 假设两个极大 $\mathcal{F}$-链相交. 由上面的讨论, 它们的并 $C = \cup_{i=1}^r C_i$ 仍满足上述定义中的 (1)(2)(3), 且有

$$Z(\mathcal{F}, C_1) = Z(\mathcal{F}, C_r) = 1, \quad Z(\mathcal{F}, C_i) = 2 \; (i = 2, \cdots, r-1).$$

但这与分界线定理矛盾! 故得结论. ■

12.2.9 非多临界点

设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $p \in Sing(\mathcal{F})$ 是非多临界点, C 是过 p 的 $\mathcal{F}$-不变曲线. 考虑 p 的小邻域 U 以及一个局部全纯映射 $f : U \to \mathbb{C}$, 使得 $C = f^{-1}(0)$. 设 $C_1, \ldots, C_r$ 是 C 在 p 处局部不可约分支, 分别由 $f_i = 0$ 定义, $f = f_1^{n_1} \ldots f_r^{n_r}$. 我们考虑在 U 上由

$$df = f\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \frac{df_i}{f_i}\right)$$

生成的叶状 $\mathcal{G}_f$. 这两类叶状存在密切联系. 下面我们要比较这两个叶状的奇点指标.

命题 12.2.10 *在上述记号与假设下, 设 C' 是 C 中若干不可约分支的并. 那么我们有*

(1) (Camacho-Neto-Sad 阶数不等式 [CSN84]) $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) \geq \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f)$, 即 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) + 1 \geq \mathrm{mult}_p(C_{\mathrm{red}})$.

(2) (Carnicer 不等式 [CarM94]) $Z(\mathcal{F}, C', p) \geq Z(\mathcal{G}_f, C', p)$, 即 $\mu_p(\mathcal{F}, C') \geq \mu_p(\mathcal{G}_f, C')$.

证明 我们采用 [Bru97] 的证明. 首先考虑一系列爆发 $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_n : X_n \to X$, 使得 $\sigma^* C$ 是正规交:

$$(X, E_n) \xrightarrow{\sigma_n} (X_{n-1}, E_{n-1}) \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_2} (X_1, E_1) \xrightarrow{\sigma_1} X_0 = X,$$

这里 E_i 是 σ_i 的例外曲线, $p_{i-1} = \sigma_i(E_i)$ (这里令 $p_0 = p$).

我们对爆发次数 n 施归纳法. 当 $n = 0$ 时, $\mathrm{ord}_p(G_f) = 1$. $Z(G_f, \Gamma, p) = 1$ (Γ 是 C 中过 p 的任一不可约分支). 结合习题 12.12 可得结论. 今假设对爆发次数 $< n$ 的情形均已证. 设 $\mathcal{F}_1 = \sigma_1^* \mathcal{F}$ (相应地, $\mathcal{G}_1 = \sigma_1^* \mathcal{G}_f$)) 是爆发诱导的叶状. $\mathcal{G}_1$ 显然是由 $d\sigma_1^* f$ 诱导. E_1 既是 $\mathcal{F}_1$-不变, 也是 $\mathcal{G}_1$-不变的. 由例 12.1.3 的讨论, 在这种情形下,

$$N_{\mathcal{F}_1} E_1 = \mathrm{ord}_p(\mathcal{F}), \quad N_{\mathcal{G}_1} E_1 = \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f).$$

结合 Camacho-Sad 公式即得

$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) = -1 + \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{F}_1)} Z(\mathcal{F}_1, E_1, q),$$
$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f) = -1 + \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{G}_1)} Z(\mathcal{G}_1, E_1, q).$$

注意到 $Sing(\mathcal{G}_1) \subseteq Sing(\mathcal{F}_1)$, 故由归纳假设, $Z(\mathcal{F}_1, E, q) \geq Z(\mathcal{G}_1, E, q)$ 对任何 $q \in Sing(\mathcal{G}_1)$ 成立. 当 $q \notin Sing(\mathcal{G}_1)$, 这个不等式显然也成立. 因此 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) \geq \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f)$. (注: 这个不等式也能直接证明, 见习题 12.14.)

由习题 12.12 (3) 的结论, 我们有

$$Z(\mathcal{F}, C', p) = \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{F}_1)} Z(\mathcal{F}_1, \widetilde{C}', q) + \mathrm{mult_p(C')}(\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) - \mathrm{mult_p(C')}),$$
$$Z(\mathcal{G}, C', p) = \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{G}_1)} Z(\mathcal{F}_1, \widetilde{C}', q) + \mathrm{mult_p(C')}(\mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f) - \mathrm{mult_p(C')}),$$

由归纳假设以及前面已证的结论 (1), 即得 (2). ■

推论 12.2.6 ([Bru97]) *在命题 12.2.10 的记号与假设下, 我们有*

$$Z(\mathcal{F},C',p)\geq Z(\mathcal{G}_f,C',p)=(C'C'')_p\geq 0,$$

这里 $C''=C\setminus C'$.

推论 12.2.7 (**平面叶状的庞加莱问题** [CarM94]) *设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 它不经过 $\mathcal{F}$ 的任何多临界点, 那么* $\deg C\leq \deg\mathcal{F}+2$.

证明 由 Camacho-Sad 公式及 Carnicer 不等式, 我们有

$$(\deg\mathcal{F}+2-\deg C)\deg C=N_{\mathcal{F}}C-C^2=\sum_{p\in C}Z(\mathcal{F},C,p)\geq 0.$$

这就得到结论. ■

12.2.10 **绕异性**

设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状, $p\in X$ 是 $\mathcal{F}$ 的正则点, U 是包含 p 的小邻域, 使得 $U\cap Sing(\mathcal{F})=\emptyset$. 这样, $\mathcal{F}$ 在 U 上有局部的首次积分 $f\in\mathcal{O}_{U,p}$ (即 $df\wedge\omega=0$). 我们可以构造 $\mathcal{F}$ 在 p 处的横截面 (Transversal section)

$$\Sigma_p:=\{q\in U|\ g(q)=0\},$$

这里 $g\in\mathcal{O}_{U,p}$, 使得 Σ_p 和 f 给出的叶构成局部坐标系 (即 $\mathcal{F}$ 在 Σ_p 上处处横截交). Σ_p 上每个点都有唯一的叶 $f=t$ 经过它, 因而这就给出了 Σ_p 上的局部坐标.

另取 $q\in U$, 设 Σ_q 是 $\mathcal{F}$ 在 q 处的横截面. 我们有唯一的双全纯映射

$$h:\Sigma_p\longrightarrow\Sigma_q,\quad z\to h(z),$$

这里 h 按如下方式定义: 过 z 的唯一叶和 Σ_q 也有唯一的交点 $h(z)$ (详细的叙述参见 [Mov15, 第 5.2 节]).

设 L 是 $\mathcal{F}$ 的叶, $\delta:[0,1]\to L$ 是 L 的道路 (允许有限个自交点), $\delta(0)=p$, $\delta(1)=q$. 选取 δ 的有限开覆盖 $U_1,\ldots,U_n$, 使得 $U_{i-1}\cap U_i\neq\emptyset$. 取 $p_i\in U_{i-1}\cap U_i\cap\delta$ ($p_0=p$, $p_{n+1}=q$). 设 Σ_{p_i} 是 $\mathcal{F}$ 在 p_i 处的横截面. 由上面讨论, 我们有双全纯映射 $h_i:\Sigma_{p_i}\to\Sigma_{p_{i+1}}$. 这样, 我们得到复合映射

$$h:=h_n\ldots h_0:\Sigma_p\to\Sigma_q.$$

h 被称为 (沿着 δ) 从 Σ_p 到 Σ_q 的绕异性映射 (Holonomy map). 当 $p=q$, δ 是简单环路时, $h:\Sigma_p\to\Sigma_p$ 称为 $\mathcal{F}$ 沿着 δ 在 Σ_p 中的绕异性 (Holonomy).

注 12.2.7 对实数情形的叶状结构, 上述的绕异性 h 也被称为庞加莱第一回归映射 (Poincaré first return map). ■

为方便讨论, 我们引入一些记号. 设 U_δ 是 δ 的邻域. 设 $t\in[0,1]$, $z\in U_\delta$ 是接近 $\delta(t)$ 的点, L_z 是过 z 的叶, $k(z)=\Sigma_p\cap L_z$. $\delta|_{[0,t]}$ 可以提升到 L_z 中从 $k(z)$ 到 z 的道路 $\delta_{k(z),z}$. 这就给出全纯映射 $k:\Sigma_q\to\Sigma_p$. 易知 $h=k^{-1}$.

回顾式 (12-23), $d\omega=\beta\wedge\omega$. β 在每一条叶上都是唯一确定的 1-形式 (即不依赖于 β 的选取). 我们记 $\frac{d\omega}{\omega}:=-\beta$. 我们定义 U_δ 上的函数

$$g_\omega(z)=\exp\left(\int_{\delta_{k(z),z}}-\frac{d\omega}{\omega}\right)$$

命题 12.2.11　设 $a=\delta(t_1)$, $b=\delta(t_2)$ $(0\le t_1\le t_2\le 1)$, $h:\Sigma_a\to\Sigma_b$ 是沿着 $\delta|_{[t_1,t_2]}$ 的绕异性映射. 我们有
(1) $d(\frac{\omega}{g_\omega})=0$;
(2) $h^*(\frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_b})=\frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_a}$

证明　这可以归结为局部问题.

(1) 设 $q\in\delta$, U 是 q 的小邻域. 考虑 U 的局部坐标 (x,y), 使得过 p 的叶 L_p 由方程 $y=0$ 定义, 且 $\omega=B(x,y)dy$, $\frac{d\omega}{\omega}=A(x,y)dx$.

取定 $c=(x_1,0)\in U\cap\delta$, $r=\Sigma_c\cap L_z$. 令 $g(z)=\int_{k(z)}^{z}\frac{d\omega}{\omega}$. 于是
$$g(z)=\int_{k(z)}^{r}\frac{d\omega}{\omega}+\int_{r}^{z}\frac{d\omega}{\omega}.$$
上式右端的前一积分是 y 的函数, 记为 $s(y)$. 因此
$$dg=s'(y)dy+Adx+(\int_{x_1}^{x}\frac{\partial A(\xi,\eta}{\partial\eta}d\xi)dy.$$
因此 $dg\wedge\omega=Adx\wedge Bdy=\frac{d\omega}{\omega}\wedge\omega$. 注意到 $g_\omega=e^g$, 故有
$$d(\frac{\omega}{g_\omega})=e^{-g}(-dg\wedge\omega+d\omega)=e^{-g}(-\frac{d\omega}{\omega}\wedge\omega+d\omega)=0.$$

(2) 设 $\frac{\omega}{g_\omega}=Gdy$, 那么由上可知 $G=G(y)$ 只依赖于 y. 取定 $d=(x_2,0)\in\delta\cap U$. 我们有
$$h^*(\frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_d})=h^*(G|_{\Sigma_d})d(h^*(y|_{\Sigma_d}))=Gdy|_{\Sigma_c}=\frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_c}.$$
至此完成证明. ■

推论 12.2.8　$h^*(\omega|_{\Sigma_q})=\exp(-\int_{\delta_{z,h(z)}}\frac{d\omega}{\omega})\cdot\omega|_{\Sigma_p}$. 特别地, 分别选取 Σ_p,Σ_q 的合适坐标 $z,\bar z$, 使得 $z(p)=\bar z(q)=0$, 且 $\omega|_{\Sigma_1}=dz$, $\omega|_{\Sigma_1}=d\bar z$. 那么
$$h'(z)=\exp(-\int_{\delta_{z,h(z)}}\frac{d\omega}{\omega}).$$

这样, 我们就得到如下经典结论.

定理 12.2.6 (**庞加莱公式**)　设 L 是 $\mathcal F$ 的叶, δ 是 L 中的简单闭环路, $p\in\delta$, Σ 是 $\mathcal F$ 在 p 处的横截面, $h:\Sigma\to\Sigma$ 是沿着 δ 的绕异性. 那么
$$h'(p)=\exp\left(\int_\delta-\frac{d\omega}{\omega}\right).$$

12.3　有理首次积分

设 $\mathcal F$ 是曲面 X 上的叶状结构, $\omega=\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 是对应的微分场. 如果存在一个 X 上的有理函数 f, 使得 $df\wedge\omega=0$, 我们就称 f 是*有理首次积分* (Rational first integral), 或 $\mathcal F$ 有有理首次积分 (或者 $\mathcal F$ 是代数可积的, algebraically integrable). 条件 $df\wedge\omega=0$ 也等价于 $\omega=gdf$, 这里 g 是有理函数.

哪些叶状结构存在有理首次积分? 这就是著名的*庞加莱问题*. 在平面叶状结构情形, 按照庞加莱的想法, 只要不变曲线的次数上界能够被叶状结构的次数控制住, 那么我们就能通过确定不变曲线的代数方程的系数来解决庞加莱问题. 在某些特殊条件下, 这是可以做到的 (比如推论 12.2.7).

12.3.1 Darboux 定理

假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分 $f=\frac{F}{G}$ (F,G 是多项式). 注意到 $df=\frac{GdF-FdG}{G^2}$, 因此

$$\omega\wedge(GdF-FdG)=0.$$

因而 $GdF-FdG$ 给出的叶状显然有有理首次积分 f.

命题 12.3.1 *假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分 $f=\frac{F}{G}$, 那么由方程 $F-tG=0$ ($t\in\mathbb{P}^1$) 定义的曲线是 $\mathcal{F}$-不变.*

证明 这来自于 $\omega\wedge(dF-tdG)=(F-tG)(\omega\wedge\frac{dG}{G})$. ■

对平面叶状结构, 有如下著名的 Darboux 定理.

定理 12.3.1 (Darboux 定理) *设 $\mathcal{F}$ 是 d 次平面叶状结构. 如果它有至少 $\frac{1}{2}(d+1)d+3$ 条 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分.*

证明 设 $r=\frac{1}{2}(d+1)d+3$, $C_1,\ldots,C_r$ 是 $\mathcal{F}$ 不变曲线. 回顾 $\mathcal{F}$ 在仿射坐标 (x,y) 下的标准表达式 (12-5)

$$(P(x,y)+xR(x,y))\frac{\partial}{\partial x}+(Q(x,y)+yR(x,y))\frac{\partial}{\partial y}\in H^0(X,T_X(d-1)),$$

这里 $\max\{\deg P,\deg G\}\le d$, R 是 d 次齐次多项式. 设 $f_i=0$ 是 C_i 的仿射方程. 由命题 12.1.2, 我们可以有

$$\omega\wedge\frac{df_i}{f_i}=g_idx\wedge dy,$$

这里 g_i 是多项式. 展开上时即得

$$(P+xR)\frac{\partial f_i}{\partial x}-(Q+xR)\frac{\partial f_i}{\partial y}=f_ig_i.$$

由此可知 $\deg g_i\le d$. 将上式左右的最高次项取出 (不妨设 $\deg f_i=m_i$, 以 $(f_i)_{m_i}$ 表最高次项), 可得

$$xR\frac{\partial(f_i)_{m_i}}{\partial x}-yR\frac{\partial(f_i)_{m_i}}{\partial y}=(f_i)_{m_i}(g_i)_d.$$

这意味着 $(g_i)_d=c_iR$ (c_i 是常数). 因此可设

$$g_i=p_i+c_iR,\quad \deg p_i\le d-1.$$

考虑向量空间 $\mathbb{C}[x,y]_{\le d-1}=\{p\in\mathbb{C}[x,y]|\deg p\le d-1\}$ 及子空间 $V=Span\langle p_1,\ldots,p_r\rangle$. 我们有

$$m:=\dim_{\mathbb{C}}V\le\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x,y]_{\le d-1}=\frac{1}{2}(d+1)d.$$

不妨设 $p_1,\ldots,p_m$ 是 V 的一组基. 我们取 p_{m+1},p_{m+2},p_{m+3}. 于是存在 $\mathbb{C}$-线性表达式

$$\begin{cases} 0=p_{m+1}+\sum\limits_{i=1}^{m} r_ip_i, \\ 0=p_{m+2}+\sum\limits_{i=1}^{m} s_ip_i, \\ 0=p_{m+3}+\sum\limits_{i=1}^{m} t_ip_i. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} \alpha_1=\frac{df_{m+1}}{f_{m+1}}+\sum\limits_{i=1}^{m} r_i\frac{df_i}{f_i}, \\ \alpha_2=\frac{df_{m+2}}{f_{m+2}}+\sum\limits_{i=1}^{m} s_i\frac{df_i}{f_i}, \\ \alpha_3=\frac{df_{m+3}}{f_{m+3}}+\sum\limits_{i=1}^{m} t_i\frac{df_i}{f_i}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \omega\wedge\alpha_1=(c_{m+1}+\sum\limits_{i=1}^{m} r_ic_i)Rdx\wedge dy, \\ \omega\wedge\alpha_2=(c_{m+2}+\sum\limits_{i=1}^{m} s_ic_i)Rdx\wedge dy, \\ \omega\wedge\alpha_3=(c_{m+3}+\sum\limits_{i=1}^{m} t_ic_i)Rdx\wedge dy. \end{cases}$$

如果上述三项不全为零 (不妨设 $\omega\wedge\alpha_3\neq 0$), 我们取合适的常数 γ_1,γ_2, 使得 $\beta_i=\alpha_i-\gamma_i\alpha_3$ $(i=1,2)$ 满足 $\omega\wedge\beta_i=0$. 如果三项均为零, 则直接取 $\beta_i=\alpha_i$ $(i=1,2)$. 因此, 总存在有理函数 f, 使得

$$\beta_1=f\beta_2.$$

注意到 β_1,β_2 分别含有 $\frac{df_{m+1}}{f_{m+1}},\frac{df_{m+2}}{f_{m+2}}$, 因此 f 不可能是常数, 即 $df\neq 0$. 由于 $d\beta_1=0$, 故 $df\wedge\beta_2=0$, 这意味着 $df\wedge\omega=0$, 即 f 是 $\mathcal{F}$ 的首次积分. ■

注 12.3.1 如果 $R=0$ (即无穷远直线 L_∞ 是 $\mathcal{F}$-不变的, 见例 12.1.11), 那么只要有 $\frac{1}{2}(d+1)d+2$ 条不变曲线就能保证 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分. ■

12.3.2 对数叶状结构与有理首次积分

仿照定理 7.4.1, 我们可得到如下经典结论.

