本科生基础课

拓扑学讲义

陆　　俊

华东师范大学数学系

二零一四年九月

前　言

本讲义是以曼克勒斯的《拓扑学基础教程》为蓝本所撰写的讲课稿. 原计划是讲授点集拓扑和代数拓扑初步的内容. 因为课时限制, 目前只包含了点集拓扑的内容, 并且也未能深入介绍点集拓扑中较深刻的结论.

作者非常感谢学生仲国磊整理了本讲义的tex版本, 其工作量是非常巨大的. 同时, 作者也感谢好友瞿振华给我提供了这样的机会讲授 (点集) 拓扑学.

目 录

第一章 导读: 拓扑学简介

1.1 什么是拓扑学？

在我们正式讲授这门课之前, 先简单介绍一下拓扑学是什么. 为了给拓扑学一个定性的解释, 我们首先引入*拓扑变换*的概念. 粗略地说, 它是指图形的伸缩、弯曲 (要求不撕裂，不粘合) 变换. 所谓*拓扑学* (Topology), 就是研究图形在拓扑变换下保持不变的性质 (也称橡皮几何学). 这里顺便说些题外话. 其实我们学过的很多几何学都可以看作是研究几何图形在某一类几何变换下保持不变的性质. 这是一种重要的几何思想.

几何变换	保持不变的性质	对应几何学
刚体变换	保度量 (角度、长度、面积)	欧氏几何
仿射变换	保共线关系等	仿射几何
分式线性变换	保角,保圆周,保交比等	反演几何(复平面)
射影变换	保交比等	射影几何
拓扑变换	保维数,保连通性等	拓扑学
可微坐标变换	保持定向等	微分几何

我们继续回到拓扑学的话题上. 拓扑学的终极目标是要将图形在同胚意义下分类. 这里所谓的*同胚*, 是指两个图形可通过拓扑变换彼此互变. 实现这个目标是非常困难的事. 实际上只有在少数的情况下才能解决分类问题. 我们会在后面严格定义同胚的概念.

1.2 拓扑学的历史发源

这里例举一些拓扑学的发源问题.

例 1.2.1 (**一笔画问题**) 平面上由顶点和边构成的图(Graph)能不能由一笔画成 (即要求不重复且不遗漏地走遍所有的边和顶点)? 这个问题最早由欧拉解决, 是图论和拓扑学的经典发源问题之一. 对一个图来说, 一笔画问题并不依赖于图中的边是直线或者曲线, 因而是一个拓扑问题. ■

例 1.2.2 (**凸多面体定理**) 设一个凸多面体的顶点数为 E, 棱数为 F, 面数 V. 欧拉断言如下恒等式

$$E - F + V = 2.$$

这也是早期拓扑学的经典结论之一. 想象一下, 如果我们把多面体的一个面挖掉并用力拉开这个口子, 把整个多面体压扁到桌面上, 那么多面体就变成了平面上的图. 因此欧拉定理也可以看成关于图的拓扑定理. ■

例 1.2.3 (**四色问题**) 给地图上的各区域着色,要求相邻国家有不同的颜色. 问至少需要几种颜色满足以上要求? 这个问题的答案是: 只需要 4 种颜色就足够了. 这个问题首先被归结为图论问题, 然后由计算机直接验证各类情形. ■

例 1.2.4 (**莫比乌斯带**) 将一条矩形的纸条一端扭转 180 度, 与其对边粘合, 得到的纸环称作莫比乌斯带. 它和圆柱有着完全不同的几何 (拓扑) 性质. 比如, 它是单侧曲面. 但是圆柱却是双侧曲面.

另外, 想象莫比乌斯带上站有一个人 (头朝上), 他从某一点出发, 沿着莫比乌斯带走一圈回到原点. 那么你会发现他的头变为朝下方向. 这在数学上叫做不可定向性. 这种性质实际上反映了莫比乌斯带和圆柱之间的拓扑结构差异. 后者只有平庸的拓扑结构, 前者却又非平庸的拓扑结构. 后面我们会进一步深入探讨它. ■

拓扑学的真正奠基人是大数学家庞加莱. 他开创了组合拓扑学, 给出了著名的庞加莱对偶定理, 并且引入了基本群的概念-拓扑学的重要数学对象之一-等等.

1.3 拓扑学的分类

按照传统的分类, 拓扑学大致可以分为四个分支: 点集拓扑、代数拓扑、组合拓扑、微分拓扑. 点集拓扑来自于实数集和连续函数的性质 (比如介值定理等). 代数拓扑包含了同调论合同伦伦, 其中同调论来源于欧拉凸多面体定理, 同伦论则来源于庞加莱关于基本群的研究. 组合拓扑实际上可以看成代数拓扑的一部分, 来源于组合同调论. 微分拓扑则研究局部微分性质和整体拓扑之间的关系, 比如著名的高斯-博纳特公式.

拓扑学已经非常广泛地渗透到了各个数学分支里. 比如, 除了几何学之外, 它也被深刻地应用到诸如泛函分析、概率统计、实变函数、微分方程等等理论中.

第二章　点集拓扑 (I): 拓扑空间

2.1　拓扑空间与开集

我们首先回顾数学分析中实数轴 $X=\mathbb{R}^1$ 上开集的概念.

(1) X 上的开区间是指如下形式的集合

$$U_1=(a,b)\triangleq\{x\in X\mid a<x<b\}.$$

特别地, 我们可以将空集写为规定 $\emptyset=(1,0)$.

(2) 开射线:

$$U_2:=(a,+\infty)\triangleq\{x\in\mathbb{R}^1\mid x>a\},$$
$$U_3:=(-\infty,b)\triangleq\{x\in\mathbb{R}^1\mid x<b\}.$$

全集也能写成 $X=(-\infty,+\infty)$.

(3) 一般开集定义为一些开区间的并集. 比如, $(-1,0)\cup(2,3)$ 是开集. 实际上开射线和全集也能写成开区间的并.

$$(a,+\infty)=\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+\\ n>a}}(a,n),\quad(-\infty,b)=\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+\\ n>-b}}(-n,b),\quad X=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}(-n,n).$$

实数轴上的开集满足以下三条性质:

(1) $X,\emptyset$ 是开集,

(2) 任意多个开集的并仍是开集,

(3) 有限多个开集的交仍是开集.

注 2.1.1　性质 (3) 中“有限多个” 的条件不能少, 比如:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$$

不是开集. ■

现在, 我们要从实数轴开集的概念出发, 定义抽象的拓扑空间和开集的概念.

定义 2.1.1　设 X 是非空集合, $\mathscr{T}$ 是 X 上一些子集构成的集族, 满足以下条件:

(1) $\emptyset\in\mathscr{T}$, $X\in\mathscr{T}$,

(2) $\mathscr{T}$ 中任意多个元素的并也在 $\mathscr{T}$ 中,

(3) $\mathscr{T}$ 中有限多个元素的交也在 $\mathscr{T}$ 中,

则称 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑 (Topology), X 称为拓扑空间. $\mathscr{T}$ 中的元素称为开集 (Open set).

下面举一些拓扑空间的例子.

例 2.1.1 (**实数轴上的标准拓扑**) 设 $X=\mathbb{R}^1$, $\mathscr{T}=\{U \mid U$ 是开区间的并集$\}$. 显然 $\mathscr{T}$ 是集合 X 的拓扑, $\mathscr{T}$ 中的元素即为通常理解的开集. 这个拓扑称为标准拓扑. ■

例 2.1.2 (**平面上的标准拓扑**) 设 $X=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{T}=\{U \mid U$ 是开邻域的并集$\}$, $\mathscr{T}$ 也是 X 的标准拓扑, 其开集与我们在数学分析中理解的概念完全一致. ■

例 2.1.3 设 $X=\{1,2,3\}$. 我们可以定义 X 上各种不同的拓扑.

(1) $\mathscr{T}_1=\{\emptyset, X\}$. 这是平凡的拓扑,

(2) $\mathscr{T}_2=\{\emptyset, X,\{1\},\{2\}\}$,

(3) $\mathscr{T}_3=X$ 的幂集 (即所有子集构成的族),

(4) $\mathscr{T}_4=\{\emptyset, X,\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$. ■

注 2.1.2 (1) 上例表明 X 上可能有许多不同的拓扑.

(2) 并非任何集族都是拓扑. 比如 $X=\{1,2,3\}$ 上

$$\mathscr{T}=\{\emptyset, X,\{1,2\},\{2,3\}\}$$

并非拓扑. 这是因为 $\{2\}=\{1,2\}\cap\{2,3\}$ 不在 $\mathscr{T}$ 中. ■

有限集合上的拓扑有许多有趣的组合数学问题. 比如

问题 2.1.1 设 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 那么 X_n 上有多少种不同的拓扑?

例 2.1.4 (**离散拓扑**) 设 X 是非空集合, $\mathscr{T}$ 是 X 的幂集. 该拓扑称为离散拓扑. ■

例 2.1.5 (**平凡拓扑**) 设 X 是非空集合, $\mathscr{T}=\{\emptyset, X\}$ 定义的拓扑称为平凡拓扑. ■

例 2.1.6 (**余有限拓扑**) 设 X 是无限集合,

$$\mathscr{T}_f=\{U \mid \text{ 要么 } U=\emptyset, \text{要么 } X-U \text{ 是有限集}\}.$$

我们来验证它是拓扑.

(1) 由定义: $\emptyset \in \mathscr{T}_f$. 因为 $X-X=\emptyset$, 故也是有限集, 所以 $X \in \mathscr{T}_f$.

(2) 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathscr{T}_f$, 我们要证 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathscr{T}_f$, 即证 $X-\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$是有限集. 由于

$$X-\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(X-U_\alpha),$$

并且 $X-U_\alpha$ 是有限集, 故 $X-\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ 是有限集, 从而$X-\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathscr{T}_f$

(3) 设 $U_1, U_2, \dots U_n \in \mathscr{T}_f$ (即 $X - U_i$ 是有限集). 由

$$X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X - U_i)$$

推知 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X - U_i)$ 是有限集. 因此 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{T}_f$.

综上所述, $\mathscr{T}_f$ 是 X 上的拓扑. ■

类似地, 我们可定义如下拓扑空间.

例 2.1.7 (**余可数拓扑**) 设 X是不可数集合,

$$\mathscr{T}_f = \{U \mid \text{要么 } U = \emptyset, \text{要么 } X - \emptyset \text{ 是可数集}\}.$$

请读者自己验证这是拓扑空间. ■

定义 2.1.2 设 X 非空, $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 若 $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, 则称 $\mathscr{T}_2$ 细于 $\mathscr{T}_1$, 或称 $\mathscr{T}_1$ 粗于 $\mathscr{T}_2$.

例 2.1.8 平凡拓扑粗于离散拓扑. ■

例 2.1.9 设 $X = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}, \quad \mathscr{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\},$$

则 $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, 因此 $\mathscr{T}_1$ 粗于 $\mathscr{T}_2$. ■

2.2 闭集

定义 2.2.1 设 $\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑, $Y \subseteq X$, 若 $X - Y \in \mathscr{T}$ 是开集, 则称 Y 是闭集 (closeset).

例 2.2.1 设 $X = \mathbb{R}^1$, $\mathscr{T}$ 是标准拓扑. 我们考察闭区间 $[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$. 因为 $X - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 是 $\mathscr{T}$ 的开集, 所以 $[a, b]$ 是闭集. ■

例 2.2.2 $\mathscr{T}$ 是 X 上的离散拓扑,对任何子集 $Y \subseteq X$, Y 是开集. 另一方面, $X - Y \in \mathscr{T}$, 因此 Y是闭集. 综上, Y既是开集,又是闭集. ■

例 2.2.3 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$, $Y = \{1\}$ 是开集. 另一方面, $X - Y = \{2, 3\} \in \mathscr{T}$ 表明 Y 是闭集. 因此 Y既是开集也是闭集. ■

例 2.2.4 $X = \mathbb{R}^1$, $\mathscr{T}_f$ 是余有限拓扑.
$Y \subseteq X$, Y 是闭集当且仅当 $X - Y$ 是开集, 即 $X - (X - Y)$ 是有限集, 或者 $X - Y = \emptyset$, 亦即 Y 是有限集或者 $Y = X$. ■

例 2.2.5 $X = R^2$, $\mathscr{T}$ 是 X 上的标准拓扑. 设

$$Y = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

因为 $X - Y = (-\infty, 0) \times R^1 \cup R^1 \times (-\infty, 0)$ 是开集, 所以 Y 是闭集. ■

命题 2.2.1 X 是一个拓扑空间, 则

(1) $\emptyset, X$ 是闭集,

(2) 任意多个闭集的交是闭集,

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

证明 (1) 因为 $X - \emptyset = X \in \mathscr{T}$, 故 $\emptyset$ 是闭集. 又因 $X - X = \emptyset \in \mathscr{T}$, 所以 X 也是闭集.

(2) 设 $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族闭集, $U_\alpha = X - Y_\alpha$. 由定义, $U_\alpha \in \mathscr{T}$ 是开集. 注意

$$X - \bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} U\alpha$$

是开集, 故 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$ 是闭集.

(3) 设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是闭集. 由于

$$X - Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

是 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ 是开集, 故 $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$ 是闭集. ■

注 2.2.1 设集合 X 是非空集, 我们也可以用"闭集" 定义 X 上的拓扑. 具体方法如下: 设 $\mathscr{C}$ 是子集族,满足:

(1) $X, \emptyset \in \mathscr{C}$,

(2) $\mathscr{C}$ 中任意多个元素的交集仍在 $\mathscr{C}$ 中,

(3) $\mathscr{C}$ 中有限多个元素的并集还仍在 $\mathscr{C}$ 中.

令 $\mathscr{T} = \{U \mid X - U \in \mathscr{C}\}$, 则 $\mathscr{T}$ 给出了集合 X 上的拓扑. ■

例 2.2.6 (Zariski 拓扑) 设 $X = \mathbb{C}^n$ 是复数域上 n 维空间. 考虑多项式方程组:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

定义该方程组的解集为 $Z(f_1, f_2, \cdots, f_r)$. 显然有

$$Z(f_1, f_2, \ldots, f_r) = Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap \cdots \cap Z(f_r).$$

我们记 $U(f_1, f_2, \ldots, f_r) = X - Z(f_1, f_2, \ldots, f_r)$,

$$\mathscr{T} = \{\text{所有这类 } U(f_1, f_2, \ldots, f_r)\}, \quad \mathscr{C} = \{\text{所有多项式方程组解集}\}.$$

以下我们断言 $\mathscr{T}$ 是拓扑, 称之为 Zariski 拓扑. 它是代数几何中最基本的研究对象.

利用注记 2.2.1 及命题 2.2.1, 我们只需要验证 $\mathscr{C}$ 是闭集族, 从而它诱导了 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$.

首先注意到 $\emptyset = Z(1)$ (即方程 $1 = 0$ 无解) 及$X = Z(0)$, 因此 $\emptyset, X \in \mathscr{C}$.

令 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathscr{C}$. 由定义可设

$$Y_\alpha = Z(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_{r_\alpha}}) = Z(f_{\alpha_1}) \cap Z(f_{\alpha_2}) \cap \dots \cap Z(f_{\alpha_{r_\alpha}})$$

因此

$$\bigcap_{\alpha\in I} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (Z(f_{\alpha_1}) \cap Z(f_{\alpha_2}) \cap \dots \cap Z(f_{\alpha_{r_\alpha}})) = Z(\{f_{\alpha_\beta}\})$$

由经典的结论, 多项式环 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ 中由诸 $\{f_{\alpha_i}\}$ 生成的理想可以用有限个元素生成. 换言之, 方程组 $\{f_{\alpha_i} = 0\}$ 中可以挑出有限个方程, 它们的解集和 $\{f_{\alpha_i} = 0\}$ 的解集一致. 因此

$$\bigcap_{\alpha\in I} Y_\alpha \in \mathscr{C}.$$

取 $\mathscr{C}$ 中有限个个元素 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathscr{C}$. 今证 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i$ 是一个闭集. 由数学归纳法, 我们只需证明 $n = 2$ 的情形. 不失一般性, 设

$$Y_1 = Z(f_1, f_2, \dots, f_r), \quad Y_2 = Z(g_1, g_2, \dots, g_l)$$

那么

$$Y_1 \cup Y_2 = Z\left(\{f_i \cdot g_j\}_{\substack{1\le i\le r,\\ 1\le j\le l}}\right) \in \mathscr{C}. \tag{2-1}$$

综上,我们证明了 $\mathscr{T}$ 是 X 上的拓扑. ■

例 2.2.7 设 $X = \mathbb{C}$, $\mathscr{T}_1$ 是 Zariski 拓扑, $\mathscr{T}_2$ 是余有限拓扑. 由高斯代数学基本定理, 我们有 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. 请读者自己验证. ■

2.3 拓扑空间的构造方法

2.3.1 方法一: 拓扑基

定义 2.3.1 X 是一个非空集合, $\mathscr{B}$ 是 X 的子集族, 满足以下条件

(1) 任给 $x \in X$, 存在 $U \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in U$,

(2) 设 $x \in U_1 \cap U_2$, 这里 $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$, 则存在 $U_3 \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

我们称 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个拓扑基. 拓扑基 $\mathscr{B}$ 中的元素被称作基元素.

利用拓扑基, 我们可以构造出拓扑. 这个构造方法有点类似于用线性无关向量组构造向量空间.

定义 2.3.2 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基, $\mathscr{T}$ 是 X 的子集族, 满足:

$$U \in \mathscr{T} \iff U = \emptyset \text{ 或 } U \text{ 是 } \mathscr{B} \text{ 中基元素的并},$$

则 $\mathscr{T}$ 称为由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑.

请读者自己验证上述的 $\mathscr{T}$ 确实是拓扑. 用拓扑基描述拓扑显然要方便很多. 以下我们考察一些例子.

例 2.3.1 设 $X=\mathbb{R}^1$, $\mathscr{T}$ 是标准拓扑, $\mathscr{B}=\{$所有的开区间$\}$. 拓扑基 $\mathscr{B}$ 生成了$\mathscr{T}$. ■

例 2.3.2 设 $X=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{T}$ 是标准拓扑, $\mathscr{B}=\{$所有的开圆盘$\}$, 拓扑基 $\mathscr{B}$ 生成了 $\mathscr{T}$. ■

命题 2.3.1 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的拓扑基. $\mathscr{T}$ 是一个子集族, 那么以下两个条件彼此等价:

(1) $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑,

(2) 任取 $U\in\mathscr{T}$, 对任意 $x\in U$, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subseteq U$.

反过来，对于给定的拓扑空间，如何判断一个开集族是否是这个拓扑的基? 下面的结论回答了这一问题.

命题 2.3.2 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{T}$ 是拓扑. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的开集族, 满足以下条件: 对任何开集 U 及 $x\in U$, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in B\subseteq U$. 那么 $\mathscr{B}$ 是该拓扑的基.

证明 对任何 $x\in X$, 由于 X 也是开集, 故由假设条件知, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 满足 $x\in B\subseteq X$.

设 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$, $x\in B_1\cap B_2$. 因为 B_1,B_2 是开集, 所以 $B_1\cap B_2$ 也是开集. 由假设条件, 存在 $B_3\in\mathscr{B}$, 满足 $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$. ■

利用拓扑基比较两个拓扑的粗细也会方便很多.

命题 2.3.3 设 X 是一个拓扑空间, $\mathscr{T},\mathscr{T}'$ 是 X 上的拓扑, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ 分别是 $\mathscr{T},\mathscr{T}'$ 的拓扑基, 则以下三个条件彼此等价:

(1) $\mathscr{T}'$ 细于 $\mathscr{T}$ (即 $\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}'$),

(2) 对任意 $x\in X$ 及包含 x 的任意基元素 $B\in\mathscr{B}$,都存在 $B'\in\mathscr{B}'$ 满足 $x\in B'\subseteq B$,

(3) $\mathscr{B}$ 中任何基元素都是 $\mathscr{B}'$ 中基元素的并.

证明 (2) 与 (3) 的等价性是显然的, 因此只需证明 (1) 与 (2) 的等价性.

(1) $\Rightarrow$ (2) 任取 $x\in X$ 及包含 x 的基元素 $B\in\mathscr{B}$. 因为

$$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}',$$

所以 $B\in\mathscr{T}'$. 由命题 2.3.1 及假设条件, 存在 $B'\in\mathscr{B}'$ 使得 $x\in B'\subseteq B$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 由于 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的拓扑基, 故只需证明 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}'$ 即可. $\forall B\in\mathscr{B}$, 由假设条件 (3), B 是 $\mathscr{B}'$ 中基元素的并, 即 $B\in\mathscr{T}'$. ■

例 2.3.3 设 $X=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}_1=\{$所有的开圆盘$\}$. 它是拓扑基, 生成了标准拓扑 $\mathscr{T}_1$.

设 $\mathscr{B}_2=\{$所有的开矩形$\}$, 它的生成拓扑记为 $\mathscr{T}_2$. 利用命题 2.3.3, 容易验证 $\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$. ■

例 2.3.4 (下限拓扑) 设 $X=\mathbb{R}^1$, $\mathscr{B}_1=\{$所有的开区间$\}$, 它生成了标准拓扑 $\mathscr{T}_1$.

设 $\mathscr{T}_2=\{$所有的半开区间 $[a,b)\}$, 它生成了所谓的下限拓扑 $\mathscr{T}_2$.

我们验证 $\mathscr{T}_1 \subsetneqq \mathscr{T}_2$. 任取 $(a,b)\in\mathscr{B}_1$ 及任意 $x\in(a,b)$, 存在 $\mathscr{B}_2$ 中的基元素 $[x,b)\subseteq(a,b)$, 使得 $x\in[x,b)$. 由命题 2.3.3, $\mathcal{T}_1$ 粗于 $\mathcal{T}_2$. 反之, 考虑 B_2 中的基元素 $[c,d)$ 及令 $x:=c\in[c,d)$. 此时不存在 $\mathscr{B}_1$ 中的任何基元素 (a,b) 使得 $c\in(a,b)\subseteq[c,d)$. 因此 $\mathscr{T}_1\neq\mathscr{T}_2$. ■

2.3.2 方法二: 序拓扑

定义 2.3.3 设 X 是非空集合. 若在集合 X 上存在一个全序关系 $<$, 满足以下条件:

(1) (可比较性) $\forall\, x,y\in X$, $x\neq y$, 则要么 $x<y$ 要么 $y<x$,

(2) (非自反性) $\forall\, x\in X$, $x<x$ 不可能成立.

(3) (传递性) $\forall\, x,y,z\in X$, 若有 $x<y$ 及 $y<z$, 则 $x<z$ 成立,

则 X 被称为一个全序集.

例 2.3.5 设 $X=\mathbb{R}^1$,

(1) X 上的常用序关系 $<$: $x<y \Leftrightarrow y-x\in\mathbb{R}^+$.

(2) 定义 X 上的另一序关系: $x<y\Leftrightarrow$ 要么 $|x|<|y|$ 要么 $|x|=|y|$ 且 $x<y$ (请读者自己验证这是一个序关系). ■

例 2.3.6 (字典序关系) 已知 $(X,<_X)$ 及 $(Y,<_Y)$ 是两个全序集, 我们定义 X 和 Y 的笛卡尔乘积

$$Z=X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

在 Z 上定义全序关系 $<_Z$: $(x_1,y_1)<_Z(x_2,y_2)\Leftrightarrow$ 要么 $x_1<_X x_2$, 要么 $x_1=x_2$ 且 $y_1<_Y y_2$. 这个序关系称作字典序关系.

类似地, 我们也可以定义多个全序集的笛卡尔积上的字典序关系. ■

定义 2.3.4 (区间) 设 $(X,<_X)$ 是关于 $<_X$ 的一个全序集, $a,b\in X$, $a<b$.

