

代数几何讨论班备用稿

代数几何中的拓扑 课题选讲

陆 俊

华东师范大学数学系

二零一二年三月

前 言

本讲义

第一章 群的预备知识	1
1.1 群的融合积与半直积	1
1.2 群的实现与置换群	3
1.3 Hurwitz 变换与自由群 \mathbb{F}_n	6
本章习题	8
第二章 辫群的基础知识	9
2.1 带孔圆盘的基本群	9
2.2 辫群的定义	10
2.3 辫群的标架	11
2.4 辫群的典范嵌入	13
2.5 运动诱导的辫	15
2.6 辫群的实现	16
2.7 正辫与 Dehn 扭转	17
本章习题	19
第三章 辫单值的基础知识	21
3.1 辫单值的定义	21
3.2 射影曲线的辫单值	23
3.3 实线排列的辫单值	24
3.4 一般线排列的辫单值	29
本章习题	30
第四章 Zariski Van-Kampen 定理	32
4.1 Van-Kampen 定理	32
4.2 局部平凡纤维空间	32
4.3 补空间的基本群	33
4.4 Zariski Van-Kampen 定理	36
4.5 曲线奇点的单值和基本群	37
4.6 平面曲线的基本群	38
本章习题	40
第五章 曲面的一般覆盖	41
5.1 一些经典的射影簇	41
5.2 一般投影映射	43
5.3 尖点曲线	47
5.4 \mathbb{P}^3 中的曲面投影	49
5.5 Chisini 猜想	51
5.6 一般覆盖的拓扑	57
5.7 Veronese 曲面的一般覆盖	57
本章习题	58

第六章 弱 Lefschetz 定理.....	59
6.1 代数簇的基本群.....	59
6.2 一般超平面截面.....	60
6.3 态射的形变.....	63
6.4 弱 Lefschetz 定理.....	64
本章习题.....	64
参考文献.....	65

第一章 群的预备知识

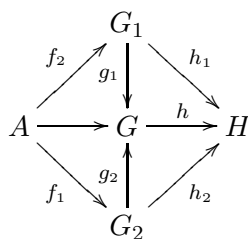
1.1 群的融合积与半直积

设 A, G_1, G_2 是群, $f_i : A \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$) 是群同态.

命题 1.1.1 在同构意义下, 存在唯一的群 G 及群同态 $g_i : G_i \rightarrow G$ ($i = 1, 2$) 满足以下条件:

$$(1) g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2,$$

(2) 对任何群 H 以及群同态 $h_i : G_i \rightarrow H$, 如果 $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, 则存在同态 $h : G \rightarrow H$ 使得 $h_i = h \circ g_i$ ($i = 1, 2$).



这样的 (G, g_1, g_2) 称为 $f_1 : A \rightarrow G_1$ 与 $f_2 : A \rightarrow G_2$ 的融合积 (Amalgam), 记作 $G_1 *_A G_2$.

证明 我们这里只说明 G 的构造, 其余性质的验证留给读者.

我们将 G_1, G_2 中的元素构成的单词全体记作

$$W := \{(a_1, \dots, a_l) \mid a_i \in G_1 \text{ 或 } G_2\}.$$

W 上有自然的乘法

$$(a_1, \dots, a_l) \cdot (b_1, \dots, b_m) := (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m).$$

我们定义 W 上的一种关系 \succ : 对 $w, w' \in W$, $w \succ w'$ 当且仅当以下条件之一成立:

(1) w 中的某相邻两项 a_i, a_{i+1} 同属于 G_1 (或 G_2), w' 恰好是将 w 中的这两个元替换成一个元 $a_i a_{i+1}$ 而得到的单词.

(2) w 中有一项是 G_1 或 G_2 中单位元, w' 恰好是将 w 中的这一项去除得到的单词.

(3) w 中的某一项可写成 $f_i(a)$ ($a \in A$), w' 恰好是将 w 中这一项替换成 $f_{1-i}(a)$ 得到的单词.