定理 12.3.2 (Castelnuovo-de Franchis) *如果 $h^0(X,N_{\mathcal{F}}^\vee)\geq 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 是有某个纤维化 $f: X\to C$ 诱导, 且 $g(C)\geq 2$.*

为了进一步研究有理首次积分, 我们需要引入对数 1-形式及对数叶状结构. 设 C 是一条曲线, $U\subseteq X$ 是开集, ω 是 U 上的半纯 1- 形式, 满足如下条件: 对任何 $p\in U$, 存在含 p 的开子集 V, 使得

$$\omega|_V=\omega_0+\sum_{i=1}^{n} g_i\frac{df_i}{f_i},$$

这里 ω_0 是 V 上的全纯 1-形式, $f_i=0$ 是 C 在 p 处的局部不可约分支 C_i 的方程. ω 的极点部分都落在 C 上, 并且是一阶的. 我们称这样的 ω 为极点在 C 上的*对数 1-形式* (Logarithmic 1-

form). 极点在 C上的 对数 1-形式构成了对数微分层 $\Omega_X^1(\log C)$. 这是凝聚层, 在 C 上非正规交奇点之外都是局部自由的. 当 C 是正规交时, 我们已经在第 4.5 节讨论过一些基本性质. 一般情形下, 我们也有类似式 (4-11) 的正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log C) \xrightarrow{Res} \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \longrightarrow 0,$$

这里 $\sigma : \widetilde{C} \to C$ 是 C 的正规化. 设 $\widetilde{C}_i$ 是 C_i 的严格原像, 那么 $Res(\omega)|_{\widetilde{C}_i} = \sigma^*(g_i|_{C_i})$.

设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, ω 是对应的微分场, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线. 设 $p \in C$, V 是 p 的邻域, $f = 0$ 是 $C \cap V$ 的局部既约方程. 当 p 是 C 的光滑点或结点时, $\frac{\omega}{f}$ 是沿着 C 有一阶极点的半纯微分. 利用命题 12.1.2 (5), $d(\frac{\omega}{f}) = \frac{d\omega}{f} - \frac{\tilde{\eta}}{f}$ 沿着 C 也有一阶微分, 因而此时 $\frac{\omega}{f}$ 是对数形式. 当 p 是 C 的非正规交奇点时, $\frac{\omega}{f}$ 在 p 附近未必是对数形式.

定义 12.3.1 (**对数叶状结构**) *如果 $\frac{\omega}{f}$ 在 p 附近是对数的, 我们就说 $\mathcal{F}$ 在 p 处沿着 C 是对数的. 如果 $\mathcal{F}$ 在 C 上每个点处都是对数的, 就称 $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 上的对数叶状结构* (Logarithmic foliation).

例 12.3.1 (1) 任何对数 1-形式 (假设没有一维零点)显然诱导了 (X, C) 的一个对数叶状结构, 这里 C 是它的极点除子.
(2) 如果 C 是正规交的, 并且 C 是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 $\mathcal{F}$ 当然是 (X, C) 上的对数叶状结构. ■

对数叶状也有如下正合列

$$0 \longrightarrow N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C) \longrightarrow \Omega_X^1(\log C) \longrightarrow \mathscr{I}_{Z'}(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0, \quad Z' \subseteq Sing(\mathcal{F}). \tag{12-30}$$

类似地, 我们得到

定理 12.3.3 (**对数** Castelnuovo-de Franchis **定理**) *设 C 是 X 中的曲线, $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 的对数叶状结构, 满足 $h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C)) \geq 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 是纤维化.*

Bogomolov 定理 (定理 7.4.3) 也可以推广到对数情形.

定理 12.3.4 (**对数** Bogomolov **定理**) *设 $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 上的对数叶状结构, 于是*

$$kod(N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C)) \leq 1.$$

等号成立时, $\mathcal{F}$ 是纤维化.

定理 12.3.5 (Jouanolou **定理** [Jou78]) *设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, 有至少 $N = h^0(X, K_{\mathcal{F}}) + h^{1,1}(X) - q(X) + 2$ 条不可约 $\mathcal{F}$-不变曲线. 那么 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分.*

证明 虽然 $\mathcal{F}$ 未必是 (X, C) 上的对数叶状结构, 但仍有限制映射 $res : \Omega_X^1(\log C) \to K_{\mathcal{F}}$, 其核是 $N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C)$ 的子层. 因此

$$h^0(X, \Omega_X^1(\log C)) \leq h^0(X, K_{\mathcal{F}}) + h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C)).$$

由正合列 (12-30), 我们有

$$h^0(X, \Omega_X^1(\log C)) \geq N + q(X) - h^{1,1}(X) = h^0(X, K_{\mathcal{F}}) + 2.$$

结合这两个不等式得 $h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(C)) \geq 2$. 剩下的证明与前面类似. ■

推论 12.3.1 (Darboux) *$\mathcal{F}$ 有有理首次积分当且仅当它有无限多条 $\mathcal{F}$-不变曲线.*

12.4 叶状结构的双有理几何

12.4.1 相对极小模型与极小模型

如果一个叶状结构只有既约奇点, 我们就称之为*既约叶状结构* (Reduced foliation). Seidenberg 解消定理任何叶状结构都可以通过一系列爆发变成既约叶状结构. 这样得到的叶状结构通常并不唯一. 因此我们希望能引入某种极小模型.

定义 12.4.1 *设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, E 是 X 上的一条 (-1)-曲线, $\sigma:(X,E)\to(X',p)$ 收缩 E 到 p, $\mathcal{F}'$ 是 X' 上由 σ 诱导的叶状结构. 如果 p 是 $\mathcal{F}'$ 的正则点或既约奇点, 则称 E 是 $\mathcal{F}$-例外曲线 ($\mathcal{F}$-exceptional curve).*

通过直接计算可知, 如果 E 是 $\mathcal{F}$-例外曲线, 那么 E 是 $\mathcal{F}$-不变的, 并且对应如下几类情形:

(1) $\{q\}=Sing(\mathcal{F})\cap E$. 收缩 E 后, p 是 $\mathcal{F}'$ 的正则点.

(2) $\{q_1,q_2\}=Sing(\mathcal{F})\cap E$, 其中 q_1,q_2 均为非退化的既约奇点. 此时, p 是 $\mathcal{F}'$ 的非退化奇点.

(3) $\{q_1,q_2\}=Sing(\mathcal{F})\cap E$, 其中 q_1 为非退化的既约奇点, q_2 是鞍- 结点. 此时, p 是 $\mathcal{F}'$ 的鞍-结点 (参看例 12.2.3).

若一个既约叶状结构 $\mathcal{F}$ 没有 $\mathcal{F}$-例外曲线, 我们就称之为*相对极小的* (Relatively minimal). 相对极小的另一种等价描述如下.

命题 12.4.1 *既约叶状结构 $(X,\mathcal{F})$ 是相对极小的当且仅当如下条件成立: 对任何既约叶状结构 $(Y,\mathcal{G})$, 若存在双有理态射 $\sigma:(X,\mathcal{F})\longrightarrow(Y,\mathcal{G})$ 将 $\mathcal{F}$ 映为 $\mathcal{G}$, 那么 σ 是双全纯的.*

证明 ($\Longrightarrow$) 如果 σ 不是双全纯的, 那么 σ 是有限步收缩的复合. 但 $\mathcal{F}$ 是相对极小的, 没有 $\mathcal{F}$-例外曲线, 因而任何收缩都会出现非既约奇点. 另一方面, 由于既约叶状结构的爆发都只产生既约奇点, 这就得到矛盾!

($\Longleftarrow$) 如果 $(X,\mathcal{F})$ 不是相对极小, 则存在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E. 考虑收缩 E 的态射 $\sigma:(X,\mathcal{F})\to(X,\mathcal{F}_0)$. 由假设条件, σ 是双全纯, 矛盾! ■

命题 12.4.2 *任何叶状结构都有相对极小模型.*

证明 由 Seidenberg 定理, 存在 $(X,\mathcal{F})$ 的既约模型 $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$. 如果 $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{F}})$ 不是相对极小的, 则存在 $\widetilde{\mathcal{F}}$-例外曲线. 收缩这条例外曲线后, 我们得到新的既约模型. 以此类推, 有限步后即得相对极小模型. 这里之所以能保证是有限步, 是因为 $\rho(\widetilde{X}):=\dim_{\mathbb{Q}}NS(\widetilde{X})$ 是有限数. ■

类似相对极小的等价叙述, 我们可以进一步定义极小的概念.

定义 12.4.2 *一个相对极小的叶状结构 $(X,\mathcal{F})$ 如果满足以下性质, 则称为极小的 (Minimal): 对任何相对极小叶状结构 $(Y,\mathcal{G})$, 如果存在双有理映射 $\sigma:(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(Y,\mathcal{G})$ 将 $\mathcal{F}$ 映为 $\mathcal{G}$, 那么 σ 也是双全纯的.*

同样地, 极小的定义也可以按如下方式等价叙述.

命题 12.4.3 既约叶状结构 $(X,\mathcal{F})$ 是极小的当且仅当如下条件成立: 对任何既约叶状结构 $(Y,\mathcal{G})$, 若存在双有理映射 $\sigma:(Y,\mathcal{G})\dashrightarrow(X,\mathcal{F})$, 那么 σ 是态射.

证明 $(\Longrightarrow)$ 考虑 $(Y,\mathcal{G})$ 的相对极小模型 $(Y_0,\mathcal{G}_0)$ 及相应的收缩映射 $\tau:(Y,\mathcal{G})\to(Y_0,\mathcal{G}_0)$. 于是我们有分解 $\sigma:=\rho\tau$, 这里 $\rho:(Y_0,\mathcal{G}_0)\dashrightarrow(X,\mathcal{F})$ 是双有理映射. 由于 $\mathcal{F}$ 是极小的, 因而 ρ 是双全纯的. 因此 σ 是态射.

$(\Longleftarrow)$ 首先, $(X,\mathcal{F})$ 不含 $\mathcal{F}$-例外曲线. 若不然, 设 $\varphi:(X,\mathcal{F})\to(X',\mathcal{F}')$ 是收缩该例外曲线的映射. 由假设条件, φ^{-1} 是态射, 这就得到矛盾! 因此, $(X,\mathcal{F})$ 是相对极小的.

设 $(Y,\mathcal{G})$ 是任何相对极小的叶状结构, 并且有双有理映射 $\sigma:(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(Y,\mathcal{G})$. 由假设条件, σ^{-1} 是态射. 由于 $(Y,\mathcal{G})$ 是相对极小的, 因而由命题 12.4.1 知 σ^{-1} 是双全纯, 故 σ 亦然. 这就推出 $(X,\mathcal{F})$ 是极小的. ■

例 12.4.1 (**纤维化的极小正规交模型**) 设 $f:X\to C$ 是亏格 g 纤维化, $\mathcal{F}$ 是由 f 诱导的叶状结构. $\mathcal{F}$ 是既约的当且仅当 f 的所有纤维都是正规交曲线. $\mathcal{F}$ 是相对极小的等价于 f 所有纤维都是正规交的并且其中任何 (-1)-曲线都至少交三个点, 此时 f 称为*极小正规交模型* (Minimal normal-crossing model). 请读者注意, f 的相对极小模型和 $\mathcal{F}$ 的相对极小模型是完全不同的 (只有在 $g=0$ 时两者一致). 当 $g>0$ 时, 极小正规交模型是唯一的, 因而也是 $\mathcal{F}$ 的极小模型就是相对极小模型. ■

12.4.2 没有极小模型的叶状结构

我们的下一个目标是分类那些没有极小模型的叶状结构. 先看几个例子.

例 12.4.2 (**有理纤维化**) 设 $f:X\to C$ 是有理纤维化 (即一般纤维是光滑有理曲线), $\mathcal{F}$ 是由 f 诱导的叶状结构. 这里存在经典的 flip 变换. 具体言之, 不妨设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的 (即 f 是几何直纹面). 取 f 的一般纤维 F 及 $p\in F$, 爆发 p 点后得到例外曲线 E,且 F 变为一条 (-1)-曲线 $\widetilde{F}$. 收缩 $\widetilde{F}$, 那么 E 变为新的几何直纹面 $f':X'\to C$ 的纤维, 其诱导叶状记为 $\mathcal{F}'$. 显然有双有理映射 $(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(X',\mathcal{F}')$. 但它不可能是态射. 因此 $\mathcal{F}$ 没有极小模型. ■

例 12.4.3 (**非平凡的 Riccati 叶状结构**) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的相对极小 Riccati 叶状结构, φ 是适配的直纹面. 如果 φ 包含一条光滑 $\mathcal{F}$-不变纤维 F, 使得 F 上有两个不同的既约奇点, 我们就说 $\mathcal{F}$ 是非平凡的, F 称作*正则纤维*. 按照例 12.2.5 的讨论, F 要么是半退化纤维, 要么是带两个形如 $\lambda wdz-zdw=0$ 的非退化纤维.

我们对其中一个奇点做爆发, 并且收缩掉原来的纤维, 这就得到另一相对极小叶状结构 $(X',\mathcal{F}')$. 这个双有理映射 $(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(X',\mathcal{F}')$ 不可能是态射. 因此非平凡 Riccati 叶状结构不可能有极小模型. ■

例 12.4.4 (**非常特殊叶状结构**) 采用例 12.1.6 和例 12.1.13 的记号与假设. 此时对 C 的结点做爆发并收缩 C 的严格原像 (这是 (-1)-曲线). 那么例外曲线变成一条带一个结点的不变曲线且自交数为 3. 这仍是非常特殊叶状结构 (见命题 12.4.4). 但是两者并不是双全纯的. ■

命题 12.4.4 ([Bru15]) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $C\subset X$ 是带一个结点 p 的 $\mathcal{F}$- 不变有理曲线且 $C^2=3$. 假设 p 也是 $\mathcal{F}$ 在 C 上的唯一奇点, 那么存在双有理映射 $(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(Y,\mathcal{G})$ 使得 $\mathcal{G}$ 是非常特殊叶状结构.

引理 12.4.1 如果 $(X, \mathcal{F})$ 是没有极小模型的既约叶状结构, 那么它双有理于一个既约叶状结构 $(X_0, \mathcal{F}_0)$, 使得 $(X_0, \mathcal{F}_0)$ 包含两条相交的 $\mathcal{F}_0$-例外曲线.

证明 由命题 12.4.3, 存在非态射的双有理映射 $\sigma : (Y, \mathcal{G}) \dashrightarrow (X, \mathcal{F})$. 通过 $(Y, \mathcal{G})$ 的爆发, 我们可以诱导如下交换图.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{G}}) \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ (Y, \mathcal{G}) \arrow[rr, dashed, "\sigma"] & & (X, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

我们可以假设 ρ 是极小的爆发, 即不存在同时被 ρ 和 $\tilde{\sigma}$ 收缩的 (-1)-曲线. 因此, $\widetilde{Y}$ 包含一条自交数 (-1) 的例外曲线 C (注意它是 $\widetilde{\mathcal{G}}$-例外曲线), 它不被 $\tilde{\sigma}$ 收缩. 由于 $\mathcal{G}$ 是既约的, 所以 C 是 $\widetilde{G}$- 例外曲线. $\tilde{\sigma}$ 的例外集必须和 C 相交, 否则 $\tilde{\sigma}$ 在 C 的邻域上双全纯, 因而 $\tilde{\sigma}(C)$ 也是 $\mathcal{F}$- 例外的, 矛盾! 因此我们可以将 $\tilde{\sigma}$ 分解为

$$(\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sigma_1} (X_0, \mathcal{F}_0) \xrightarrow{\sigma_2} (X, \mathcal{F}),$$

这里 σ_1 在 C 的邻域上双全纯 (不影响自交数), σ_2 的例外集中包含例外的 (-1)- 曲线 $C' \subset X_0$ 与 $\sigma_1(C)$ 相交. 由于 $\mathcal{F}$ 既约, 故 C' 是 $\mathcal{F}_0$- 例外曲线. 又因为 σ_1 的选取, 所以 C 也是 $\mathcal{F}_0$-例外曲线. ■

命题 12.4.5 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 且没有极小模型. 那么 $\mathcal{F}$ 双有理等价于如下几类叶状结构之一:

(1) 有理纤维化;

(2) 非平凡的 Riccati 叶状结构;

(3) 非常特殊叶状结构.

证明 由引理 12.4.1, $(X, \mathcal{F})$ 双有理于 $(X_0, \mathcal{F}_0)$, 后者包含相交的 $\mathcal{F}_0$- 例外曲线 C_1, C_2. 设 $p \in C_1 \cap C_2$. 由于 $Z(\mathcal{F}_0, C_i, p) = 1$, 所以 p 是非退化既约奇点. 另外, $C_1 C_2 \leq 2$ 且它们横截相交 (否则收缩其中一条, 将产生非既约点).

下面我们分情况讨论. 先考虑 C_1, C_2 仅交一点的情形. 我们收缩 C_1 (对应的叶状结构记为 $\mathcal{F}_1$, 收缩点记为 q), 则 C_2 变为自交数为 0 的光滑有理曲线 F, 且收缩点 q 要么是 $\mathcal{F}_1$ 的正则点要么是满足 $Z(\mathcal{F}_1, F, p) = 1$ 的既约奇点. 因此 $Z(\mathcal{F}_1, F) \leq 2$. 由习题 12.17, $\mathcal{F}_1$ 要么是有理纤维化要么是 Riccati 叶状结构 (非平凡性显然).

再考虑 $C_1 C_2 = 2$ 的情形. 此时收缩 C_1 后, C_2 的像是自交数为 3 且带一个结点的有理曲线. 因此由命题 12.4.4 可知 $\mathcal{F}$ 双有理等价于非常特殊纤维化. ■

12.4.3 Miyaoka 有理性判则

我们要在这一节证明如下重要定理.

定理 12.4.1 (Miyaoka **有理性判则** [Miy87]) 设 $\mathcal{F}$ 是紧复光滑代数曲面 X 上的叶状结构. 那么 $K_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的的充分必要条件为 $\mathcal{F}$ 双有理于一个由直纹面纤维化诱导的叶状结构.