(1) 开区间

$$(a,b)\overset{\text{def}}{=}\{x\in X\mid a<x<b\}.$$

特别地, 若 $(a,b)=\emptyset$, 则称 a 是 b 的紧接前元, b 是 a 的紧接后元.

(2) 闭区间

$$[a,b]\overset{\text{def}}{=}\{x\in X\mid a\le x\le b\}.$$

(3) 半开区间

$$[a,b)\overset{\text{def}}{=}\{x\in X\mid a\le x<b\},$$

$$(a,b]\overset{\text{def}}{=}\{x\in X\mid a<x\le b\}.$$

定义 2.3.5 (最大 (小) 元) 设 $(X, <_X)$ 是全序集.

(1) 若存在 $a \in X$ 使得对任意 $x \in X$ 都有 $a \leq x$, 则称 a 是最小元.

(2) 若存在 $b \in X$ 使得对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq b$, 则称 b 是最大元.

有了这些概念后, 我们可以构造拓扑基.

定义 2.3.6 (序拓扑) 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 上的一个子集族. $U \in \mathscr{B}$ 当且仅当 U 是以下类型的区间之一:

(1) $U = (a, b)$;

(2) $U = [a_0, b)$ (若最小元 a_0 存在);

(3) $U = (a, b_0]$ (若最大元 b_0 存在).

$\mathscr{B}$ 是拓扑基, 生成的拓扑称作序拓扑.

接下来我们要验证上述 $\mathscr{B}$ 确实是拓扑基.

证明 首先验证, 对任何 $x \in X$, 都存在包含 x 的一个基元素. 以下分情形讨论:

(1) x 不是最大 (小) 元. 此时可找 $a, b \in X$ 使得 $a < x < b$, 即 $x \in (a, b)$.

(2) x 是最小元, $x \in [x, b)$, 这里 $b \in X$ 是任一满足 $b > x$ 的元素.

(3) x 是最大元, $x \in (a, x]$,这里 $a \in X$ 是任一 $a < x$ 的元素.

其次, 对任意 $U_1 = (a, b), U_2 = (c, d) \in \mathscr{B}$, 容易验证 $U_1 \cap U_2$ 仍是 $\mathscr{B}$ 中的元素. ■

命题 2.3.4 上述 $\mathscr{B}$ 生成了拓扑 $\mathscr{T}$ (称为序拓扑).

例 2.3.7 $X = \mathbb{R}^1$, 常用序关系定义的拓扑基 $\mathscr{B}$ 生成了 $\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑. ■

例 2.3.8 (字典序拓扑) $X = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上由字典序定义的拓扑基记为 $(a \times b, c \times d)$, 这里 $x \times y$ 表示坐标 (以免和直线上区间的记号混淆). ■

例 2.3.9 $X = \mathbb{Z}^+$, $<$ 是有由常用序关系定义的全序集. 1 是最小元. 注意到单点集

$$\{n\} = \begin{cases} (n-1, n+1), & n > 1, \\ [1, 2), & n = 1. \end{cases}$$

因此每个单点集 $\{n\}$ 都是基元素, 从而 $\mathbb{Z}^+$ 上的序拓扑是就是离散拓扑. ■

例 2.3.10 设 $X = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}^+$, 我们用 P_n 表示元素 $0 \times n$, 用 Q_n 表示元素 $1 \times n$. 于是

$$X = \{P_1, P_2, \cdots, P_n \cdots, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots\}.$$

考虑上面的字典序 $<$. 我们有

$$P_n < Q_n, \quad P_n < P_m, \quad Q_n < Q_m, \quad n < m.$$

单点集

$$\{P_n\} = \begin{cases} (P_{n-1}, P_{n+1}) & n > 1, \\ [P_1, P_2) & n = 1 \end{cases}$$

是开集. 类似地, $\{Q_n\}$ $(n > 1)$ 也是开集. 但是 $\{Q_1\}$ 不是开集, 因为包含 Q_1 的任何开区间必含有某个 P_i. 因此上述序拓扑不是一个离散拓扑. ■

定义 2.3.7 设 X 是全序集, 我们定义

(1) 开射线

$$(a, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid a < x\} = \bigcup_{x > a} (a, x),$$

$$(-\infty, a) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x < a\} = \bigcup_{x < a} (x, a)$$

(2) 闭射线

$$[a, +\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid a \leq x\} = \bigcup_{x \geq a} (a, x],$$

$$(-\infty, a] \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \leq a\} = \bigcup_{x \leq a} [x, a)$$

注 2.3.1 (1) 开射线显然是序拓扑中的开集.
(2) 若 a_0 是最小元, 那么$(-\infty, a) = [a_0, a)$. 类似地, 若 a_0 是最大元, 那么$(a, +\infty) = (a, a_0]$. ■

2.3.3 方法三: 积拓扑

设 X, Y 是拓扑空间, 定义 X 与 Y 的笛卡尔积

$$Z = X \times Y \overset{\triangle}{=} \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

构造 Z 上的拓扑, 我们只需要构造对应的拓扑基即可. 设 $U \subseteq X$ (相应地, $V \subseteq Y$) 是 X (相应地, Y) 中的开集. 我们可构造 Z 上的子集 $U \times V$. 现在考虑如下集族

$$\mathscr{B} = \{W \subseteq Z \mid W = U \times V, \text{这里 } U, V \text{ 分别是 } X, Y \text{ 中的开集}\}.$$

我们来证明上述的 $\mathscr{B}$ 是 Z 上的拓扑基, 从而诱导 Z 上的拓扑, 称之为*积拓扑*(Product Topology).

首先, 任取 $(x, y) \in Z$. 由 X, Y 本身的拓扑, 存在 X (相应地, Y) 中的开集 $U \subseteq X$ (相应地, $V \subseteq Y$) 满足 $x \in U$ (相应地, $y \in V$). 因此 $(x, y) \in U \times V$. 其次, 我们取

$$B_1 = U_1 \times V_1, \quad B_2 = U_2 \times V_2 \in \mathscr{B},$$

且不妨设 $(x, y) \in B_1 \cap B_2$.令

$$B_3 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathscr{B}.$$

我们有 $(x, y) \in B_1 \cap B_2 = B_3$. 综合可知, $\mathscr{B}$ 是 Z 的一组拓扑基.

例 2.3.11 设 $X = Y = \mathbb{R}^1$ 都是带有标准拓扑的实数集, $Z = X \times Y = \mathbb{R}^2$ 上的积拓扑就是平面上的标准拓扑. ■

由命题 2.3.2, 容易验证如下结论.

命题 2.3.5 假设 $\mathscr{B}_1$ 是 X 的一组拓扑基, $\mathscr{B}_2$ 是 Y 的一组拓扑基, $Z = X \times Y$, 则

$$\mathscr{B}_3 = \{W \subseteq Z \mid W = B_1 \times B_2,\ B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2\}$$

是积拓扑 $Z = X \times Y$ 的一个拓扑基.

例 2.3.12 (投影映射) 我们有自然的投影映射

$$\begin{aligned} X \times Y &\xrightarrow{pr_1} X, \qquad & X \times Y &\xrightarrow{pr_2} Y, \\ (x, y) &\longmapsto x, & (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

设 $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ 分别是 X, Y 中的开集, 那么

$$\begin{aligned} pr_1^{-1}(U) =& \{(x, y) \mid x \in U, y \in Y\} = U \times Y, \\ pr_2^{-1}(V) =& \{(x, y) \mid x \in X, y \in V\} = X \times V \end{aligned}$$

显然是 Z 中的开集, 并且满足 $pr_1^{-1}(U) \cap pr_2^{-1}(V) = U \times V$. ■

例 2.3.13 (箱拓扑) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族拓扑空间,

$$Z = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \triangleq \{(x_\alpha)_{\alpha \in I} \mid x_\alpha \in X_\alpha\},$$

$$\mathscr{B} = \{W \subseteq Z \mid W = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集}\}$$

类似上面讨论, $\mathscr{B}$ 也是一个拓扑基, 生成 Z 上的拓扑, 我们称之为箱拓扑(Box topology).

此时的投影映射记为

$$pr_\alpha : Z \longrightarrow X_\alpha, \quad (x_\alpha)_{\alpha \in I} \longmapsto x_\alpha.$$

如果 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是由有限个拓扑空间构成的, 那么我们也把 $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ 称作积拓扑. ■

读者可能会问, 为何我们不直接将上述拓扑称作"积拓扑"呢? 实际上, 在一般情形的笛卡尔积上, 我们按如下方式定义积拓扑.

定义 2.3.8 (广义积拓扑) 考虑 $Z = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ 上的子集族

$$\mathscr{B} = \{W \subseteq Z \mid W = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha, \text{ 这里 } U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 的开集, 并且除了有限个 } \alpha \text{ 外, 都有 } U_\alpha = X_\alpha\}.$$

$\mathscr{B}$ 是 Z 上的拓扑基 (请读者自己验证), 生成的拓扑称作 Z 的积拓扑.

在有限笛卡尔积情形, 箱拓扑和积拓扑一致, 没有必要区分. 在一般情形, 箱拓扑要细于积拓扑. 在拓扑学的研究中, 积拓扑的性质更好. 有限积情形的很多重要结论无法推广到一般情形的箱拓扑上, 但却可以推广到积拓扑上. 因此我们选择将后者称作积拓扑更为合适.

2.3.4 方法四: 子空间拓扑

定义 2.3.9 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, $Y \subseteq X$ 是非空子集,

$$\mathscr{T}_Y \triangleq \{Y \cap U \mid U \subseteq X \text{是开集}\}.$$

$\mathscr{T}_Y$ 称作 Y 上的子空间拓扑(Subspace topology).

有时为表述方便, 在不致于混淆的情况下, 我们也将子空间拓扑写成 $\mathscr{T}|_Y$, 简称作 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的限制.

下面我们来证明 $\mathscr{T}_Y$ 确实给出了 Y 上的一个拓扑.

证明 (1) 由

$$\begin{aligned}\emptyset =&\emptyset\cap Y\in\mathscr{T}_Y,\\ Y =&X\cap Y\in\mathscr{T}_Y\end{aligned}$$

立知 $\emptyset\in\mathscr{T}_Y$, $Y\in\mathscr{T}_Y$.

(2) 设 $\{U_\alpha\cap Y\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathscr{T}_Y$. 因为 U_α 是 X 的开集, 所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$ 也是 X 的开集, 故

$$\bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha\cap Y)=Y\cap(\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)\in\mathscr{T}_Y.$$

(3) 设

$$U_1\cap Y,\quad U_2\cap Y,\quad\cdots,\quad U_n\cap Y$$

是 $\mathscr{T}_Y$ 中的元素. 因为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}U_k$ 是开集, 所以

$$\bigcap_{k=1}^{n}(U_k\cap Y)=(\bigcap_{k=1}^{n}U_k)\cap Y\in\mathscr{T}_Y.$$

综合以上, $\mathscr{T}_Y$ 是 Y 的拓扑, 即为子空间拓扑. ■

命题 2.3.6 *设 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基, $\mathscr{B}_Y=\{B\cap Y\mid B\in\mathscr{B}\}$, 则 $\mathscr{B}_Y$ 是 Y 上的子空间拓扑的基.*

下面我们利用命题 2.3.2 来验证上述结论.

证明 设 U 是 X 中的任一开集, $Y\cap U\in\mathscr{T}_Y$. 不妨设 $Y\cap U$ 非空.

任取 $y\in Y\cap U$, 我们找到 $B\in\mathscr{B}$, 使得 $y\in B\cap Y\subseteq Y\cap U$ 即可. 由拓扑基的定义, 我们显然可以找到 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $y\in B\subseteq U$. 它满足上述要求. 由命题 2.3.2 即得所需结论. ■

一般说来, Y 中的开集未必是 X 中的开集. 比如下面的简单例子.

例 2.3.14 考虑 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑. 取

$$Y=[0,1],\quad U=(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),$$

那么 $Y\cap U=(\frac{1}{2},1]$ 是 Y 上子空间拓扑中的开集, 但并不是 X 中的开集.

下面我们来算一下 Y 的子空间拓扑的基.

$$(a,b)\cap Y=\begin{cases}(a,b), & 若\ (a,b)\subseteq Y,\\ [0,b), & 若\ a<0<b\leq 1,\\ (a,1], & 若\ 0\leq a<1<b,\\ Y, & 若\ Y\subseteq(a,b),\\ \emptyset, & 其他.\end{cases}$$

这个例子表明, 此处 Y 的序拓扑实际上和它的子空间拓扑是一致的. ■

例 2.3.15 考虑 $X = \mathbb{R}^1$ $\mathscr{T}$ 上的标准拓扑. 设 $Y = [0, 1) \cup \{2\}$. 在 Y 的子空间拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 中, 单点集

$$\{2\} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cap Y$$

是 Y 中的开集.

再来考察 Y 上的序拓扑 $\mathscr{T}'$. 设 B 是 $\mathscr{T}'$ 中含有 2 的基元素

$$(a, 2]_{\mathscr{T}'} = \{y \in Y \mid a < y \leq 2\} = (a, 2]_X \cap Y.$$

根据序拓扑基元的规定, $a \in Y$, 并且 $a < 2$, 因而 $0 < a < 1$. 这样, 上述区间至少包含 Y 中某个不等于 2 的元素. 因此 $\{2\}$ 不是 Y 的序拓扑中的开集.

这个例子表明, Y 的子空间拓扑未必和它自身的序拓扑完全一致. ■

例 2.3.14 的结论在一定条件下可以推广到更一般的序拓扑上.

命题 2.3.7 (序拓扑的限制) $(X, \mathscr{T})$ 是序拓扑空间, $Y \subseteq X$ 是序拓扑下的开区间(或开射线), 那么子空间拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 与 Y 上的序拓扑一致.

(请读者自己验证)

例 2.3.16 $(X, \mathscr{T})$ 是离散拓扑, $Y \subseteq X$, 那么子空间拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 就是 Y 的离散拓扑. ■

命题 2.3.8 (积拓扑的限制) 设 X, Y 是拓扑空间, A, B 分别是 X 和 Y 中的子集. 设 $\mathscr{T}$ 是 $X \times Y$ 上的积拓扑, $\mathscr{T}'$ 是 $A \times B$ 上的积拓扑 (A, B 分别具有 X, Y 的子空间拓扑). 那么 $A \times B$ 的子空间拓扑与 $\mathscr{T}'$ 一致. 换言之, 我们有如下关系式那么我们有以下关系成立:

$$\mathscr{T}_{A \times B} = \mathscr{T}'.$$

注 2.3.2 为方便大家记忆, 我们也可以将上述结论简写为

$$\mathscr{T}_{A \times B} = \mathscr{T}_A \times \mathscr{T}_B,$$

这里 $\mathscr{T}_A$ (相应地, $\mathscr{T}_B$) 表示 A (相应地, B) 作为拓扑空间 X (相应地, Y) 的子空间拓扑. ■

下面我们简要地验证这个结论.

证明 不妨设 $U \times V$ 是 $X \times Y$ 的拓扑基中的基元素, 由定义,

$$(U \times V) \cap (A \times B) \in \mathscr{T}_{A \times B}.$$

另一方面,

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \in \mathscr{T}'.$$

因此 $\mathscr{T}_{A \times B} \subseteq \mathscr{T}'$.

同理也能得到 $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}_{A \times B}$. 因此两个拓扑是一致的. ■

2.3.5 方法五: 度量拓扑

这一节将介绍一种构造拓扑的经典方式. 它是通过事先给定的度量来诱导出拓扑. 这类拓扑很接近于数学分析中的常见拓扑. 相对其他拓扑来说, 它们的性质也更为丰富.

首先回顾一下度量的概念.

定义 2.3.10 集合 X 上的度量(Metric)

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

是指满足以下条件的函数:

(1) (正定性)

$$d(x,y) \geq 0,\ \forall\, x,y \in X,$$

并且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) (对称性)

$$d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x,y \in X.$$

(3) (三角不等式)

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \quad \forall x,y,z \in X.$$

我们称 $d(x,y)$ 是 x,y 关于度量 d 的距离 (Distance).

此外, 对任意 $x \in X$ 以及任意正实数 ε, 我们定义以 x 为中心的 ε-球

$$B_d(x;\varepsilon) \triangleq \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

考虑集族

$$\mathscr{B} = \{\text{所有的 } \varepsilon\text{-球}\}.$$

我们将断言如下结论.

命题 2.3.9 $\mathscr{B}$ 是 X 上的拓扑基. 它生成的拓扑称为由度量 d 诱导的度量拓扑 (Metric topology).

证明 (1) $\forall x \in X$, 取 $B_d(x,1)$, 显然 $x \in B_d(x,1)$

(2) 取 $B_1 = B_d(x_1,\varepsilon_1)$, $B_2 = B_d(x_2,\varepsilon_2)$, 且假设 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

对于 $\forall x \in B_1 \cap B_2$, 我们希望找到一个 ε-球 $B_3 = B_d(x,\delta)$ 使得

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

我们取 $\delta_1 = \varepsilon - d(x_1,x)$. 对任意 $z \in B_d(x,\delta_1)$, 由定义知 $d(x,z) < \delta_1$. 利用三角不等式可得

$$d(x_1,z) \leq d(x,x_1) + d(x,z) < d(x_1,x) + \delta_1 = \varepsilon_1.$$

因而 $B_d(x,\delta_1) \subseteq B_1$. 同理, 可找到球 $B_d(x,\delta_2) \subseteq B_2$.

今取 $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$. 令 $B_3 = B_d(x,\delta)$. 于是

$$x \in B_d(x,\delta) \subseteq B_d(x,\delta_1) \cap B_d(x,\delta_2) \subseteq B_1 \cap B_2$$

满足所需条件. ■

例 2.3.17 $X = \mathbb{R}^1$ 上有标准度量 $d(x,y) = |x-y|$.

$$B_d(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid |y-x| < \varepsilon\}.$$

此时的度量拓扑就是 $\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑. ■

例 2.3.18 $X=\mathbb{R}^2$ 上的标准度量 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||$ 就是指通常的欧氏度量. ε-球

$$B_d(\boldsymbol{x},\varepsilon)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2 \mid ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||<\varepsilon\}$$

就是开圆盘. 此时的度量拓扑就是 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑. ■

例 2.3.19 设 X 是非空集合, 我们定义度量 (请读者自己证明)

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

这个度量诱导了离散拓扑. 事实上, 对任何 $x\in X$,

$$B_d\left(x,\frac{1}{2}\right)=\{x\}.$$

因而每个单点集都是开集. ■

推论 2.3.1 *设 (X,d) 是度量空间, $B_d(x,\varepsilon)$ 是 ε-球. 对任意点 $y\in B_d(x,\varepsilon)$, 总存在球 $B_d(y,\delta)$ 满足*

$$y\in B_d(y,\delta)\subseteq B_d(x,\varepsilon).$$

证明 令 y 是 $B_1=B_d(x,\varepsilon)$ 中任一点, $B_2=B_d(y,1)$. 显见, $y\in B_1\cap B_2$.

由命题 2.3.9 的证明, 可找到球 $B_3=B_d(y,\delta)$ 使得

$$y\in B_d(y,\delta)\subseteq B_1\cap B_2\subseteq B_1.$$

这就完成了证明. ■

例 2.3.20 我们回顾 $X=\mathbb{R}^n$ 中的欧氏度量. 考虑两个点的坐标

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,X_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

标准的欧氏度量定义为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\triangleq\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

有时也记作 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||$. ■

本节最后将证明如下重要结论.

定理 2.3.1 **(欧氏空间的可度量化)** *$\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑与 $\mathbb{R}^n$ 上的度量拓扑相同.*

注 2.3.3 从上面的定理, 人们可以提出一个有趣的问题: 一个拓扑空间 X 上是否总存在度量 d, 使得 d 诱导的度量拓扑恰好就是 X 的拓扑呢? 上述问题的答案是否定的. 如果 X 上存在这样的度量, 我们就说 X 是*可度量化的*, 称之为*度量空间*. 一个拓扑空间何时是可度量化的? 这是一个深刻的问题. 后文将要介绍的可度量化定理给出了回答. ■

在证明定理 2.3.1 之前, 我们先做一些准备工作.

定义 2.3.11 **(直径)** *设 (X,d) 是度量空间, $A\subseteq X$ 是非空子集. 我们定义 A 的直径*

$$d(A)=\sup\{d(a,b)\mid a,b\in A\}.$$

若 $d(A)<\infty$, 则称 A 是有界的.

A 的有界性强烈依赖于度量的选取, 因此这并不是拓扑性质. 我们将在下文证明, 任何度量都可以用某个有界度量替代, 它们具有相同的拓扑.

我们先叙述如下结论. 它在比较度量拓扑的大小时, 非常实用.

引理 2.3.1 (度量拓扑比较判则) 设 d, d' 是 X 上的两种度量, $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ 分别是它们诱导的度量拓扑, 那么以下条件等价:

(1) $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$

(2) 对任意 $x \in X$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得 $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 取 $\mathscr{T}$ 中的 ε-球 $B_d(x, \varepsilon)$. 因为 $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ 且 $B_d(x, \varepsilon) \in \mathscr{T}$, 所以 $B_d(x, \varepsilon) \in \mathscr{T}'$. 因而存在 $B_{d'}(x, \delta) \in \mathscr{T}'$ 使得 $x \in B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

(2)$\Longrightarrow$(1) 任取 $\mathscr{T}$ 中 ε-球 $B_d(y, r)$ 以及任一点 $x \in B_d(y, r)$. 由推论 2.3.1, 存在 $B_d(x, \varepsilon)$ 满足

$$x \in B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_d(y, r).$$

由假设条件, 我们可找到球 $B_{d'}(x, \delta)$, 使得

$$x \in B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_d(y, r).$$

由命题 2.3.3, 这就推出 $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. ■

命题 2.3.10 (有界度量) 设 (X, d) 是度量空间, $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$, 则

(1) $\bar{d}$ 也是度量;

(2) $\bar{d}$ 和 d 诱导出相同的拓扑.

证明 (1) $\bar{d}$ 的正定性与对称性是显然的, 我们来证明三角不等式

$$\bar{d}(x, y) \leq \bar{d}(x, z) + \bar{d}(y, z).$$

若 $d(x, z), d(y, z)$ 中的一个大于等于 1, 比如 $d(x, z) \geq 1$, 那么

$$\bar{d}(x, y) \leq 1 \leq 1 + \bar{d}(y, z) = \bar{d}(x, z) + \bar{d}(y, z).$$

若 $d(x, z) < 1$ 且 $d(y, z) < 1$, 则 $\bar{d}(x, z) = d(x, z)$, $\bar{d}(y, z) = d(y, z)$, 则

$$\bar{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) = \bar{d}(x, z) + \bar{d}(y, z).$$

综上即知, $\bar{d}$ 是度量.

(2) 根据引理 2.3.1, 我们只要验证如下关系:

$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_{\bar{d}}(x, \varepsilon), \tag{2-2}$$

$$B_{\bar{d}}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon), \tag{2-3}$$

其中 $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$.

先证式 (2-2). 设 $z \in B_d(x, \varepsilon)$, 即 $d(x, z) < \varepsilon$. 因而有

$$\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) < \varepsilon.$$

这就推出 $z \in B_{\bar{d}}(x,\varepsilon)$. 因此 $B_d(x,\varepsilon) \subseteq B_{\bar{d}}(x,\varepsilon)$.

再证式 (2-3). 设 $z \in B_{\bar{d}}(x,\delta)$, 这里 $\delta = min\{1,\varepsilon\}$, 因而 $\bar{d}(x,z) < \delta \leq 1$. 这蕴含着

$$d(x,z) = \bar{d}(x,z) < \delta \leq \varepsilon.$$

因此 $z \in B_d(x,\varepsilon)$. 由此可知 $B_{\bar{d}}(x,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$.