利用上述关系, 我们可以进一步诱导出 W 的等价关系 \sim : $w \sim w'$ 当且仅当存在序列 w_0, w_1, \dots, w_N , 使得 $w_0 = w$, $w_N = w'$, 并且对任何相邻项 w_i 和 w_{i+1} , 要么 $w_i \succ w_{i+1}$, 要么 $w_i \prec w_{i+1}$, 要么 $w_i = w_{i+1}$.

容易验证, W 的乘法运算与等价关系 \sim 是相容的, 因此我们可构造群 $G = W / \sim$. 这就是我们想要的融合积. ■

例 1.1.1 $A = \{1\}$ 时, $G_1 *_A G_2$ 就是 G_1, G_2 的自由积 (Free product), 简记作 $G_1 * G_2$. 特别地, 我们规定自由群 (Free group) $\mathbb{F}_n := \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_n$. ■

例 1.1.2 设 H 是群, N_1, N_2 是 H 的正规子群, N 是包含 N_1, N_2 的最小正规子群. 取 $A = H, G_i = H/N_i, f_i: A \rightarrow G_i$ 是自然同态 ($i = 1, 2$), 则 $G_1 *_A G_2 \cong H/N$. ■

假设群 H 右作用在群 N 上, 记作

$$n \mapsto n^h \quad (n \in N, h \in H).$$

(请注意这里的群作用要求是群同态).

我们定义 $N \times H$ 上的乘积运算

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \cdot n_2^{(h_1^{-1})}, h_1 h_2).$$

命题 1.1.2 上述运算定义了 $N \times H$ 上的群结构, 称之为 N 和 H 的半直积 (Semi-direct product), 记作 $N \rtimes H$. 进一步, 我们有群得的分裂短正合列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\phi} N \rtimes H \xrightarrow[\sigma]{\psi} H \longrightarrow 1,$$

这里 $\phi(n) := (n, e_H), \psi(n, h) := h, \sigma(h) = (e_N, h)$.

证明 (1) 结合律

$$\begin{aligned} ((n_1, h_1)(n_2, h_2))(n_3, h_3) &= (n_1 \cdot n_2^{(h_1^{-1})}, h_1 h_2)(n_3, h_3) = (n_1 \cdot n_2^{h_1^{-1}} \cdot n_3^{(h_1 h_2)^{-1}}, h_1 h_2 h_3), \\ (n_1, h_1)((n_2, h_2)(n_3, h_3)) &= (n_1, h_1)(n_2 \cdot n_3^{(h_2^{-1})}, h_2 h_3) = (n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3^{h_2^{-1}})^{h_1^{-1}}, h_1 h_2 h_3), \end{aligned}$$

由群作用是同态的假设, 上面两式最右端显然相等.

(2) 幺元

$$(e_N, e_H)(n, h) = (e_N \cdot n^{e_H^{-1}}, e_H \cdot h) = (n, h).$$

类似可证 $(n, h)(e_N, e_H) = (n, h)$.

(3) 逆元

$$(n, h)((n^{-1})^h, h^{-1}) = (e_N, e_H) = ((n^{-1})^h, h^{-1})(n, h).$$

(4) 分裂短正合列是显然的, 我们不再详细验证. ■

例 1.1.3 (1) 如果 H 平凡作用在 N 上, 那么 $N \rtimes H = N \times H$.

(2) 考虑 \mathbb{Z}_2 在 \mathbb{Z}_n 上的作用 $x \rightarrow -x$, 则

$$N \rtimes H = \langle a, b \mid a^n = b^2 = baba = e \rangle,$$

即二面体群 D_{2n} . ■

命题 1.1.3 设 G 是群, N 是 G 的正规子群, $i: N \rightarrow G$ 是包含映射, $H = G/N, \pi: G \rightarrow H$ 是自然同态. 假设存在单同态 $\sigma: H \rightarrow G$, 使得 $\pi \circ \sigma = \text{id}_H$, 那么我们有 H 在 N 上的右作用

$$n \mapsto \sigma(h)^{-1} n \sigma(h), \quad n \in N, h \in H.$$

此时半直积 $G \cong N \rtimes H$, 这里的同构映射定义为 $g \rightarrow (g\sigma(\pi(g))^{-1}, \pi(g))$, 其逆映射为 $(n, h) \rightarrow i(n)\sigma(h)$.