设 H 是丰富除子, 满足 $HK_{\mathcal{F}}<0$. 不失一般性, 也可以假设 H 是非常丰富的, 因而 X 可以嵌入到射影空间中. 因此对充分大的素数 p, 我们可以把 X 约化到特征 p 情形. 取充分一般点 $x\in X$, 我们希望找到过 x 的一族 $\mathcal{F}$-不变的有理曲线 R 使得 RH 不超过某个常数 K (要求 K 不依赖于 x 和特征 p). 根据 [MiPe97] 的结论, 这些曲线可以提升到特征零的情形, 并且保持 $\mathcal{F}$-不变以及 RH 的上界. 这样就得到结论. 下面我们做一些准备工作.

以下我们假设 X 定义在特征 p 的代数闭域 k 上 (p 充分大). 设 v 是 $\mathcal{F}$ 在某开集 U 上对应的正则切向量场 (即没有奇点). 记 $v^n:=\underbrace{v\circ v\ldots v}_{n}$. 容易验证, v^p 仍然满足莱布尼兹公式, 因而也是 U 上正则向量场. 现在我们可以定义如下概念.

定义 12.4.3 (**p-封闭的叶状结构**) *如果 $\mathcal{F}$ 的任何局部正则向量场 v 诱导的 v^p 仍然和 $\mathcal{F}$ 相切 (即 $v^p\wedge v=0$), 那么就称 $\mathcal{F}$ 是 p-封闭的 (p-close).*

这个定义之所以在整体上定义良好, 是因为我们有以下等式

$$(fv)^p=f^pv^p+v^{p-1}(f)v,\quad f\in\mathcal{O}_X(U).\tag{12-31}$$

因此 $v^p\wedge v=0$ 蕴含着 $(fv)^p\wedge(fv)=0$.

引理 12.4.2 *$\mathcal{F}$ 在 p 充分大时是 p-封闭的.*

证明 设 $K_{\mathcal{F}},N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数分别为 $g_{\alpha\beta},\varphi_{\alpha\beta}$. 于是 $\mathcal{F}$ 对应的局部切场和微分场分别满足

$$v_\alpha=g_{\alpha\beta}v_\beta,\quad \omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}\omega_\beta.$$

由式 (12-31), 我们得到

$$\omega_\alpha(v_\alpha^p)=\varphi_{\alpha\beta}\omega_\beta(g_{\alpha\beta}^pv_\beta^p+v_\beta^{p-1}(g_{\alpha\beta})v_\beta)=\varphi_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^p\omega_\beta(v_\beta^p).$$

因此 $\{\omega_\alpha(v_\alpha^p)\}_{\alpha\in I}$ 定义了 $K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}\otimes N_{\mathcal{F}}$ 的整体全纯截面. 但是注意到 $\deg_H(K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}\otimes N_{\mathcal{F}})<0$ (p 充分表大), 这就迫使 $\omega_\alpha(v_\alpha^p)=0$ ($\forall\alpha\in I$). 也就是说 v^p 和 $\mathcal{F}$ 相切, 即 $\mathcal{F}$ 是 p-封闭的. ■

接下来我们考虑 Frobenius 态射 $F:X\to X^{(1)}$. 它对应了域的包含映射 $k(X)^p\subseteq k(X)$. 设

$$k(\mathcal{F})=\{f\in Rat(X)|v(f)=0\}.$$

它被称为 $\mathcal{F}$ 的*首次积分域* (Filed of first integrals). 显见 $k(X)^p\subseteq k(\mathcal{F})\subseteq k(X)$. 因此 $k(\mathcal{F})$ 诱导了正规曲面 $X/\mathcal{F}$ (不一定光滑) 且满足分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & X/\mathcal{F} \arrow[d, "\pi'"] \\ & X^{(1)} \end{tikzcd}$$

分别在 $X,X/\mathcal{F}$ 的一般点的局部邻域上选取合适的坐标 (z,w) 及 (x,y), 那么上述映射可以理解为

$$\pi(z,w)=(z^p,w)=(x,y),\quad \pi'(x,y)=(x,y^p),\quad F(z,w)=(z^p,w^p).$$

并且 $\mathcal{F}$ 由切场 $v=\frac{\partial}{\partial z}$ 给出. $X/\mathcal{F}$ 上的 p-封闭叶状结构 $\mathcal{G}$ 由 $\frac{\partial}{\partial y}$ 给出. $X^{(1)}$ 上的叶状 $\mathcal{H}$ 由 $\frac{\partial}{\partial z^p}$ 给出 (它的局部坐标为 (z^p,w^p)).

引理 12.4.3 *在上述记号与假设下, 我们有*

(1) $\pi^*K_{\mathcal{G}} = N_{\mathcal{F}}^\vee$, $\pi'^*K_{\mathcal{H}} = N_{\mathcal{G}}^\vee$,

(2) $F^*K_{\mathcal{H}} = \pi^*N_{\mathcal{G}}^\vee = K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}$,

(3) $\pi^*K_{X/\mathcal{F}} = K_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}^\vee$.

证明 (1) 注意到 dy 是 $K_{\mathcal{G}}$ 的局部基, $dw = \pi^*dy$ 是 $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 的基, 因此 $\pi^*K_{\mathcal{G}} = N_{\mathcal{F}}^\vee$. 同理 $\pi'^*K_{\mathcal{H}} = N_{\mathcal{G}}^\vee$.

(2) $F^*K_{\mathcal{H}} = \pi^*(\pi'^*K_{\mathcal{H}}) = \pi^*(N_{\mathcal{G}}^\vee)$. 另一方面, 注意到 $F^*K_{\mathcal{H}}$ 的转移函数是 $T_{\mathcal{F}}$ 的转移函数的 p 次幂, 因而 $F^*K_{\mathcal{H}} = K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}$.

(3) 结合上面讨论及 $K_{X/\mathcal{F}} = K_{\mathcal{G}} \otimes N_{\mathcal{G}}^\vee$ 即得. ■

今取 X 上的一般点 x 以及 $|H|$ 中过 x 的一般元 C, 使得 C 不和 $\mathcal{F}$ 相切也不经过 $\mathcal{F}$ 的奇点, $C' = \pi(C)$. 这样 $\pi : C \to C'$ 是双有理的可分态射 (因为 π 是双射). 由引理 12.4.3, 即得

$$K_{X/\mathcal{F}}C' = \pi^*K_{X/\mathcal{F}}C = pK_{\mathcal{F}}C + N_{\mathcal{F}}^\vee C < 0, \quad p \gg 0.$$

设 $H^{(1)}$ 是 $X^{(1)}$ 上由 H 诱导的丰富除子 (即 $F^*H^{(1)} = pH$), $H' = \pi'^*H^{(1)}$, 故 $\pi^*H' = F^*H^{(1)} = pH$. 由 [MiPe97] 的结论, 存在有理曲线 $R' \subseteq X/\mathcal{F}$ 过 $x' = \pi(x)$ 使得

$$R'H' \leq \frac{4C'H'}{-K_{X/\mathcal{F}}C'} = \frac{4pCH}{pT_{\mathcal{F}} + N_{\mathcal{F}}C} \leq K,$$

这里 K 是不依赖于 p 和 x 常数.

引理 12.4.4 *设 $R \subseteq X$ 是 R' 在 π 下的原像, 那么 R 是有理曲线, 它和 $\mathcal{F}$ 相切. 进一步 $RH \leq K$.*

证明 由于 π 是双射, 故 R 仍是有理曲线. 假如 R 和 $\mathcal{F}$ 不相切, 那么 $\pi : R \to R'$ 是双有理的可分态射, 并且

$$K \geq R'H' = R \cdot \pi^*H' = pRH.$$

当 p 充分时, 这就迫使 $RH = 0$, 矛盾! 故 R 和 $\mathcal{F}$ 相切.

此时 $\pi : R \to R'$ 是纯不可分 p 次态射, 因而

$$pRH = R\pi^*H' = pR'H' \leq pK.$$

这就推出 $RH \leq K$. ■

定理 12.4.1 的证明. 注意到我们可以选取一族 $C \in |H|$, 它们诱导了一族有理曲线 R 满足上面的引理. 结合本节一开始的讨论, 这就完成了证明. ■.

12.4.4 Mcquillan 定理

基于 Miyaoka 有理性判则, 我们以下主要讨论 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的情形. 考虑 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解 (见定理 11.1.1)

$$K_{\mathcal{F}} = P + N.$$

这里 P 是 nef 的 $\mathbb{Q}$-除子, $N = \sum_{i=1}^{n} a_iC_i \geq 0$ 是支集在负定曲线 $C = \cup_i C_i$ 上的有效 $\mathbb{Q}$-除子, 满足 $PC_i = 0$.

我们的首要任务是分析负定部分 N 的结构. 首先, 由命题 12.2.4, 对极大 $\mathcal{F}$-链 $C = C_1 + \cdots + C_r$, 我们有

$$K_{\mathcal{F}}C_1 = -1, \quad K_{\mathcal{F}}C_i = 0\,(i = 2, \cdots, r).$$

因此 $NC_1 < 0$, C_1 含于 N 中. 由于 $C_2C_1 = 1$, 故若 C_2 不在 N 中的话, 那么 $PC_2 = -NC_2 < 0$, 矛盾! 故 C_2 也在 N 中. 以此类推, 可以证明C 的每分支都含于 N 中. 这也推出 $NC_i = 0$ $(i = 2, \cdots, r)$. 结合推论 12.2.5, N 的支集实际上包含了互不相交的极大 $\mathcal{F}$- 链的并集. 后面我们要证明, 在相对极小叶状结构情形, N 实际上不可能再含有其他分支了. 为此, 我们需要一些准备工作.

以下如无特别声明, 我们总假设 $\mathcal{F}$ 是相对极小叶状结构.

引理 12.4.5 设 C 是 N 中分支. 若 $NC < 0$, 那么 C 必是某个极大 $\mathcal{F}$-链的第一分支, 且 $NC = -1$. 特别地, 如果 $N \neq 0$, 则它必含有极大 $\mathcal{F}$-链.

证明 今设 $NC < 0$. 如果 C 不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么

$$NC = K_{\mathcal{F}}C = -C^2 + tang(\mathcal{F}, C) > 0,$$

与假设矛盾! 故 C 是 $\mathcal{F}$-不变的. 因而有

$$-1 \geq NC = K_{\mathcal{F}}C = -\chi(C) + Z(\mathcal{F}, C) \geq 1 - \chi(C).$$

这就迫使 $Z(\mathcal{F}, C) = 1$ 且 C 是光滑有理曲线 (请注意, 由于 $C^2 < 0$, 故由推论 12.2.3, $Z(\mathcal{F}, C) \geq 1$). 由于 $\mathcal{F}$ 是相对极小的, 所以 $C^2 \leq -2$ 并且 $C \cap Sing(\mathcal{F})$ 是既约的. 这表明 C 是 $\mathcal{F}$-链，故含于某极大 $\mathcal{F}$-链中.

注意到 $N^2 < 0$ (当 $N \neq 0$), 因而 N 含分支 C 满足 $NC < 0$, 所以 N 必包含极大 $\mathcal{F}$-链. ■

我们将 N 写为

$$N = \sum_{i=1}^{s} \Theta_i + N_0,$$

这里 $\Theta_i = \sum\limits_{j=1}^{\ell_i} n_{ij}\Gamma_{ij}$ 是极大 $\mathcal{F}$-链, Γ_{ij} 是其不可约分支 (Γ_{i1} 作为第一分支), N_0 是不含在任何 $\mathcal{F}$-链中的部分. 设 T 是 N_0 支集中所有不是 $\mathcal{F}$-不变的不可约分支的并. 设 r_i 是 Θ_i 中与 T 不相交的分支的最大下标 (若每个分支都相交, 则取 $r_i = 0$). 我们定义

$$m_{ij} = \min\left\{n_{ij}, \frac{-2}{\Gamma_{ij}^2}\right\}\ (i = 1, \cdots, r_i - 1), \quad m_{i,r_i} = \min\left\{n_{i,r_i}, \frac{-1}{\Gamma_{i,r_i}^2}\right\}$$

并构造有效除子

$$\overline{\Theta}_i = \Theta_i - \sum_{j=1}^{r_i} m_{ij}\Gamma_{ij}, \quad \overline{N} = \sum_{i=1}^{s} \overline{\Theta}_i + N_0.$$

容易验证, $0 < m_{ij} \leq 1$, $m_{i,r_i} \leq \frac{1}{2}$.

引理 12.4.6 设 C 是 N 中的不可约分支. 如果 C 满足以下两种情形之一, 则有

$$(\overline{N} + T)C \geq 0.$$

(1) $C = \Gamma_{ij}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq \ell_i$.
(2) C 是 T 中的分支.

证明 当 $C \subset T$ 时,

$$(\overline{N}+T)C \geq (\overline{N}+C)C = (N+C)C = tang(C) \geq 0.$$

以下只需要讨论 $C = \Gamma_{ij}$ 的情形 $(j \leq r_i + 1)$.

先考虑 $j < r_i$ 的情形. 若 $n_{ij} = m_{ij}$, 则 $\overline{N}$ 不含 Γ_{ij}, 因而不等式显然成立. 若 $m_{ij} < n_{ij}$, 那么

$$\overline{N}\Gamma_{ij} = N\Gamma_{ij} - m_{i,j-1} - m_{i,j+1} + 2 = (K_{\mathcal{F}}\Gamma_{ij} - m_{i,j-1}) + (2 - m_{i,j+1}) \geq -1 + 1 = 0.$$

类似可讨论 $j = r_i$ 的情形.

今设 $j = r_i + 1$. 此时利用 $\Gamma_{i,r_i+1}T \geq 1$, 可得

$$(\overline{N}+T)\Gamma_{i,r_i+1} = (K_{\mathcal{F}}\Gamma_{i,r_i+1} - m_{i,r_i}) + T\Gamma_{i,r_i+1} \geq -1 + 1 = 0.$$

如果 $j \geq r_i + 2$, 那么 $\overline{N}\Gamma_{ij} = N\Gamma_{ij} = 0$. ■

引理 12.4.7 *若 $\overline{N}+T \neq 0$, 那么存在 N_0 中的不可约分支 C_0, 满足如下条件:*

(1) $(\overline{N}+T)C_0 < 0$,

(2) C_0 是 $\mathcal{F}$-不变的, 并且含于 N_0 的支集中.

(3)

$$\overline{N}C_0 \geq NC_0 - \frac{1}{2}\sum_{i \in I}\Gamma_{i,r_i}C_0,$$

这里指标集 $I = \{i | r_i = \ell_i\}$.

(4) $NC_0 = -\chi(C_0) + Z(\mathcal{F}, C_0)$.

证明 (1) 来自于 $(\overline{N}+T)^2 < 0$.

(2) 来自于引理 12.4.6.

(3) 首先注意到 C_0 若与 Θ_i 相交, 那么它只能交于最末的分支 Γ_{i,ℓ_i}. 由直接计算,

$$\overline{\Theta_i}C_0 = \begin{cases} \Theta_i C_0, & \text{若 } r_i < \ell_i, \\ \Theta_i C_0 - m_{i,\ell_i}\Gamma_{i,\ell_i}C_0, & \text{若 } r_i = \ell_i \end{cases}$$

后一情形中, $m_{i,\ell_i} \leq \frac{1}{2}$. 由此即得所需不等式.

(4) 来自 $NC_0 = K_{\mathcal{F}}C_0$ 及命题 12.2.4. ■

现在我们要证明如下重要结论.

定理 12.4.2 (Mcquillan[McQ00]) *设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的叶状结构, 并且不是由直纹面纤维化诱导, $K_{\mathcal{F}} = P + N$ 是 Zariski 分解. 那么 N 的支集或为空集或由互不相交的极大 $\mathcal{F}$-链构成.*

证明 仍采用前面的诸记号. 假设 $N \neq 0$. 由引理 12.4.5, N 至少包含一个极大 $\mathcal{F}$-链. 我们要证明 $\overline{N}+T = 0$. 今假设结论不成立, 我们来导矛盾.

由引理 12.4.7, 我们得到不等式

$$-\chi(C_0) + Z(\mathcal{F}, C_0) + TC_0 < \frac{1}{2}\sum_{i \in I}\Gamma_{i,\ell_i}C_0. \tag{12-32}$$

另一方面, C_0 与 Γ_{i,ℓ_i} 正规交 (因为 $\mathcal{F}$ 相对极小), 每个交点对 $Z(\mathcal{F},C_0)$ 的贡献为 1. 因此

$$Z(\mathcal{F},C_0) \geq \sum_{i\in I} \Gamma_{i,\ell_i} C_0.$$

结合上面两个不等式, 即得

$$\frac{1}{2} Z(\mathcal{F},C_0) < \chi(C_0) - TC_0 (\leq 2).$$

这表明 $Z(\mathcal{F},C_0) \leq 3$ 且 C_0 是光滑有理曲线. 另一方面, $Z(\mathcal{F},C_0) \geq 1$ (否则 $NC_0 = -2$ 与引理 12.4.5 相悖).

现在我们依次排除 $Z(\mathcal{F},C_0)$ 的各取值. 若 $Z(\mathcal{F},C_0)=1$, 那么 C_0 是某个 $\mathcal{F}$-链的第一分支, 从而与引理 12.4.7 矛盾! 若 $Z(\mathcal{F},C_0)=2$, 则由式 (12-32), C_0 至少与一个极大 $\mathcal{F}$-链 Θ_i 相交. 这将得到更大的 $\mathcal{F}$-链, 矛盾! 若 $Z(\mathcal{F},C)=3$, 则式 (12-32) 蕴含着 C_0 至少与三个极大 $\mathcal{F}$-链相交. 它们与 C_0 的并集与分界线定理矛盾!