综上, $\bar{d}$ 和 d 诱导出相同的拓扑. ■

例 2.3.21 设 $X = \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 仍表示欧氏度量.

我们定义 X 上的平方度量

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \cdots, |x_n-y_n|\}.$$

(1) 验证: ρ 是一个度量.

我们只需验证三角不等式. 设 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$. 因为

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$

所以

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \max_i\{|x_i - z_i|\} \leq \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

(2) 验证

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \sqrt{n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

因为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \geq |x_i - y_i|$$

对所有 i 成立, 故得第一个不等式.

另一不等式来自于

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{n \cdot \max_i\{(x_i-y_i)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

(3) 验证 $B_d(\boldsymbol{x},\varepsilon) \subseteq B_\rho(\boldsymbol{x},\varepsilon)$.

对任意 $\boldsymbol{y} \in B_d(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, 因为 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \varepsilon$, 故由 (2) 知

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \varepsilon,$$

即 $\boldsymbol{y} \in B_\rho(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. 这样就得到所需结论.

(4) 验证 $B_\rho(\boldsymbol{x},\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subseteq B_d(\boldsymbol{x},\varepsilon)$

设 $\boldsymbol{z} \in B_\rho(\boldsymbol{x},\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$, 即 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. 由 (2) 得,

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq \sqrt{n} \cdot \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) < \varepsilon,$$

即 $\boldsymbol{z} \in B_d(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$. 由此即得结论.

(5) 由 (3) 和 (4) 以及度量拓扑的比较判则, ρ 与 d 诱导相同的拓扑. ■

定理2.3.1 **的证明**: 利用上面的讨论, 我们只需要证明 X 的积拓扑 (记为 $\mathscr{T}_p$) 与平方度量 ρ 诱导的度量拓扑 (记为 $\mathscr{T}_\rho$) 相同.

设

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

是积拓扑的基元素, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in B$. 对每个 i, 我们取 $\varepsilon_i > 0$, 满足

$$(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subseteq (a_i, b_i).$$

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, 则

$$\boldsymbol{x} \in B_\rho(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq B.$$

因此 $\mathscr{T}_p \subseteq \mathscr{T}_\rho$.

反过来, 对任意的球 $B_\rho(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ 以及任一点 $\boldsymbol{y} \in B_\rho(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon$ 相当于 $|x_i - y_i| < \varepsilon$ 对每个 i 成立. 今取 $\mathscr{T}_p$ 的基元素

$$B = (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \times \cdots (x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n).$$

这样, $\boldsymbol{y} \in B \subseteq B_\rho(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$. 因此 $\mathscr{T}_\rho \subseteq \mathscr{T}_p$. ■

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 2.1

第三章　点集拓扑 (II): 拓扑的基本性质

3.1　闭包与聚点

命题 3.1.1　X 是拓扑空间, Y 是 X 的非空集合, $A \subseteq Y$, 则以下条件彼此等价:

(1) A 是 Y 中的闭集;

(2) 存在 X 中的闭集 C, 使得 $A = Y \cap C$.

注 3.1.1　上述命题的条件 (1) 是指在 Y 的子空间拓扑意义下. 另外, 条件 (2) 中的闭集 C 并不唯一. ■

证明　(1)$\Longrightarrow$(2) 设 $B = Y - A$ 是 Y 中的开集, 由子空间拓扑的定义, 存在 X 中的开集 U, 使得 $B = Y \cap U$. 于是

$$A = Y - B = Y - (Y \cap U) = Y \cap (X - U)$$

因为 $X - U$ 是 X 中的闭集, 所以可取 $C = X - U$, 结论成立.

(2)$\Longrightarrow$(1) 已知存在 X 中的闭集 C 使得 $A = Y \cap C$. 令 $B = Y \cap (X - C)$. 因为 $X - C$ 是 X 中的开集, 故由子空间拓扑的定义知 B 是 Y 中的开集. 注意 $B = Y - A$, 因此 A 是 Y 中的闭集. ■

推论 3.1.1　在拓扑空间 X 中, 若有 $A \subseteq Y \subseteq X$, 且 Y 是 X 中的闭集, A 是 Y 中的闭集, 那么 A 也是 X 中的闭集.

证明　由于 A 是 Y 中的闭集, 由命题 3.1.1 , 存在 X 中的闭集 C, 使得 $A = Y \cap C$
又因为 Y, C 都是 X 中的闭集, 由闭集的性质, $A = Y \cap C$ 也是 X 中的闭集. ■

下面我们来定义集合的内部和闭包.

定义 3.1.1　X 是拓扑空间, Y 是 X 的子集.

(1) Y 的内部

$$\mathrm{Int(Y)} \triangleq \bigcup_{V \subseteq Y} V,$$

这里 V 跑遍 X 中所有满足 $V \subseteq Y$ 的开集. 换言之, $\mathrm{Int}(Y)$ 就是 X 中含于 Y 的最大开集. 有时为书写方便, 也将 Y 的内部简记为 $\mathring{Y}$.

(2) Y (在 X 中的) 的闭包.

$$\overline{Y} \triangleq \bigcap_{C \supseteq Y} C,$$

这里 C 跑遍 X 中所有满足 $C \supseteq Y$ 的闭集. 换言之, $\overline{Y}$ 就是 X 中包含 Y 的最小闭集. 有时为了避免混淆, 我们也用 $\mathrm{Cl}_X(Y)$ 表示 Y 的闭包.

注 3.1.2 当我们谈论 Y 的内部和闭包时, 一定要注意它是作为哪一个拓扑空间的子集来定义的. 确切地说, Y 的内部和闭包的概念非常依赖于 Y 所处的背景空间. ■

例 3.1.1 考虑 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑.

(1) 设 $Y_1=(a,b)$. Y_1 的内部 $\mathring{Y}_1=(a,b)=Y_1$, Y_1 的闭包 $\overline{Y}_1=[a,b]$.

(2) 设 $Y_2=(a,b]$. Y_2 的内部 $\mathring{Y}_2=(a,b)$, Y_2 的闭包 $\overline{Y}_2=[a,b]$.

(3) 设 $Y_3=[a,b]$. Y_3 的内部 $\mathring{Y}_3=(a,b)$, Y_3 的闭包 $\overline{Y}_3=[a,b]=Y_3$.

(4) 设 $Y_4=\{1\}$. Y_4 的内部 $\mathring{Y}_4=\emptyset$, Y_4 的闭包 $\overline{Y}_4=\{1\}=X-((-\infty,1)\cup(1,+\infty))$. ■

例 3.1.2 考虑 $X=\mathbb{R}^2$上的标准拓扑.

(1) 设 $Y_1=(a,b)\times(c,d)$, 则
$$\mathring{Y}_1=(a,b)\times(c,d)=Y_1,\quad \overline{Y}_1=[a,b]\times[c,d].$$

(2) 设 $Y_2=(a,b)\times[c,d]$, 则
$$\mathring{Y}_2=(a,b)\times(c,d)=Y_1,\quad \overline{Y}_2=[a,b]\times[c,d].$$

(3) 设 $Y_3=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q}\}$, 则
$$\mathring{Y}_3=\emptyset,\quad \overline{Y}_3=\mathbb{R}^2.$$

例 3.1.3 仍考虑 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑.

(1) 若 $Y=\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\dots\}$, 则
$$\mathring{Y}=\emptyset,\quad \overline{Y}=Y=\mathbb{R}^1-((-\infty,1)\cup(1,2)\cup\cdots\cup(n,n+1)\cup\cdots)$$

(2) 若 $Y=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$, 则
$$\mathring{Y}=\emptyset,\quad \overline{Y}=Y\cup\{0\}.$$

(3) 若 $Y=\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$, 则
$$\mathring{Y}=Y,\quad \overline{Y}=Y\cup\{0\}.$$

(4) 若 $Y=\mathbb{Q}$, 则 $\mathring{Y}=\emptyset$, $\overline{Y}=\mathbb{R}^1$. ■

注 3.1.3 以下罗列一些关于内部和闭包的简单性质 (请读者自己验证). 设 Y,A,B 是 X 的子集.

(1) Y 是 X 中的开集 $\Longleftrightarrow Y=\mathring{Y}$;

(2) Y 是 X 中的闭集 $\Longleftrightarrow Y=\overline{Y}$;

(3) $\mathring{Y}\subseteq Y\subseteq\overline{Y}$;

(4) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$, $\mathrm{Int}(\mathring{Y}) = \mathring{Y}$.

(5) 若 $A \subseteq B$, 那么 $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. ■

命题 3.1.2 (闭包的限制) 设 X 是拓扑空间, A, Y 分别是 X 的子集, 满足 $A \subseteq Y$. 设 $\overline{A}$ 是 A 在 X 中的闭包, $\mathrm{Cl}_Y(A)$ 是 A 在 Y 中的闭包, 那么我们有

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y.$$

证明 我们先证 $\mathrm{Cl}_Y(A) \subseteq \overline{A} \cap Y$. 由命题 3.1.1, $\overline{A} \cap Y$ 是 Y 中的闭集, 且显然有 $A \subseteq \overline{A} \cap Y$. 又因为 $\mathrm{Cl}_Y(A)$ 是 Y中包含 A 的最小闭集, 所以 $\mathrm{Cl}_Y(A) \subseteq \overline{A} \cap Y$.

再证 $\overline{A} \cap Y \subseteq Cl_Y(A)$. 由命题 3.1.1, $Cl_Y(A) = Y \cap C$, 这里 C 是 X 中某个闭集. 因而

$$A \subseteq \mathrm{Cl}_Y(A) = C \cap Y \subseteq C.$$

由闭集的定义知 $\overline{A} \subseteq C$. 这样,

$$\overline{A} \cap Y \subseteq C \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A).$$

综上, 我们证明了 $\mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y$. ■

命题 3.1.3 (闭包判则) 设 X 是拓扑空间, Y 是 X 的子集, $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基, $x \in X$, 那么以下诸条件彼此等价:

(1) $x \in \overline{Y}$,

(2) 对于 X 中任何包含 x 的开集 U, 都有 $U \cap Y \neq \emptyset$,

(3) 对于 $\mathscr{B}$ 中任何含 x 的基元素 B, 都有 $B \cap Y \neq \emptyset$.

注 3.1.4 今后为方便起见, 在不混淆的情况下, 我们把含 x 的开集称为 x 的邻域. 上述判则的条件 (2) 也可以叙述为: x 的任何邻域与 Y 的交集非空. ■

证明 (2) $\Longrightarrow$ (3) 这是平凡的, 因为 $\mathscr{B}$ 中的基元素也是 X 中的开集.

(3) $\Longrightarrow$ (2) $\forall x \in X$ 以及 x 的任意邻域 U, 由拓扑基的定义, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$. 由假设条件, $B \cap Y \neq \emptyset$, 所以 $U \cap Y \neq \emptyset$.

以下我们只需证 (1) 和 (2) 的等价性.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $x \in \overline{Y}$. 假设存在 x 的某个邻域 U, 满足 $U \cap Y = \emptyset$, 则 $Y \subseteq X - U$. 注意到 $X - U$ 是 X 的闭集, 故由闭包的定义知 $\overline{Y} \subseteq X - U$. 这就推出 $x \in X - U$, 即 $x \notin U$, 这与 U 的选取矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设 $x \notin \overline{Y}$, 即 $x \in X - \overline{Y}$. 注意到 $\overline{Y}$ 是 X 中的闭集, 因此 $U = X - \overline{Y}$ 是 x 的邻域. 但是$U \cap Y = \emptyset$, 这与假设条件矛盾. ■

例 3.1.4 设 (X, d) 是度量空间, $B = B_d(x, \varepsilon)$ 是 ε-球,

$$C = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

(1) 验证 C 是闭集并且

$$\overline{B} \subseteq C.$$

首先, 对任何 $y \in X - C$, 即满足 $d(x,y) > \varepsilon$, 都存在球 $B_d(y,\delta)$ 满足

$$B_d(y,\delta) \cap B = \emptyset,$$

这里 $\delta = d(x,y) - \varepsilon$. 这是因为, 对任何 $z \in B_d(y,\delta)$,

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \delta = \varepsilon.$$

因此 $X - C$ 可以由所有这种球的并得到, 故为开集, 从而 C 是闭集. 由闭包定义及 $B \subseteq C$, 即得 $\overline{B} \subseteq C$.

(2) $\overline{B}$ 未必等于 C. 比如考虑 X 的离散拓扑, 它由例 2.3.19 中的平凡度量诱导. 取 $B = B_d(x,1) = \{x\}$. 因为 B 也是闭集, 所以它的闭包就是自身. 但是

$$C = \{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\} = X.$$

(3) 对欧氏空间 $X = \mathbb{R}^n$ 上的标准度量, 我们有 $\overline{B} = C$. ■

定义 3.1.2 设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$, $x \in X$. 若 x 的任何邻域与 Y 的交集都含有异于 x 的点, 则称 x 是 Y 的聚点 (Accumulation Point), 也称为极限点. 换言之, 若对于包含 x 的任意开集 U 都有

$$U \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset,$$

则 x 就是 Y 的聚点.

Y 的所有聚点组成的集合称为 Y 的导集 (Derived set). 通常记作 Y'.

注 3.1.5 利用闭包判则可知, $x \in Y'$ 当且仅当

$$x \in \overline{Y - \{x\}}.$$

例 3.1.5 考虑 $X = \mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑, 设 $Y = (0,1]$. 因为 $0 \in [0,1] = \overline{Y - \{0\}}$, 故 $0 \in Y'$ 是 Y 的聚点. ■

命题 3.1.4 设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$, 则 $\overline{Y} = Y \cup Y'$.

证明 (1) 先证 $Y' \cup Y \subseteq \overline{Y}$

首先, 若 $x \in Y'$, 则对于 x 的任意邻域 U, $U \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset$, 因此 $U \cap Y \neq \emptyset$. 由闭包的定义, $x \in \overline{Y}$. 由 x 的任意性, 就得到 $Y' \subseteq \overline{Y}$. 另一方面, 显然有 $Y \subseteq \overline{Y}$, 因而 $Y' \cup Y \subseteq \overline{Y}$.

(2) 再证 $\overline{Y} \subseteq Y' \cup Y$

设 $x \in \overline{Y}$, 若 $x \in Y$, 则显然有 $x \in Y' \cup Y$. 今不妨设 $x \notin Y$. 由闭包判则, 对于 x 的任意邻域 U, 都有 $U \cap Y \neq \emptyset$. 因为 $x \notin Y$, 故 $Y = Y - \{x\}$, 从而 $U \cap (Y - \{x\}) \neq \emptyset$. 这就推出 $x \in Y'$. 因此由 x 的任意性可知, $\overline{Y} \subseteq Y' \cup Y$. ■

注 3.1.6 有时我们也会用到子空间 Y 的"边界"这一概念. 它定义为

$$Bd(Y) = \overline{Y} \cap \overline{X - Y}.$$

推论 3.1.2 设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$, 那么以下条件彼此等价:

(1) Y 是闭集;

(2) $Y = \overline{Y}$;

(3) $Y' \subseteq Y$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 显然.

(2)$\Longrightarrow$(3) 因为 $Y = \overline{Y} = Y \cup Y'$, 所以 $Y' \subseteq Y$.

(3)$\Longrightarrow$(1) 一方面, 我们有 $Y \subseteq \overline{Y}$. 另一方面, 由假设条件, $\overline{Y} = Y' \cup Y \subseteq Y$, 因此 $Y = \overline{Y}$, 于是 Y 是闭的. ■

命题 3.1.5 设 X 是拓扑空间, $B \subseteq A \subseteq X$. 若记 $Int_A(B)$ 表示 B 在 A 中的内部. 那么 $Int_A(B) = A - \overline{A - B}$. 特别地, $Int(B) = X - \overline{X - B}$.

证明 注意

$$A - \overline{A - B} = A \cap (X - \overline{A - B}),$$

因而它是 A 中的开集. 此外,

$$A - \overline{A - B} \subseteq A - (A - B) = B.$$

因为 $Int_A(B)$ 是 A 中包含集合 B 的最大开集, 所以 $A - \overline{A - B} \subseteq Int_A(B)$.

下面, 我们要证明 $Int_A(B) \subseteq A - \overline{A - B}$, 即需证 $Int_A(B) \cap \overline{A - B} = \emptyset$. 注意到 $Int_A(B) \cap (A - B) = \emptyset$, 所以我们只需要证明 $Int_A(B) \cap (A - B)' = \emptyset$. 换句话说, 对每个 $x \in Int_A(B)$, 我们需要找到 x (在 X 中) 的邻域 U 使得 $U \cap (A - B) = \emptyset$.

因为 $Int_A(B)$ 是 A 中的开集, 所以存在 X 中的开集 U, 使得 $Int_A(B) = U \cap A$. 因为

$$U \cap (A - B) = (U \cap A) \cap (X - B) = Int_A(B) \cap (X - B) \subseteq B \cap (X - B) = \emptyset,$$

所以 $U \cap (A - B) = \emptyset$. 对每个 $x \in Int_A(B)$, U 是 x 的邻域, 它满足我们需要的条件. ■

3.2 Hausdorff 性质

定义 3.2.1 设 X 是拓扑空间, 若对于 X 中任意两个不同的点 x, y, 总存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 满足 $U \cap V = \emptyset$, 则称 X 是 Hausdorff 空间, 或说 X (在该拓扑下) 是 Hausdorff 的.

例 3.2.1 考虑欧氏度量空间 $X = \mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑. 这显然是一个 Hausdorff 空间. ■

例 3.2.2 考虑任一集合 X 上的离散拓扑. 此时 X 是 Hausdorff 的. 这是因为, 对任意两个不同的点 $x, y \in X$, $x \in \{x\}, y \in \{y\}$, 且 $\{x\}, \{y\}$ 显然是不相交的开集. ■

例 3.2.3 考虑三维欧氏空间中的球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

它作为 $\mathbb{R}^3$ 上的子空间拓扑也是 Hausdorff的. ■

例 3.2.4 $X=\{1,2,3\}$, $\mathscr{T}=\{\emptyset,X,\{2,3\},\{1,2\},\{2\}\}$, 我们取元素 $x=1,y=3$. 包含 x 的开集仅有 $X,\{1,2\}$; 包含 y 的开集有:$X,\{2,3\}$. 由此可知, x 和 y 的邻域相交总是非空. 因此这个拓扑空间不是 Hausdorff 的. ■

例 3.2.5 考虑直线 $X=\mathbb{R}^1$ 上的余有限拓扑

$$\mathscr{T}\triangleq\{U \mid X-U \text{ 是有限集或者 } U \text{ 是空集}\}.$$

它不是 Hausdorff 的.

事实上, 对于 X 中任意不同的两个元素 x,y, 倘若存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使得 $U\cap V=\emptyset$, 则由公式:

$$X=(X-U)\cup(X-V)$$

$X-U$ 和 $X-V$ 都是有限点集, 从而 X 也是有限点集, 这就得到矛盾! ■

例 3.2.6 设 $X=\mathbb{C}^n$, $\mathscr{T}$ 是 X 上的 Zariski 拓扑 (见例 2.2.6). $(X,\mathscr{T})$ 不是 Hausdorff 空间. 读者可以类似上例的方法验证这一结论. ■

命题 3.2.1 *设 X 是具有序拓扑的全序集, 则 X 是 Hausdorff 空间.*

证明 设 $x,y\in X$, $x\neq y$, 不妨设 x,y 不是最大 (小) 元. 此时可找元素 z,w , 使得 $z<x,y<w$. 我们分情形讨论:

(1) 假设 x 与 y 邻接, 即 $(x,y)=\emptyset$.

令 $U=(z,y)$,$V=(x,w)$ 显然, U 和 V 都是 X 中的开集, 且 $x\in U$, $y\in V$. 我们有

$$U\cap V=(z,y)\cap(x,w)=(x,y)=\emptyset.$$

(2) 假设 x 与 y 不邻接, 即存在 $h\in(x,y)$.

令 $U=(z,h)$,$V=(h,w)$. 此时 $x\in U$, $y\in V$, 且

$$U\cap V=(z,h)\cap(h,w)=\emptyset.$$

类似地, 我们可以讨论 x,y 是最大 (小) 元的情形. 此处不再赘述. ■

命题 3.2.2 *设 X 和 Y 是 Hausdoaff 空间, 则 $X\times Y$ 也是 Hausdorff 空间.*

证明 设 $a\times b,c\times d\in X\times Y$, 我们仍然分情形讨论.

(1) 假设 $a\neq c$ 且 $b\neq d$.

因为 X 和 Y 分别都是 Hausdorff, 因此我们能找到 X 中不相交的开集 U_1,U_2, 以及 Y 中不相交的开集 V_1,V_2, 使得

$$a\in U_1,\quad b\in V_1,\quad c\in U_2,\quad d\in V_2.$$

因此

$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)=\emptyset.$$

(2) 假设 $a=c$ 或 $b=d$.

我们不妨设 $a=c$, 另一情形可类似讨论. 由 X 和 Y 的 Hausdorff 性质, 我们仍然可以找到 a 的邻域 U 以及 b 的邻域 V_1, d 的邻域 V_2, 使得:

$$a\times b\in U\times V_1,\quad c\times d\in U\times V_2$$

并且 $V_1\cap V_2=\emptyset$, 因此

$$(U\times V_1)\cap(U\times V_2)=U\times(V_1\cap V_2)=\emptyset.$$

这就证明了结论. ■

命题 3.2.3 X 是 Hausdorff, $Y\subseteq X$. 则 Y 作为子空间拓扑是 Hausdorff.

证明 对于任意 $x,y\in Y$, $x\neq y$, 因为 X 是 Hausdorff, 所以存在 X 中的不相交的开集 U,V 使得 $x\in U,y\in V$, 于是

$$x\in Y\cap U,\quad y\in Y\cap V.$$

此外,

$$(Y\cap U)\times(Y\cap V)=Y\times(U\cap V)=\emptyset.$$

因此, 由 x,y 选取的任意性, Y 作为子空间拓扑是 Hausdorff 的. ■

例 3.2.7 我们将两条直线上, 除了原点外, 相同位置的点分别粘合成一点. 这样得到的集合具有原有直线上的自然的拓扑. 它和直线的差别仅仅在于: 前者有两个不同的原点, 后者仅有一个原点. 换言之, 该集合可以看成是将一条直线的原点分裂成两个点.

这个拓扑空间不是 Hausdorff. 因为它的两个原点无法用不相交的邻域区分开. 在微分几何中, 我们讨论流形时, 总是要假设 Hausdorff 条件成立. 这样做的原因之一, 就是为了排除这种奇怪的几何例子. ■

定理 3.2.1 (Hausdorff 空间判则) 设 X 是拓扑空间, 则以下两个条件彼此等价:

(1) X 是 Hausdorff 空间.

(2) $X\times X$ 的对角线 $\triangle=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 是积拓扑下的闭集.

在证明这个判则前, 我们需要做一些准备工作.

引理 3.2.1 X 是拓扑空间, 设 U,V 是 X 中的开集, 且 $\triangle=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 则以下条件等价:

(1) $U\cap V=\emptyset$

(2) $(U\times V)\cap\triangle=\emptyset$

(3) $U\times V\subseteq(X\times X)-\triangle$

证明 (2)$\Longleftrightarrow$(3) 显然.

(1)$\Longrightarrow$(2) 用反证法. 设 $(U\times V)\cap\triangle\neq\emptyset$, 那么存在 $(x,x)\in\triangle$ 且 $(x,x)\in U\times V$. 于是 $x\in U\cap V$, 这与条件矛盾.