(留给读者验证)

由上面讨论, N, H 都可以视为 $N \rtimes H$ 的子群, 且 N 是其正规子群. H 通常不是 $N \rtimes H$ 的正规子群. 我们设 K 是 $N \rtimes H$ 中包含 H 的最小正规子群. 考虑复同态

$$\gamma: N \hookrightarrow N \rtimes H \rightarrow (N \rtimes H)/K.$$

显见 $\text{Ker}\gamma = N \cap K$ 是 N 的正规子群.

命题 1.1.4 γ 是满同态, $N \cap K$ 是 N 中包含集合

$$S = \{n^{-1}n^h \mid n \in N, h \in H\}$$

的最小正规子群.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & N \cap K & & K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow \sigma & \\
 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & N \rtimes H & \xrightarrow{\pi} & H \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \\
 & & N \rtimes H/K & \equiv & N \rtimes H/K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

证明 设 $(n, h) \in N \rtimes H$, 则 $(n, h) = (n, e_H)(e_N, h)$. 因此

$$\gamma((n, e_H)) = (n, h) \pmod K,$$

从而 γ 是满射.

注意到

$$(n^{-1}n^h, e_H) = (n, e_H)^{-1}(e_N, h^{-1})(n, e_H)(e_N, h) \in K.$$

因此对 $s \in S$ 有 $(s, e_H) \in N \cap K$. 这表明 N 中包含 S 的最小子群含于 $N \cap K$ 中.

另一方面, 对 K 中任何元素

$$(n, h)^{-1}(e_N, g)(n, h) = ((n^{-1}n^{g^{-1}})^h, h^{-1}gh) = ((n^h)^{-1}(n^h)^{(h^{-1}g^{-1}h)}, h^{-1}gh),$$

其第一分量都含于 N 中包含 S 的最小子群, 因而 $N \cap K$ 就是 N 中包含 S 的最小子群. ■

1.2 群的实现与置换群

假设 $\mathcal{R} := \{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 \mathbb{F}_n 的子集, $N(\mathcal{R})$ 是 \mathbb{F}_n 中包含 \mathcal{R} 的最小正规子群. 商群

$$\mathbb{F}_n/N(\mathcal{R}) := \langle a_1, \dots, a_n \mid R_\lambda = e \quad (\lambda \in \Lambda) \rangle$$

称为由 a_1, \dots, a_n 在诸关系 R_λ 下生成的群. 如果一个群 G 能够用上述方式来描述, 我们就称其为 G 的实现 (Presentation).

例 1.2.1 (1) 循环群

$$\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n = e \rangle.$$

(2)

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle$$

例 1.2.2 考虑整数加法群的倍乘 $[m] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \rightarrow mn$. 对任何正整数 p, q , 对应的倍乘 $[p], [q]$ 的融合积为

$$\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle.$$

设 S_n 是对称群, 并记 $\sigma_i = (i, i+1)$. 为和后文的记号保持一致, 我们要求置换的复合从左到右进行 (即右作用). 对任何 σ, τ , 我们记

$$[\sigma, \tau] := \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}, \quad \langle \sigma, \tau \rangle = \sigma\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau^{-1}.$$

显见 $[\sigma, \tau] = 1$ 当且仅当 $\sigma\tau = \tau\sigma$; 而 $\langle \sigma, \tau \rangle = 1$ 当且仅当 $\sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau$.