这样, 我们就证明了 $\overline{N}+T=0$. 因而 $N_0=0$, 即 N 由互不相交的极大 $\mathcal{F}$-链构成. ■

推论 12.4.1 *在上面的诸记号下, 我们有*

$$n_{ij} \leq \frac{-2}{\Gamma_{ij}^2}\ \ (j=1,\cdots,\ell_i-1), \qquad n_{i,\ell_i} \leq \frac{-1}{\Gamma_{i,\ell_i}^2}.$$

特别地, $n_{ij} \leq 1$ $(j=1,\cdots,\ell_i-1)$, $n_{i,\ell_i} \leq \frac{1}{2}$.

实际上我们有严格的不等式 $n_{ij}<1$, 此时诸系数 n_{ij} 可以由 Θ_i 唯一确定 (习题 12.19).

例 12.4.5 非常特殊叶状结构的既约模型 $\mathcal{F}$ 的典范丛 $K_{\mathcal{F}}=P+N$ 满足 $P^2=0$, $N^2=-2$. ■

引理 12.4.6 的结论可以稍作推广. 我们

引理 12.4.8 *设 T 是既约曲线, 其不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的. 设 r_i 是 Θ_i 中与 T 不相交的分支的最大下标 (若每个分支都相交, 则取 $r_i=0$). 令*

$$\overline{\Theta}_i = \sum_{j=r_i+1}^{\ell_i} n_{ij}\Gamma_{ij}, \quad \overline{N} = \sum_{i=1}^{s} \overline{\Theta}_i.$$

(1) $(\overline{N}+T)\Gamma_{ij} \geq 0$, 对任何 $1\leq i\leq s$, $1\leq j\leq \ell_i$ 成立.
(2) 进一步, 如果 $PT=0$, 那么对 T 中任何不可约分支 C, 都有 $(\overline{N}+T)C\geq 0$.

证明 类似引理 12.4.6 的证明. ■

推论 12.4.2 *设 $\overline{N},T$ 同引理 12.4.8, 且 $PT=0$. 设 Γ 是 T 的不可约分支. 如果 P 不是数值等价于 0, 那么*
(1) $P^2=0$;
(2) Γ 是光滑曲线, $tang(\mathcal{F},\Gamma)=0$.
(3) T 的不可约分支彼此不相交;
(4) 若 $\Gamma\Theta_i>0$, 那么 $\Gamma_{i1}\Gamma=1$, $\Gamma_{ij}\Gamma=0$ $(j>1)$;
(5) 存在正有理数 γ, 使得

$$\gamma P = \Gamma + \sum_{\Theta_i\Gamma>0} \Theta_i,$$

这里 γ 是某正有理数.

由推论 12.4.2, 我们立得如下结论.

推论 12.4.3 如果 $P^2>0$, Γ 是满足 $P\Gamma=0$ 的不可约曲线, 那么 Γ 必是 $\mathcal{F}$-不变的.

下面, 我们研究满足 $PC=0$ 的 $\mathcal{F}$-不变曲线.

引理 12.4.9 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变的不可约曲线, 满足 $PC=0$ 且不含于 N. 设 k 是 C 与 N_{red} 的交点个数, 则以下情形之一成立:
(1) C 是光滑椭圆曲线且不与 N 相交. 此时 $C^2=0$, $Z(\mathcal{F},C)=0$.
(2) C 是带一个结点的有理曲线且不与 N 相交. 此时 $Z(\mathcal{F},C)=0$.
(3) C 是有理曲线且 $k=0,2$. 此时

$$Z(\mathcal{F},C)=\begin{cases}2,\ \text{若}\ k=0,\\ 3,\ \text{若}\ k=2.\end{cases}$$

(4) C 是有理曲线且 $k=3,4$. 此时 $Z(\mathcal{F},C)=k$. 进一步, 设 $F:=C+\sum\limits_{\Theta_iC>0}\Theta_i$ (这里 Θ_i 跑遍 N 中所有和 C 相交的连通分支), 那么 F 的支集是某个单连通的奇异椭圆纤维.

证明 我们有

$$\frac{k}{2}\geq NC=K_{\mathcal{F}}C=2p_a(C)-2+Z(\mathcal{F},C)\geq 2p_a(C)-2+k.$$

这就迫使 $p_a(C)\leq 1$.

若 $p_a(C)=1$, 则 $k=0$ (即与 N 不相交), $Z(\mathcal{F},C)=0$. 此时 C 要么是带一个结点的有理曲线, 要么是光滑椭圆曲线. 若为后者, 则由 Carmacho-Sad 公式知 $C^2=0$.

以下我们假设 C 是有理曲线. 此时上述不等式推出 $k\leq 4$. 当 $k=0$ 时, $Z(\mathcal{F},C)=2$. 当 $k=1$ 时, 上面的不等式迫使 $NC=0$ (因为它只能是整数), 矛盾!

当 $k=2$ 时, 我们有 $NC=1$, 因而 $Z(\mathcal{F},C)=3$.

当 $k\geq 3$ 时,

$$k\leq Z(\mathcal{F},C)\leq 2+\frac{k}{2}$$

迫使 $k=Z(\mathcal{F},C)$.

不妨设 Γ_{i,ℓ_i} 在 Θ_i 中的系数是 $\frac{1}{\lambda_i}$, $p_i=\Gamma_{i,\ell_i}\cap C$, $CS(\mathcal{F},C,p_i)=-\frac{\gamma_i}{\lambda_i}$ (注意 $\gcd(\gamma_i,\lambda_i)=1$). 当 $k=4$ 时, 所有的 $\lambda_i=2$, $\sigma_i=1$. 因而 $C^2=-2$. 此时 F 是 I_0^* 型椭圆纤维型曲线.

当 $k=3$ 时, 由前讨论以及 Carmacho-Sad 公式, 可得

$$1=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i},$$

$$-C^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{\sigma}{\lambda_i}<3.$$

由直接验算可得结论. ■

结合推论 12.4.3 和引理 12.4.9 即得如下经典结论.

定理 12.4.3 (**典范模型定理** [McQ08]) 假设 $P^2 > 0$, Z 是所有满足 $PC = 0$ 的不可约曲线 C 构成的并集. 那么 Z 是以下几类曲线的并集:

(1) N 的支集;

(2) 有理曲线构成的链 $C_1 + \cdots + C_r$, 每个分支均不与 N 相交, 且 $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$;

(3) 有理曲线构成的链 $C_1 + \cdots + C_r$, 此时恰有两个 N 中的连通分支与 C_1 相交 (每个连通分支都恰是一条 (-2)-曲线), 其余 C_i 与 N 不相交, 且 $Z(\mathcal{F}, C_1) = 3$, $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$;

(4) 有理曲线构成的圈 Γ, 满足 $Sing(\mathcal{F}) \cap \Gamma = Sing(\Gamma)$;

(5) 带一个结点的有理曲线 Γ, 满足 $Sing(\mathcal{F}) \cap \Gamma = Sing(\Gamma)$.

满足上述情形 (4)(5) 的连通分支称为椭圆 Gorenstein 叶 (Elliptic Gorenstein leaf).

[McQ08, Theorem IV.2.2] 还证明了下面的结论 (证明概要亦可参看 [CaFl15b]).

定理 12.4.4 设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的叶状结构, Γ 是椭圆 Gorenstein 叶, 那么 $K_{\mathcal{F}}|_{\Gamma}$ 不是挠除子.

12.4.5 小平维数

我们定义 $\mathcal{F}$ 的数值小平维数 (Numerical Kodaira dimension):

$$\nu(\mathcal{F}) = \begin{cases} 0, \text{ 若 } P \sim 0, \\ 1, \text{ 若 } P \not\sim 0 \text{且 } P^2 = 0, \\ 2, \text{ 若 } P^2 > 0. \end{cases}$$

为方便起见, 对于 $K_{\mathcal{F}}$ 非伪有效情形, 我们记 $\nu(\mathcal{F}) = -\infty$. 我们还可以定义 $\mathcal{F}$ 的小平维数 (Kodaira dimension)

$$kod(\mathcal{F}) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log h^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes n})}{\log n}.$$

$kod(\mathcal{F}) = 2$ 的叶状 $\mathcal{F}$ 称为一般型叶状. 由代数几何的结果

$$kod(\mathcal{F}) \leq \nu(\mathcal{F}).$$

我们记 $p_m(\mathcal{F}) := h^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m})$. 它们称为 $\mathcal{F}$ 的多重亏格 (Plurigenera).

命题 12.4.6 设 $(X, \mathcal{F})$ 与 $(X', \mathcal{F}')$ 是两个既约叶状结构, 并且存在双有理映射 $(X, \mathcal{F}) \dashrightarrow (X', \mathcal{F}')$, 那么 $kod(\mathcal{F}) = kod(\mathcal{F}')$ 且 $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F}')$.

证明 不失一般性, 我们考虑一次爆发 $\sigma : (X, \mathcal{F}, E) \to (X', \mathcal{F}', p)$, 这里 $E = \sigma^{-1}(p)$ 是例外曲线, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}'$ 的拉回叶状结构. 如果 $p \in Sing(\mathcal{F}')$, 那么由于 $\mathcal{F}'$ 是既约的, 所以 $K_{\mathcal{F}} = \sigma^* K_{\mathcal{F}'}$. 此时结论显然成立. 今设 $p \notin Sing(\mathcal{F}')$. 我们有

$$K_{\mathcal{F}} = \sigma^* K_{\mathcal{F}'} \otimes \mathcal{O}_X(E).$$

因为 $h^0(nE, \mathcal{O}_{nE}(nK_{\mathcal{F}})) = h^0(nE, \mathcal{O}_{nE}(nE_n)) = 0$, 故由正合列

$$0 \longrightarrow \sigma^* K_{\mathcal{F}'}^{\otimes n} \longrightarrow K_{\mathcal{F}}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}_{nE}(nK_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

可得 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})=h^0(X',nK_{\mathcal{F}'})$, 因而 $kod(\mathcal{F})=kod(\mathcal{F}')$.

$K_{\mathcal{F}}$ 伪有效当且仅当 $K_{\mathcal{F}'}$ 伪有效. 如果 $K_{\mathcal{F}'}=P'+N'$ 是 Zariksi 分解, 那么 $K_{\mathcal{F}}=\sigma^*P'+(\sigma^*N'+E)$ 是 $K_{\mathcal{F}}$ 对应的 Zariski 分解. 因此 $\nu(\mathcal{F})=\nu(\mathcal{F}')$. ■

定理 12.4.5 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, 如果 $kod(\mathcal{F})\neq\nu(\mathcal{F})$, 那么 $kod(\mathcal{F})=-\infty$, $\nu(\mathcal{F})=1$.

满足 $kod(\mathcal{F})=-\infty$ 且 $\nu(\mathcal{F})=1$ 的叶状称为希尔伯特模叶状 (Hilbert modular foliation). 关于它的讨论, 参见 [Bru15, Ch. 9, Sec. 5]

定义 12.4.4 设 k 是最小的整数, 使得 $h^0(X,kK_{\mathcal{F}})$ 有 $kod(\mathcal{F})+1$ 个代数无关的截面. 我们称 k 是 $\mathcal{F}$ 的高度 (Height), 记为 $h(\mathcal{F})$.

引理 12.4.10 设 $\mathcal{F}$ 是一般型叶状结构, $h=h(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的高度, 则 $p_{hn}(\mathcal{F})\geq\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

证明 设 $s_0,s_1,s_2\in H^0(X,K_{\mathcal{F}}^{\otimes h})$ 是三个代数无关截面, $V=\mathbb{C}\langle s_0,s_1,s_2\rangle$. 考虑由 V 诱导的线性系映射 $\phi: X\to\mathbb{P}^2$, 则 $V=\phi^*H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. 因而 $\phi^*H^0(\mathbb{P}^2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))\subseteq H^0(X,K_{\mathcal{F}}^{\otimes hn})$. 由此即得命题. ■

推论 12.4.4 ([Per02], **定理** 1) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构, 其极小模型是一般型的. 假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分, 那么一般叶的次数有一个上界, 该界只依赖于 $\deg\mathcal{F}$, $h(\mathcal{F})$ 及一般叶的几何亏格.

证明 设 $\sigma:(\widetilde{X},\mathcal{G})\to(X,\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的既约模型, F 是 $\mathcal{G}$ 诱导的纤维化的一般纤维. 考虑限制映射

$$\phi_{hn}: H^0(X,K_{\mathcal{G}}^{\otimes hn})\to H^0(F,\Omega_F^{\otimes hn}).$$

选取合适 n, 使得 $\mathrm{Ker}\Phi_{hn}$ 非空. 注意到

$$\sigma_*H^0(X,K_{\mathcal{G}}^{\otimes hn})\subseteq H^0(\mathbb{P}^2,K_{\mathcal{F}}^{\otimes hn})\cong H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(hn\deg\mathcal{F}-hn)).$$

因此 $\deg\sigma(F)\leq hn\deg\mathcal{F}-hn$. ■

上面结论也可以推广到任何 $\mathcal{F}$-不变曲线的情形.

命题 12.4.7 ([Per02], **定理** 2) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的一般型叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么 $\deg C$ 有一个上界, 该上界只依赖于 $\deg\mathcal{F}$, $h(\mathcal{F})$ 和 C 的几何亏格.

我们把证明留作习题 (参见习题 12.23 和习题 12.24).

12.5 叶状结构的分类研究

12.5.1 全纯向量场诱导的叶状结构

$v\in H^0(X,\Omega_X)$ 被称为全纯向量场 (Holomorphic vector field). 它的零点集中的除子部分记为 D. v 诱导的叶状结构 $\mathcal{F}$ 满足 $T_{\mathcal{F}}\equiv D$. 如果 $D>0$, 那么对任何丰富除子 H, 都有 $K_{\mathcal{F}}H=-DH<0$. 由 Miyaoka 有理性判则, 此时 $\mathcal{F}$ 双有理于一个由直纹面纤维化诱导的叶状结构.

引理 12.5.1　*如果 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 那么 X 上的任何 (-1)-曲线 E 是 $\mathcal{F}$-不变的. 进一步, 在收缩 E 后得到的全纯向量场 $\mathcal{F}'$ 仍有 $T_{\mathcal{F}'} \equiv 0$.*

证明　设 E 是 (-1)-曲线. 因为 $K_{\mathcal{F}}E + E^2 = -1$, 所以 E 是 $\mathcal{F}$-不变的. 由式 (12-6) 及 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 即知 $T_{\mathcal{F}'} \equiv 0$. ■

以下如无特别声明, 我们总假设 X 是极小的且 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

引理 12.5.2　*如果 $\mathcal{F}$ 由纤维化 $f : X \to B$ 诱导, 那么 f 是常模椭圆纤维化, 其奇异纤维均为光滑曲线的倍数 (也称为拟椭圆纤维丛, Almost elliptic fibre bundle). 此时 $\mathcal{F}$ 没有奇点.*

证明　此时全纯切场限制在一般纤维上仍是该纤维上的全纯切场, 这意味着一般纤维要么是有理曲线要么是椭圆曲线. 若 f 的纤维是有理曲线, 那么由 Miyaoka 有理性判则, $T_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的, 与假设矛盾! 因而 f 是椭圆纤维化. 注意到 $f_*\omega_{X/B}$ 的正定性以及

$$0 \equiv K_{\mathcal{F}} \equiv f^*(f_*\omega_{X/B}) \otimes \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{s}(F_{i,\mathrm{red}} - \frac{1}{m_i}F_i),$$

这里 F_i 走遍所有奇异纤维, m_i 是 F_i 的重数, 这就迫使 $\deg f_*\omega_{X/B} = 0$, 从而 f 是常模的且奇异纤维都是光滑曲线的倍数. ■

推论 12.5.1　*我们有 $kod(X) \leq 1$. 进一步, 若 $kod(X) = 1$, 则 $\mathcal{F}$ 由拟圆纤维丛诱导.*

证明　注意到 $N_{\mathcal{F}}^{\vee} = K_X$, 因此由对数 Bogomolov 定理 12.3.4, $Kod(X) \leq 1$. 进一步, 如果 $Kod(X) = 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 由纤维化 $f : X \to B$ 诱导. 由引理 12.5.2 即知它是由拟椭圆纤维丛诱导.■

推论 12.5.2　*如果 $q(X) > 0$, 那么 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 进一步, 如果 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导的, 则要么 $q(X) = 1$, $p_g(X) = 0$; 要么 $q(X) = 2$, $p_g(X) = 1$.*

特别地, 当 $Kod(X) = -\infty$ 且 $q(X) \geq 2$ 时, $\mathcal{F}$ 必由拟椭圆纤维丛诱导.

证明　由推论 12.1.1, 如果 $\mathcal{F}$ 有奇点, 那么 $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导. 结合引理 12.5.2, $\mathcal{F}$ 没有奇点, 矛盾! 故 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 同理, 如果 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则

$$p_g(X) = h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee}) = q(X) - 1.$$

当 $q(X) \geq 3$ 时, Castelnuovo-de Franchis 定理蕴含着 $\mathcal{F}$ 由纤维化诱导, 故由引理 12.5.2 知它是由拟椭圆纤维丛诱导, 矛盾! 故 $q(X) \leq 2$. ■

推论 12.5.3　*如果 $Kod(X) = 0$, 那么 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 进一步, 若它不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则必是 Abel 曲面上的 Kronecker 叶状结构.*

证明　不妨假设 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导. 因此由推论 12.5.2, 要么 $q(X) = 0$, 要么 X 是 Abel 曲面, 要么 X 是双椭圆曲面. 当 X 是 Abel 曲面时, 由假设条件, $\mathcal{F}$ 是 Kronecker 叶状结构.