(2)$\Longrightarrow$(1) 用反证法. 设 $U\cap V\neq\emptyset$, 那么存在 $x\in U\cap V$, 于是 $(x,x)\in(U\times V)\cap\triangle$, 所以 $(U\times V)\cap\triangle\neq\emptyset$, 这与条件矛盾. ■

现在我们来证明定理 3.2.1.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 要证 $\triangle$ 是闭集, 只要证明 $X\times X-\triangle$ 是开集.

对于任意的 $(x,y)\in X\times X-\triangle$, 我们只需要找到 (x,y) 的邻域 $U\times V$ 使得

$$U\times V\subseteq X\times X-\triangle,$$

即

$$(U\times V)\cap\triangle=\emptyset.$$

由引理 3.2.1, 这等价于找 x 的邻域 U 及 y 的邻域 V, 使得 $U\cap V=\emptyset$. 条件 (1) 显然保证了这样的邻域的存在性.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设 $x,y\in X,x\neq y$. 因为 $\triangle$ 是 $X\times X$ 中的闭集, 所以 $X\times X-\triangle$ 是开集. 我们能够找到 X 中的两个开集 U,V, 使得:

$$(x,y)\in U\times V\subseteq X\times X-\triangle.$$

根据引理 3.2.1, $U\cap V=\emptyset$, $x\in U$, $y\in V$. 这就证明了 X 是 Hausdorff 的. ■

命题 3.2.4 设 X 是 Hausdorff 空间, Y 是 X 中的有限点集, 则 Y 是闭集.

证明 因为有限个闭集的并仍然是闭集, 所以我们只需证明 Y 是单点集的情形.

设 $Y=\{x\}$. 为证 Y 是闭集, 只需证 $X-\{x\}$ 是开集. 任取 $y\in X-\{x\}$, 只需找到 y 的邻域含于 $X-\{x\}$ 中即可.

因为 X 是 Hausdorff 空间, 所以存在开集 U,V 满足 $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$. 因而 $V\subseteq X-\{x\}$. ■

命题 3.2.5 设 X 是 Hausdorff 空间, $Y\subseteq X$, $x\in X$, 则以下条件等价:
(1) $x\in Y'$,
(2) x 的任何邻域含有 Y 中无穷多个点.

证明 (2) $\Longrightarrow$ (1) 由于 x 中的任何邻域含有 Y 中无穷多个点, 因此含有异于 x 的点. 因此 x 是 Y 的聚点.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 已知 $x\in Y'$. 我们采用反证法. 假设存在 x 的某个邻域 U, 满足

$$U\cap(Y-\{x\})=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}.$$

令

$$V=U-\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}=(X-\{p_1,p_2,\cdots,p_m\})\cap U.$$

因为 X 是 Hausdorff 的, 根据命题3.2.4, $X-\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$ 是开集, 因此 V 也是 X 中的开集, 并且显然有 $x\in V$.

我们只需证明 $V\cap(Y-\{x\})=\emptyset$, 这样就与 $x\in Y'$ 矛盾. 事实上,

$$\begin{aligned} V\cap(Y-\{x\}) &= ((X-\{p_1,p_2,\cdots,p_m\})\cap U)\cap(Y-\{x\}) \\ &= (X-\{p_1,p_2,\cdots,p_m\})\cap(\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

由此结论得证. ■

3.3 连通性

定义 3.3.1 设 X 是拓扑空间. 若存在两个不相交的非空开集 U,V 满足 $U\cup V=X$, 则称 X 是不连通的 (或称为分裂的), 上述 U,V 称为 X 的一个分裂. 若不存在上述开集 U,V 则称 X 是连通的.

注 3.3.1 按照定义, X 是连通的当且仅当不存在 X 上的非空开集 U,V, 满足 $U\cap V=\emptyset$ 及 $U\cup V=X$. ■

命题 3.3.1 设 X 是拓扑空间, 则以下两个条件彼此等价:
(1) X 是连通的;
(2) X 中除 $\emptyset$ 和 X 外不存在其他子集合既是开集又是闭集.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 反证法. 假设存在这样的子集合 U, 既是开集也是闭集, 且 $U\neq\emptyset,X$. 令 $V=X-U$, 那么 $V\neq\emptyset,X$ 且满足

$$\begin{cases} U\cap V=\emptyset \\ U\cup V=X \end{cases}$$

因为 U 是闭集, 所以 V 是开集. 这样 U 和 V 是 X 的一个分裂, 即 X 不连通, 与条件矛盾!

(2)$\Longrightarrow$(1) 反证法. 假设 X 不连通, 设 U 和 V 是 X 的一个分裂, 则因为 V 是 X 中的开集可知 $U=X-V$ 是闭集, 并且 $U\neq\emptyset,X$, 矛盾! ■

例 3.3.1 考虑 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑. 此时 X 是连通的. 这个事实并非显然, 我们后面将要证明它. ■

例 3.3.2 设 $(X,\mathscr{T})$ 是离散拓扑, 且至少含有两个元素,对于 X 中任意的元素 x, 因为单点集 $\{x\}$ 既是开集也是闭集, 且有

$$X=\{x\}\cup(X-\{x\})$$
$$X\cap(X-\{x\})=\emptyset$$

所以 $\{x\}$ 和 $X-\{x\}$ 是 X 的一个分裂, 即 X 不连通. ■

例 3.3.3 $(X,\mathscr{T})$ 是平凡拓扑, $\mathscr{T}=\{\emptyset,X\}$, 显然 X 是连通的. ■

例 3.3.4 $X=\mathbb{R}^1$, $\mathscr{T}$ 是余有限拓扑, 即

$$\mathscr{T}=\{U\mid U=\emptyset \text{ 或 } X-U \text{ 是有限点集}\}$$

则 $(X,\mathscr{T})$ 是连通的.

我们来验证此结论. 假设某开集 $U \neq \emptyset, X$, 并且 U 也是闭集, 那么 $X-U$ 也是开集, 换句话来说, $X-(X-U)=U$ 是有限集, 因为 U 是开集, 所以$X-U$ 也是有限集, 于是

$$X = U \cup (X-U)$$

也是有限集, 矛盾! 因此不存在除空集和全集外既是开集也是闭集的子集合, 所以 $(X,\mathscr{T})$ 是连通的.

另外, 请大家注意, $(X,\mathscr{T})$ 并不是 Hausdorff 的. ■

例 3.3.5　考虑 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑. 设 $Y=(0,1)\cup(2,3)$, 那么 $(0,1)$ 和 $(2,3)$ 是子空间 Y 的一个分裂.

这个例子表明, 原空间连通, 其子空间不一定连通. 换言之, 连通性这一拓扑性质并不能遗传给子空间. 不过命题 3.2.3 表明, Hausdorff 性质是能够遗传给子空间的. ■

命题 3.3.2 (**子空间的分裂性判则**)　设 X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$, 那么以下条件彼此等价:
(1)Y 不连通;
(2)存在非空子集 $A,B \subseteq Y$ 满足

$$\begin{cases} A\cup B = Y, \\ A\cap B=\emptyset, \end{cases} \quad \begin{cases} A\cap B' = \emptyset, \\ A'\cap B=\emptyset, \end{cases}$$

这里 A', B' 分别指 A,B 在 X 中的导集.
(3) 存在 Y 的非空子集 A,B 满足

$$\begin{cases} A\cup B = Y, \\ \overline{A}\cap B=\emptyset, \\ A\cap \overline{B}=\emptyset, \end{cases}$$

这里 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别指 A,B 在 X 中的闭包.

以上条件之一成立时, A,B 就是 Y 的一个分裂. 反过来, 如果 X 不连通, 那么它的任一分裂都满足上述条件.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2) 已知 Y 是不连通的, 我们取 Y 中的一个分裂 A,B. 它们作为 Y 中的非空开集, 显然满足

$$\begin{cases} A\cup B = Y \\ A\cap B=\emptyset \end{cases}$$

因为 A 也是 Y 中的闭集, 所以

$$A = \mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A}\cap Y.$$

这样, 我们有

$$A=\overline{A}\cap Y=\overline{A}\cap(A\cup B)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup(\overline{A}\cap B).$$

又因为

$$(\overline{A}\cap B)\cap A=(\overline{A}\cap A)\cap B=A\cap B=\emptyset,$$

所以 $\overline{A}\cap B=\emptyset$. 由 $\overline{A}=A'\cup A$ 可知

$$A'\cap B\subseteq \overline{A}\cap B=\emptyset,$$

从而 $A'\cap B=\emptyset$. 同理 $A\cap B'=\emptyset$. 因此 A,B 满足所需条件.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设 A,B 是满足条件 (2) 的非空子集, 于是有

$$A\cap B=\emptyset,\quad A\cap B'=\emptyset$$

结合 $\overline{B}=B'\cup B$ 可得 $A\cap\overline{B}=\emptyset$. 同理, $\overline{A}\cap B=\emptyset$. 这样就有

$$(\overline{A}\cap Y)\cap B=(\overline{A}\cap B)\cap Y=\emptyset.$$

另一方面,

$$Y=A\cup B=(A\cap Y)\cup B\subseteq(\overline{A}\cap Y)\cup B\subseteq Y$$

蕴含着 $Y=(\overline{A}\cap Y)\cup B$. 这就有 $B=Y-(\overline{A}\cap Y)$. 因此 B 是 Y 中的开集. 同理, A 也是 Y 中的开集. 因此, A 和 B 是 Y 的一个分裂, Y 不连通.

(2)$\Longrightarrow$(3) 显然.

(3)$\Longrightarrow$(2) 由条件知, $A\cap B\subseteq\overline{A}\cap B=\emptyset$, 即 $A\cap B=\emptyset$.

再根据 $(A'\cup A)\cap B=\overline{A}\cap B=\emptyset$, 推出 $A'\cap B=\emptyset$. 同理可证 $A\cap B'=\emptyset$. ■

我们举一些有关子空间连通性的例子.

例 3.3.6 设 $(\mathbb{R}^1,\mathscr{T})$ 是标准拓扑, Y_1,Y_2 是 X 的子集.

(1) 设 $Y_1=[-1,0)\cup(0,1]$. $A=[-1,0)$ 以及 $B=(0,1]$ 是 Y_1 的一个分裂.

这是因为我们可以把上述两个集合写成:

$$A=Y_1\cap(-2,0),\quad B=(0,1]=Y_1\cap(0,2).$$

由于 $(-2,0),(0,2)$ 都是 X 中的开集, 因此 A,B 是 Y_1 中的不相交的非空开集, 且全集是 Y_1. 因此 Y_1 是不连通的.

我们也可以利用子空间的分裂性判则来验证这件事. 这是因为 $A\cup B=Y_1$, 并且

$$\overline{A}\cap B=[-1,0]\cap(0,1]=\emptyset,$$
$$A\cap\overline{B}=[-1,0)\cap[0,1]=\emptyset.$$

由判则立知 A 和 B 是 Y_1 的一个分裂.

(2) 设 $Y_2=[-1,1]=[-1,0]\cup(0,1]$. 记 $A=[-1,0],B=(0,1]$. 我们来说明 A 和 B 不是 Y_2 的一个分裂. 事实上, $\overline{B}=[0,1]$,因而 $A\cap\overline{B}=\{0\}\neq\emptyset$. 由子空间分裂判则可知 A,B 不是 Y_2 的分裂. 后面我们将证明 Y_2 是连通子集. ■

例 3.3.7 $(\mathbb{R}^1,\mathscr{T})$ 是标准拓扑, $Y=\mathbb{Q}$ 是有理数集. 取 Y 中的非空开集

$$A=Y\cap(-\infty,\sqrt{2}),\quad B=Y\cap(\sqrt{2},+\infty),$$

则 A,B 是 Y 的一个分裂.

进一步, 如果 A 是 Y 中的一个子集, 且 A 中至少含有两个元素, 我们可验证子集 A 不连通. 设 $p,q\in A$, 且不妨设 $p<q$. 类似上面的方法, 可取无理数 $\alpha\in(p,q)$, 并取 A 中开集

$$U=A\cap(-\infty,\alpha),\quad V=A\cap(\alpha,+\infty).$$

U,V 显然满足 $U\cap V=\emptyset$ 及 $U\cup V=A$. 因此 U,V 是 A 的一个分裂. ■

例 3.3.8 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ 是标准拓扑,

$$Y = \{(x,y) \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x} \text{ 且 } x > 0\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的子集, 若记

$$A = \{(x,y) \mid y = 0\}, \quad B = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x} \text{ 且 } x > 0\},$$

那么 A, B 是 X 中不相交的非空闭集. 由分裂性判则, 它们是 Y 的一个分裂, 因而 Y 不是连通的. ■

引理 3.3.1 设 X 是不连通的, A, B 是 X 的一个分裂, $Y \subseteq X$ 是连通子集, 则要么 $Y \subseteq A$, 要么 $Y \subseteq B$.

证明 因为 A, B 都是 X 中的开集, 所以 $A \cap Y, B \cap Y$ 是 Y 中的开集, 满足

$$\begin{cases} (A \cap Y) \cup (B \cap Y) = Y, \\ (A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \emptyset. \end{cases}$$

若 $A \cap Y$ 与 $B \cap Y$ 都是非空的, 则它们是 Y 的分裂, 这与 Y 的连通性矛盾! 因此, 要么 $A \cap Y = \emptyset$, 要么 $B \cap Y = \emptyset$. 换言之, 要么 $A \cap Y = Y$, 要么 $B \cap Y = Y$. 这相当于说, 要么 $Y \subseteq A$, 要么 $Y \subseteq B$. ■

命题 3.3.3 (连通子集的并) 设 $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一族连通子集. 若 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$ 也连通.

证明 由于 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$, 可取一点 $p \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$. 设 $Z = \bigcup\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$. 假设 $Z = A \cup B$ 是一个分裂,

由引理 3.3.1 知, 对每个 Y_α, 要么 $Y_\alpha \subseteq A$, 要么 $Y_\alpha \subseteq B$. 我们不妨设 $p \in A$, 那么对于任意的 $\alpha \in I$, 都有 $Y_\alpha \subseteq A$, 由此推出 $A = Z$, $B = \emptyset$. 这与假设条件矛盾! 故 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$ 是连通集. ■

命题 3.3.4 (连通子集的闭包) X 是拓扑空间, $Y \subseteq X$ 是连通子集, Z 是 X 的一个子集, 满足

$$Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}.$$

那么 Z 也是连通子集. 特别地, 连通子集的闭包仍是连通的.

证明 假设 A, B 是 Z 的一个分裂. 因为 $Y \subseteq Z$, 根据引理 3.3.1, 要么 $Y \subseteq A$, 要么 $Y \subseteq B$. 不妨设 $Y \subseteq A$, 从而 $\overline{Y} \subseteq \overline{A}$.

另一方面, 由子空间分裂性判则, $\overline{A} \cap B = \emptyset$. 因此

$$B = Z \cap B \subseteq \overline{Y} \cap B \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$$

蕴含着 $B = \emptyset$, 这与假设条件矛盾! ■

定理 3.3.1 (连通空间的乘积) 设 X, Y 是连通空间, 那么 $X \times Y$ 也是连通的.

证明 今构造 $X \times Y$ 的一族子集

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y),$$

这里 $b \in Y$ 是某个固定点, x 跑遍 X 中的点.

于是

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{x\in X} T_x = X \times Y \\ \bigcap\limits_{x\in X} T_x = X \times b. \end{cases}$$

如果能证明 T_x 连通, 那么由命题 3.3.3 立得 $X \times Y$ 的连通性.

下面证明 T_x 连通. 注意到,

$$(x \times Y) \cap (X \times b) = \{(x,b)\} \neq \emptyset,$$

因此我们只需证明 $x \times Y$ 和 $X \times b$ 都是连通的, 进而由命题 3.3.3 可推出 T_x 是连通的.

不妨考虑 $X \times b$. 假设 $X \times b$ 有分裂 A, B. 我们可设

$$A = A_0 \times b \qquad B = B_0 \times b,$$

这里的 A_0, B_0 是 X 中不相交的非空开集. 容易验证, A_0, B_0 是 X 的一个分裂, 这样就与 X 的连通性矛盾! 故 $X \times b$ 是连通的. 类似可证, $x \times Y$ 是连通的. ■

推论 3.3.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是连通空间, 则 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是连通的.

注 3.3.2 事实上, 我们可以证明更一般的结论: 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是连通空间族, 则 $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ 作为积拓扑也是连通的, 但它作为箱拓扑未必连通. ■

我们回到在本节一开始所举的例子,即带有标准拓扑的实直线 $X = \mathbb{R}^1$ 以及其中的开区间或者是开射线. 我们要严格证明它们在标准拓扑下是连通的. 这个结论的证明并不是显然的. 下面我们将讨论更为一般的情形.

定义 3.3.2 设 X 是全序集. 若 X 满足以下条件:
(1)(上确界性质) 任何有界子集都有上确界;
(2)(介值性) $\forall x, y \in X$,满足 $x < y$, 那么 $\exists z \in X$, 使得 $x < z < y$,
我们就称 X 是线性连续统.

定理 3.3.2 (线性连续统的连通性) 设 X 是线性连续统, 则 X 是连通集, 并且 X 的开区间以及开射线也连通.

特别的, 标准拓扑下的实直线以及其上的开区间或开射线都是连通的.

证明 设 X 是线性连续统, Y 是 X 中的开区间或开射线或 X 本身. 我们的目标是证明这样的 Y 是连通的.

采用反证法. 设 A, B 是 Y 的一个分裂. 取 $a \in A, b \in B$ 且不妨设 $a < b$. 由 Y 的选取, 我们有 $[a,b] \subseteq Y$. 令

$$A_0 = A \cap [a,b], \quad B_0 = B \cap [a,b].$$

显然 A_0, B_0 是 $[a,b]$ 的一个分裂. 我们记 A_0 的上确界为 $c = supA_0$. 因为 $c \in A_0 \cup B_0$, 故要么$c \in B_0$ 要么 $c \in A_0$. 我们证明这两种情况都是不可能的, 从而导出矛盾.

(1) 假设 $c \in B_0$. 因为 B_0 是 $[a,b]$ 中的开集且 $c \neq a$, 所以存在 $d \in B_0$, 使得 $(d,c] \subseteq B_0$. 注意到, 此时要么 $c = b$, 要么 $a < c < b$. 若 $c = b$, 那么 d 显然也是 A_0 的上界. 但 $d < c$, 这与 c 是上确界矛盾! 因此 $c < b$. 因为 c 是 A_0 的上界, 所以 $A_0 \cap (c,b] = \emptyset$, 于是

$$(d,b] = (d,c] \cup (c,b] \subseteq B_0.$$

这表明 d 是 A_0 的上界, 仍和 c 是上确界矛盾!

(2) 假设 $c \in A_0$. 此时 $c \neq b$, 于是要么 $a < c < b$, 要么 $c = a$. 因为 A_0 是开集, 所以存在 $e \in A_0$, 使得 $[c,e) \subseteq A_0$. 由介值性条件, 存在 $z \in (c,e)$, 从而 $z \in A_0$. 这与 c 是集合 A_0 的上界矛盾!

综上可知, Y 是连通的. ■

设 X 是拓扑空间, $x, y \in X$. 我们定义 X 中的一个关系 $\sim$:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x, y \text{ 落在某个连通子集内}.$$

引理 3.3.2 上述的关系 $\sim$ 是等价关系.

证明 我们验证上述的 $\sim$ 满足等价关系的三个条件:

(1) 自反性: 因为 $x \in \{x\}$ 且 $\{x\}$ 是连通子集, 所以 $x \sim x$;

(2) 对称性: 若 $x \sim y$, 那么 x 和 y 落在一个连通子集中, 因而也有 $y \sim x$;

(3) 传递性: 设 $x \sim y, y \sim z$. 不妨设 x, y 都在连通子集 A 中, y, z 都在连通子集 B 中. 令 $C = A \cup B$, 因为 $y \in A \cap B$, 故由命题 3.3.3, C 也是连通的. 由 $x, z \in C$ 推出 $x \sim z$. ■

定义 3.3.3 由 $\sim$ 定义的等价类称为 X 的连通分支.

注 3.3.3 X 是连通的当且仅当 X 仅有一个连通分支. ■

命题 3.3.5 设 X 是拓扑空间, 则
(1) X 的连通分支是连通子集.
(2) 各连通分支彼此不相交, 其并集为 X.
(3) 任一连通子集仅含在唯一一个连通分支里.

证明 (1) 任取 $x_0 \in A$, 这里 A 是连通分支, 对于任意的 $x \in A$, 因为 $x \sim x_0$, 所以存在连通子集 A_x, 使得 $x, x_0 \in A_x$. 因为 $A_x \subseteq A$, 所以 $\bigcup\limits_{x \in A} A_x = A$. 另一方面, 显然有 $x_0 \in \bigcap\limits_{x \in A} A_x$. 于是

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{x \in A} A_x = A, \\ \bigcap\limits_{x \in A} A_x \neq \emptyset. \end{cases}$$

由命题 3.3.3 知 A 是连通的.

(2) 来自于等价类的定义.

(3) 设 Y 是连通子集. 采用反证法. 假设 Y 与两个不同的连通分支 A, B 相交. 取

$$x \in A \cap Y, \quad y \in B \cap Y.$$

因为 $x, y \in Y$, 所以 $x \sim y$, 于是 x, y 落在同一个连通分支中, 从而 $A = B$, 矛盾! 因此 Y 只与一个连通分支相交, 从而 Y 含于该分支中. ■

例 3.3.9　设 $X = [-1, 0) \cup (0, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ 是标准拓扑下的子空间, 于是 X 有两个连通分支, 分别是 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$. ■

例 3.3.10　设 $X = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^1$ 是标准拓扑下的子空间. 此时 X 的连通分支是单点集 $\{x\}$, 这里 x 跑遍 $\mathbb{Q}$ 中的元素. ■

3.4 紧致性

定义 3.4.1　*设 X 是拓扑空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族,*
(1)若 $\mathscr{A}$ 的所有元素之并等于 X, 则称 $\mathscr{A}$ 覆盖了 X, 或称 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个覆盖.
(2)若 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个覆盖, 且 $\mathscr{A}$ 中元素皆为开集, 则称 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖.

例 3.4.1　设 $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$ 是 X 上的拓扑.
(1) $\mathscr{A}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的覆盖. 因为 $\{2\}, \{3\}$ 都不是开集, 所以 $\mathscr{A}_1$ 并不是 X 的开覆盖.
(2) $\mathscr{A}_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的覆盖, 并且 $\mathscr{A}_2$ 中的元素都是 X 的开集, 因此 $\mathscr{A}_2$ 是 X 的开覆盖. ■

例 3.4.2　考虑 $X = \mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑, $\mathscr{B} = \{$ 所有开圆盘 $\}$, 那么 $\mathscr{B}$ 是 X 的开覆盖. ■

定义 3.4.2　*若 X 中的任何开覆盖 $\mathscr{A}$ 中总包含一个有限的子族 $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}'$ 也是 X 的开覆盖, 则称 X 是紧的或紧致的 (Compact).*

例 3.4.3　考虑 $X = \mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑, $\mathscr{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 的开覆盖. $\mathscr{A}$ 中有限个开区间之并显然不可能等于 X, 故 X 不是紧的. 更一般地, 欧氏空间都不是紧集. ■

例 3.4.4　在 $X = \mathbb{R}^1$ 的标准拓扑下考虑 X 中的子空间 $Y_1 = [0, 1], Y_2 = (0, 1), Y_3 = (0, 1]$.

(1) Y_1 是紧集, 这来源于数学分析中的证明. 我们将在后文证明更一般的结论.

(2) Y_2 不是紧集, 考虑集族 $\mathscr{A} = \{(\frac{1}{n}, 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 它是 Y_2 的开覆盖, 但 $\mathscr{A}$ 中的任何有限子集族都不可能覆盖 Y_2.