有熟知的结论, $\sigma_i \in S_n$ 生成 S_n , 并且满足

$$\sigma_i^2 = \langle \sigma_i, \sigma_{i+1} \rangle = 1, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \quad |i - j| > 1.$$

下面我们证明以上关系恰好实现了 S_n .

命题 1.2.1

$$S_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = \langle \sigma_i, \sigma_{i+1} \rangle = 1, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \quad |i - j| > 1 \rangle.$$

证明 设

$$\widehat{S}_n := \langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid x_i^2 = \langle x_i, x_{i+1} \rangle = 1, \quad [x_i, x_j] = 1, \quad |i - j| > 1 \rangle.$$

设 $x \in \widehat{S}_n$, x 可以表达成诸 x_i 的乘积式, 记作 R (通常不唯一). 我们记 $n(x, R, k)$ 为 R 中项 x_i 出现的次数, 并设

$$k_0(x) = \max \{k \mid \exists R, \quad n(x, R, k) \geq 1\}.$$

于是 $x \in \widehat{S}_{k_0(x)+1} - \widehat{S}_{k_0(x)}$.

Claim 1. 我们首先证明以下结论: 如果 $x \in \widehat{S}_{k+1} - \widehat{S}_k$, 那么 $x = ax_k \cdots x_i$, 这里 $a \in \widehat{S}_k$, $i \leq k$.

对 k 和 $n(x, R, k)$ 施双归纳法. 当 $k = 1$ 时, $\widehat{S}_2 = \langle x_1 \mid x_1^2 = 1 \rangle = \{1, x_1\}$, 即 $x = x_1$. 假设 $< k$ 的情形已证, 即 $\forall x \in \widehat{S}_j - \widehat{S}_{j-1}$ 都满足结论 ($j \leq k$).

今设 $x \in \widehat{S}_{k+1}$. 如果 $n(x, R, k) = 0$, 则由归纳假设立得结论. 假设对 $n(x, R, k) < m$ 情形, 结论已证. 我们考虑 $n(x, R, k) = m$ 情形. 此时

$$x = a_1 x_k a_2 x_k \cdots a_m x_k a_{m+1}, \quad a_i \in \widehat{S}_k.$$

由归纳假设, $a_2 = bx_{k-1} \cdots x_i$, $b \in \widehat{S}_{k-1}$. 代入 R , 并利用 x_k 与 S_{k-1} 中元素的交换性可得

$$x = a_1 b x_k x_{k-1} \cdots x_i x_k a_3 \cdots x_k a_{m+1} = a_1 b x_k x_{k-1} x_k \cdots x_i a_3 \cdots x_k a_{m+1}.$$

进一步, 利用 $x_k x_{k-1} x_k = x_{k-1} x_k x_{k-1}$ 得

$$x = a_1 = x_{k-1} x_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_i a_3 \cdots x_k a_{m+1}.$$

上面的新表达式中, x_k 只出现 $m-1$ 次. 归纳法得证.

Claim 2. 考虑满同态

$$\psi: \widehat{S}_n \rightarrow S_n, \quad x_i \rightarrow \sigma_i.$$

我们要证这也是单的. 对 n 施归纳法. $n=1$ 时是显然的. 假设 $< n$ 情形已证. 设 $x \in \text{Ker}\psi$ 且 $x \neq 1$, 则由归纳假设 $x \in \widehat{S}_n - \widehat{S}_{n-1}$. 由上一断言,

$$x = ax_{n-1} \cdots x_i, \quad a \in \widehat{S}_{n-1}.$$

因而

$$1 = \psi(a)\sigma_{n-1} \cdots \sigma_i,$$

即

$$\sigma_{n-1} = \psi(a)^{-1}\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-2}^{-1} \in S_{n-1},$$

矛盾! ■

命题 1.2.2 设 G 是 $S_{N_1} \times S_{N_2}$ 的子群 ($N_1, N_2 > 2$), 满足以下条件:

- (1) $p_i: G \rightarrow S_{N_i}$ 是满同态 ($i=1, 2$),
- (2) $((1, 2), (1, 2)) \in G$.