现在假设 X 不是 Abel 曲面. 因为 $Kod(X) = 0$, 故存在正整数 $m > 1$, 使得 $mK_X \equiv 0$, 因而存在无分歧的 m 次循环覆盖 $\pi : Y \to X$. 考虑 $\mathcal{F}$ 在 Y 上的拉回 $\pi^*\mathcal{F}$. 此时 $K_Y \equiv 0$, $T_Y \cong \Omega_Y$, $\pi^*\mathcal{F}$ 仍然由全纯向量场诱导, 且 $T_{\pi^*\mathcal{F}} = \pi^*T_{\mathcal{F}} \equiv 0$. 由前面的讨论, 这时 $\pi^*\mathcal{F}$ 要么由

拟椭圆纤维丛诱导, 要么是 Kronecker 叶状结构. 在前一情形中, $\mathcal{F}$ 当然也是拟椭圆纤维丛诱导. 在后一情形中, 由于该覆盖次数大于 1, 根据经典结果, 此时 Kronecker 结构就是由椭圆丛诱导的 (为什么?), 因而 $\mathcal{F}$ 仍是由近椭圆纤维丛诱导. 这样, $\mathcal{F}$ 总是没有奇点. ■

推论 12.5.4 设 $Kod(X) = -\infty$, 并且它不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则以下情形之一成立:
(1) $q(X) = 1$, $\mathcal{F}$ 是没有不变纤维的 Riccati 纤维化. 考虑适配直纹面的单值 $\rho : \pi_1(Alb(X)) \to \mathbb{P}^1$. 此时 v 被称为 ρ 的悬置(suspension).
(2) $q(X) = 0$, $\mathcal{F}$ 双有理于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的切场 $v_1 \oplus v_2$ 诱导的叶状结构, 这里 v_1, v_2 是 $\mathbb{P}^1$ 上的切向量场.

证明 由推论 12.5.2, $q(X) \leq 1$.

(1) 当 $q(X) = 1$ 时, Albanese 映射是直纹面映射 (底曲线亏格为 1). 对 Albanese 映射的一般纤维 F, $K_{\mathcal{F}}F = 0$, 因而 $\mathcal{F}$ 是 Ricatti 叶状结构. 由推论 12.5.2, $\mathcal{F}$ 没有奇点, 因而任何纤维都不是不变的.

(2) 当 $q(X) = 0$ 时, X 是 $\mathbb{P}^2$ 或 e 次 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_e$. 为方便起见, 我们通过爆发 $\mathbb{P}^2$, 可以将它变为 $\mathbb{F}_1$.

对任何 $\mathbb{F}_e$ $(e \geq 1)$, 找截面 Γ, 使得 $\Gamma^2 = -e$. 因为 $K_{\mathcal{F}}\Gamma + \Gamma^2 = -e < 0$, 所以 Γ 是 $\mathcal{F}$ 不变的. 此时 $Z(\mathcal{F}, \Gamma) = 2$. 这表明 Γ 上至多有两个奇点. 如果它有两个奇点, 那么有一条通过它的纤维上还包含 v 的另一个零点 p (参照例 12.2.5). 爆发 p, 再收缩原始的纤维, 我们得到 $\mathbb{F}_{e-1}$ 上全纯向量场 $\mathcal{F}'$, 也满足 $T_{\mathcal{F}'} \equiv 0$, 并且新的纤维上仍有 v 的另一个零点. 依此类推, 最终可以归结到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的情形.

现在考虑 Γ 仅有一个奇点的情形. 如果过该奇点的纤维也含有 v 的另一个零点 p, 那么类似上面的方法最终可以归结到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的情形. 假若该纤维没有其他奇点, 则爆发该奇点得到的新的全纯向量场的零点集包含除子, 因而该叶状双有理于某个直纹面诱导的叶状. 这与 $\mathcal{F}$ 没有一维零点集的假设矛盾! ■

综合上面的讨论, 我们得到如下定理.

定理 12.5.1 ([Bru15, McQ00]) 设 $\mathcal{F}$ 是光滑曲面 X 上具有孤立零点的全纯向量场, 那么 $K_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 从而 $Kod(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F}) = 0$. 进一步, $\mathcal{F}$ 属于以下情形之一:

(1) $\mathcal{F}$ 由拟椭圆纤维化诱导;

(2) $\mathcal{F}$ 由 Abel 曲面上的 Kronecker 叶状结构诱导;

(3) $\mathcal{F}$ 由某椭圆曲线 E 的表示 $\rho : \pi_1(E) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 的悬置诱导的叶状结构 (它是没有不变纤维的 Riccati 叶状结构);

(4) 双有理于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的线性切向量场诱导的叶状结构 (或等价地, 双有理于 $\mathbb{P}^2$ 上的线性切向量场诱导的叶状结构).

12.5.2 小平维数为 0 的叶状结构

命题 12.5.1 设 $\mathcal{F}$ 是相对极小叶状结构, 且不是有理纤维化. 如果 $\nu(\mathcal{F}) = 0$, 那么 $kod(\mathcal{F}) = 0$.

定理 12.5.2 *设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F})=0$, 那么 $\nu(\mathcal{F})=0$.*

以下假设 $\mathcal{F}$ 是满足 $\nu(\mathcal{F})=0$ 的相对极小叶状结构. 此时 $K_{\mathcal{F}}\equiv_{\text{num}} N$.

引理 12.5.3 *存在正整数 n, 使得 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$. 进一步, 设 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$, 则 $D=nN$. 特别地, 当 $n=1$ 时, $K_{\mathcal{F}}\equiv 0$.*

证明 如果 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$, 可取 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$. 将 D 分解为 $D=P'+N'$, 这里 $Supp(N')\subseteq Supp(N)$, P' 与 N 无公共分支. 因此对 N 中的任何不可约分支 Γ, $(N'-nN)\Gamma=-P'\Gamma\le 0$, 从而 $N'\ge nN$. 对任何丰富除子 H, 有 $P'H=-(N'-nN)H\le 0$, 故 $P'=0$, $N'=nN$. 特别地, 当 $n=1$ 时, 由于 N 中每个分支的系数都严格小于 1, 所以 $D=N=0$.

如果 $q(X)=0$, 则 $Pic(X)/Pic(X)_{\text{tor}}\cong NS(X)/\sim$. 这就迫使 $nK_{\mathcal{F}}\equiv nN$ 对某个充分可除的正整数 n 成立. 因而 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$. 以下不妨进一步假设 $q(X)>0$ 且 $h^0(X,K_{\mathcal{F}})=0$. 由引理 12.1.1, $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导. 这样, N 中的分支都落在 α 的纤维中, 从而对一般纤维 F 有 $K_{\mathcal{F}}F=NF=0$. 因此 α 是椭圆纤维化. 又因 $\nu(\mathcal{F})=0$, 故 α 是常模的. 由此可得结论. ■

设 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$, $D=nN$, 这里 n 是使得 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$ 的最小者 ($n=h(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的高度). 由此可诱导 n 次循环覆盖 $\pi_0:Y_0\to X$, 使得

$$\pi_{0*}\mathcal{O}_{Y_0}=\bigoplus_{i=0}^{n-1}\mathcal{O}_X(-iK_{\mathcal{F}}),$$

且 $D\equiv nK_{\mathcal{F}}$ 是分歧轨迹.因为 N 是正规交的, 所以 Y_0 的奇点都是 Hirzebruch-Jung 奇点. 设 $\tau:Y_1\to Y_0$ 是关于这些奇点的 Hirzebruch 解消, $\pi=\pi_0\tau$, $\rho:Y_1\to Y$ 是收缩 π^*N 中所有分支的态射.

$$\begin{tikzcd} Y & Y_1 \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] & Y_0 \arrow[d, "\pi_0"] \\ & X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

引理 12.5.4 *Y 是光滑的, 即 π^*N 的支集是若干由第一类有理曲线构成的链.*

证明 我们把 N 写成连通分支之和 $N=N_1+\cdots+N_r$. π^*N_i 是由若干条相同的有理曲线链构成. 因此我们只需要证明其每条链的相交矩阵的行列式的绝对值为 1 即可. 剩下的讨论留作习题 (见习题 12.18 与习题 12.20). ■

引理 12.5.5 *设 $\mathcal{G}=\pi^*\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 Y_1 上的拉回. 那么 $K_{\mathcal{G}}=\pi^*K_{\mathcal{F}}$. 特别地, $h^0(Y_1,K_{\mathcal{G}})>0$, $\nu(\mathcal{G})=0$.*

证明 根据例 12.1.14 的讨论, $K_{\mathcal{G}}=\pi^*K_{\mathcal{F}}+E$, 这里 E 是支集在例外曲线上的 $\mathbb{Q}$-除子. 注意到 E 中的不可约分支 C 都是 $\mathcal{G}$-不变的有理曲线, 且 E 的连通分支都是 Hirzebruch-Jung 链. 此时 $Z(\mathcal{G},C)=2$, 故有

$$EC=K_{\mathcal{G}}C=-\chi(C)+Z(\mathcal{F},C)=0.$$

这就推出 $E=0$. 此时 $K_{\mathcal{G}}\equiv\pi^*N$. 由习题 12.20 (1), 该式右边是整除子. ■

定理 12.5.3 *设 $\mathcal{H}$ 是 Y 上的叶状结构, 由 $\mathcal{G}$ 通过 $\rho:Y_1\to Y$ 得到. 那么 $\mathcal{H}$ 是全纯向量场.*

证明 由引理 12.5.4, π^*N 是一些 $\mathcal{G}$-例外曲线构成的链. 因此在收缩过程中始终保持数值小平维数 $\nu(\mathcal{G})=0$ 及 $h^0(X,K_{\mathcal{G}})>0$. 再结合引理 12.5.3, 即得 $K_{\mathcal{H}}\equiv 0$, 即 $\mathcal{H}$ 是全纯向量场. ■

12.5.3 小平维数为 1 的叶状结构

以下假设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F}) = 1$. 考虑 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解 $K_{\mathcal{F}} = P + N$. 此时 $\nu(\mathcal{F}) = 1$.

引理 12.5.6 对充分可除的正整数 m, 线性系 $|mP|$ 是 $|mK_{\mathcal{F}}|$ 的移动部分, 即 $|mK_{\mathcal{F}}| = |mP| + mN$. 进一步, $|mP|$ 诱导了纤维化 $\varphi : X \to B$. 特别地, 对 φ 的任何纤维 F', 都有 $K_{\mathcal{F}}F' = 0$.

证明 设 $|mK_{\mathcal{F}}| = |M| + Z$, 这里 Z 是固定部分. 设 $Z - mN = A - B$, 此处 A, B 是没有公共分支的有效除子. 容易看到 $B \le mN$. 于是我们有 $M + A = mP + B$. 这就有

$$0 \le (M + A)B = mPB + B^2 = B^2 \le 0,$$

故 $B = 0$. 由于 $0 = mP^2 = MP + AP$, 所以 $AP = MP = 0$. 因此 $M^2 + MA = mMP = 0$蕴含着 $AM = M^2 = 0$. 这就有 $A^2 = mPA - MA = 0$.

这样, $|M|$ 诱导纤维化 $\varphi : X \to B$ (经过 Stein 分解), 且 $A \equiv_{\mathrm{num}} \gamma F'$, 这里 $\gamma \in \mathbb{Q}$, F' 是 φ 的纤维. φ 并不依赖于 m 的选取. 对充分大的正整数 n, $|nA|$ 没有固定部分. 因此以 nm 替代 m, 则有 $A = 0$, 故 $M = mP$. ■

推论 12.5.5 如果 $\mathcal{F}$ 与 φ 诱导的叶状一致, 那么 φ 是非常模的椭圆纤维化.

证明 此时对 φ 的任何纤维 F', 都有 $K_X F' = K_{\mathcal{F}}F' = 0$, 故 φ 是椭圆纤维化. 今假设 φ 是常模的, 我们来导矛盾.

此时

$$K_{\mathcal{F}} \equiv_{\mathrm{num}} \chi_\varphi F' + \sum_{F'} (F'_{\mathrm{red}} - F'_{\mathrm{prim}}),$$

这里 F' 跑遍所有奇异纤维, F'_{prim} 指 F' 除以重纤维重数得到的除子. 注意到 F'_{prim} 都具有周期单值, 并且对其中任何分支 Γ, 都有 $\Gamma F_{\mathrm{red}} = N\Gamma$. 再结合椭圆纤维化的奇异纤维分类, F' 要么是光滑曲线的倍数, 要么是 I_0^*, II^*, III^*, IV^* 型. 由假设, φ 是常模的, 因而

$$\chi_\varphi \equiv_{\mathrm{num}} \sum_{F'} \chi_{F'} F',$$

这里 $\chi_{F'}$ 是 F' 的奇异纤维陈数 (见 [Tan96]). 这样,

$$K_{\mathcal{F}} \equiv_{\mathrm{num}} \sum_{F'} \left(F'_{\mathrm{red}} - F' + \chi_{F'} F'\right),$$

此处 F' 跑遍 I_0^*, II^*, III^*, IV^* 型的奇异纤维. 进一步, 这四类奇异纤维分别对应陈数

$$\chi_{F'} = \frac{1}{2}, \ \frac{5}{6}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{2}{3}.$$

由直接验证即得 $K_{\mathcal{F}} \equiv_{\mathrm{num}} N$, 即 $\nu(\mathcal{F}) = 0$, 矛盾! 故 φ 必是非常模的. ■

引理 12.5.7 设 F' 是 φ 的奇异纤维, Γ 是 F' 的不可约分支. 如果 Γ 不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 Γ 是光滑的, $tang(\mathcal{F}, \Gamma) = 0$, 并且满足

$$F' = m_\Gamma \left(\Gamma + \sum_{N_i \Gamma \ne 0} N_i \right), \quad m_\Gamma \in \mathbb{Z}^+,$$

这里 N_i 跑遍 N 中所有满足 $N_i\Gamma > 0$ 的连通分支. 进一步, 若 $\Gamma N_i > 0$, 则 Γ 与 N_i 的第一分支正常交于一点, 与 N_i 的其他分支不相交.

证明 由推论 12.4.2 立得. ■

推论 12.5.6 设 F' 是 φ 的奇异纤维, 则以下情形之一成立:

(1) F' 的任一不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的.

(2) 存在 F' 中唯一的不可约分支 Γ 使得它不是 $\mathcal{F}$-不变的. 在这种情形, F' 具有形如引理12.5.7 的表达式.

回顾命题 12.1.4, 我们有

引理 12.5.8 设 $\mathcal{F}$ 不是由 φ 诱导. 那么存在有效除子 D, 使得

$$K_{\mathcal{F}} = \varphi^* K_B + D + D(\varphi), \tag{12-33}$$

这里 $D(\varphi) = \sum\limits_{F'}(F' - F'_{\mathrm{red}})$, F' 跑遍 φ 的所有纤维. 进一步, 我们有
(1) $DF' = 0$;
(2) D 中的不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的.

注 12.5.1 实际上, 当 $\mathcal{F}$ 由常模纤维化诱导时, 上述相切除子 $D = N$ (留给读者证明). ■

定理 12.5.4 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F}) = 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 满足以下类型之一:

(1) Riccati 叶状结构;

(2) 湍流叶状结构;

(3) 非常模的椭圆纤维化;

(4) 亏格 $g \geq 2$ 的常模纤维化.

12.5.4 正则叶状结构

作为前面讨论的一个应用, 我们研究正则叶状结构 (Regular foliation), 即不存在奇点的叶状结构 $\mathcal{F}$. 此时, 由 Baum-Bott 公式立知 $N_{\mathcal{F}}^2 = 0$, 即

$$c_1^2(X) = K_{\mathcal{F}}^2 - 2K_{\mathcal{F}}N_{\mathcal{F}}.$$

又由 (12-14),

$$c_2(X) = -K_{\mathcal{F}}N_{\mathcal{F}} = -K_X N_{\mathcal{F}}.$$

另外, 对任何 $\mathcal{F}$-不变的曲线 C, 由推论 12.2.3 公式得 $C^2 = 0$.

当 $K_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的, 则由 Miyaoka 有理性判则可知, $\mathcal{F}$ 是几何直纹面. 以下如无特别声明, 均假设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的正则叶状结构且 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的.

引理 12.5.9 $K_{\mathcal{F}}$ 是 nef 的. 特别地, $K_{\mathcal{F}}^2 = c_1^2(X) - 2c_2(X) \geq 0$.

证明 任取不可约曲线 C. 若 $C^2 \geq 0$, 则 C 是 nef, 因而由 $K_{\mathcal{F}}$ 的伪有效性知 $K_{\mathcal{F}}C \geq 0$. 若 $C^2 < 0$, 那么由上面讨论可知其不是 $\mathcal{F}$-不变的, 故

$$K_{\mathcal{F}}C = -C^2 + tang(\mathcal{F}, C) > 0.$$

这就证明了 $K_{\mathcal{F}}$ 是 nef. ■

推论 12.5.7 如果 $f : X \to B$ 是亏格不超过 1 的纤维化, 那么 f 是几何直纹面或拟椭圆纤维化. 特别地, 此时 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

证明 由引理 12.5.9, $K_f^2 \geq 8\chi_f$. 因为 $\chi_f \geq 0$, 且 f 的相对极小模型 $f_0 : X_0 \to B$ 总有 $K_{f_0}^2 = 0$, 故 $f = f_0$, $K_f^2 = \chi_f = 0$. 这也推出 f 的奇异纤维都是光滑曲线的倍数. ■

推论 12.5.8 当 $kod(X) \leq 1$ 时, 必有 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$. 因而 $kod(\mathcal{F}) \leq 1$.

证明 先考虑 $Kod(X) = -\infty$ 的情形. 如果 $X = \mathbb{P}^2$, 那么 $K_{\mathcal{F}}^2 = 1$. 因而 $0 = N_{\mathcal{F}}^2 = (K_{\mathcal{F}} - K_X)^2 = 16$, 矛盾! 因此 $f : X \to B$ 是亏格零纤维化, 那么由推论 12.5.7, f 是几何直纹面且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

类似地, 当 $kod(X) = 1$ 时, f 是拟椭圆纤维化且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

最后考虑 $kod(X) = 0$ 的情形. 此时由引理 12.5.9, X 只能是阿贝尔曲面或双椭圆曲面且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$. ■

我们前面已经讨论过 $kod(\mathcal{F}) \leq 1$ 时的叶状结构分类. 因此以下我们假设 $kod(X) = 2$ 及 $kod(\mathcal{F}) = 2$. 由命题 12.2.1 以及 $\mathcal{F}$ 的正则性, 可知 X 是一般型极小曲面.

命题 12.5.2 ([Bru97b], **定理** 3) 如果 $kod(\mathcal{F}) = 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 由小平纤维化诱导.

12.5.5 一般型叶状结构

12.6 叶状结构的形变

定义 12.6.1 一个 (曲面) 既约叶状结构族 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 由以下要素构成:

(1) 从复光滑簇 $\mathcal{X}$ 到复圆盘的光滑态射 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$, 使得对任何 $t \in \Delta$, 纤维 X_t 是射影曲面.