(3) Y_3 也不是紧集, 可类似考虑 Y_3 的开覆盖 $\mathscr{B} = \{(\frac{1}{n}, 1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ■

例 3.4.5　设 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$,则 X 在任何拓扑下皆为紧集. ■

定义 3.4.3　*设 Y 是 X 的子集, $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族, 如果 $\mathscr{A}$ 中元素之并包含 Y, 则称 $\mathscr{A}$ 覆盖了 Y.*

命题 3.4.1 (**子空间紧性判则**)　设 $Y \subseteq X$, 则以下命题等价:

(1) Y 作为子空间拓扑是紧的;

(2) 由 X 中开集所组成的 Y 的任意覆盖都包含一个有限子族覆盖 Y.

证明　(1)$\Longrightarrow$ (2) 已知 Y 是紧集. 任取 X 中的开集族 $\mathscr{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 我们的目标是要找到 X 中有限个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathscr{A}$ 使得 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$. 考虑 Y 的开覆盖

$$\mathscr{A}_Y = \{U_\alpha \cap Y \mid \alpha \in I\}.$$

根据 Y 的紧性, 可以找到

$$U_1 \cap Y,\ U_2 \cap Y,\ \cdots,\ U_n \cap Y \in \mathscr{A}_Y,$$

满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(U_i \cap Y) = Y$. 由此得

$$Y \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap Y) = Y$$

即 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

(2)$\Longrightarrow$ (1) 我们要证 Y 是紧的, 即证: 如果 $\mathscr{A}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 Y 的任意开覆盖,那么存在有限个开覆盖 $U'_1, U'_2, \cdots, U'_n \in \mathscr{A}'$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U'_i = Y$.

因为 U'_α 是 Y 中的开集, 所以存在 X 中的开集 U_α 使得 $U'_\alpha = U_\alpha \cap Y$. 又因为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U\alpha' = Y$ 因此

$$Y = \bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap Y) = Y \cap (\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$$

蕴含了 $Y \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$. 令 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} = \mathscr{A}$, 那么 $\mathscr{A}$ 是 X 中的开集族并且覆盖了 Y.

由条件 (2) , 存在 X 中的有限子族 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathscr{A}$ 使得 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, 即 $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U'_i$. ■

例 3.4.6　(1) 设 $X = [0,1]$, $Y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \subseteq X$. 虽然 X 是紧集, 但 Y 作为 X 的子空间是非紧致的.
(2) 设 $X = \mathbb{R}^1$, $Y_1 = (0,1)$, $Y_2 = [0,1]$ 都是 X 的子集. 拓扑空间 X 不是紧集, 其子集 Y_1 也不是紧集, 但子集 Y_2 是紧的.

这两例表明, 如果不加适当的条件, 那么拓扑空间的紧性与其子空间的紧性并无必然联系.■

命题 3.4.2　设 X 是紧空间, Y 是 X 的闭子集, 那么 Y 也是紧集.

证明　设 $\mathscr{A}$ 是 X 中的任意覆盖 Y 的开集族.由命题 3.4.1, 只需证明 $\mathscr{A}$ 中的存在有限子族覆盖 Y. 注意 Y 是闭集, 故 $X - Y$ 是 X 中的开集. 定义

$$\mathscr{A}' \triangleq \mathscr{A} \cup \{X - Y\}$$

这是 X 的开覆盖, 即

$$\bigcup_{U_\alpha\in\mathscr{A}} U_\alpha \cup (X - Y) = X.$$

由 X 的紧性, 可找到 X 中有限覆盖 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathscr{A}$,使得

$$(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cup (X - Y) = X,$$

从而 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. 由 $\mathscr{A}$ 的任意性, Y 也是紧集. ■

命题 3.4.3 设 X 是 Hausdorff 的, Y 是 X 中的紧子集, 则 Y 是闭集.

证明 我们要证 $X - Y$ 是开集, 即对 $X - Y$ 中任一点 x, 要找到开集 U 使得 $x \in U \subseteq X - Y$.

任取 Y 中的一点 y. 因为 X 是 Hausdorff 的, 故存在 X 中的开集 U_y, V_y 满足

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset.$$

让 y 跑遍 Y 中的每个点, 那么我们得到 X 的开集族 $\mathscr{A} = \{V_y\}_{y \in Y}$, 它覆盖了 Y.

由 Y 的紧性及命题 3.4.1, 可找到 $V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots, V_{y_n} \in \mathscr{A}$, 使得 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$. 令

$$U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}.$$

它是 X 中的开集并且显然包含 x. 因为

$$U \cap V_{y_i} = (\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}) \cap V_{y_i} \subseteq U_{y_1} \cap V_{y_1} = \emptyset$$

所以 $U \cap V_{y_i} = \emptyset$, 从而 $U \cap Y = \emptyset$. 由此推出 $x \in U \subseteq X - Y$. ■

我们可以从上述命题的证明中得到如下有用的分离性结论.

推论 3.4.1 设 X 是 Hausdorff的, Y 是 X 的紧子集, $x \in X - Y$, 则存在 X 中不相交的开集 U, V 使得 $x \in U, Y \subseteq V$.

定理 3.4.1 有限多个紧空间的积是紧的. 换言之, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是紧空间, 则 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是紧的.

在证明该定理前, 我们先给出如下引理.

引理 3.4.1 (管形引理) 设 X, Y 是拓扑空间, Y 是紧的, $x_0 \in X$, W 是 $X \times Y$ 中包含 $x_0 \times Y$ 的开集, 则存在 X 中的开集 U, 使得 $x_0 \in U$ 且 $U \times Y \subseteq W$.

证明 任取 $(x_0, y) \in x_0 \times Y$, 存在 $X \times Y$ 中的基元素 $U_y \times V_y$, 使得 $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subseteq W$. 这就给出了 Y 的开覆盖 $\{V_y\}_{y \in Y}$. 根据 Y 的紧性, 存在有限个开集

$$V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots, V_{y_n}$$

使得 $Y = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. 显见

$$x_0 \times Y \subseteq (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup (U_{y_2} \times V_{y_2}) \cup \cdots \cup (U_{y_n} \times V_{y_n}) \subseteq W.$$

令 $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, 显然 $x_0 \in U$. 我们要证明上述的 U 就是我们要找的 X 中开集, 即满足 $U \times Y \subseteq W$.

任取 $U\times Y$ 中的元素 (x,y), 因为 $(x_0,y)\in x_0\times Y$, 所以存在 V_{y_i} 使得 $(x_0,y)\in U_{y_i}\times V_{y_i}$, 从而 $y\in V_{y_i}$. 于是

$$(x,y)\in U\times V_{y_i}\subseteq U_{y_i}\times V_{y_i}\subseteq W.$$

这就推出 $U\times Y\subseteq W$. ■

现在我们来证明定理 3.4.1.

证明 我们只考虑两个紧空间的乘积 $X\times Y$ 的情形. 一般情形可由归纳法得到.

设 $\mathscr{A}$ 是 $X\times Y$ 的任一开覆盖. 任取 X 的元素 x, 因为 $x\times Y$ 是紧致的, 所以存在 $\mathscr{A}$ 中有限个元素 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$ 使得 $x\times Y\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 由管形引理, 存在 X 中的开集 W_x, 使得

$$x\times Y\subseteq W_x\times Y\subseteq A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

即 $W_x\times Y$ 也被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖. 对于 X 中任意的点 x, 都存在上述 X 中的开集 W_x. 因此 $\{W_x\}_{x\in X}$ 是 X 的一个开覆盖. 因为 X 是紧空间, 所以存在 $W_{x_1},W_{x_2},\cdots,W_{x_n}\in\{W_x\}_{x\in X}$ 使得

$$X=W_{x_1}\cup W_{x_2}\cup\cdots\cup W_{x_n}$$

也就是说

$$X\times Y=(W_{x_1}\times Y)\cup(W_{x_2}\times Y)\cup\cdots\cup(W_{x_n}\times Y).$$

因为每个 $W_{x_i}\times Y$ 被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖, 所以 $X\times Y$ 也被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖. 由 $\mathscr{A}$ 选取的任意性即得 $X\times Y$ 的紧性. ■

注 3.4.1 Tychonoff 定理可以进一步断言, 任意多个紧空间的积拓扑仍是紧的. 不过这个结论的证明是比较困难的, 后文将会简要介绍. ■

定义 3.4.4 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{C}$ 是 X 的子集族, 若对 $\mathscr{C}$ 中任何有限子族 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，其交集 $C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_n$ 总非空, 则称 $\mathscr{C}$ 满足有限交条件.

定理 3.4.2 (**紧性的闭集判则**) 设 X 是拓扑空间, 则以下条件等价:

(1) X 是紧集;

(2) X 中任一满足有限交条件的闭集族 $\mathscr{C}$ 都有 $\bigcap\limits_{C\in\mathscr{C}}C\neq\emptyset$;

(3) 每个满足有限交条件的子集族 $\mathscr{A}$, 其元素的闭包的交 $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}\overline{A}\neq\emptyset$.

证明 (1)$\Longrightarrow$ (2) 令 $\mathscr{A}=\{U\mid U=X-C,C\in\mathscr{C}\}$, 则 $\mathscr{A}$ 是开集族. 由

$$\bigcup_{U\in\mathscr{A}}U=X-\bigcap_{C\in\mathscr{C}}C,\tag{3-1}$$

假若 $\mathscr{C}$ 不满足 $\bigcap\limits_{C\in\mathscr{C}}C\neq\emptyset$, 那么 $\bigcup\limits_{U\in\mathscr{A}}U=X$. 由 X 的紧性, 存在 $U_1,U_2,\cdots,U_n\in\mathscr{A}$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i=X$. 若记 $C_k=X-U_k\in\mathscr{C}$, 那么根据式 (3-1) 得 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}C_k=\emptyset$. 这与 $\mathscr{C}$ 的有限交条件矛盾! 因此 $\bigcap\limits_{C\in\mathscr{C}}C\neq\emptyset$.

(2)$\Longrightarrow$ (1) 用反证法. 假若 X 非紧致, 则存在开覆盖 $\mathscr{A}=\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$, 使得 $\mathscr{A}$ 中有限子族都不能覆盖 X. 令 $\mathscr{C}=\{C \mid C=X-U, U\in\mathscr{A}\}$. 对于 $\mathscr{C}$ 中任意有限子族 $C_1,C_2,\cdots,C_n\in\mathscr{C}$

$$C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_n = X-(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n)\neq\emptyset$$

故 $\mathscr{C}$ 满足有限交条件, 由条件 (2), $\bigcap\limits_{C\in\mathscr{C}} C\neq\emptyset$, 这表明 $\bigcup\limits_{U\in\mathscr{A}} U\neq X$, 这与 $\mathscr{A}$ 的选取矛盾!

(2)$\Longrightarrow$ (3) 设 $\mathscr{A}$ 是满足有限交条件的子集族, 令 $\mathscr{C}=\{\overline{A} \mid A\in\mathscr{A}\}$. 对于 $\mathscr{C}$ 中的任意有限个元素 $\overline{A}_1,\cdots,\overline{A}_n$, 由假设条件知

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\supseteq A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\neq\emptyset,$$

因而 $\mathscr{C}$ 满足有限交条件. 由条件 (2), $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}\overline{A}\neq\emptyset$.

(3)$\Longrightarrow$ (2) 这是平凡的. ■

推论 3.4.2 设 X 是紧空间, 取闭集套

$$\mathscr{C}=\{C_n \mid C_n\supseteq C_{n+1},\ C_n\neq\emptyset\ n=1,2,\cdots,\},$$

则 $\mathscr{C}$ 满足有限交条件, 从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n\neq\emptyset$.

特别地, 对 $X=\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑, 任何闭区间套

$$\mathscr{C}=\{[a_n,b_n] \mid [a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}],\ a_n<b_n,\ n=1,2,\cdots,\}$$

都满足 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$.

定理 3.4.3 设 X 是具有上确界性质的全序集, 则 X 关于序拓扑, 其每个闭区间都是紧的. 特别地, $X=\mathbb{R}^1$ 在标准拓扑下, 其闭区间都是紧的.

证明 给定 $a<b$, 考虑闭区间 $Y=[a,b]$. 设 $\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 作为子空间拓扑的一个开覆盖, (这里的子空间拓扑和序拓扑相等) 令

$$\Sigma=\{y\in(a,b] \mid [a,y]\ \text{能被}\ \mathscr{A}\ \text{中有限个元素覆盖}\}$$

我们分三步来证明 Y 是闭集.

(1) 首先证明 Σ 非空.

若 a 有紧接后元 a', 那么可以找到 $U,V\in\mathscr{A}$ 使得 $a\in U, a'\in V$. 此时 $[a,a']$ 可以被 U,V 覆盖. 因此 $a'\in\Sigma$.

今设 a 无紧接后元. 此时存在 $\mathscr{A}$ 中的开集 U, 使得 $a\in U$. 因为 U 是开集, 所以存在 $(a,b]$ 中的元素 c_0 使得 $[a,c_0)\subseteq U$. 取 $y\in[a,c_0)$,那么 $[x,y]$ 被 U 覆盖, 即 $y\in\Sigma$.

(2) 令 $c=\sup\Sigma$, 则 $a<c\leq b$. 我们来证明 $c\in\Sigma$.

设 $V\in\mathscr{A}$ 满足 $c\in V$. 因为 V 是开集, 所以存在 $d\in[a,c)$ 使得 $(d,c]\subseteq V$. 假设 $c\notin\Sigma$, 则 $(d,c]\cap\Sigma\neq\emptyset$, 若不然 d 也是 Σ 的上界, 与 c 的是上确界矛盾! 取定 $z\in(d,c]\cap\Sigma$. 注意到 $[z,c]\subseteq(d,c]\subseteq V$, 并且由 z 的取法, $[a,z]$ 能被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素的覆盖. 因此 $[a,c]=[a,z]\cup(z,c]$ 也能被有限个元素覆盖, 这样 $c\in\Sigma$, 与假设矛盾! 所以 $c\in\Sigma$.

(3) 最后我们证明 $c = b$. 假设 $c < b$.

令

$$\Sigma' = \{y \in (c, b] \mid [c, y] \text{ 能被 } \mathscr{A} \text{ 中有限个元素覆盖}\}.$$

类似第一步的证明, 可知 $\Sigma' \neq \emptyset$, 即存在 $y \in (c, b]$, 使得 $[c, y]$ 能被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖. 由于 $[a, c]$ 也能被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖, 所以 $[a, y] = [a, c] \cup (c, y]$ 能够被 $\mathscr{A}$ 中有限个元素覆盖. 因此 $y \in \Sigma$. 这就和 c 的选取矛盾! 故 $c = b$.

至此, 我们完成了证明. ■

推论 3.4.3 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, 则以下条件等价:

(1) Y 是紧集;

(2) Y 在欧氏度量下是有界闭集;

(3) Y 在平方度量下是有界闭集.

证明 设 d 是欧氏度量, ρ 是平方度量, 根据不等式

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$$

易知 Y 在 d 中有界当且仅当 Y 在 ρ 中有界. 另一方面 d 和 ρ 诱导了相同的拓扑, 也就是说 Y 在 d 中是闭集当且仅当 Y 在 ρ 也是闭集. 因此只要证明 (1) 与 (3) 是等价的即可.

(1)$\Longrightarrow$ (3) 设 Y 是紧集. 因为 $\mathbb{R}^n$ 是 Hausdorff 的, 由命题 3.4.3 可知, Y 是闭集.考虑开集族

$$\mathscr{B} = \{B_\rho(0, m) \mid m \in \mathbb{Z}^+\},$$

它的并等于 $\mathbb{R}^n$, 故上述集族是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开覆盖. 又因为 Y 是紧集, 由子空间紧性判则, 存在 $\mathscr{B}$ 中有限个元素,

$$B_\rho(0, m_1), B_\rho(0, m_2), \cdots, B_\rho(0, m_r)$$

使得 $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} B_\rho(0, m_i)$. 令 $M = \max\limits_{1 \leq i \leq r}\{m_i\}$, 即得 $Y \subseteq B_\rho(0, M)$. 于是对于任意的 $x, y \in Y$ 有 $\rho(x, y) \leq 2M \leq +\infty$. 因此 Y 关于度量 ρ 是有界闭集.

(3)$\Longrightarrow$ (1) 设 Y 是闭集, 且关于度量 ρ 有界. 设 $m = \sup\limits_{x, y \in Y} \rho(x, y)$. 任取 $x_0 \in Y$, 令 $M = m + \rho(x_0, 0)$, 则

$$Y \subseteq [-M, M]^n := \underbrace{[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}_{n}.$$

因为 $[-M, M]$ 是紧集, 所以积空间 $[-M, M]^n$ 也是紧集. 由命题 3.4.2, Y 是紧集. ■

例 3.4.7 (1) 考虑单位球面 $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$. 因为 $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, 且它在标准拓扑下是有界闭集, 所以 S^{n-1} 是紧集.

(2) 单位球体 $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x}|| \leq 1\}$. 同样的, $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, 所以 D^n 是紧集. ■

例 3.4.8 (1) 考虑集合 $Y_1 = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Y_1 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 但 Y_1 无界, 因此 Y_1 不是紧致的.

(2) 考虑集合 $Y_2 = \{(x,y) \mid y = sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Y_2 是有界的, 但它不是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 因此 Y_2 也不是紧集. ■

定理 3.4.4 设 X 是紧的 Hausdorff 空间. 若 X 中的每个点都是 X 的聚点, 也就是说 $X = X'$, 那么 X 不可数.

证明 设 $x \in X, U$ 是 X 中的非空开集. 我们分三步证明 X 不可数.

(1) 先证明, 存在 $y \in U$ 使得 $x \neq y$. 若 $x \notin U$, 则任取 $y \in U$ 即可; 若 $x \in U$, 因为 x 是 X 的聚点, 因此包含 x 的任一开集与 X 相交有异于 x 的点, 也就是说 $U - \{x\} \neq \emptyset$, 即可任取 $y \in U - \{x\}$.

(2) 再证明, 存在非空开集 $V \subseteq U$, 使得 $x \notin \overline{V}$. 取 (1) 中异于 x 的点 y. 由于 X 是 Hausdorff 的, 故存在非空开集 W_1, W_2 使得

$$x \in W_1, \quad y \in W_2, \quad \text{且 } W_1 \cap W_2 = \emptyset$$

取 $V = W_2 \cap U$. 由于 $W_1 \cap V = \emptyset, x \in W_1$, 故由闭包判则知 $x \notin \overline{V} = V \cup V'$.

(3) 最后我们用反证法证明 X 不可数. 反设 X 是可数的,

$$X = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

取非空开集 $V_1 \subseteq X$, 使得 $x_1 \notin \overline{V}_1$. 类似地, 取非空开集 $V_n \subseteq V_{n-1}$ 使得 $x_n \notin \overline{V_n}$. 这样, 我们得到了一列闭集套,

$$\overline{V_1} \supseteq \overline{V_2} \supseteq \cdots \supseteq \overline{V_n} \supseteq \cdots$$

因为 X 是紧空间, 由推论 3.4.2, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset$. 我们取 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$, 因为 $x \in X$, 而 X 是可数的, 因此存在某个 k, 使得 $x = x_k$. 所以 $x_k \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \subseteq \overline{V_k}$. 当然, 这与区间套的选取矛盾! 因此 X 不可数. ■

推论 3.4.4 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间是不可数集.

3.5 极限点紧与序列紧

定义 3.5.1 如果拓扑空间 X 中的任一无穷子集都有聚点, 则称 X 是极限点紧的或 Fréchet 紧, 有时也称 X 具有 Bolzano-Weierstrass 性质.

命题 3.5.1 若 X 是紧集, 则 X 为极限点紧.

证明 设 $Y \subseteq X$ 是无穷子集. 反证, 假设 Y 无聚点, 则 $\overline{Y} = Y$, 因此 Y 是闭集. 又因为 X 是紧集, 由命题 3.4.2 知 Y 是 X 的紧子集.

任取 $x \in Y$. 因为 x 不是 Y 的聚点, 所以存在 X 中开集 U_x, 使得

$$x \in U_x, \quad U_x \cap (Y - \{x\}) = \emptyset$$

显然, 集族 $\mathscr{A} = \{U_x\}_{x \in Y}$ 是 Y 的一个开覆盖, 且 $U_x \cap Y = \{x\}$. 由 Y 的紧性, 存在

$$U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n} \in \mathscr{A}$$

覆盖 Y. 因而

$$Y = Y \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap U_{x_i}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

但 Y 是无限点集, 矛盾!

注 3.5.1 存在拓扑空间, 它为极限点紧, 但不是紧致的. 这类例子与良序集有关. 此处不再展开. 有兴趣的读者可以参看 [1]. ■

我们给出极限点紧但并不紧致的拓扑空间的另一类型例子.

例 3.5.1 在正整数集 $\mathbb{N}$ 上引入如下拓扑基

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \cdots, \{2n-1, 2n\}, \cdots\}.$$

它生成了 $\mathbb{N}$ 上一个的拓扑 $\mathscr{T}$.

我们证明它是极限点紧的. 事实上, 它的任何子集都有聚点. 为此, 我们只需证明每个单点集都有聚点. 对于任意的单点集 $\{2n\}$, 考虑点 $2n-1$ 的任一邻域 U, 由拓扑基的构造可知, $2n-1 \in \{2n-1, 2n\} \subseteq U$. 这表明

$$(U - \{2n-1\}) \cap \{2n\} = \{2n\} \neq \emptyset.$$

因此 $2n-1$ 是 $\{2n\}$ 的聚点. 同理 $2n$ 是 $\{2n-1\}$ 的聚点.

另一方面, 考虑 $\mathbb{N}$ 中的一簇开集

$$\mathscr{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \cdots, \{2n-1, 2n\}, \cdots\}$$

显见 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一簇覆盖, 但 $\mathscr{A}$ 中不存在有限个开集覆盖 $\mathbb{N}$. 故 $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ 并不紧致. ■

定义 3.5.2 设 X 是拓扑空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的点列, $x_0 \in X$. 如果对 x_0 的任何邻域 U, 存在 $N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 总有 $x_n \in U$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0.

命题 3.5.2 设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的点列, 则以下条件等价.

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0;

(2) $\forall\, n > 0, \exists\, N > 0$, 使得当 $k > N$ 时, 总有 $x_k \in B_d(x_0, \frac{1}{n})$.

条件成立时, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 总有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 来自定义, 证明是平凡的.

(2)$\Longrightarrow$(1) 设 U 是 x_0 的邻域, 则存在 $B_d(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. 取充分大的 n 使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon$. 因而

$$B_d\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \subseteq B_d(x_0, \varepsilon) \subseteq U$$

由条件, 存在 $N>0$, 使得当 $k>N$ 时, $x_k\in B_d(x_0,\frac{1}{n})\subseteq U$.

今假设条件成立. 任取 $\varepsilon>0$. 我们可找正整数 h, 使得 $\dfrac{1}{h}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由条件 (2), 存在 $N>0$, 当 $n,m>N$ 时总有

$$x_n,x_m\in B_d\left(x_0,\frac{1}{h}\right)\subseteq B_d(x_0,\varepsilon/2).$$

由三角不等式即得 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. ■

命题 3.5.3 若 X 是 Hausdorff 的, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则收敛点是唯一的.

证明 若不然, 反设 x_0,y_0 是两个不同的收敛点, 那么分别存在包含 x_0,y_0 的不相交的开集 U,V. 由定义, 存在 $N>0$, 当 $k>N$ 时, 总有 $x_k\in U,x_k\in V$. 这与 $U\cap V=\emptyset$ 矛盾! ■

定义 3.5.3 若 X 中任何序列都有收敛子序列, 则称 X 序列紧或简称列紧.

我们要证明如下重要结论.

定理 3.5.1 设 (X,d) 是度量空间, 则以下条件等价:

(1) X 是紧集;

(2) X 极限点紧;

(3) X 序列紧.