设 $St_{(1,1)} \subseteq G$ 是作用在 $(1, 1) \in \{1, 2, \dots, N_1\} \times \{1, 2, \dots, N_2\}$ 上的稳定子群. 那么我们总有 $[G: St_{(1,1)}] = N_1 N_2$, 除了以下例外情形: $N_1 = N_2 = N$, $G \cong \Delta \subseteq S_N \times S_N$ (其中一个分量相差一个内自同构), 这里 Δ 视作对角线.

证明 由包含关系 $\{2, \dots, N_i\} \subseteq \{1, \dots, N_i\}$ 可自然诱导嵌入映射 $S_{N_i-1} \rightarrow S_{N_i}$, 于是我们有

$$St_{(1,1)} = G \cap (S_{N_1-1} \times S_{N_2-1}).$$

设 e_i 是 S_{N_i} 的单位元,

$$H_1 \times \{e_2\} = G \cap (S_{N_1} \times \{e_2\}), \quad \{e_1\} \times H_2 = G \cap (\{e_1\} \times S_{N_2}).$$

易知 $\text{Ker}p_1 = \{e_1\} \times H_2$, $\text{Ker}p_2 = H_1 \times \{e_2\}$, 它们都是 G 的正规子群. 注意到 p_i 是满同态, 因此 H_i 也是 S_{N_i} 的正规子群 (为什么). 由经典结论, S_n 的正规子群除了本身和单位元外, 仅有交错群 A_n 以及 Klein 群 (仅在 $n=4$ 情形)

$$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

下面我们分情况讨论.

(1) 如果 $H_1 = \{e_1\}, H_2 = \{e_2\}$, 那么 p_1, p_2 都是同构, 因而 $N_1 = N_2 = N$, $G = \Delta \subseteq S_N \times S_N$, 其中一个分量相差一个自同构. 由于 $((1, 2), (1, 2)) \in G$, 所以由经典结论可知这个自同构只能是内自同构. 因此这一情形就是命题所述的例外情形.

(2) 如果 $H_1 = \{e_1\}, H_2 \neq \{e_2\}$, 那么 p_2 是同构, $p_1 \circ p_2^{-1}: S_{N_2} \rightarrow S_{N_1}$ 是满同态, 但不是同构, 则有 $N_2 = 4, N_1 = 3, H_2 = K_4$ (因为核是正规子群). 由直接计算, 可验证结论. 类似也可讨论 $H_2 = \{e_2\}, H_1 \neq \{e_1\}$ 的情形.

(3) 如果 $H_1 = S_{N_1}$, 那么 $G = S_{N_1} \times S_{N_2}$ (因为 p_2 是满的). 这就有

$$|G| = N_1! N_2!, \quad |St_{(1,1)}| = (N_1 - 1)! (N_2 - 1)!,$$

从而 $[G : St_{(1,1)}] = N_1 N_2$.

(4) 如果 $H_1 = A_{N_1}$, 由 p_2 的满射性即得 $|G| = \frac{1}{2} N_1! N_2!$. 这就推出 $|\text{Ker } p_1| = \frac{1}{2} N_2!$, 因而 $H_2 = A_{N_2}$. 进一步可知, $(\sigma_1, \sigma_2) \in G$ 当且仅当 σ_1, σ_2 奇偶性相同, 故有

$$|St_{(1,1)}| = \frac{1}{2} (N_1 - 1)! (N_2 - 1)!,$$

因而 $[G : St_{(1,1)}] = N_1 N_2$.

(5) 如果 $H_1 = K_4$ (此时 $N_1 = 4$), 那么 $|G| = 4 \cdot N_2!$ (由 p_2 的满射性), 故得 $|H_2| = \frac{1}{6} N_2!$ (由 p_1 的满射性). 这表明 $H_2 \neq S_{N_2}, A_{N_2}$. 而 $H_2 = \{e_2\}$ 情形可由 (3) 类似讨论. 因此我们只需要进一步讨论 $N_2 = 4, H_2 = K_4$ 的情形. 这可以由直接计算验证. ■

定义 1.2.1 设 H, G 是群, N 是 G 的正规子群.