(2) $\mathcal{X}$ 上的一维叶状结构, 满足
  (i) $\mathcal{F}$ 相切于 π 的纤维.
  (ii) $\mathcal{F}$ 的奇点集 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ 在 $\mathcal{X}$ 中是纯余维数 2, 并且限制在每条纤维上都是有限集合.
  (iii) 对每个 $t \in \Delta$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{X_t}$ 是 X_t 上的叶状结构, 且 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_t) = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap X_t$ 由既约奇点构成.

定理 12.6.1 ([Bru01], **定理** 1) 设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 是既约叶状结构族, 那么 $kod(\mathcal{F}_t)$ 不依赖于参数 $t \in \Delta$ 的选取.

下面的例子表明, 若条件 (ii) 不成立, 则定理 12.6.1 也可能不成立.

例 12.6.1 ([CaFl15], **例** 3.8) 考虑 $\pi' : \mathbb{P}^2 \times \Delta \to \Delta$. 在 $X'_t \cong \mathbb{P}^2$ 上引入曲线束 $\Lambda_t := \{C_{t,\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$, 其中 $C_{t,\lambda}$ 由齐次方程 $F_t + \lambda G_t = 0$ 定义,

$$F_t = (1-t)LF'_0 + tF_1, \quad G_t = (1-t)LG'_0 + tG_1,$$

这里 L 定义直线, F'_0, G'_0 定义光滑三次曲线, F_1, G_1 定义光滑四次曲线, 并且满足

(1) 对 $t \in \Delta \setminus \{0\}$, F_t, G_t 定义了光滑四次曲线, 并且两者横截交.

(2) F'_0, G'_0 定义的曲线横截交九个点 $p_1, \ldots, p_9$.

(3) 对 $t \in \Delta \setminus \{0\}$, 线束 Λ_t 中的元都是不可约既约的.

Λ_t 的基点在 $\mathbb{P}^2 \times \Delta$ 上构成 16 条局部曲线 $D_1, \ldots, D_{16}$ (可以适当缩小 Δ). 不妨设 $D_1, \ldots, D_{16}$ 经过 $p_{k+1}, \ldots, p_9$, 并取曲线 $D_{17}, \ldots, D_{16+k}$ 经过 $p_1, \ldots, p_k$ 且与纤维 X'_0 横截相交.

考虑 $\mathbb{P}^2 \times \Delta$ 沿着 $B_1, \ldots, B_{16+k}$ 的爆发 $\mathcal{X} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2 \times \Delta$, 得到诱导态射 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$. 限制在纤维 X_t 上, 得到爆发 $\sigma_t : X_t \to \mathbb{P}^2$. 它包含例外曲线 $E_{t,1}, \ldots, E_{t,16+k}$. X_t 上有由 Λ_t 诱导的纤维化 $f_t : X_t \to \mathbb{P}^1$. 当 $t = 0$ 时, f_0 实际上由 F'_0, G'_0 生成的线束诱导.

设 $\mathcal{F}_t$ 是 X_t 上由 f_t 诱导的叶状结构. 当 $t \neq 0$ 时, 对一般点 $p \in \mathbb{P}^1$,

$$f_t^* p \equiv_{\text{num}} 4\sigma_t^* H - \sum_{i=1}^{16} E'_{t,i}.$$

因此

$$K_{\mathcal{F}_t} = K_{X_t/\mathbb{P}^1} = \sigma_t^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{i=1}^{16+k} E'_{t,i} + f_t^*(2p) \equiv_{\text{num}} \sum_{i=17}^{16+k} E'_{t,i} + \sigma_t^* H + f_t^*(p).$$

$K_{\mathcal{F}_t}^2 = 9 - k$, $K_{\mathcal{F}_t}$ 是 big 的, $kod(\mathcal{F}_t) = 2$.

当 $t = 0$ 时, f_0 是椭圆纤维化, 故 $K_{\mathcal{F}_0}$ 不是 big 的. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \Delta}$ 给出了 $\mathcal{X}$ 上的叶状 $\mathcal{F}$, 但是 $L \subseteq Sing(\mathcal{F}) \cap X_0$, 从而 $Sing(\mathcal{F}) \cap X_0 \neq Sing(\mathcal{F}_0)$. ■

引理 12.6.1 ([CaFl15], **引理** 2.7) 设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \Delta}$ 是既约叶状族, $t_0 \in \Delta$, 使得 $\mathcal{F}_{t_0}$ 含有 $\mathcal{F}_{t_0}$-例外曲线 $E_{t_0} \subseteq X_{t_0}$. 那么存在 t_0 的邻域 $U \subseteq \Delta$, 以及 $\pi^{-1}(U)$ 中的超曲面 E, 使得 E 横截相交于 π 的纤维, 且对任何 $t \in U$, $E_t = E \cap X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$-例外曲线.

特别地, 给定 $s \in \Delta$, 存在 U 上的双有理态射 $\sigma : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}'_U$, 满足交换图

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{X}_U, \mathcal{F}_U) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathcal{X}'_U, \mathcal{F}'_U) \arrow[dl, "\pi'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

使得 $\mathcal{F}'|_{X'_s}$ 相对极小并且 $(X'_t, \mathcal{F}'_t)_{t \in U}$ 仍是既约叶状族.

引理 12.6.2 设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in \Delta}$ 是具有非负小平维数的既约叶状族. 那么存在 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathbb{Q}$-有效除子 N, 使得 N 不含 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 的纤维并且 $N_t = N|_{X_t}$ 是 $K_{\mathcal{F}_t}$ 的 Zariski 分解的负定部分 $(\forall t \in \Delta)$.

特别地, 如果存在 $s \in \Delta$, 使得 $(X_s, \mathcal{F}_s)$ 是相对极小, 则存在包含 s 而开邻域 $U \subseteq \Delta$ 以及 N 的不可约分支 $E_1, \ldots, E_k$ 与 X_t 横截交于不同的有理曲线 $E_1|_{X_t}, \ldots, E_k|_{X_k}$.

本章习题

习题 12.1 验证例 12.1.2 中的恒等式 $\omega \wedge d\omega = 0$. (提示: 考虑向量 $\alpha = (X_0, X_1, X_2)$ 及 $\beta = (A_0, A_1, A_2)$. 相当于要证 $\beta \perp \mathrm{Curl}\beta$, 故需证明 $\mathrm{Curl}\beta \times \alpha // \beta$. 为此对关系式 $\sum\limits_{i=0}^{2} X_i A_i = 0$ 求偏导并利用欧拉恒等式.)

习题 12.2 设 $\pi : \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ 是标准投影, v 是 $\mathbb{P}^2$ 上零次切向量场,
(1) 证明: 存在 $\mathbb{C}^3$ 上的线性切向量场 $w = \sum\limits_{i=0}^{2} B_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ (这里诸 B_i 是线性齐次多项式), 使得 $\pi_* w = v$.
(2) 证明: 如果 w' 是 $\mathbb{C}^3$ 上另一线性切向量场 满足 $\pi_* w' = v$, 那么 $w - w' \in \mathbb{C}\langle \sum\limits_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \rangle$.
(3) 设 ω 是 $\mathbb{P}^2$ 上微分场. 证明: $\omega(v) = 0$ 当且仅当 $\pi^*\omega(w) = \pi^*\omega(\sum\limits_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial X_i}) = 0$.

习题 12.3 证明: 射影平面上的叶状结构必能写成例 12.1.2 中形如式 (12-5) 的形式. (提示: 说明 $A_i(X_0, X_1, X_2)$ 中不含单项式 X_i^{d+1}.)

习题 12.4 验证叶状结构在 p 处的重数 $m(p)$ 以及 $tang(\mathcal{F}, C, p)$ 不依赖于坐标的选取.

习题 12.5 设曲线 C 不是 $\mathcal{F}$-不变的, $p \in C$, 证明: $tang(\mathcal{F}, C, p) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 与 C 在 p 处横截相交.

习题 12.6 类似式 (12-15), 给出由 $\sigma^* v := \{\sigma^* v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 诱导的叶状结构切向量表示, 并由此说明其在 E 上的阶数是 $l(p) - 1$.

习题 12.7 在第 12.2.2 节的记号下, 证明:

(1) $l(p) = a(p)$ 当且仅当 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的.

(2) 设 $\tilde{p} \in E$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 的奇点, 则若 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$- 不变的, 那么

$$a(\tilde{p}) \leq Z(\widetilde{\mathcal{F}}, E, \tilde{p}).$$

若 E 不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$a(\tilde{p}) \leq tang(\widetilde{\mathcal{F}}, E, \tilde{p}).$$

(3) 若 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$Z(\widetilde{\mathcal{F}}, E) = a(p) + 1.$$

若 E 不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$tang(\widetilde{\mathcal{F}}, E) = a(p) - 1.$$

(4)

$$\sum_{\tilde{p} \in E} a(\tilde{p}) \leq a(p) \pm 1,$$

这里 ± 1 的符号取决于 E 是否 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的 (见上一小题).

习题 12.8 验证: 既约奇点爆发后的奇点仍是既约的.

习题 12.9 解消

$$y^n\frac{\partial}{\partial x}+x^m\frac{\partial}{\partial y}\ \ (m,n\geq 2)$$

的奇点 $p=(0,0)$ 至既约奇点, 并计算其重数及阶数.

习题 12.10 确定叶状结构 $\mathcal{F}$

$$\omega=nydx-mxdy\quad (m,n\in\mathbb{Z}^+)$$

在 $p=(0,0)$ 处所有的分界线 C, 并求 $Z(\mathcal{F},C,p)$. 进一步, 通过此例来说明, 对 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$, 其 $\mathcal{F}$-不变曲线的次数不能被 $\mathcal{F}$ 的次数控制.

习题 12.11 在例 12.2.11 中, 取 $d(\mathcal{F})=1$. 证明:
(1) $\mathcal{F}$ 必存在奇点 (提示: 利用式 (12-14)).
(2) 设 p 是奇点, 则存在过 p 的直线 L, 它是 $\mathcal{F}$-不变的 (提示: 不妨设 $p=(0,0)$; 采用式 (12-5) 的记号, 设 $(P,Q)=(x,y)A$, 这里 A 是 2 阶系数矩阵; 考虑 A 的特征值及特征多项式).

习题 12.12 设 $p\in Sing(\mathcal{F})$, $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 是 p 的 n 条分界线 (在 p 的小邻域内).
(1) 证明: $Var(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n Var(\mathcal{F},C_i,p)$.
(2) 证明: $CS(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n CS(\mathcal{F},C_i,p)+2\sum\limits_{i<j}(C_iC_j)_p$.
(3) 证明: $Z(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n Z(\mathcal{F},C_i,p)-2\sum\limits_{i<j}(C_iC_j)_p$.
(4) 设 $\mathcal{F}$ 由 $xdy-ydx=0$ 生成, 在 $p=(0,0)$ 处取 n 条分界线 $C_1,\cdots,C_n$. 试求 $Z(\mathcal{F},C,p)$.

习题 12.13 设 $p\in Sing(\mathcal{F})$, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $\sigma:(\widetilde{X},E,\widetilde{\mathcal{F}})\to(X,p,\mathcal{F})$ 是关于 p 的爆发, E 是例外曲线, $\widetilde{C}$ 是 C 的严格原像, $m=(\widetilde{C},E)$.
(1) 证明: $CS(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{\tilde{p}\in\widetilde{C}\cap E} CS(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{C},\tilde{p})+m^2$.
(2) 证明: $Var(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{\tilde{p}\in\widetilde{C}\cap E} Var(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{C},\tilde{p})+ml(p)$.
(3) 证明: $Z(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{\tilde{p}\in\widetilde{C}\cap E} Z(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{C},\tilde{p})-m^2+ml(p)$.
(4) 设 $\mathcal{F}$ 由 $xdy-ydx=0$ 生成, 在 $p=(0,0)$ 处取 n 条分界线 $C_1,\cdots,C_n$. 试求 $Z(\mathcal{F},C,p)$.

习题 12.14 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, p 是 $\mathcal{F}$ 的非多临界奇点 (Nondicritical singularity). 设 $\sigma=\sigma_1\ldots\sigma_r:X_r\to X_0(:=X)$ 来自 p 的一系列爆发 $\sigma_i:X_i\to X_{i-1}$ 的复合, 这里 E_i 是 σ_i 对应的例外曲线在 X_r 中的严格原像, E_1 对应的完全原像为 $\mathcal{E}_1=\sum\limits_{i=1}^r n_iE_i$.
(1) ([CSN84, Theorem 1]) 证明:

$$1+l(p)=\sum_{i=1}^r\sum_{p\in E_i}n_i(Z(\mathcal{F},E_i,p)-\mu_p(\mathcal{E}_1)).$$

(提示: 利用习题 12.13.)
(2) 利用上一小题直接验证 Camacho-Neto-Sad 阶数不等式 (命题 12.2.10(1)).

习题 12.15 验证式(12-20) 和 (12-21). 在同样的假设条件与记号下, 进一步证明: $\mu_p(\mathcal{F},B)=0$ 当且仅当 $p\notin Sing(\mathcal{F})$.

习题 12.16 设 $\varphi: X\to C$ 是直纹面, $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构. 证明: $\mathcal{F}$ 与直纹面一致当且仅当 $K_{\mathcal{F}}F=-2$ (亦即 $N_{\mathcal{F}}F=0$).

习题 12.17 设 $\mathcal{F}$ 是曲面 X 上的叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变的光滑有理曲线且 $C^2=0$. 证明:
(1) 若 $Z(\mathcal{F},C)=0$, 则 $\mathcal{F}$ 与直纹面一致.
(2) 若 $Z(\mathcal{F},C)=2$, 则 $\mathcal{F}$ 是 Riccati 叶状结构.
(3) $Z(\mathcal{F},C)\neq 1$. (提示: 先说明 C 诱导直纹面; 对一般纤维 F, $Z(\mathcal{F},F)$ 不可能为正数.)

习题 12.18 设 $C=C_1+\cdots+C_r$ 是 Hirzebruch-Jung 奇点 $z^d=x^ay^b$ $(\gcd(a,d)=\gcd(b,d)=1)$ 对应的 Hirzeburch-Jung 链, $C_i^2=-e_i\leq -2$. 令整数序列

$$0=\gamma_0<\cdots<\gamma_{r+1},\qquad \mu_0>\cdots>\mu_{r+1}=0$$

满足 $\gamma_1=\mu_r=1$ 及

$$\begin{aligned}\gamma_{i-1}-e_i\gamma_i+\gamma_{i+1}=0,\\ \mu_{i-1}-e_i\mu_i+\mu_{i+1}=0.\end{aligned}$$

(1) 证明:

$$\gamma_{k+1}=\begin{vmatrix} e_1 & -1 & & \\ -1 & e_2 & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & e_k\end{vmatrix},\quad \mu_{k-1}=\begin{vmatrix} e_k & -1 & & \\ -1 & e_2 & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & e_r\end{vmatrix}$$

(2) 证明:

$$\mu_i\gamma_{i+1}-\mu_{i+1}\gamma_i=\gamma_{r+1}=\mu_0.$$

(3) 设 u,v 是正整数, D 是支集在 N 上且满足

$$D\cdot C_i=\begin{cases}0, & i\neq 1,r,\\ -u, & i=1,\\ -v, & i=r.\end{cases}$$

的 $\mathbb{Q}$-闭链. 证明: D 是整除子当且仅当 $va\equiv ub \pmod d$. (提示: "$\Rightarrow$" 利用 Cramer 法则求出 D 的顶端分支 C_1 的系数; "$\Leftarrow$" 令 $n_i=\frac{u\mu_i+\gamma_i v}{d}$, 证明 $D=\sum\limits_{i=1}^{r}n_iC_i$.)
(4) 设 $d=\mu_0=\gamma_{r+1}$,

$$\tilde{\mu}_i=\frac{\mu_i}{\gcd(d,\mu_i)},\quad \tilde{\gamma}_i=\frac{\gamma_i}{\gcd(d,\gamma_i)},\quad \tilde{d}_i=\frac{d}{\gcd(d,\mu_i)\gcd(d,\mu_{i+1})},$$

并设

$$M_k=\frac{1}{d}\left(\tilde{\mu}_k\sum_{i=1}^{k}\gamma_iC_i+\tilde{\gamma}_k\sum_{i=k+1}^{r}\mu_iC_i\right).$$

证明:

$$M_kC_i=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ \frac{-1}{\gcd(d,\mu_i)}, & i=k.\end{cases}\tag{12-34}$$

特别地, $M_1, \ldots, M_r$ 构成 $\mathbb{Q}\langle C_1, \ldots, C_r\rangle \subseteq NS(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的一组基.

习题 12.19 设 $\mathcal{F}$ 满足定理 12.4.2 的条件, $C = C_1 + \cdots + C_r$ 是极大 $\mathcal{F}$- 链, $e_i = -C_i^2$. 数列 $\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{r+1}\}$ 满足习题 12.18 的条件. 设 N 是 $K_{\mathcal{F}}$ 的负定部分, 证明: C_i 在 N 中的系数是 $\frac{\mu_i}{\mu_0}$, 并求 N^2.