为证明此结论, 我们需要一些准备工作.

引理 3.5.1 设 X 序列紧的拓扑空间, ε 是给定正数, 那么存在有限个 ε-球

$$B_d(x_1,\varepsilon),\quad \cdots,\quad B_d(x_n,\varepsilon)$$

覆盖 X, 即 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_d(x_i,\varepsilon)$.

证明 反证法. 假设对某 $\varepsilon>0$, X 不能由有限个 ε-球覆盖. 今构造序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: 任取 $x_1\in X$. 因为 $B_d(x_1,\varepsilon)\neq X$, 所以存在 $x_2\in X-B_d(x_1,\varepsilon)$. 依次类推, 取

$$x_n\in X-\bigcup_{i=1}^{n-1}B_d(x_i,\varepsilon).$$

从而

$$d(x_n,x_i)\geq\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

这表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不含收敛子列. 这与 X 是序列紧矛盾! ■

引理 3.5.2 设 (X,d) 是度量空间. X 是极限点紧的, 那么 X 列紧.

证明 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的点序列, 令 $Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$. 若 Y 为有限集, 则由抽屉原理, 存在无穷个 x_n 重合, 因而显然可挑出收敛子序列.

不妨设 Y 为无限集. 因为 X 极限点紧, 所以 Y 有聚点 x_0. 注意 $B_d(x_0,\frac{1}{n})\cap Y$ 含有无限多个元素. 若不然,当 n 充分大以后, $B_d(x_0,\frac{1}{n})\cap Y=\emptyset$, 与 x_0 的定义矛盾! 取 $n_1>0$ 使得 $x_{n_1}\in B_d(x_0,1)$, 再取 $n_2>n_1$ 使得 $x_{n_2}\in B_d(x_0,\frac{1}{2})$, $\cdots$ 依次取 $n_k>n_{k-1}$ 使得 $x_{n_k}\in B_d(x_0,\frac{1}{k})$. 因此由命题 3.5.2 知 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0. ■

引理 3.5.3 (**勒贝格数引理**) *设 (X,d) 是度量空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 若 X 序列紧, 则存在 $\delta>0$, 使得 X 中每个直径小于 δ 的子集必包含在 $\mathscr{A}$ 中的某元素中. 这里的 δ 称为勒贝格数.*

证明 反证法. 假设不存在这样的 δ, 即对任意的 $\delta>0$, 都存在 X 中直径小于 δ 的子集, 它不含在 $\mathscr{A}$ 中的任何元素中.

对于任意的 $n>0$, 取子集 C_n 使得 C_n 的直径 $d(C_n)<\frac{1}{n}$ 且 C_n 不含于 $\mathscr{A}$ 中任何元素内. 取 $x_n\in C_n$, 我们断言这样的 $\{x_n\}$ 无收敛子列. 若不然, 可找到子列 $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0, 则 x_0 含于 $\mathscr{A}$ 中某元素 U 内.

因为 U 是开集, 所以存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B_d(x_0,\varepsilon)\subseteq U$. 取充分大的 k, 使 $x_{n_k}\in B_d(x_0,\frac{\varepsilon}{2})$ 且 $\frac{1}{n_k}<\frac{\varepsilon}{2}$. 对任何 $x\in B_d(x_{n_k},\frac{1}{n_k})$, 由三角不等式,

$$d(x,x_0)\le d(x,x_{n_k})+d(x_{n_k},x_0)<\frac{1}{n_k}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因而 $x\in B_d(x_0,\varepsilon)$, 从而 $B_d(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subseteq B(x_0,\varepsilon)$. 对任何 $y\in C_{n_k}$, 由于 $d(y,x_{n_k})<\frac{1}{n_k}$, 故 $y\in B_d(x_{n_k},\frac{1}{n_k})$. 所以

$$C_{n_k}\subseteq B_d(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subseteq B(x_0,\varepsilon)\subseteq U.$$

这与 C_{n_k} 的选取矛盾! ■

定理 3.5.1 **的证明** (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3)已证. 现在证明 (3)$\Longrightarrow$(1). 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 因为 X 是序列紧的, 所以 $\mathscr{A}$ 有勒贝格数 δ. 取 $\varepsilon=\delta/3$. 由引理 3.5.1 存在 X 的 $\varepsilon-$球有限覆盖, 每个球直径 $d\le\dfrac{2\delta}{3}$. 由引理 3.5.3 上述每个球都含于 $\mathscr{A}$ 中某元素中. 因此 $\mathscr{A}$ 有一个有限子覆盖. □

3.6 连续映射

在这一节之前, 我们考察的是一个拓扑空间的性质. 从现在开始, 我们要讨论两个拓扑空间 X,Y 之间的关系. 如何研究两个拓扑空间的关系呢? 最常见的方法就是建立某类合适的映射, 把两者联系起来. 这种思想早在高等代数中就已出现. 我们研究两个向量空间的方法正是建立他们之间的线性映射. 类似的想法也出现在近世代数中的各类同态映射中.

3.6.1 连续映射与同胚

以下设 X,Y 是两个拓扑空间.

定义 3.6.1 *设 $f:X\to Y$ 是一个映射. 如果对 Y 中的每个开集 V, 其原像集*

$$f^{-1}(V)\overset{\triangle}{=}\{x\in X\mid f(x)\in V\}$$

也是 X 中的开集, 则称 f 是连续映射, 或简称 f 是连续的.

命题 3.6.1 以下命题等价:

(1) 映射 f 是连续的;

(2) 对 Y 的拓扑基中的元素 B, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

证明 (1)$\Longrightarrow$ (2) 这是平凡的.

(2)$\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 中的开集, 则 $V = \bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$. 其中 B_α 是 Y 中拓扑基元素. 于是

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

是 X 中的开集. ■

例 3.6.1 (1) (**恒同映射**) 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 考虑恒同映射

$$\begin{aligned} Id : (X, \mathscr{T}) &\longrightarrow (X, \mathscr{T}), \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

它显然是连续的.

(2) (**包含映射**) 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 设 $Y \subseteq X$, 考虑包含映射

$$\begin{aligned} i : Y &\longrightarrow X, \\ y &\longmapsto y. \end{aligned}$$

它是连续的. 这是因为, 若假设 V 是 X 中的开集, 那么

$$i^{-1} = \{y \in Y \mid i(y) \in V\} = Y \cap V$$

是 Y 作为子空间拓扑的开集.

(3) (**投影映射**)

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X, \\ x \times y &\longmapsto x, \\ \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y, \\ x \times y &\longmapsto y. \end{aligned}$$

它们都是连续映射. 以 π_1 为例, 任取 X 中的开集 U, 它的原像 $U \times Y$ 是 $X \times Y$ 中的开集, 因此 π_1 是连续映射.

(4) 固定点 $a \in X$, $b \in Y$, 考虑如下的嵌入映射

$$\begin{aligned} i_b : X &\longrightarrow X \times Y, \\ x &\longmapsto x \times b, \\ j_a : Y &\longrightarrow X \times Y, \\ y &\longmapsto a \times y. \end{aligned}$$

由 (2), i_b, j_a 也连续. ■

命题 3.6.2 设映射 $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 是 $\mathbb{R}^1$ 在标准拓扑下的映射. 那么 f 在拓扑意义下连续当且仅当 f 在数学分析意义下连续.

证明 ($\Longrightarrow$) 已知 f 在拓扑意义下连续.

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^1$, 令 $y_0 = f(x_0)$ 及

$$V_\varepsilon = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid |y - y_0| < \varepsilon\}$$

因为 f 在拓扑意义下是连续映射, 所以 $f^{-1}(V_\varepsilon)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集. 又因为 $x_0 \in f^{-1}(V_\varepsilon)$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得

$$x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon)$$

注意,

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

我们可将上述讨论重新叙述为, 对于任意满足 $|x - x_0| < \delta$ 的点 x, 均有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 此即数学分析中连续性的定义.

($\Longleftarrow$) 已知 f 在数学分析意义下连续.

任取开区间 $V = (a, b) \subseteq \mathbb{R}^1$, 要证 $f^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集, 即对于 $\forall x_0 \in f^{-1}(V)$, 要找到开集 (c, d), 使得 $x_0 \in (c, d) \subseteq f^{-1}(V)$.

令 $y_0 = f(x_0)$, 显然 $y_0 \in V$. 取充分小的正数 ε, 使得 $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subseteq V$. 因为 f 在数学分析意义下是连续的, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 这样我们就找到了 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得

$$x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

所以 f 在拓扑意义下是连续映射. ■

例 3.6.2 设映射 $f : X \longrightarrow Y$, 其中 X 是离散拓扑空间, 则 X 的任意子集都是开集, 因而 f 必连续. ■

例 3.6.3 考虑映射

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^1,\ \mathscr{T}_1) &\longrightarrow (\mathbb{R}^1_l, \mathscr{T}_2) \\ x \quad &\longmapsto x, \end{aligned}$$

这里 $(\mathbb{R}^1, \mathscr{T}_1)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的标准拓扑, $(\mathbb{R}^1_l, \mathscr{T}_2)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的下限拓扑. 因为下限拓扑中的基元素是诸如 $[a, b)$ $(a < b)$ 的形式, 而 $f^{-1}([a, b)) = [a, b)$ 不是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集.因此 f 不连续! 这表明, 即使底空间一样, 但若配备不同的拓扑, 那么作为集合的恒同映射也未必连续.

反过来, 考虑映射

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}^1_l,\ \mathscr{T}_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^1, \mathscr{T}_1) \\ x \quad &\longmapsto x. \end{aligned}$$

对于 $(\mathbb{R}^1, \mathscr{T}_2)$ 中的任意开集 (a, b), 由

$$g^{-1}(a, b) = (a, b) = \bigcup_{c \in (a,b)} [c, b),$$

可知它是 $(\mathbb{R}^1_l, \mathscr{T}_1)$ 中的开集. 因此 g 是连续映射. ■

注 3.6.1 上例表明, 对连续映射 $f : X \to Y$ 来说,

(1) $U \subseteq X$ 是开集不能保证 $f(U)$ 是 Y 中开集;

(2) f 是双射不能推出逆映射 f^{-1} 是连续的. ■

命题 3.6.3 (连续性判则) 设 $f: X \to Y$, 则以下条件等价:

(1) f 是连续映射.

(2) 对 X 中任何子集 W, 都有 $f(\overline{W}) \subseteq \overline{f(W)}$, 此处的 $f(W)$ 定义为:

$$f(W) \triangleq \{y \in Y \mid \text{ 存在 } x \in W, \text{使得 } y = f(x)\}.$$

(3) 对 Y 中任何闭集 Z, $f^{-1}(Z)$ 也是 X 中的闭集.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $x \in \overline{W}$, V 是 $f(x)$ 的任一邻域. 我们要证 $f(x) \in \overline{f(W)}$, 即 $V \cap f(W) \neq \emptyset$, 亦即要证 $f^{-1}(V) \cap W \neq \emptyset$.

因为 f 连续, V 是 Y 中的开集, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 又因为 $f(x) \in V$, 故 $x \in f^{-1}(V)$, 从而 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域. 由于 $x \in \overline{W}$, 故由闭包的性质推出 $f^{-1}(V) \cap W \neq \emptyset$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 Z 是 Y 中的闭集, $W = f^{-1}(Z)$. 我们要证 W 是闭集, 即证 $W = \overline{W}$, 亦即 $\overline{W} \subseteq W$.

任取 $\overline{W}$ 中的点 x, 我们只需证明 $x \in W$, 即 $f(x) \in Z$. 注意到 $f(x) \in f(\overline{W})$, 故由 (2) 可知

$$f(x) \in f(\overline{W}) \subseteq \overline{f(W)} \subseteq \overline{Z} = Z.$$

因此 $f(x) \in Z$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 中的开集, 则 $Z = Y - V$ 是 Y 中的闭集.由条件 (3) 可知,$f^{-1}(Z)$ 是闭集. 注意

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - Z) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(Z) = X - f^{-1}(Z)$$

是 X 中的开集. 由连续映射的定义, f 是连续的. ■

下面我们给出拓扑学中一个重要的概念.

定义 3.6.2 设 $f: X \to Y$ 是从拓扑空间 X 到 Y 的连续映射. 如果存在一个连续映射 $g: Y \to X$, 使得 $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ 及 $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, 则称映射 f 是从 X 到 Y 的一个同胚, 或简称 X 与 Y 同胚 (简记作 $X \cong Y$). f 的逆映射 g 记为 f^{-1}.

注 3.6.2 $f: X \to Y$ 同胚等价于满足以下三个条件:

(1) f 是双射, 换言之, f 既是单射又是满射;

(2) 对 X 中任何开集 U, $f(U)$ 也是 Y 中的开集 (相当于 f^{-1} 的连续性);

(3) 对 Y 中任何开集 V, $f^{-1}(V)$ 也是 X 中的开集 (相当于 f 的连续性). ■

注 3.6.3 X 上的拓扑性质就是指只依赖于 X 上的拓扑得到的性质.换言之, 如果 X 与 Y 同胚, 则该性质也在 Y 上成立. 我们已学过的紧性、连通性、Hausdorff 性质和可度量化等都是拓扑性质. ■

例 3.6.4 给定实数 $a, b \in \mathbb{R}^1$,其中 $a \neq 0$, 考虑如下映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 & \qquad g: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ x &\longmapsto ax+b & y &\longmapsto \tfrac{y-b}{a} \end{aligned}$$

显然,映射 f, g 都是连续的, 且 g 是 f 的逆映射, 所以 f 是同胚映射. ■

例 3.6.5 考虑如下连续映射

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

这里 $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 的子空间. f 是同胚映射, 且 $f^{-1} = f$.

类似的, 我们有如下同胚映射

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

这里 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 的子空间. ■

例 3.6.6 考虑如下映射

$$\begin{aligned} f: (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R}^1 & \qquad g: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow (-1,1) \\ x &\longmapsto \tfrac{x}{1-x^2} & y &\longmapsto \tfrac{y}{1+\sqrt{1+4y^2}} \end{aligned}$$

映射 f, g 都是连续映射, 且 g 是 f 的逆映射, 因此 $(-1,1) \cong \mathbb{R}^1$. ■

例 3.6.7 考虑如下映射:

$$\begin{aligned} f: [0,1) &\longrightarrow S^1 := \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} (\subseteq \mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

由数学分析结论, f 连续且 f^{-1} 存在. 取 $[0,1)$ 中开集 $[0, \frac{1}{4})$, $f(U)$ 不是 S^1 的开集, 这是因为不存在 $\mathbb{R}^2$ 中包含 $f(0)$ 的开集 V, 使得 $V \cap S^1 \subseteq f(U)$. 因此 f^{-1} 并不连续, 从而 f 不同胚. ■

例 3.6.8 考虑例 3.6.3 中的映射

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_l &\longrightarrow \mathbb{R}^1, \\ x &\longmapsto x, \end{aligned}$$

这里 R_l 是下限拓扑. f 是连续映射且 f^{-1} 存在. 但 f 不连续, 故 $\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}_l$ 不同胚. ■

例 3.6.9 考虑映射

$$\begin{aligned} f: (a,b) &\longrightarrow (0,1) \\ x &\longmapsto \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

它是同胚映射.换言之, 开区间都同胚于标准开区间 $(0,1)$. 类似地, $[0,1] \cong [a,b]$. 但 $[0,1] \ncong \mathbb{R}^1$, 这是因为 $[0,1]$ 在标准拓扑下是紧的, 但 $\mathbb{R}^1$ 并不紧. ■

定义 3.6.3 设 $f: X \to Y$ 是连续的单射, $Z = f(X)$. 若 $f: X \to f(X)$ 是同胚的, 则称 f 是 $X \to Y$ 的拓扑嵌入.

例 3.6.10 映射

$$\begin{aligned} f : [0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

不是嵌入的. 这是因为例 3.6.7 可以表明 $f : [0,1) \to S^1$ 不是同胚. ■

3.6.2 连续映射的构造

例 3.6.11 (常值函数) 考虑如下映射

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y_0 \end{aligned}$$

这里 $y_0 \in Y$ 是固定点. 我们称这样的函数是常值函数. 它是连续的. 这是因为任取 Y 中的开集 V,其原像

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset, & \text{若 } y_0 \notin V \\ X, & \text{若 } y_0 \in V \end{cases}$$

因此, $f^{-1}(V)$ 都是 X 中的开集. ■

例 3.6.12 (包含映射) 设 $Y \subseteq X$,考虑包含映射:

$$\begin{aligned} i : Y &\hookrightarrow X \\ y &\longmapsto y \end{aligned}$$

任取 X 中的开集 U, 由于 $i^{-1}(U) = U \cap Y$ 是 Y 中的开集, 所以包含映射 i 连续. ■

例 3.6.13 (映射的复合) 设 $f : X \to Y$ 及 $g : Y \to Z$ 都是连续映射, 则映射 $g \circ f : X \to Z$ 也是连续的. ■

证明 任取 Z 中的开集 W, 我们有

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

因为 g 是连续的, 所以 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中的开集. 又因为 f 连续, 所以 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 中的开集, 即 $(g \circ f)^{-1}(W)$ 是 X 中的开集. 由 W 的任意性知 $g \circ f$ 是连续的. ■

例 3.6.14 (限制映射) 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, A 是 X 的子空间, 则可诱导 f 在 A 上的限制映射

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow Y \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

映射 $f|_A$ 也是连续的. 这是因为任取 Y 中的开集 V, $(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ 是 A 中的开集. 我们也可以把映射 $f|_A$ 看作两个映射的复合 $f|_A = f \circ i$, 即如下交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f|_A"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

这里 $i : A \to X$ 是包含映射. i 与 f 都是连续的, 故由例 3.6.13 可知, $f|_A$ 也是连续的. ■

例 3.6.15 (**值域的限制**) 设 $f: X \to Y$ 是连续映射,Z 是 Y 的子空间, 满足 $f(X) \subseteq Z$, 则可诱导出如下映射:

$$\begin{aligned} \bar{f}: X &\longrightarrow Z, \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

因为对于 Z 中任何的开集 W, 可找到 Y 中开集 V, 使得 $W = Z \cap V$, 而 $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 故 $\bar{f}$ 连续. ■

例 3.6.16 (**值域的扩张**) 设 $f: X \to Y$ 连续, $Y \subseteq Z$, 则可诱导值域扩张的映射

$$\begin{aligned} f': X &\longrightarrow Z, \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

我们可以把映射 f' 看成映射 f 和包含映射 $i: Y \to Z$ 的复合 $f' = i \circ f$, 即如下交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

因此 f' 是连续的. ■

例 3.6.17 (**同胚限制**) 设 $f: X \to Y$ 同胚, A 是 X 的子空间, 则 $f|_A: A \to f(A)$ 是同胚. 换言之, $f|_A: A \to Y$ 是拓扑嵌入.

我们来验证这一结论. 根据注记 3.6.2, 我们需要分别验证如下条件:

(1) $(f|_A)^{-1}: f(A) \longrightarrow A$ 存在. 这显然来自于 f 是一一映射的假设条件;

(2) $f|_A: A \to f(A)$ 是连续的. 注意到 $f|_A$ 来自于复合映射 $(f \circ i_A): A \xrightarrow{i_A} X \xrightarrow{f} Y$, 并将该复合映射的值域限制到 $f(A)$ 上得到的, 这里,i_A 表示包含映射. 因此它是连续的.

(3) $(f|_A)^{-1}: f(A) \longrightarrow A$ 是连续的. 这是因为它是 f^{-1} 通过先后在定义域和值域上的限制得到的.

因此, $f|_A$ 是同胚映射. ■

例 3.6.18 (**同胚关系**) 我们定义拓扑空间之间的关系

$$X \cong Y \quad \Longleftrightarrow \text{存在同胚映射 } f: X \to Y.$$

我们来验证上述的关系 $\cong$ 是等价关系.

(1) 自反性: $Id: X \longrightarrow X$ 是同胚映射, 故 $X \cong X$.

(2) 对称性: 若 $f: X \longrightarrow Y$ 同胚映射, 则由同胚映射的定义可知, $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ 显然也是同胚映射. 这就表明 $X \cong Y$ 蕴含着 $Y \cong X$.

(3) 传递性: 若 $X \cong Y, Y \cong Z$, 我们来证明 $X \cong Z$. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 以及 $g: Y \longrightarrow Z$ 都是同胚映射. 我们只须证 $g \circ f: X \longrightarrow Z$ 是同胚映射即可. 首先, 逆映射 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 存在. 其次, 由 g 与 f 的连续性可知 $g \circ f$ 连续. 类似可得 $f^{-1} \circ g^{-1}$ 的连续性.

因此 $g \circ f$ 是同胚映射, 从而 $X \cong Z$. ■

例 3.6.19 例 3.6.9 表明, 任何开区间 (a, b) 都与 $(0, 1)$ 同胚. 例 3.6.6 表明 $\mathbb{R}^1 \cong (-1, 1)$. 因而, 我们有 $\mathbb{R}^1 \cong (-1, 1) \cong (0, 1) \cong (a, b)$. 由传递性知, $\mathbb{R}^1 \cong (a, b)$. 在拓扑学范畴内, 研究开区间和研究直线没有差别, 因为它们是同胚的. ■

命题 3.6.4 (连续函数局部判则) 设 $f : X \to Y$ 是从 X 到 Y 的映射, 则以下条件等价:

(1) f 连续;

(2) (**局部表示**) 对 X 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 都有 $f|_{U_\alpha}$ 连续.

(3) (**逐点连续**) 对于 X 中任意的点 x, 以及 $f(x)$ 的每个邻域 V, 都存在 x 的邻域 U, 使得 $f(U) \subseteq V$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 来自定义域的限制;

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $V \subseteq Y$ 是开集, 因为

$$(f|_{U_\alpha})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$$

且上式左边是 X 中的开集, 所以由

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

可知 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 由 V 选取的任意性, 可知 f 是连续映射.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 已知 f 连续. 任取 $x \in X$ 及 $f(x)$ 的邻域 V. 首先, $x \in f^{-1}(V)$. 因为 f 连续, 故 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域. 因而存在 X 中的开集 U, 使得 $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$, 故 $f(U) \subseteq V$. 事实上, 我们可以直接取 $U = f^{-1}(V)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 的开集, 任取 $x \in f^{-1}(V)$. 我们有 $f(x) \in V$. 由 (3) 的假设条件, 存在 x 的邻域 U_x,使得 $f(U_x) \subseteq V$, 即 $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$. 因此

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X} U_x$$

是 X 中的开集. ■

命题 3.6.5 (粘接引理) 设 $X = A \cup B$, 这里 A, B 都是闭集. $f : A \to Y$ 及 $g : B \to Y$ 都是连续映射, 且满足 $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, 则存在连续映射 $h : X \to Y$, 使得

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

证明 设 C 是 Y 中的闭集. 我们有

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

因为 f 连续, 所以 $f^{-1}(C)$ 是 A 中的闭集. 又因为 A 是 X 中的闭集, 所以 $f^{-1}(C)$ 也是 X 中的闭集. 同样的, $g^{-1}(C)$ 也是 X 中的闭集. 这就推出 $h^{-1}(C)$ 是 X 中的闭集. ■

注 3.6.4 在上述命题中, 若将 A, B 改为 X 中的开集, 结论也对. 此时, 它就是连续函数局部表示的特例. ■

例 3.6.20 (1) 考虑绝对值函数

$$h:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1,\quad x\to|x|.$$

令

$$A=(-\infty,0],\quad B=[0,+\infty).$$

显见 $A\cap B=\{0\}$. h 可以看成如下两个函数的粘合.

$$\begin{aligned} f:A&\longrightarrow\mathbb{R}^1, & g:B&\longrightarrow\mathbb{R}^1,\\ x&\longmapsto -x, & x&\longmapsto x.\end{aligned}$$

这是因为 $f(0)=g(0)=0$, 并且 A,B 都是闭集, 因而满足粘接引理的条件. 这样,映射 h 是连续的.