(1) 我们定义如下元素生成的正规子群

$$[N, N] := \langle a^{-1} b^{-1} a b \mid a, b \in N \rangle$$

以及

$$[G, N] := \langle a^{-1} b^{-1} a b \mid a \in G, b \in N \rangle.$$

特别地, $[G, G]$ 称为换位子群, 其中的元素 $a^{-1} b^{-1} a b$ 称为换位子, 简记作 $[a, b]$.

(2) 与 G 中全体元素可交换的所有元素构成的正规子群称为 G 的中心, 记作 $C(G)$. 如果 $N < C(G)$, 则称 N 在 G 中是中心的 (Central).

(3) 若群正合列 $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ 中的 N 在 G 中是中心的, 则称 G 是 H 的中心扩张 (Central Extension).

显见, N 在 G 中是中心的当且仅当 $[N, G] = \{1\}$, N 是交换群当且仅当 $[N, N] = \{1\}$. 我们有以下显然的正合列

$$1 \rightarrow N/[N, N] \rightarrow G/[N, N] \rightarrow G/N \rightarrow 1.$$

1.3 Hurwitz 变换与自由群 \mathbb{F}_n

设 G 是群, $G^m = \underbrace{G \times \cdots \times G}_m$. 考虑向量

$$\vec{t} = (t_1, \cdots, t_m) \in G^m, \quad \vec{s} = (s_1, \cdots, s_m) \in G^m.$$

如果 \vec{t}, \vec{s} 满足以下关系, 我们就说 \vec{s} 是由 \vec{t} 通过 Hurwitz 变换 (Hurwitz moves) R_k 得到的, 或者说 \vec{t} 是由 \vec{s} 通过 Hurwitz 变换 R_k^{-1} 得到:

$$R_k : \begin{cases} s_i = t_i, & i \neq k, k+1, \\ s_k = t_k t_{k+1} t_k^{-1}, \\ s_{k+1} = t_k. \end{cases}$$

$$R_k^{-1} : \begin{cases} t_i = s_i, & i \neq k, k+1, \\ t_k = s_{k+1}, \\ t_{k+1} = s_{k+1}^{-1} s_k s_{k+1}. \end{cases}$$

关于 Hurwitz 变换的一些初等性质, 我们罗列在习题 1.5 中, 这里不再赘述.

这个概念也可以搬到分解式上. 设 $g = t_1 \cdots t_m = s_1 \cdots s_m$ 是 $g \in G$ 的两种分解式. 如果 (s_1, \cdots, s_m) 是由 (t_1, \cdots, t_m) 通过 Hurwitz 变换得到, 我们就说分解式 $s_1 \cdots s_m$ 是由 $t_1 \cdots t_m$ 通过 Hurwitz 变换得到. 进一步, 如果两个分解式能通过一系列 Hurwitz 变换得到彼此, 我们就说这两个分解式是等价分解 (Equivalent factorization).

例 1.3.1 设 G 是群, $a, b \in G$.

(1) 若 $ab = ba$, 则 ab 和 ba 是等价分解. 这是因为 ab 和 $aba^{-1} \cdot a$ 等价, 而 $aba^{-1} = b$.

(2) 若 $aba = bab$, 那么 aba 和 bab 是等价分解. 这是因为

$$aba \xleftrightarrow{R_2} a(bab^{-1})b \xleftrightarrow{R_1} (a \cdot bab^{-1} \cdot a^{-1})ab = bab$$

设 \mathbb{F}_n 是自由群, t_1, \cdots, t_n 是生成元. 对任何 $g \in \mathbb{F}_n$, 设 $g = \prod t_{i_j}^{k_{i_j}}$, 则可定义次数 $\deg g := \sum k_{i_j}$. 它不依赖于 g 的表达式. 如果 $\sum |k_{i_j}|$ 达到极小, 我们就说 g 有既约的表达式, 并称 $L(g) = \sum |k_{i_j}|$ 是 g 的长度. 关于次数的若干简单性质可参见习题 1.6, 此处不再赘述.