习题 12.20 设 $N = \frac{1}{d}\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i C_i$ 是 Hrzebruch 链, 这里不可约分支 C_i 及系数 μ_i 满足习题 12.18 的条件, $d = \mu_0$. 设 U 是 N 的管状邻域, $\pi_0 : V_0 \to U$ 是以 N 为分歧轨迹的 d 次循环覆盖, 使得在 C_i 的一般点附近可写为 $z^d = x^{\mu_i}$. $\tau : V_1 \to V_0$ 解消 V_0 上所有 Hirzebruch 奇点, $\pi = \pi_0\tau$.
(1) 证明: 存在 π^*N 中唯一的不可约分支 Γ_i, 使得 $\pi : \Gamma_i :\to C_i$ 是有限覆盖. 进一步, 这个覆盖的次数是 $\gcd(d, \mu_i)$, 并且 Γ_i 在 π^*C_i 中的系数是 $\frac{d}{\gcd(d,\mu_i)}$.
(2) 证明: Γ_i 在 π^*M_k 中的系数是

$$a_i = \begin{cases} \tilde{\mu}_k\tilde{\gamma}_i, \text{ if } i \leq k, \\ \tilde{\gamma}_k\tilde{\mu}_i, \text{ if } i > k. \end{cases}$$

(3) 证明: π^*M_k 是整除子 (定义见习题 12.18), 并且满足

$$\pi^*M_k \cdot \Gamma_i = \begin{cases} \ \ 0, \ \ i \neq k, \\ -1, \ i = k, \end{cases}$$

以及 $\pi^*M_i \cdot \pi^*M_j = -\tilde{\mu}_j\tilde{\gamma}_i \ (j \geq i)$. (提示: 设 $\pi^*M_k = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i\Gamma_i + D$, 这里 D 是支集在例外集上的 $\mathbb{Q}$-链. 利用习题 12.18 (3) 即可证明 D 是整除子.)
(4) 设 $q_i = C_i \cap C_{i+1}$, $G \subseteq NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ 是由 π^*N 的所有分支 生成的子空间. 证明: 所有 π^*p_i 中的各例外分支以及所有 π^*M_k 构成了 G 的基.
(5) 设 $T_1, \ldots, T_\ell$ 是所有来自 $\pi^*q_1, \ldots, \pi^*q_{r-1}$ 的例外集中的不可约分支, 并设 $P = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$,

$$W = \begin{pmatrix} P & * \\ O & I_\ell \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^*M_1 \\ \vdots \\ \pi^*M_r \\ C_1 \\ \vdots \\ C_\ell \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\Gamma}_r \\ C_1 \\ \vdots \\ C_\ell \end{pmatrix}$$

这里 $a_{ij} = a_{ji} = \tilde{\mu}_j\tilde{\gamma}_i \ (j \geq i)$. 设 A (相应地, B) 是 $(\pi^*M_1, \ldots, \pi^*M_r, T_1, \ldots, T_\ell)$ (相应地, $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r, T_1, \cdots, T_\ell)$) 的相交矩阵. 证明: $|W| = |P|$, $|A| = \tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_{r-1} \cdot |P|$ 以及 $|P| = \tilde{d}_1 \ldots \tilde{d}_{r-1}$. 因而 $|B| = 1$.
(6) 证明: $|B| = 1$ 等价于 π^*N 是第一类有理曲线, 即它可以被收缩到光滑点.

习题 12.21 设 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$ $(e \geq 0)$, $\varphi : X := \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^1$ 是对应的 e 次 Hirzebruch 曲面, 带有截面 C_∞ 和 C_0, 使得 $C_\infty^2 = -e$, $C_0^2 = e$, F 是 φ 的一般纤维. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 由 $\omega \in H^0(\Omega_X(aC_\infty + bF))$ 给出.
(1) 证明: ω 能写成如下形式:

$$\left(\sum_{i=0}^{a} g_i(t)u^i\right) dt - \left(\sum_{i=0}^{a-2} h_i(t)u^i\right) du + t^{b-e-1} f\left(\frac{u}{t^e}\right)(eudt - tdu),$$

这里

$$\deg g_i(t) \le b-2-ei, \quad \deg h_i(t) \le b-1-e-ei, \quad \deg f(x) \le \min\{a-2, [\frac{b-e-1}{e}]\},$$

(t,u) 是 $X \setminus \{C_\infty, F\}$ 的坐标, 使得 C_0 (相应地, F)被定义为 $u=0$ (相应地, $t=\infty$). 在其余坐标卡上的变换关系为 $t=\frac{1}{s}$, $u=\frac{v}{s^e}$. (提示: 利用习题 1.15).

(2) 设 $N_{\mathcal{F}} = aC_\infty + bF$. 证明: $b \ge e(a-1)+1$.

(3) 设 $K_{\mathcal{F}} = xC_\infty + yF$. 证明:

$$m(\mathcal{F}) = (x+1)(2y+2-xe)+2.$$

进一步, 给出 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解.

(4) 证明: $\mathcal{F}$ 是 Riccati 叶状结构当且仅当 ω 可被写为

$$\big(g_0(t)+g_1(t)u+g_2(t)u^2\big)\,dt - h(t)du + ct^{r+1}(eudt - tdu),$$

这里 c 是常数,

$$\deg g_0(t) \le r+e, \quad \deg g_1(t) \le r, \quad \deg g_2(t) \le r-e, \quad \deg h(t) \le r+1,$$

$N_{\mathcal{F}} = 2C_\infty + (r+2+e)$, $K_{\mathcal{F}} = rF$ $(r \ge 0)$. 特别地, C_∞ (相应地, 由 $t=\infty$ 定义的纤维 F_∞) 是 $\mathcal{F}$- 不变当且仅当 $g_2(t) \equiv 0$ (相应地, $c=0$).

(5) 考虑 Riccati 叶状结构

$$\omega = (t+(et^{r+1}-a)u+u^2)dt - (t^{r+2}-t)du, \quad r \ge \max\{1,e\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

求出所有奇点并指明其类型.

习题 12.22 (*)　设 $f: S \to \mathbb{P}^1$ 是仅含两条奇异纤维的纤维化, 并且没有重纤维. 证明: f 诱导的叶状结构是 Riccati 叶状结构.

习题 12.23　设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 证明:

(1) $K_{\mathcal{F}}|_C \cong \omega_C \otimes \mathcal{O}_C(D)$, 这里 $D = \sum\limits_{p \in C} Z(\mathcal{F}, C, p)p$. (提示: 设 v 是 $\mathcal{F}$ 的对应切场, $p \in C$, U 是 p 的邻域. 当 $v(p) \neq 0$ 时, $v|_C$ 也是 C 的切场, 因而局部上 $T_{\mathcal{F}}|_{C\cap U} \cong T_C|_U$; 当 $v(p)=0$ 时, $T_{\mathcal{F}}|_{C\cap U} \cong T_C|_U \otimes \mathcal{O}_U(-Z(\mathcal{F},C,p)p)$.)

(2) $h^0(C, mK_{\mathcal{F}}|_C) \le h^0(C, mK_C) + mZ(\mathcal{F}, C)$. (提示: 结合 (1) 得限制正合列

$$0 \longrightarrow \omega_C^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{O}_C(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{mD} \longrightarrow 0).)$$

习题 12.24　设 $\mathcal{F}$ 是一般型平面叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线. $\sigma: (X, \mathcal{G}) \to (\mathbb{P}^2, \mathcal{F})$ 是安全解消 (Safe resolution), 即在解消为既约模型之后再对每个奇点做一次爆发.

(1) 证明: 存在只依赖于 $\deg \mathcal{F}$ 的正整数 k, 使得 k 次爆发后能得到只带半既约 (Quasi-reduced) 奇点的叶状结构 (半既约奇点是指重数为 1 的奇点或者鞍-结点).

(2) 设 $\overline{C}$ 是 C 的严格原像, 证明: 存在 $Z(\mathcal{G}, \overline{C})$ 的上界, 该上界只依赖于 $\deg \mathcal{F}$. (提示: 由 (1), 将情形归结为只带半既约奇点的叶状.)

(3) 证明: 存在 n_0, 使得 $P_{hn_0}(\mathcal{F}) \ge h^0(C, \mathcal{O}_C(hn_0K_{\mathcal{F}}))$, 这里 $h = h(\mathcal{F})$. (提示: 利用 (2) 和习题 12.23.)

(4) 证明定理 12.4.7.

习题 12.25 假设 $h^0(X, K_{\mathcal{F}}) = 0$ 且 $h^0(X, N_{\mathcal{F}}) > 0$,
(1) 证明: 若 $q(X) > 0$, 则 $\mathcal{F}$ 是由 Albanese 纤维化 $\alpha : X \to B$ 诱导, $g(B) = q(X) = 1$ 且 α 是局部平凡的. (提示: 利用推论 12.1.1 说明 $\mathcal{F}$ 由 α 给出, 再证明 $N_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 即 $K_{\mathcal{F}} \equiv K_X$. α 的局部平凡性可参见 [BPV04, III, 定理 15.4] 或 [Xia92, 命题 6.3.2]).
(2) 假设 $q(X) = 0$, $N_{\mathcal{F}} \equiv \sum\limits_{i=1} n_i D_i$, 这里 $n_i > 0$, D_i 是不可约分支. 证明: $p_g(X) = 0$ 并且诸 $D_i \cong \mathbb{P}^1$. (提示: 先说明 $h^0(X, K_X + D_i) = 0$, 其次利用正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

证明 $h^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$.)
(3) 证明: 如果 $\mathcal{F}$ 是正则叶状结构并且 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的, 那么 $(X, \mathcal{F})$ 必满足 (1). (提示: 若为 (2) 的情形, 利用 Baum-Bott 公式证明诸 D_i 彼此不相交. 再利用 [BPV04, 命题 4.3] 说明 D_i 落在某个直纹面映射里, 由此推出该映射诱导 $\mathcal{F}$.)

第十三章　向量丛与纤维化

13.1　典范纤维化

设 X 是光滑曲面, D 是 X 上的有效除子, $|D| = |M| + Z$, Z 是固定部分. 考虑完全线性系 $|D|$ 诱导的映射

$$\varphi \overset{def}{=} \varphi_{|M|} : X \dashrightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{P}^{\dim |D|}, \quad \Sigma = \mathrm{Im}\varphi.$$

爆发 $|M|$ 的基点 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得 $\tilde{\varphi} \overset{def}{=} \varphi\sigma : \widetilde{X} \to \Sigma$ 是态射. 不失一般性, 我们可以假设 σ 是极小的, 即 σ 例外集中的 (-1)-曲线不被 $\tilde{\varphi}$ 收缩. $\tilde{\varphi}$ 由无基点的完全线性系 $|\widehat{M}|$ 诱导, 这里 $\widehat{M}$ 是 σ^*M 去除支集在例外集上的固定部分. 因此 $M^2 \geq \widehat{M}^2$.

考虑 $\tilde{\varphi}$ 的 Stein 分解 $\widetilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} Y \xrightarrow{\pi} \Sigma$. 我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[ddl, "\sigma"'] \arrow[ddr, "\tilde{\varphi}"] & \\
& Y \arrow[dr, "\pi"] & \\
X \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & \Sigma
\end{tikzcd}$$

这里 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 $\tilde{f}$ 诱导的有理映射.

命题 13.1.1　如果 $\dim \Sigma = 2$, 那么

$$M^2 \geq \widehat{M}^2 = \deg \varphi \cdot \deg \Sigma.$$

等号成立当且仅当 $|M|$ 无基点.

当 $\dim \Sigma = 1$ 时, 我们称 $|D|$ 是线束 (Pencil). 此时 Y 是曲线, $\tilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ 是纤维连通的亏格 g 纤维化, $\pi : Y \to \Sigma$ 是有限覆盖. 如果 $Y \cong \mathbb{P}^1$, 则称 $|D|$ 是有理线束 (Rational pencil). 根据定义, 存在 Σ 上的超平面截口 E 满足

$$\widehat{M} = \tilde{\varphi}^*E = \tilde{f}^*\pi^*E.$$

不妨设 $E_a = \pi^*E$, 这里 $a = \deg_Y E_a$. 取 $\tilde{f}$ 的一般纤维 $\tilde{F}$, 因此

$$\widehat{M} \equiv \tilde{f}^*E_a (\equiv_{\mathrm{num}} a\widetilde{F}).$$

命题 13.1.2　设 $\dim \Sigma = 1$, F 是 $f : X \dashrightarrow Y$ 的一般纤维 (因而是不可约的), 则
(1) 当 $Y \cong \mathbb{P}^1$ 时, $F^2 \geq 0$, $M \equiv aF$, 这里 $a = h^0(X, D) - 1$.
(2) 当 $g(Y) \geq 1$ 时, $F^2 = 0$, $|D|$ 无基点且 $M \equiv f^*E_a$, 这里 E_a 是 a 次除子, $a \geq h^0(X, D) - 1$.

证明　(1) 设 $\widetilde{F}$ 是 $\tilde{f}$ 的一般纤维. 此时 $\widehat{M} \equiv a\widetilde{F}$. 因此 $M \equiv aF$, $F^2 \geq \widetilde{F}^2 = 0$. 进一步,

$$h^0(X, D) = h^0(X, aF) = h^0(\widetilde{X}, a\widetilde{F}) = a + 1.$$

(2) 若 $|D|$ 有基点, 那么 σ 的例外集中有一条 (-1)-曲线, 在纤维化 $\tilde{f}$ 中是水平的. 由 Hurwitz 公式, 这就迫使 $g(Y)=0$, 矛盾! 故 $|D|$ 无基点. 因此 $M=f^*E_a$, $a=\deg E_a$, $F^2=0$. 进一步,

$$h^0(X,D)=h^0(X,f^*E_a)=h^0(Y,E_a)\le 1+a.$$

这就完成了证明. ■

推论 13.1.1 设 X 是一般型极小曲面, $|K_X|=|M|+Z$, 这里 Z 是固定部分. 那么 $K_X^2\ge M^2$. 进一步,
(1) 若 $\dim\Sigma=2$, 那么

$$K_X^2\ge \deg\varphi_{|K_X|}\cdot\deg\Sigma,$$

等号成立当且仅当 $|K_X|$ 无基点.
(2) 若 $\dim\Sigma=1$, 则 $K_X\equiv_{\text{num}} Z+aF$, $a\ge p_g(X)-1$, $F^2\ge 0$. 特别地, 当 $|K_X|$ 是有理线束时, $K_X\equiv Z+(p_g-1)F$.

当 $|K_X|$ 是线束时 (此时 $p_g(X)\ge 2$), $f:X\dashrightarrow Y$ 称为典范纤维化 (Canonical fibration).

命题 13.1.3 设 X 是一般型极小曲面, $|K_X|$ 是线束, 则 $K_X^2\ge 4p_g-7$.

证明 采用前面的诸记号. 先讨论 $|M|$ 有基点的情形. 此时 $|K_X|$ 是有理束, 因而 $M\equiv aF$, $a=p_g-1$, $F^2\ge 1$ (因为 $|M|$ 有基点). 此时

$$K_X^2\ge aK_XF\ge a^2F^2=aF^2(p_g(X)-1).$$

因此若 $aF^2\ge 4$, 则结论成立. 当 $a=1$ 时, $p_g(X)=2$, 此时结论是平凡的. 当 $a=2$, $F^2=1$ 时, $K_XF\ge aF^2=2$. 由于 K_XF+F^2 是偶数, 故 $K_XF\ge 3$, 因而

$$K_X^2\ge aK_XF\ge 6=4p_g-6.$$

当 $a=3$, $F^2=1$ 时,

$$K_X^2\ge aK_XF\ge a^2=9=4p_g-7.$$

以下考虑 $|M|$ 无基点的情形. 此时 $K_X\equiv_{\text{num}} Z+aF$, $F^2=0$, $a\ge p_g-1$. 若 $g(F)\ge 3$, 则

$$K_X^2\ge aK_XF=a(2g(F)-2)\ge 4a\ge 4p_g-4.$$

$g(F)=2$ 的情形来自于 [Xia85, page 72]. 此时 $K_X^2\ge 4p_g-6$. ■

引理 13.1.1 设 $\widetilde{F}$ 是 $\tilde{f}$ 的一般纤维, $p=\tilde{f}(\widetilde{F})$, 则

(1) $h^0(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}})-h^0(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}-\widetilde{F})=1$.

(2) $h^0(Y,\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}})-h^0(Y,\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}}\otimes\mathcal{O}_Y(-p))=1$.

(3) $L=\operatorname{Im}(H^0(X,\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}})\otimes\mathcal{O}_Y\to\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}})$ 是线丛且 $h^0(Y,L)=h^0(Y,\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}})=p_g(X)$. 特别地, $\deg L>0$.

(4) Y 要么是有理曲线, 要么是椭圆曲线. 进一步, 当 Y 是椭圆曲线时, $q(X)=1$.

(5) $\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}} = L \oplus Q$, 这里 $h^0(Y, Q) = 0$.

证明 (1) 由前讨论, $|K_{\widetilde{X}}| = |\tilde{f}^*E_a| + \widetilde{Z}$, 这里 $\widetilde{Z}$ 是固定部分. 因而

$$h^0(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) - h^0(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} - \widetilde{F}) = h^0(Y, E_a) - h^0(Y, E_a - p) = 1.$$

(2) 是 (1) 的直接推论.

(3) 根据 (2), $H^0(X, \tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}})$ 的基限制在一般点 $p \in Y$ 上张成一维空间. 因此 L 在 p 处的秩是 1. 由于 Y 是曲线, $\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}}$ 是局部自由的, 因而 L 是线丛.

(4) 设 $g = g(\widetilde{F})$, $b = g(Y)$. 假若 $b \geq 2$. 我们来导出矛盾. 首先, 此时有 $h^0(Y, L) = p_g(X) \geq 3$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0. \tag{13-1}$$

由于 $\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}/Y}$ 是半正定的, 所以 $\deg Q(-K_Y) \geq 0$, 即 $\deg M \geq 2(b-1)(g-1)$. 由黎曼洛赫定理, $h^0(Y, Q) \geq (b-1)(g-1)$.

另一方面, 由 (3), 我们得到正合列

$$0 \longrightarrow H^0(Y, Q) \longrightarrow H^1(Y, L).$$

注意 $g \geq 2$ (否则与 X 是一般型矛盾), 故

$$h^1(Y, L) \geq h^0(Y, Q) \geq (b-1)(g-1) > 0. \tag{13-2}$$

由 Clifford 定理, $h^0(Y, L) \leq 1 + \frac{\deg L}{2}$. 再由黎曼洛赫定理知, $h^1(Y, L) \leq b - \frac{\deg L}{2}$. 结合不等式 (13-2) 得 $g = 2$ 且 $\deg L \leq 2$, 故 $h^0(Y, L) \leq 2$, 矛盾! 这就得到我们的前半段结论.

当 $b = 1$ 时, $h^0(Y, Q) = h^1(Y, L) = 0$. 因而 $h^1(Y, Q) = -\deg Q \leq 0$ (利用 $\tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}/Y}$ 半正定性), 故 $h^1(Y, Q) = 0$. 这迫使 $h^1(Y, \tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}}) = 0$. 因而 $q(X) = b + h^1(Y, \tilde{f}_*\omega_{\widetilde{X}}) = 1$.