(2) 考虑映射

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

它不是连续映射. 设 $A=(-\infty,0)$, $B=[0,\infty)$. 此时 B 是闭集, $A\cap B=\emptyset$, $f|_A,f|_B$ 都是连续的. 唯一不满足粘接引理条件的就是 A 非闭集. ■

例 3.6.21 (坐标函数) 考虑如下映射

$$\begin{aligned} f:A&\longrightarrow X\times Y\\ a&\longmapsto (f_1(a),f_2(a))\end{aligned}$$

其中 $f_1:A\longrightarrow X$, $f_2:A\longrightarrow Y$. 以下条件彼此等价:

(1) f 连续;

(2) f_1,f_2 连续.

此时我们称 $f_1(a),f_2(a)$ 是 f 的坐标函数.

我们来验证这个结论. 首先回顾一下例 3.6.1 中的投影映射:

$$\begin{aligned} \pi_1:X\times Y&\longrightarrow X,\\ x\times y&\longmapsto x,\\ \pi_2:X\times Y&\longrightarrow Y,\\ x\times y&\longmapsto y.\end{aligned}$$

这里 π_1,π_2 都是连续的.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : 我们把 f_1,f_2 看作以下映射的复合:

$$f_1=\pi_1\circ f,\qquad f_2=\pi_2\circ f.$$

由 π_1,π_2,f 及 f 的连续性, 推出 f_1,f_2 也都连续.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : 考虑 $X\times Y$ 中的拓扑基 $U\times V$, 我们要证明 $f^{-1}(U\times V)$ 是开集. 注意到

$$a\in f^{-1}(U\times V)\Longleftrightarrow f(a)\in U\times V\Longleftrightarrow f_1(a)\in U,f_2(a)\in V\Longleftrightarrow a\in f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V),$$

因此我们有

$$f^{-1}(U\times V)=f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V)$$

因为 f_1, f_2 都是连续映射, 所以 $f_1^{-1}(U)$ 和 $f_2^{-1}(V)$ 都是 A 中的开集, 从而 $f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ 也是 A 中的开集, 即 $f^{-1}(U \times V)$ 也是 A 中的开集. 这就推出 f 是连续的. ■

例 3.6.22 (参数曲线) 考虑如下映射

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

则 f 连续当且仅当 $x(t), y(t)$ 连续. ■

例 3.6.23 考虑映射:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ (x,y) &\longmapsto F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

F 对于每个分量来说是连续的. 但 F 作为二元函数本身并不连续. 这是因为 F 限制在对角线上

$$F(x,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

它不是连续的, 故 F 也不连续. ■

3.6.3 连续映射与连通性

定理 3.6.1 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射且 X 是连通的, 则 $f(X)$ 也连通. 这里

$$f(X) \triangleq \{y \mid 存在\ x \in X, 使得\ y = f(x)\} = \mathrm{Im} f.$$

证明 我们用反证法. 假设 $f(X)$ 不连通且有分裂 $f(X) = U \cup V$. 取 Y 中的非空开集 U', V' 使得

$$U = f(X) \cap U' \qquad V = f(X) \cap V'$$

显见

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U'), \quad f^{-1}(V) = f^{-1}(V').$$

因为 f 连续, 故 $f^{-1}(U)$ 和 $f^{-1}(V)$ 都是 X 中的非空开集. 注意

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset \qquad f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = X,$$

因此它们是 X 的分裂, 即 X 不连通, 矛盾! 因此 $f(X)$ 是连通的. ■

推论 3.6.1 设 $f : X \to Y$ 是同胚映射, 则 X 连通当且仅当 Y 连通, 即连通性是拓扑性质.

例 3.6.24 我们利用连通性证明: 开区间 $(0,1)$ 和闭区间 $[0,1]$ 不同胚.

反证, 假设有同胚 $f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$. 令 $p = f(1)$, $Z = (0,1) - \{p\}$. 由同胚限制 $f|_{[0,1)} : [0,1) \to Z$ 及定理 3.6.1, Z 也连通. 但 Z 有分裂 $Z = (0,p) \cup (p,1)$, 矛盾! 故得结论.

类似可证 $(0,1) \ncong (0,1]$ 以及 $[0,1] \ncong (0,1]$. ■

定理 3.6.2 (介值定理) 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射且 X 是连通的, Y 是序拓扑. 任取 $a, b \in X$, 不妨设 $f(a) < f(b)$, 则对任何 $r \in (f(a), f(b))$, 都存在 $c \in X$, 使得 $f(c) = r$.

证明 反证, 假设 $r \notin f(X)$. 取 $A = (-\infty, r) \cap f(X), B = (r, +\infty) \cap f(X)$. 于是

$$A \cup B = f(X), \quad A \cap B = \emptyset$$

由于 $f(a) \in A$, $f(b) \in B$, 故 A, B 是 $f(X)$ 中的非空开集. 因此这就给出了 $f(X)$ 的一个分裂. 另一方面, 因为 X 是连通的, 所以 $f(X)$ 也连通. 这与前面讨论矛盾. 这就推出 $r \in f(X)$. ■

推论 3.6.2 (**零点定理**) 设 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 连续, 且 $f(a) < 0 < f(b)$, 则存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$. 特别地, 若 $f(x)$ 是关于 x 的奇次多项式, 则 $f(x) = 0$ 有实根.

定义 3.6.4 (**道路连通**) 设 X 是拓扑空间, $x, y \in X$. 若映射 $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ 是连续的, 且满足 $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$, 则称 γ 是 X 中由 x 到 y 的一条道路.

若 X 中每一对点都能用 X 中道路连接, 则称 X 是道路连通.

命题 3.6.6 若 X 道路连通, 则 X 是连通的.

证明 反证, 假设 $X = A \cup B$ 是一个分裂. 取 $x \in A, y \in B$. 因为 X 道路连通, 所以存在由 x 到 y 的道路 $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$, 满足 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. 因为 γ 连续, 所以 $\gamma([0, 1])$ 连通. 由引理 3.3.1, 要么 $\gamma([0, 1]) \subseteq A$ 要么 $\gamma([0, 1]) \subseteq B$. 这与道路 γ 的选取矛盾. ■

例 3.6.25 设 $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x}|| \leq 1\}$. 它是道路连通的. 这是因为任给 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D^n$, 构造如下连续映射

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (1 - t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

满足 $f(0) = \boldsymbol{x}, f(1) = \boldsymbol{y}$. 又由

$$||f(t)|| \leq (1 - t)||\boldsymbol{x}|| + t||\boldsymbol{y}|| \leq 1$$

可知由 f 定义的直线道路完全落在 D^n 中. 因此 D^n 是道路连通的. 类似地, 我们可以证明开球 $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ 道路连通. ■

例 3.6.26 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ $(n > 1)$ 是道路连通的. 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. 设 $\overline{\boldsymbol{xy}}$ 是连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的直线段. 我们分以下两种情况考虑. 若 $\overline{\boldsymbol{xy}}$ 不过原点, 则 $\overline{\boldsymbol{xy}}$ 是道路; 若 $\overline{\boldsymbol{xy}}$ 过原点, 则再取 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, 使得 $\overline{\boldsymbol{xz}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{yz}}$ 不过原点. 所以 $\overline{\boldsymbol{xz}} + \overline{\boldsymbol{yz}}$ 是从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的道路. ■

推论 3.6.3 对于任意的 $n > 1, \mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^1$.

证明 反证, 若 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^1$ $(n > 1)$, 则 $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^1 - \{0\}$. 因为 $\mathbb{R}^1 - \{0\}$ 不连通, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 是连通的, 矛盾! 因此 $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^1 (n > 1)$. ■

注 3.6.5 当 $m > n$ 时, 我们也有 $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$. 不过证明并不简单. ■

引理 3.6.1 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, X 道路连通, 则 $f(X)$ 是道路连通的. 特别地, 若 X, Y 同胚, 则 X 道路连通当且仅当 Y 道路连通.

证明 任取 $y_1, y_2 \in f(X)$, 可找 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. 因为 X 道路连通, 所以存在 X 中连接 x_1, x_2 的道路 $\gamma : [0, 1] \to X$, 满足 $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. 这样, 我们可以构造 $f(X)$ 中连接 y_1, y_2 的道路 $f \circ \gamma : [0, 1] \to f(X)$. ■

例 3.6.27 考虑 $S^{n-1}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid ||\boldsymbol{x}||=1\}$ $(n>1)$. S^{n-1} 是道路连通的.

考虑映射

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n-\{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} \end{aligned}$$

这是连续满射. 由例 3.6.26 和引理 3.6.1, S^{n-1} 道路连通. ■

例 3.6.28 考虑 $X=[0,1]\times[0,1]$ 的字典序拓扑. 由于 X 有上确界且满足介值定理, 故它是线性连续统, 进而它是连通的. 但是 X 并不是道路连通的. ■

证明 反证, 设 X 是道路连通的, 任取 $p=0\times 0, q=1\times 1$. 设 $\gamma:[0,1]\longrightarrow X$ 是 X 中从 p 到 q 的一条道路. $\gamma(0)=0\times 0,\gamma(1)=1\times 1$. 由介值定理, 对于任意的 $x\times y\in Z$, 都存在 $t\in[0,1]$, 使得 $\gamma(t)=x\times y$. 任取 $x\in[0,1]$, $U_x=\gamma^{-1}(x\times(0,1))$ 是 $[0,1]$ 中的开集. 对于不同的 $x\in(0,1)$, U_x 互不相交. 取 $q_x\in U_x\cap Q$. 因为 q_x 互不相同, 所以映射

$$\begin{aligned} \varphi: I &\longrightarrow \{q_x\}_{x\in(0,1)} \\ x &\longmapsto q_x \end{aligned}$$

是一一对应. 另一方面, 区间 $[0,1]$ 是不可数的, $\{q_x\}_{x\in(0,1)}$ 是可数的, 矛盾! ■

例 3.6.29 (梳空间) 设 $K=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$, 我们定义

$$C=(K\times[0,1])\cup(0\times[0,1])\cup([0,1]\times 0)$$

我们称空间 C 为梳空间. 将从空间 C 中删除直线段 $0\times(0,1)$ 而得到的空间 $C'=C-0\times(0,1)$ 称为缺边梳空间. 我们有如下结论:

(1) C 是道路连通的;

(2) C' 是连通的;

(3) C' 道路不连通. ■

证明 (1) C 的道路连通性是显然的;

(2) 令 $A=([0,1]\times 0)\cup(K\times[0,1])$, 显然 A 是连通的, 再根据 $A\subseteq C'\subseteq\overline{A}$ 以及连通子集的闭包可知, C' 亦连通.

(3) 设 $p=0\times 1$, 反证存在映射 $f:[0,1]\longrightarrow C'$ 是 C' 中从 p 开始的一条道路. 如果 $f^{-1}(\{p\})$ 既是开集又是闭集, 那么根据连通性可以推出 $f^{-1}(\{p\})=[0,1]$. 即 C' 中不存在连接 p 和 A 中的点的道路. 因此我们的目标转化为证明 $f^{-1}(\{p\})$ 既是开集又是闭集.

由于 $\{p\}$ 是 C' 中的闭集, f 连续, 所以 $f^{-1}(\{p\})$ 是 $[0,1]$ 中的闭集. 因此我们只需证明 $f^{-1}(\{p\})$ 是开集. 现在取 p 在 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域 V 使其不与 X 轴相交. 任意给定 $f^{-1}(\{p\})$ 中一点 x_0, 我们的目标是证明存在 x_0 的邻域 U 使得 $U\subseteq f^{-1}(\{p\})$. 这就推出 $f^{-1}(\{p\})$ 是开集.

我们取 x_0 的一个基元素邻域 U, 使得 $f(U)\subset V$. 下面证明这样的 U 即为要找的开集, 即 $U\subseteq f^{-1}(\{p\})$. 注意到 U 是 $[0,1]$ 上关于序拓扑的一个基元素, 它是连通的, 因此 $f(U)$ 是连通的. 所以 $f(U)$ 不含任何异于 p 的点. 这是因为对于 C' 中任意在 V 中且异于 p 的点 $q=(1/n)\times t_0$, 选取 r 使得 $1/n+1<r<1/n$. 那么考虑 $\mathbb{R}^2$ 中两个不相交的开子集:

$$(-\infty,r)\times\mathbb{R}^1 \quad 和 \quad (r,+\infty)\times\mathbb{R}^1$$

因为 $f(U)$ 包含在 D' 中且不与 X 轴相交, 它也不与直线 $x=r$ 相交. 因此它包含在上述两个集合之并中. 由于 $f(U)$ 连通且包含第一个集合中的点 p, 所以它就不能包含第二个集合的点 q, 这就蕴含着 $f(U)=\{p\}$. 证毕. ■

例 3.6.30　设 S 表示平面上的下列子集:

$$S=\{x\times sin(1/x)\mid 0<x\leq 1\}$$

由于 S 是连通集 $(0,1]$ 在连续映射下的象, 因此 S 亦连通. 类似于上例的证明, S 不是道路连通. ■

注 3.6.6　上述三例同时表明, 一个空间连通不一定道路连通, 即命题 3.6.6 的逆命题不一定成立. ■

定义 3.6.5　*我们定义 X 上的如下关系:*

$$x\sim y \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \text{存在从 } x \text{ 到 } y \text{ 的道路}$$

上述 $\sim$ 是等价关系 (请读者自己验证). X 在“$\sim$”下的等价类称为道路连通分支.

例 3.6.31　考虑实直线 $\mathbb{R}^1$ 的子空间 $Y=[-1,1]-\{0\}$. 此时 Y 的道路连通分支和连通分支相同, 分别是 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$. ■

例 3.6.32　例 3.6.29 的缺边梳空间只有一个连通分支, 但有两个道路连通分支. ■

例 3.6.33　(1) 设 $X=\mathbb{R}^2-A$, 这里 A 是平面中的至多可数子集. 证明: X 是道路连通的.

反证法. 假设有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$, 使得在 $\mathbb{R}^2$ 中任何连接 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的道路都含有 A 中的点.

我们找一条不过 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的直线 L. 对任一点 $\boldsymbol{z}\in L$, 我们可构造连接 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的折线道路 $\overline{\boldsymbol{xz}}+\overline{\boldsymbol{zy}}$. 对不同的 $\boldsymbol{z}$, 这些道路除了端点之外互不相交.

由假设条件, 对每个 $\boldsymbol{z}\in L$, 可在上述道路中找 A 中一点 p_z. 诸 p_z 互不相同. 这样我们有单映射 $\psi: L\to\{p_z\}_{z\in L}$. 无论如何, L 是不可数的, $\{p_z\}_{z\in L}$ 是至多可数的, 矛盾! 因此必存在一条折线道路完全含于 X 中.

(2) 设 $Y=S^2-B$, 这里 B 是球面中的至多可数子集. 证明: Y 是道路连通的.

若 B 是有限点集, 结论是显然的. 不妨设 $B=\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无限点集. 考虑球极投影

$$pr: S^2-\{p_1\}\longrightarrow\mathbb{R}^2.$$

它是一个同胚. 我们可以得到同胚限制

$$S^2-B\cong\mathbb{R}^2-\{p_n\}_{n=2}^{\infty}.$$

结合上一小题, 立得结论. ■

3.6.4　连续映射与紧性

命题 3.6.7　*设 $f: X\to Y$ 连续, X 是紧空间, 则 $f(X)$ 亦紧. 特别地, 若 $f: X\to Y$ 是同胚映射, 则 X 是紧的当且仅当 Y 紧, 即紧性是拓扑性质.*

证明 取 Y 中任一开集族 $\mathscr{A}$ 覆盖 $f(X)$, 则由 f 的连续性可知

$$\mathscr{A}' = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{A}\}$$

是 X 的开覆盖. 因为 X 是紧的, 故存在 $V_1, V_2, \cdots, V_n \in \mathscr{A}$, 使得

$$f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_n) = X$$

所以 $f(X) \subseteq V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_n$. 根据子空间的紧性判则, $f(X)$ 是紧的. ■

命题 3.6.8 设 $f: X \to Y$ 连续, X 是序列紧的, 则 $f(X)$ 也是序列紧的.

证明 设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $f(X)$ 中的一串点列, 则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 使得 $f(x_i) = y_i$. 因为 X 是序列紧的, 故存在 X 中的点 x_0, 以及收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0$.

令 $f(x_0) = y_0$. 设 U 是 y_0 的任一邻域, 则由于 f 连续, 故 $f^{-1}(U)$ 是 x_0 的一个邻域. 由序列收敛, 存在 $K > 0$, 使得对于任意的 $k > K$, 都有 $x_{n_k} \in f^{-1}(U)$. 这蕴含着 $y_{n_k} \in U$. 因此 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 y_0. 由 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 选取的任意性可知 $f(X)$ 序列紧. ■

注 3.6.7 读者可能会问: 若将命题 3.6.7 中的 "紧性" 改为 "极限点紧", 它的连续象一定是极限点紧的吗? 答案是否定的. 读者可以参考例 3.5.1 自己找出反例. 此外, 连续映射也并不保持可度量化, Hausdorff 等拓扑性质. ■

例 3.6.34 回顾例 3.6.24. 我们也可以利用紧性来证明 $[0,1) \ncong [0,1]$ 不同胚. 因为 $[0,1]$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中是紧的, 但 $(0,1)$ 不紧. 显然两者不同胚.

同理, 我们可以证明 $[0,1) \ncong S^1$ (见例 3.6.7). 这是因为 $[0,1)$ 不紧, 但 S^1 在标准拓扑下是有界闭集, 因此是紧的. 所以两者不同胚. ■

例 3.6.35 考虑例 3.6.27 中定义的连续映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n - \{0\} &\longrightarrow S^{n-1}, \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}. \end{aligned}$$

f 是连续满射, S^{n-1} 是紧集, 但 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 非紧. ■

例 3.6.36 考虑映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

取 $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^1$. 考虑 $f^{-1}(A)$ 的原像

$$f^{-1}(A) = \mathbb{R}^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}^1$$

这里 f 连续, A 是紧的, 但 $f^{-1}(A)$ 非紧. ■

注 3.6.8 上述两例表明紧集的原像不一定是紧的. 即命题 3.6.7 的逆命题不一定成立. ■

命题 3.6.9 设 $f: X \to Y$ 是连续双射. 若 X 是紧空间, 且 Y 是 Hausdorff 的, 则 f 同胚.

证明 根据注记 3.6.2, 只要证明 f^{-1} 连续即可. 又由连续性判则, 我们只需证明对于 X 中的任一闭集 A, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ 是 Y 中的闭集即可.

因为 X 是紧的, $A \subseteq X$ 且是 X 中的闭集. 根据命题 3.4.2, A 是紧的. 考虑 f 在 A 上的限制. 由限制映射的连续性可知 $\mathrm{f}|_A : A \longrightarrow f(A)$ 是连续的. 由命题 3.6.7, $f(A)$ 是 Y 的紧子集. 因为 Y 是 Hausdorff 的, 由命题 3.4.3 可知 $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ 是 Y 中的闭子集. 因此 f^{-1} 连续. ■

定理 3.6.3 (最值定理) 设 $f : X \to Y$ 是连续的, Y 是具有序拓扑的有序集, 若 X 是紧的, 则可找到 $a, b \in X$ 使得对于任意的 $x \in X$, 都有 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

证明 因为 f 连续 且 X 是紧的, 故 $f(X)$ 亦紧. 要证 $f(X)$ 有最大元 M, 最小元 m. 反证, 不妨假设 $f(X)$ 无最大元. 构造 $f(x)$ 的如下开覆盖

$$\{(-\infty, y) \mid y \in f(X)\}$$

因为 $f(X)$ 是紧的, 所以存在 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in f(X)$ 使得 $f(X) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n}(-\infty, y_i)$. 现在取 $M = \max\{y_1, \cdots, y_n\}$. 则 $f(X) \subseteq (-\infty, M)$. 即对于任意的 $x \in X, f(x) < M$. 但根据 M 的选取, 存在 i, 使得 $y_i = M$. 由于 $y_i \in f(X)$, 故存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y_i = M$, 矛盾!

因此 $f(X)$ 必有最大元, 同理可证 $f(X)$ 必有最小元. ■

推论 3.6.4 (闭区间上连续函数的最值定理) 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ 连续, 则 f 有最大 (小) 值.

例 3.6.37 设 $f : S^1 \to \mathbb{R}^1$ 连续, 则 f 有最大(小)值. 一个推论是, 实数域上的连续周期函数有最大(小)值. ■

结合介值定理与最值定理, 我们有如下有趣结论.

命题 3.6.10 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, Y 是具有序拓扑的空间, X 是连通紧空间, 那么像集 $f(X)$ 是 Y 中的闭区间.

证明 由最值定理以及 X 的紧性, 存在 $a, b \in X$, 使得 $f(X) \subseteq [f(a), f(b)]$. 又由介值定理及 X 的连通性, 对任何 $r \in [f(a), f(b)]$, 都存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = r$. 这表明 $f(X) = [f(a), f(b)]$. ■

推论 3.6.5 $\mathbb{R}^n$ 中球面 S^{n-1} 上的连续实值函数的像集是 $\mathbb{R}^1$ 的闭区间. 换言之, 设 $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ 是连续映射, 则 $f(X)$ 是闭区间.

例 3.6.38 设 $f : S^2 \to \mathbb{R}^1$ 是连续映射. 证明: 存在 $t \in \mathbb{R}^1$ 使得 $f^{-1}(t)$ 是不可数集. 进一步, 在 $f(S^2)$ 中最多只有两个这样的点, 它的原像是至多可数集.

若 f 是常值映射, 则结论显然. 不妨设 f 非常值. 由上推论, $f(S^2) = [m, M]$ 是闭区间. 对任何 $t \in (m, M)$, 因为 $[m, M] - \{t\} = [m, t) \cup (t, M]$ 不连通, 所以 $S^2 - f^{-1}(t)$ 也不连通. 由例 3.6.33, 这就推出 $f^{-1}(t)$ 是不可数集. ■

3.6.5 连续映射与度量

本节如无特别声明, 均默认 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 为度量空间.

类似命题 3.6.2 的证明, 我们有如下结论.

命题 3.6.11 (连续函数的 $\varepsilon - \delta$ 判则) $f : X \to Y$ 连续的充分必要条件是: 对于任意的 $x \in X$, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d_X(x, y) < \delta$ 时有 $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

命题 3.6.12 (连续函数序列判则) 设 $f: X \to Y$ 是度量空间的映射, 则以下条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对于 X 中的任一收敛于 x_0 的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

在证明该命题之前我们先给出如下引理.

引理 3.6.2 (序列引理) 设 $A \subseteq X, x_0 \in X$, 则以下条件等价

(1) 存在 A 中序列收敛于 x_0;

(2) $x_0 \in \overline{A}$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in A$. 由收敛性的定义, x_0 的任何邻域含有某个 $x_n \in A$, 即 x_0 的任一邻域与 A 相交非空. 因此 $x_0 \in \overline{A}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 已知 $x_0 \in \overline{A}$, 则对于任意的 $n > 0$, 都有 $B_d(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. 我们依次取 $x_n \in B_d(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$. 根据命题 3.5.2, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. ■

注 3.6.9 上述结论中 (1)$\Longrightarrow$ (2) 不依赖于度量, 对一般的拓扑空间也成立. ■

现在我们来证明命题 3.6.12

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 要证 $\lim\limits_{n\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 令 V 为 $f(x_0)$ 的任一邻域. 即 $x_0 \in f^{-1}(V)$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 所以存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \in f^{-1}(V)$. 即 $f(x_n) \in V$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 根据连续性判则, 只需证对于任意的 $A \subseteq X$, 都有 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. 对于任意的 $x_0 \in \overline{A}$, 根据序列引理, 存在 A 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 因此 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f(A)$. 由 (2) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 再次使用序列引理, 我们有 $f(x_0) \in \overline{f(A)}$. 由 x_0 的任意性, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ■

命题 3.6.13 设 $f: X \to \mathbb{R}^1, g: X \to \mathbb{R}^1$ 都是连续的. 则 $f \pm g$ 连续, $f \cdot g$ 也连续. 若 $g(X) \subseteq \mathbb{R}^1 - \{0\}$, 则 $\frac{f}{g}$ 也连续.