设 \mathbb{F}_n^+ 是由形如 Qt_iQ^{-1} ($Q \in \mathbb{F}_n$) 诸元素的乘积构成的子半群 (有时也说由诸 t_i 正规生成的子半群). 由习题 1.6, $g \in \mathbb{F}_n^+$ 总是可以分解成 $\deg g$ 个素元的乘积 (通常不唯一), 我们称之为素分解 (Prime factorization).

定理 1.3.1 (Artin 定理) 在上述记号与假设下, $t_1 \cdots t_m$ 的任何素分解都彼此等价.

证明 设 $t = s_1 \cdots s_{m'}$ 是素分解, 我们要证明它等价于标准分解 $t_1 \cdots t_m$. 首先由习题 1.6 知 $m' = m$. 每个 s_i 均可写成 $Q_i t_{j_i} Q_i^{-1}$ ($Q_i \in \mathbb{F}_n$). 令

$$D = D(s_1, \cdots, s_m) = \sum_{i=1}^m L(Q_i),$$

这里 $L(Q_i)$ 表示 Q_i 写成 t_i 表达式的乘积项个数.

我们对 D 施归纳法. 如 $D = 0$, 则诸 $L(Q_i) = 0$, 即 $Q_i = id$, 这就推出 $s_i = t_{j_i}$. 注意到 \mathbb{F}_n 是自由群, 因而立刻有 $t_{j_i} = t_i, \forall i$, 即两种分解式相同的.

以下假设 $D > 0$. 我们只需要证明分解式能通过 Hurwitz 变换, 使得 D 下降, 则由归纳法立得所需. 注意到

$$Q_1 t_{j_1} Q_1^{-1} \cdot Q_2 t_{j_2} Q_2^{-1} \cdots Q_m t_{j_m} Q_m^{-1} = t_1 \cdots t_m$$

左边不是既约的, 因此一定可以消去某些 t_j 项. 这样的消除可分为三种类型:

- (a) Q_i^{-1} 和 Q_{i+1} 中的项相互消除直至遇到 t_{j_i} 或 $t_{j_{i+1}}$,
- (b) $t_{j_i} Q_i^{-1}$ 被消除,
- (c) $Q_{i+1} t_{j_{i+1}}$ 被消除.

首先, 类型 (a) 不可能出现在每一项上, 否则将推出 $Q_1 = \cdots = Q_m = 1$, 从而 $D = 0$, 与归纳假设矛盾! 不失一般性, 可假设类型 (b) 出现且 $j = 1$. 令 $R = t_{j_1} Q_1^{-1} Q_2$. 显见 $l(Q_2) = l(Q_1) + 1 + l(R)$.

对 $s_1 \cdots s_m$ 做 Hurwitz 变换 R_1 , 即得等价乘积 $(s_1 s_2 s_1^{-1}) \cdot s_1 \cdot s_3 \cdots s_m$, 其中

$$s_1 s_2 s_1^{-1} = Q_1 R t_{j_2} R^{-1} Q_1^{-1}.$$

注意到 $l(Q_1 R) \leq l(Q_1) + l(R) < l(Q_2)$, 所以

$$D((s_1 s_2 s_1^{-1}) \cdot s_1 \cdot s_3 \cdots s_m) < D(s_1 \cdots s_m).$$

进一步由归纳法即得结论. ■

本章习题

习题 1.1 完成命题 1.1.1 的证明.

习题 1.2 证明命题 1.1.3 的结论.