(5) 根据 (4), 我们只需要讨论 Y 是椭圆曲线的情形. 此时 $\omega_Y = \mathcal{O}_Y$. 因为 $h^1(Y, L) = h^0(Y, L^\vee) = 0$, 故由正合列 (13-1) 及 (3) 知, $h^0(Y, M) = 0$. 因此 $h^0(Y, Q \otimes L^\vee) = 0$ (否则存在单射 $L \hookrightarrow Q$, 从而 $h^0(Y, Q) \geq h^0(Y, L) > 0$). 这就有

$$\mathrm{Ext}^1(Q, L) = H^0(Y, Q \otimes L^\vee)^\vee = 0.$$

因而正合列 (13-1) 是分裂的. ■

定理 13.1.1 ([Xia85b]) *设 $f : X \dashrightarrow Y$ 是典范纤维化, 那么 $g(Y) \leq 1$. 当 $p_g(X) \geq 3$ 或 $g(\Sigma) \geq 1$ 时, $Y = \Sigma$. 进一步, 假设 f 是态射, 则*

$$f_*\omega_X \cong L \oplus Q,$$

其中 L 是线丛且满足 $H^0(Y, L) = p_g(X)$; $h^0(Y, Q) = 0$ 且 $Q(-K_Y)$ 是半正定的.

证明 我们只需证明 $Y = \Sigma$ (即 $\pi = id$). 其余结论均来自于引理 13.1.1. 回顾 $E_a = \pi^*E$. 一方面,

$$p_g(X) = h^0(Y, E_a) = a + \chi(\mathcal{O}_Y) = \deg \pi \cdot \deg E + \chi(\mathcal{O}_Y).$$

另一方面,

$$p_g(X) = h^0(\Sigma, E) = \deg + \chi(\mathcal{O}_Y) = \deg E + \chi(\mathcal{O}_\Sigma).$$

通过比较即得 $\deg\pi = 1$. ■

定理 13.1.2 ([Bea79]) *设 X 是一般型极小曲面, $|K_X|$ 是亏格 g 线束. 如果 $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 21$ 或者 $g(Y) \geq 1$, 那么 $2 \leq g \leq 5$, 并且 $\varphi_{|K_X|}$ 是态射.*

证明 先考虑 $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 21$ 的情形. 由前讨论, $K_X \equiv_{\mathrm{num}} Z + aF$. 由 Miyaoka-Yau 不等式, 我们有

$$9\chi(\mathcal{O}_X) \geq K_X^2 \geq aK_XF \geq (p_g - 1)K_XF \geq (\chi(\mathcal{O}_X) - 2)K_XF.$$

因此 $K_XF \leq 9$, 从而 $aF^2 \leq 9$. 由于 $a \geq \chi(\mathcal{O}_X) - 2 \geq 19$, 故 $F^2 = 0$, $g(F) \leq 5$.

再考虑 $g(Y) = 1$ 的情形. 由引理 13.1.1, $q(X) = 1$, 从而 $\chi(\mathcal{O}_X) = p_g(X)$. 进一步, 此时也有 $p_g(X) = h^0(Y, E_a) = a$. 这就有

$$9p_g(X) = 9\chi(\mathcal{O}_X) \geq K_X^2 \geq aK_XF = p_g(X) \cdot K_XF,$$

故 $K_XF \leq 9$, 从而 $2 \leq g \leq 5$. ■

[Xia88, Problem 6] 猜测当 $p_g(X) \gg 0$ 时, 不可能有 $g = 5$. [Che16] 对 $g = 5$ 的情形做了探讨. 下面我们对 $g = 5$ 且 $p_g(X) \gg 0$ 的情形做一些简单的讨论. 此时 f 是态射且纤维连通. 我们设

$$N = V + A + B + E,$$

这里 V 是 N 中垂直分支的和, A 是 N 中满足 $\Gamma^2 \geq 0$ 的水平不可约分支的和, B 是 $N - V - A$ 中满足 $K_X\Gamma \geq 0$ 的分支的和, E 则是 N 中所有水平的 (-1)-曲线之和. 对 N 中每个分支 Γ, 设 μ_Γ 是 Γ 在 N 中的系数, $m_\Gamma = \Gamma F$. 对任何 $\Gamma \subseteq N$,

$$K_X\Gamma \geq f^*E_a\Gamma + \mu_\Gamma\Gamma^2 = am_\Gamma + \mu_\Gamma\Gamma^2, \tag{13-3}$$

即

$$K_X\Gamma \geq \frac{am_\Gamma\mu_\Gamma}{\mu_\Gamma + 1} + \frac{\mu_\Gamma}{\mu_\Gamma + 1}(2p_a(\Gamma) - 2). \tag{13-4}$$

引理 13.1.2 *在以上假设条件和记号下, 我们有*

(1) $\sum\limits_{\Gamma\subseteq N} m_\Gamma\mu_\Gamma = 2g - 2 = 8$.

(2) *当 $a \geq 2g - 2 = 8$ 或 $g(Y) = 1$ 时, $E = 0$.*

(3) *在 (2) 的条件下,*

$$K_XN \geq \sum_{\Gamma\subseteq A} am_\Gamma\mu_\Gamma + \sum_{\Gamma\subseteq B}\left(\frac{am_\Gamma\mu_\Gamma}{\mu_\Gamma + 1} + \frac{\mu_\Gamma^2}{\mu_\Gamma + 1}(2p_a(Y) - 2)\right).$$

证明 (1) $K_XF = \sum\limits_{\Gamma\subseteq N} \mu_\Gamma\Gamma F$.

(2) 由式 (13-3), 对 $\Gamma \subseteq E$, $\mu_\Gamma \geq am_\Gamma + 1$. 再由 (1), 若 $E \neq 0$, 则

$$8 = 2g - 2 \geq \sum_{\Gamma\subseteq E} \mu_\Gamma \geq a + 1.$$

(3) 结合式 (13-4) 及 $p_a(\Gamma) \geq p_a(Y)$ 即得. ■

推论 13.1.2 *若 $a \geq 84$ 或 $g(Y)=1$, 则 $A=0$, $B=8\Gamma$, 这里 Γ 是 f 的截面.*

$$-\frac{a}{8}+\frac{17}{4}(g(Y)-1) \leq 2g(Y)-2-K_X\Gamma=\Gamma^2=-\frac{a}{9}+\frac{2}{9}(g(Y)-1)-\frac{\Gamma V}{9}. \tag{13-5}$$

证明 首先,

$$\chi(\mathcal{O}_X) \leq 1+p_g(X)-g(Y)=a-(2g(Y)-2).$$

结合 Miyaoka-Yau 不等式得

$$9(a+2-2g(Y)) \geq K_X^2 \geq a(2g-2)+K_XN=8a+K_XN,$$

即

$$a+18-18g(Y) \geq K_XN.$$

首先注意到, 对 $\Gamma \subseteq A$, $\Gamma K_X \geq 1$, 故 $p_a(\Gamma) \geq 2$. 若 $m_\Gamma=1$, 则 $g(\Gamma)=g(Y) \leq 1$, 矛盾! 故 $m_\Gamma \geq 2$. 结合引理 13.1.2 得 $a+18 \geq 2a$, 与命题条件矛盾! 故 $A=0$.

利用引理 13.1.2 (1), 可以逐一验证 $B=8\Gamma$, 这里 Γ 是 f 的截面. 由此可得式 (13-5). ■

本章习题

习题 13.1

第十四章　向量丛与高斯复合律

第十五章　向量丛与一般覆盖

本章习题

习题 15.1

参 考 文 献

[ApNa10] M. Aprodu, J. Nagel: *Koszul cohomoloy and algebraic geometry*, University lecture series, Vol. **52** (2010).

[ArSe78] E. Arbarello, E. Sernesi: Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor, Invent. Math., **49**(1978), 99–119.

[Ati57] M. Atiyah: *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957),414–452.

[BaBo70] P. Baum, R. Bott: *On the zeroes of meromorphic vector fields*, Essais en l'honneur de De Rham (1970),29–74.

[Bea79] A. Beauville: *L'application canonique pour les surfaces de type général*, Invent. Math. **55** (1979), no.2, 121–140.

[Bom73] E.Bombier: *Canonical models of surfaces of general type*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **42** (1973),171–219.

[BoOl03] F. Bogomolov, B. De Oliveira: *Convexity of coverings of algebraic varieties and vanishing theorems*, preprint (2003).

[Bot57] R. Bott: *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math. **66** (1957),203–248.

[BPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven: Compact Complex Surfaces, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bru97] M. Brunella: *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*, Publicacions matematiques, **41**(2) (1997), 527–544.

[Bru97b] M. Brunella: *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, Vol.**30**, no. 5, (1997), 569–594.

[Bru01] M. Brunella: *Invariance par déformations de la dimension de Kodaira d'un feuilletage sur une surface*, in: Essays on geometry and related topics. Vols 1 and 2. Monoger. Enseign. Math. **38**. Enseignement Mathémathique, Geneva (2001), 113–132.

[Bru15] M. Brunella: *Birational Geometry of Foliations (IMPA Monographs)*, (Springer, 2015).

[But94] David C. Butler: *Normal generation of vector bundles over a curve*, J. Differental Geometry, **39** (1994), 1–34.

[Cam88] C. Camacho: *Quadratic forms and holomorphic foliations on singular surfaces*, Math. Ann., **282** (1988), 177–184.

[CaSa82] C. Camacho, P. Sad: *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. Math., **115** (1982), 579–595.

[CSN84] C. Camacho, P. Sad, A. Lins Neto: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Diff. Geom., **20** (1984), 143–174.

[Che16] X. Chen: *Xiao's conjecture on canonically fibred surfaces*, preprint.

[CarM94] Manuel M. Carnicer: *The Poincaréproblem in the nondicritical case*, Annals of mathematics. **140**(2) (1994), 289–294.

[CaFl15] P. Cascini, E. Floris: *On invariance of plurigenera for foliations on surfaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), (2015).

[CaFl15b] P. Cascini, E. Floris: *Notes on MMp for foliations*, preprint.

[CeNe91] D. Cerveau, A. Lins Neto: *Holomorphic foliations in* $\mathbb{CP}(2)$ *having an invariant algebraic curve*, Annales de l'institut Fourier, **41**(4) (1991), 883–903.

[Dar78] G. Darboux: *Mémoire sur les équations differentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Vol. 2, Issue: 1 (1878), 151–200.

[ELM12] L. Ein, R. Lazarsfeld, Y. Mustopa: *Stability of syzygy bundles on an algebraic surface*, http://arxiv.org/abs/1211.6921, 2012.

[Fri98] Robert Friedman: *Algebraic Surfaces and Holomorphic Vector Bundles*, (Springer, 1998).

[Fuj78] T. Fujita: *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), no. 4, 779–794.

[Fuj79] T. Fujita: *On Zariski problem*, Proc. Japan Acad. A **55** (1979), no. 4, 106–110.

[Gie71] D. Gieseker: *p-ample bundles and their Chern classes*, Nagoya Math. J., **43** (1971), 91–116.

[Gie79] D. Gieseker: *On a theorem of Bogomolov on Chern classes of stable bundles*, Amer. J. Math. **101** (1979), no. 1, 77–85.

[GMOB89] X. Gomez-Mont, L. Oriz-Bobadilla: *Sisstemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aport. Matem., Soc. Mat. Mexicana (1989).

[Gor68] P. Gordan: *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Funktion mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*, I. Riene und Angewandte Mathematik **69** (1868), 323–354.

[Gr84a] M. Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. Differential Geom., **19**(1984), 125–171.

[Gr84b] M. Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, II J. Differential Geom., **20**(1984), 279–289.

[GrLa89] M. Green, R. Lazarsfeld: Some results on the syzygies of finite sets and algebraic curves, Compositio Math., **67**(1989), 301–314.

[Gri69] P. Griffith: *Hermitian differential geometry, Chern class, and positive vector bundles*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira), Univ. Tokyo Press, Tokyo (1969), 185–251.

[GrHa94] P. Griffith, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, (Wiley-Interscience, 1994).

[Gro56] A. Grothendieck: *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. **79** (1956), 121–138.

[Hart66] R. Hartshorne: *Ample vector bundles*, Publications Mathématiques de í'IHÉS, **29** (1)(1956), 64–94.

[Hart77] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*, Vol. **52**, (Springer, 1977).

[Hir66] F. Hirzebruch: *Topological methods in algebraic geometry*, (Springer, 1966).

[Hor64] G. Horrocks: *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 689–713.

[Jou78] J.-P. Jouanolou: *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff*, Math. Ann., **232** (1978), 239–245.

[Kle66] S. L. Kleiman: *Toward a numerical theory of ampleness*, Annals of Mathematics, (1966), 293-344.

[Law85] Lawrence Ein: *An analogue of Max Nöther's theorem*, Duke Mathematical Journal Vol. **52**, no. 3 (1985), 689–706.

[Laz04I] R. Lazarsfeld: *Positivity in Algebraic Geometry I*, Classical Setting: Line Bundles and Linear Series. (Springer, 2004).

[Laz04II] R. Lazarsfeld: *Positivity in Algebraic Geometry II*, Positivity for Vector Bundles and Multiplier Ideals. (Springer, 2004).

[LeP75] J. Le Potier: *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque*, Math. Ann. **218** (1975), no. 1, 35–53.

[LuTa10] J. Lu, S. -L. Tan: *Inequalities between the Chern numbers of a singular fiber in a family of algebraic curves,* Trans. of AMS, **365** 7 (2013), 3373–3396.

[Mar96] G. Martens: *The gonality of curves on a Hirzebruch surface*, Arch. Math., **67**(1996), 349–352.

[MaRa82] J. Martinet, J.-P. Ramis: *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. IHES **55**, (1982), 63–124.

[McQ00] M. McQuillan: *Noncommutative Mori theory*, preprint IHES M/00/15 (2000).

[McQ08] M. McQuillan: *Canonical models of foliations*, Pure and applied mathematics quarterly, **4**(3) (2008).

[Mil68] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1968)

[Miy85] Y. Miyaoka: *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety*, Algebraic geometry, Sendai, (1985), 449–476, Adv. Stud. Pure Math, 10.

[Miy87] Y. Miyaoka: *Deformation of a morphism along a foliation and applications*, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987) , 245–268,

[MiPe97] Y. Miyaoka, T. Peternell: *Geometry of higher dimensional algeraic varieties*, Birkhäuser Basel, 1997.

[Mov15] H. Movasati: *Introduction to algebraic curves and foliations*, preprint, 2015.

[MoVi09] H. Movasati, E. Vieira: *Projective limit cycles*, Moscow Mathematical Journal, (4) **9** (2009), 855-866.

[Mum66] D. Mumford: *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Ann. Math. Stud., **59**(1966).

[Mum70] D. Mumford: *Varieties defined by quadratic equations*, in " Corso CIME in Questions on Algebraic Varieties, Rome, 1970," 30–100.

[NaSe65] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri: *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math., (2) **82** (1965), 540–567.

[Net02] A. Lins Neto: *Some examples for the Poincaréand Painlevéproblems*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, **35**, no. 2 (2002).

[NeSc11] A. Lins Neto, B. Scárdua: *Introdu?aoa teoria das folhea?oes algébricas complexas*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2011).

[OKa61] K. Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Iwanami Shoten, Tokyo (1961)

[OSS80] C. Okonek, M. Spindler, H. Schneider: *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Progress in Mathematics:3, (Birkhauser, 1980).

[Pao95] R. Paoletti: *Free pencils on divisors*, Math. Ann., **303**(1995), 109–123.

[PaRa88] A. Paranjape, S. Ramanan: *On the canonical ring of an algebraic curve*, Algebraic Geometry and Commutative Algebra (in honor of M. Nagata), Kinokaniya (1988).

[Per02] J. V. Pereira: *On the Poincaré problem for foliations of general type,* Math. Ann., **323**(2) (2002), 217–226.

[Per05] J. V. Pereira: *On the height of foliated surfaces with vanishing Kodaira dimension,* Publicacions Matemàtiques, (2005), 363–373.

[Sak90] F. Sakai: *Reider-Serrano's method on normal surfaces*, Algebraic geometry (L'Aquila 1988) Vol. **1417**, Lecture Notes in Math., Springer Berlin, (1990), 301–319.

[Sch61] R.L.E. Schwarzenberger: *Vector bundles on algebraic surfaces*, Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 623–640.

[Sei68] A. Seidenberg: *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$, Amer. J. Math., **89**(1968), 248–269.

[Ser87] F. Serrano: *Extension of morphisms defined on a divisor*, Math. Ann., **277**(1987), no. 3, 395–413.

[Suw98] T. Suwa: *Indices of vector fields and residues of holomorphic singular foliations*, Hermann (1998).

[Tan94] S.-L. Tan: On the base changes of penciles of curves, I, Manuscripta Math., **84**(1994), 225–244.

[Tan96] S.-L. Tan: *On the base changes of penciles of curves, II,* Math. Z., **222**(1996), 655–676.

[Tan11] S.-L. Tan: *Algebraic Surface* (in Chinese), preprint, (2011).

[TaVi00] S.-L. Tan, E. Viehweg: *A note on Cayley-Bacharach property for vector bundles*, in: Complex Analysis and Algebraic Geometry (2000) 361–373, Walter de Gruyter, Berlin-New York.

[Tho74] A. Thomas: *Almost complex structures on complex projective spaces,* TAMS **193**(1974), 123–132.

[Xia85] G. Xiao: *Surfaces fibrées en courbes degenre deux*, Lect. Notes in Math., **1137** (1985) Springer-Verlag.

[Xia85b] G. Xiao: *L'irrégularité des surfaces de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau*[Irregularity of surfaces of genral type whose canonical system is composed with a pencil], Compositio. Math., **56** (1985), no. 2, 251–257

[Xia88] G. Xiao: *Problem list in Birational Geometry of Algebraic Varieties: Open Problems, XXIII International Symposium*, Division of Mathematics, the Taniguchi Foundation, (1988), 36–40.

[Xia92] G. Xiao: *The fibrations of algbraic* , Shanghai Scientific & Technical Publishers (in Chinese), (1992)

索 引