证明 考虑映射

$$F: X \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \quad x \to (f(x), g(x)).$$

由例 3.6.21, F 是连续的. 再设

$$G: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \quad (a, b) \to a + b.$$

G 也是连续的, 因而

$$G \circ F: X \to \mathbb{R}^1, \quad (G \circ F)(x) = f(x) + g(x)$$

是连续函数. 其他情形类似可证. ■

定义 3.6.6　设 $f_n : X \to Y\ (n = 1, 2 \cdots)$ 及 $f : X \to Y$ 是映射. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对任何 $x \in X$, 有

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

则称映射序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f.

定理 3.6.4 (**一致极限定理**)　设 $f_n : X \to Y\ (n = 1, 2, \cdots)$ 是连续映射. 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $f : X \to Y$, 则 f 亦连续.

证明　设 V 是 Y 中开集. x_0 为 $f^{-1}(V)$ 中的一点. 我们要找到 x_0 的一个邻域 U, 使得 $f(U) \subset V$.

令 $y_0 = f(x_0)$. 先选取 ε 使得 $B(y_0, \varepsilon)$ 包含在 V 中. 因为 f_n 一致收敛于 f, 故对于选取的 ε, 存在 $N > 0$, 使得对于任意的 $n > N$ 以及任意 $x \in X$ 都有 $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/4$.

因为 f_N 连续, 故 $f_N^{-1}(B(f_N(x_0), \varepsilon/2))$ 是 X 中的开集, 且 $x_0 \in f_N^{-1}(B(f_N(x_0), \varepsilon/2))$, 则存在 x_0 的某邻域 U, 使得 $f_N(U) \subseteq B(f_N(x_0), \varepsilon/2)$.

下证 $f(U) \subseteq B(y_0, \varepsilon)$, 从而 $f(U) \subseteq V$. 注意到当 $x \in U$ 时, 取充分大的 N 和上述的 U 使得

$$d(f(x), f_N(x)) < \varepsilon/2 \quad d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/2 \quad d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/4$$

把这三个式子相加, 利用三角不等式可得 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. ■

定义 3.6.7　设 $f : X \to Y$, 若任意取定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 则称 f 一致连续.

注 3.6.10　上述定义中的 δ 只取决于 ε, 并不依赖于 x_1, x_2 的选取. ■

定理 3.6.5 (**一致连续性定理**)　设 $f : X \to Y$ 是连续的, X 是紧空间, 则 f 一致连续.

证明　给定 $\varepsilon > 0$, 取 Y 的一个以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 为半径的球 $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ 作成的开覆盖. 设 $\mathscr{A}$ 是由这些球在 f 下的原象所组成的 X 的开覆盖. 由勒贝格数引理, 存在 $\delta > 0$, 使得 X 中每个直径小于 δ 的子集必包含在 $\mathscr{A}$ 中的某元素中. 现在取 δ 为覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个勒贝格数. 如果 x_1 和 x_2 是 X 中满足 $d_X(x_1, x_2) < \delta$ 的两个点, 那么这个两点集 $\{x_1, x_2\}$ 的直径就小于 δ, 所以它的象 $\{f(x_1), f(x_2)\}$ 必在某个球 $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ 中. 因此 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. ■

第四章　点集拓扑 (III): 深入技巧

4.1　可数性公理

定义 4.1.1　设 X 是拓扑空间, $x \in X$. 若存在 x 的邻域的可数族 $\mathscr{B}$, 使得 x 的每个邻域至少包含 $\mathscr{B}$ 的一个元素, 则称 X 在 x 处有可数基.

若 X 的每个点皆有可数基, 则称 X 满足第一可数性公理(也称 C_1 公理). 满足 C_1 公理的拓扑空间 X 被称为 C_1 空间.

例 4.1.1　我们验证度量空间 (X, d_X) 是 C_1 空间. 对于 X 中任意的 x, 取 x 的一族邻域

$$\mathscr{B} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

对于 x 的任一邻域总包含上述可数族 $\mathscr{B}$ 中的元素, 故 X 在点 x 处有可数基. 由 x 的任意性, X 满足第一可数性公理. 特别地, 离散拓扑是 C_1 空间. ■

注 4.1.1　(1) 可数基 $\mathscr{B}$ 的选取不唯一. 比如在上例中, 若取

$$\mathscr{B}' = \{B(x,q) \mid q \in \mathbb{Q}^+\},$$

则 $\mathscr{B}'$ 也是 x 处的可数基.

(2) 设 X 在 x 处有可数基, 则存在 x 处的可数邻域基 $\mathscr{B} = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq \cdots$$

这是因为对于 x 的任意可数基 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, 可令 $V_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$, 即得满足条件的可数邻域基 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

定理 4.1.1　设 X 是 C_1 空间, $A \subseteq X$, 则

(1) $x \in \overline{A}$ 当且仅当存在 A 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(2) 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是映射, 那么 f 连续的充分必要条件是: 对于每个收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 都有序列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x)$.

证明　证明类似于 X 是度量空间的情形. 只需将 "球" 改为可数基即可. ■

定义 4.1.2　若 X 有可数拓扑基, 则称它满足第二可数性公理 (又称 C_2 公理). 满足 C_2 公理的拓扑空间 X 称为 C_2 空间.

注 4.1.2　(1) 若拓扑空间 X 是 C_2 空间, 则它显然是 C_1 空间.

(2) 存在不满足 C_2 公理的度量空间. ■

例 4.1.2　设 $X = \mathbb{R}^n$, 由于 $\mathbb{R}^n$ 存在可数拓扑基

$$\mathscr{B} = \{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

故 X 是 C_2 空间. ■

定理 4.1.2　设 X 是 C_1 空间 (相应地, C_2 空间), 则

(1) 设 A 是 X 的子空间, $A \subset X$, 那么 A 也是 C_1 空间 (相应地, C_2 空间). 换言之, 可数性公理可遗传给子空间;

(2) 设 Y 也是 C_1 空间 (相应地, C_2 空间), 则 X 与 Y 的乘积空间 $X \times Y$ 也是 C_1 空间 (相应地, C_2 空间).

(留给读者自己验证.)

定义 4.1.3　设 X 是拓扑空间, $A \subseteq X$. 若 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中稠密; 若 X 有可数的稠密子集, 则称 X 是可分的, 或说 X 是可分空间.

定理 4.1.3　设 X 是 C_2 空间, 则

(1) (**Lindelöf 条件**) X 的任何开覆盖都包含可数子覆盖;

(2) X 是可分的.

证明　(1) 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖, $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的可数基. 令

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{存在 } \mathscr{A} \text{ 中的元素包含 } B_n\}$$

首先, 我们证明 Σ 非空. 对于任意的 $x \in X$, 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A$. 由拓扑基的定义, 存在 $B_n \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B_n \subseteq A$.

下面我们证明 $\mathscr{A}$ 包含可数子覆盖. 对于任意的 $n \in \Sigma$, 取 $A_n \in \mathscr{A}$ 使得 $B_n \subseteq A_n$. 记

$$\mathscr{A}' = \{A_n \mid n \in \Sigma\}$$

下证 $\mathscr{A}'$ 是可数子覆盖. 因为下标集 Σ 是可数的, 故 $\mathscr{A}'$ 可数. 对于任意的 $x \in X$, 由上讨论, 存在 $B_n \in \mathscr{B}$, 使得 $x \in B_n \subseteq A_n$, 故 $x \in A_n$, 由 x 的任意性, $\mathscr{A}'$ 覆盖 X.

(2) 设 $\mathscr{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C_2 空间的可数基. 在每个 B_n 中取一点 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$. 记 $D = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 我们来证明 D 是 X 的可数稠密子集. 由 D 的取法, 可数性是显然的. 下证 $\overline{D} = X$.

对于任意的 $x \in X$, 设 B 是 x 的任意基邻域, 则存在 $n > 0$, 使得 $B = B_n$. 因此 $x_n \in B_n \cap D$ 蕴含着 $B \cap D \neq \emptyset$. 这就有 $x \in \overline{D}$. 由 x 的任意性知 $X = \overline{D}$. ■

定义 4.1.4　若拓扑空间 X 满足上述定理 (1) 中的性质, 即它的任何开覆盖都包含可数子覆盖, 我们就称 X 是 Lindelöf 空间. 上面定理断言 C_2 空间都是 Lindelöf 空间.

定理 4.1.4　设 (X, d) 是度量空间, 则以下条件等价

(1) X 是 C_2 空间;

(2) X 是 Lindelof 空间;

(3) X 是可分空间.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 来自定理 4.1.3.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 给定 $n>0$, 考虑开集族 $\{B(x,\frac{1}{n})\mid x\in X\}$. 它是 X 的开覆盖. 故由 Lindelof 条件知, 存在可数子覆盖, 记为 $\mathscr{B}_n$. 令 $\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$. $\mathscr{B}$ 是可数覆盖. 我们在 $\mathscr{B}$ 的每个元素中取其球心, 这些球心构成的集合记作 D. 我们要证 D 是可数稠密子集.

D 的可数性显然. 下证其稠密. 任取 $x\in X$ 以及 x 的任何基邻域 $B(x,\varepsilon)$. 找 $n>1/\varepsilon$ 以及 $\mathscr{B}_n$ 中的球 $B_d(y,\frac{1}{n})$, 使得 $x\in B_d(y,\frac{1}{n})$. 因为 $d(x,y)<\frac{1}{n}<\varepsilon$, 所以 $y\in B_d(x,\varepsilon)$, 从而 $y\in B_d(x,\varepsilon)\cap D$. 因此由基邻域的任意性可知 $x\in\overline{D}$. 再由 x 的任意性即得 $X=\overline{D}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 已知 X 是可分度量空间, A 是可数稠密子集. 取

$$\mathscr{B}=\{B(a,\frac{1}{n})\mid a\in A,n\in\mathbb{Z}^+\}$$

我们证明上述的 $\mathscr{B}$ 是可数基, 因而 X 是 C_2 空间. $\mathscr{B}$ 的可数性是显然的. 下证 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基, 即对于任意的开集 U, 要找到 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subseteq U$.

首先, 由度量拓扑基的选取, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $x\in B_d(x,\varepsilon)\subseteq U$. 对于上述的 ε, 我们找正整数 $n>2/\varepsilon$, 因而

$$x\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\subseteq B(x,\varepsilon)\subseteq U$$

其次, 因为 $\overline{A}=X$. 所以 $B(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$. 可取 $a\in B(x,\frac{1}{n})\cap A$. 从而 $d(x,a)<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$, 即 $x\in B(a,\frac{1}{n})$.

最后, 我们证明 $B(a,\frac{1}{n})\subseteq B(x,\varepsilon)$, 从而 $x\in B(x,\frac{1}{n})\subseteq U$. 事实上, 对任意的 $y\in B(a,\frac{1}{n})$, 由 $d(y,a)<\frac{1}{n}$ 及三角不等式

$$d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)<\frac{2}{n}<\varepsilon$$

所以 $y\in B(x,\varepsilon)$. ■

推论 4.1.1 设 X 是紧度量空间, 则 X 是 C_2 空间.

通常来说, 验证可分性要比验证 C_2 性质容易得多.

例 4.1.3 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是可分的, 比如我们可以取 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密子集

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{Q}\}$$

因此它也是 C_2 的. ■

例 4.1.4 (Hilbert **空间**) 考虑线性空间

$$\mathbb{R}^{\omega}=\left\{(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<+\infty\right\}$$

定义 $\mathbb{R}^{\omega}$ 上的内积运算

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$$

以及度量

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\})=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$$

因此 ρ 诱导了线性空间 $\mathbb{R}^\omega$ 上的度量拓扑. 取

$$A = \{(x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^\omega \mid x_i \in \mathbb{Q} \text{ 且除有限项外, 其余项均为零}\}$$

因为 A 是 $X = \mathbb{R}^\omega$ 的可数稠密子集, 所以 $\mathbb{R}^\omega$ 可分, 进而是 C_2 空间. ■

例 4.1.5 考虑实数集 $\mathbb{R}^1$ 上的下限拓扑 $\mathbb{R}_\ell$.

(1) $\mathbb{R}_\ell$ 是 C_1 空间. 因为对于任意的 $x \in \mathbb{R}_\ell$, $\{[x, x+\frac{1}{n}) \mid n > 0\}$ 是点 x 处的可数基.

(2) $\mathbb{R}_\ell$ 不是 C_2 空间. 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}_\ell$ 的一组拓扑基. 对于任意的 $x \in \mathbb{R}_\ell$, 取 $B_x \in \mathscr{B}$ 使得

$$x \in B_x \in [x, x+1).$$

取另一点 $y \in \mathbb{R}_\ell$, 则 $B_y \neq B_x$. 若不然 $x = \inf B_x = \inf B_y = y$, 矛盾! 这就给出单射

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_l &\longrightarrow \{B_x\}_{x \in \mathbb{R}} (\subseteq \mathscr{B}) \\ x &\longmapsto B_x \end{aligned}$$

因为 $\mathbb{R}_\ell$ 不可数, 所以 $\mathscr{B}$ 不可数. ■

4.2 分离性公理

设 X 是拓扑空间. 首先引入如下四条分离性公理.

T_1 **公理** 对于 X 中任意两个不同点 $x, y \in X$, 存在开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad y \in V, \qquad y \notin U, \quad x \notin V$$

T_2 **公理** (即 Hausdorff 性质) 对于任意两个不同点 $x, y \in X$, 存在不相交的开集 U, V, 使得

$$x \in U, \qquad y \in V.$$

T_3 **公理** 对于任意的 $x \in X$ 及任意不含 x 的闭集 F, 存在不相交开集 U, V 满足

$$F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V.$$

T_4 **公理** 对于任意两个不相交的闭集 F_1, F_2, 存在不相交开集 U, V 满足

$$F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V$$

定义 4.2.1 假设 X 中的单点集是闭集. 若 X 满足 T_3 (相应地, T_4) 公理, 则称 X 是正则的 (相应地, 正规的), 或称 X 是正则空间 (相应地, 正规空间).

注 4.2.1 若 X 正规, 则 X 正则; 若 X 正则, 则 X 满足 Hausdorff 性质. 请读者自行验证这两个结论. ■

命题 4.2.1 (**正则性与正规性的判则**)　设 X 是拓扑空间, 单点集是闭集, 那么

(1) X 正则 $\Longleftrightarrow$ 任给 $x \in X$ 以及 x 的任何邻域 U, 都存在 x 的邻域 V, 使得 $\overline{V} \subseteq U$.

(2) X 正规 $\Longleftrightarrow$ 对任意闭集 A 以及包含 A 的任何开集 U, 存在包含 A 的邻域 V, 使得 $\overline{V} \subseteq U$.

证明　(1) ($\Longrightarrow$) 已知 X 正则, $x \in X$, U 是 x 的邻域. $B = X - U$ 是 X 中的闭集. 由正则条件可知, 存在开集 V, W 使得

$$x \in V, \quad B \subseteq W, \quad V \cap W = \emptyset$$

对于任意的 $y \in B$, W 是 y 的邻域, 且 $W \cap V = \emptyset$, 这就推出 $y \notin \overline{V}$. 故 $B \cap \overline{V} = \emptyset$, 于是 $\overline{V} \subseteq U$.

($\Longleftarrow$) 设 $x \in X$, B 是不含 x 的闭集. 取 $U = X - B$, 由条件, 存在 x 的开邻域 V 使得 $\overline{V} \subseteq U$. 于是

$$x \in V, \quad B \subseteq X - \overline{V}, \quad V \cap (X - \overline{V}) = \emptyset.$$

因此 X 正则.

(2) 类似可证. ■

命题 4.2.2　设 X 是正则的(Hausdorff 的), 则

(1) 若 $A \subseteq X$, 那么 A 也正则(Hausdorff 的);

(2) 若 Y 也正则(Hausdorff 的), 则积空间 $X \times Y$ 也是正则的(Hausdorff 的).

证明　对于 X 是 Hausdorff 的情形, 前文已有讨论. 现在考虑 X 是正则的情形.

(1) 设 $A \subseteq X$. 因为 X 正则, 所以 X 是 Hausdorff 的. 因为 Hausdorff 性质可遗传给子空间, 故 A 也是 Hausdorff 的. 由命题 3.2.4 A 中单点集都是闭集. 设 $x \in A$, B 是 A 中不含 x 的闭子集. 根据闭包限制公式

$$B = A \cap Cl_X(B)$$

这就有 $x \notin Cl_X(B)$. 由 X 的正则性, 存在 X 中开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad Cl_X(B) \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

于是

$$x \in U \cap A, \quad B \subseteq V \cap A, \quad (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$$

这表明 X 的子空间 A 是正则的.

(2) 因为 X, Y 正则, 故它们都是 Hausdorff 的. 所以 $X \times Y$ 也是 Hausdorff 的. 从而 $X \times Y$ 中每个单点集都是闭集. 设 $x \times y \in X \times Y$, W 是 $x \times y$ 的邻域. 可找基邻域满足

$$x \times y \in U \times V \subseteq W$$

因为 $x \in U$ 且 X 是正则的, 根据命题 4.2.1 存在 X 中的开集 U_1 使得

$$x \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U$$

同理可得, 存在 Y 中开集 V_1, 使得

$$y \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V$$

所以

$$x \times y \in U_1 \times V_1 \subseteq \overline{U_1 \times V_1} = \overline{U_1} \times \overline{V_1} \subseteq U \times V,$$

即 $x \times y$ 有邻域 $U_1 \times V_1$, 使得 $\overline{U_1 \times V_1} \subseteq W$. 由命题 4.2.1, $X \times Y$ 正则. ■

注 4.2.2 正规空间的子空间未必正规; 正规空间的积空间也未必正规. ■

定理 4.2.1 *设 X 是拓扑空间, 若 X 满足以下条件之一, 则 X 正规.*

(1) *X 是度量空间;*

(2) *X 是紧的 Hausdorff 空间;*

(3) *(Lindelöf **定理**) X 正则且是 C_2 空间.*

证明 (1) 设 (X, d) 是度量空间, A, B 是不相交的闭集. 对于任意的 $a \in A$, 取

$$B(a, \varepsilon_a) \cap B = \emptyset,$$

即 $B(a, \varepsilon) \subseteq X - B$. 定义

$$U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right)$$

类似地, 定义

$$V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right)$$

这里 $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$.

今证 $U \cap V = \emptyset$ 即可. 反证, 设 $z \in U \cap V$. 则存在 $a \in A, b \in B$, 使得

$$z \in B(a, \frac{\varepsilon_a}{2}) \qquad z \in B(b, \frac{\varepsilon_b}{2})$$

从而

$$d(a, z) < \frac{\varepsilon_a}{2} \qquad d(b, z) < \frac{\varepsilon_b}{2}$$

由三角不等式

$$d(a, b) < d(a, z) + d(z, b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}$$

若 $\varepsilon_a < \varepsilon_b$, 则 $d(a, b) < \varepsilon_b$, 这就推出 $a \in B(b, \varepsilon_b)$, 矛盾! 若 $\varepsilon_a \geq \varepsilon_b$, 那么 $b \in B(a, \varepsilon_a)$, 亦矛盾! 故 $U \cap V = \emptyset$.

(2) 设 x 是 X 中一点, B 是 X 中不含 x 的闭集. 因为 X 是紧的 Hausdorff 空间, 由命题 3.4.2 可知, B 是紧的. 又由推论 3.4.1 可知, 分别存在 x 的邻域 U 和包含 B 的开集 V, 使得 $U \cap V = \emptyset$. 于是 X 是正则的.

设 A 和 B 是 X 中的不相交的闭集, 对于任意的 $a \in A$, 由正则性, 存在开集 U_a, V_a 使得

$$a \in U_a, \quad B \subseteq V_a, \quad U_a \cap V_a = \emptyset.$$

$\{U_a\}$ 是 A 的开覆盖. 因为 X 是 Hausdorff 的且 A 是 X 中的闭集, 所以 A 是紧子集. 故存在有限个开集 $U_{a_1}, U_{a_2}, \cdots, U_{a_m}$ 覆盖 A. 现在取

$$U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_m} \qquad V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_m}$$

我们有 $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$. 正规性得证.

(3) 设 A, B 是不相交的闭集. X 有可数基 $\mathscr{B}$. 对于任意的 $x \in A$, 因为 A 和 B 不相交, 所以存在 x 的邻域 U 使得

$$x \in U, \qquad U \cap B = \emptyset$$

又因为 X 正则, 根据命题 4.2.1, 存在开集 V 使得

$$x \in V, \qquad \overline{V} \subseteq U$$

又因为 $\mathscr{B}$ 是拓扑基, 所以存在 $B_x \in \mathscr{B}$, 使得

$$x \in B_x \subseteq V, \qquad \overline{B_x} \subseteq U$$

从而 $\overline{B_x} \cap B = \emptyset$. 因为 $\mathscr{B}$ 是可数基, 故 $\{B_x\}_{x \in A}$ 在去掉重复项以后是 A 的可数开覆盖, 且 $\overline{B_x}$ 不与 B 相交. 同理可取 B 的可数覆盖 $\{B'_y\}_{y \in B}$, 使得 $\overline{B'_y}$ 不与 A 相交.

为方便起见, 将 A 的上述覆盖记为 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, B 的上述覆盖记为 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. 令

$$U'_n = U_n - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_k}, \quad V'_n = V_n - \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_k}, \quad U' = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n, \quad V' = \bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n$$

可验证 $A \subseteq U', B \subseteq V', U' \cap V' = \emptyset$ (细节略). ■

我们不加证明地叙述如下结论.

定理 4.2.2 任何序拓扑皆正规.

例 4.2.1 设 $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}^1$.

$$\mathscr{B} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}^1\} \cup \{(a, b) - K \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}^1\}$$

是拓扑基. 由它生成的拓扑 $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B})$ 是 Hausdorff 的, 但不是正则的! 这是因为若取

$$x = 0, \quad A = K$$

则由于 A 在拓扑 $\mathscr{B}$ 下是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集, 且 $x \notin A$. 但是 x 的任一邻域总与 A 相交. 故不正则. ■

点集拓扑学中较深刻的定理之一即如下的可度量化定理.

定理 4.2.3 (Urysohn 度量化定理) 设 X 是正则的, 且 X 是 C_2 空间, 则 X 可度量化.

4.3 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理

定理 4.3.1 (Urysohn 引理) 设 X 正规, A, B 是 X 中两个不相交的闭集. $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间, 则存在连续映射 $f : X \longrightarrow [a, b]$ 使得

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{若 } x \in A \\ b, & \text{若 } x \in B \end{cases}$$

定理 4.3.2 (Tietze 扩张定理) 设 X 正规, A 是 X 中的闭子集. $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}^1$ 的闭区间. 则

(1) 任何连续映射 $f : A \longrightarrow [a, b]$ 可扩张为连续映射 $\widetilde{f} : X \longrightarrow [a, b]$;

(2) 任何连续映射 $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^1$ 可扩张为连续映射 $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}^1$.

(因课时限制, 本讲义未能包括所有内容, 留待今后补充.)

4.4 Urysohn 度量化定理

4.5 Tychonoff 定理

参 考 文 献

[1] [Ma87] J.R.曼克勒斯: *拓扑学基本教程*, 科学出版社, 1987

索 引