习题 1.3 在命题 1.1.4 的记号与假设条件下, 证明: 如果 Γ_N 是 N 的生成元, Γ_H 是 H 的生成元, 那么 N 中包含 S 的最小子群就是包含

$$S_\Gamma = \{n^{-1}n^h \mid n \in \Gamma_N, h \in \Gamma_H\}$$

的最小正规子群.

习题 1.4 假设 G 是有限生成群, x_1, \dots, x_n 是生成元. 我们定义 $G^+(x_1, \dots, x_n)$ 是由形如 Qx_iQ^{-1} ($Q \in G$) 的诸元素生成的子半群. 如果 $g \in G^+$ 不能分解成两个或更多 G^+ 中元素乘积, 我们就称 g 是素的. 证明:

- (1) G^+ 是正规半子群,
- (2) 如果 $g \in G^+$ 是素的, 那么 g 可写成 Qx_iQ^{-1} 的形式,
- (3) 素元的共轭仍是素的.

习题 1.5 设 G 是群, $\vec{t}, \vec{s} \in G^m$, 其中 \vec{t} 是由 \vec{s} 通过 Hurwitz 变换 R_k^{-1} 的得到. 证明:

- (1) $t_1 \cdot t_2 \cdots t_m = s_1 \cdot s_2 \cdots s_m$,
- (2) $\{t_1, \dots, t_m\} \in G$ 当且仅当 $\{s_1, \dots, s_m\} \in G$,
- (3) 所有的 t_i 都是素的, 当且仅当所有 s_j 都是素的,
- (4) 如 G 是自由群, 则 $\{s_1, \dots, s_m\}$ 是 G 的自由基当且仅当 $\{t_1, \dots, t_m\}$ 是 G 的自由基,
- (5) 设 $s'_i = s_i c_i$, $i = 1, \dots, m$, 假设 $[c_i, c_j] = [c_i, s_j] = 1, \forall i, j$, 那么

$$R_k^{-1}(s'_1, \dots, s'_m) = (t_1 c_1, \dots, t_{k-1} c_{k-1}, t_k c_{k+1}, t_{k+1} c_k, t_{k+2} c_{k+2}, \dots, t_m c_m).$$

习题 1.6 设 \mathbb{F}_n 是自由群, $g \in \mathbb{F}_n$, 证明:

- (1) 若 $g = \prod s_i$, 则 $\deg g = \sum_l \deg s_l$.
- (2) $\deg g^{-1} = -\deg g$,
- (3) 若 $g \in \mathbb{F}_n^+$, 则 $\deg g > 0$,
- (4) g 是素的当且仅当 $\deg g = 1$,
- (5) 每个 $g \in \mathbb{F}_n^+$ 都是 $\deg g$ 个素元的乘积.

习题 1.7 设 S_n 是 n 阶置换群, H 是其子群, 且由若干对换生成. 假设 H 可迁地作用在 n 个点上, 证明: $H = S_n$.

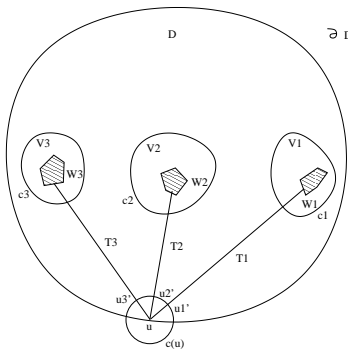
第二章 辫群的基础知识

2.1 带孔圆盘的基本群

设 D 是平面 \mathbb{R}^2 内的闭圆盘, $K = \cup_{i=1}^n W_i$ 是 D 内部若干互不相交的可缩子集 W_i 的并, $u \in \partial D$ 是边界上的取定点. 设 T_i 是连接 u 和 W_i 道路. T_i 可以诱导 $\pi_1(D - K)$ 中的元素 $l(T_i)$. 具体做法如下: 取包含 W_i 的小邻域 V_i , 设 c_i 是 V_i 的边界, $t_i := T_i - V_i \cap T_i$ 是简单道路, 于是 $l(T_i) = t_i \cup c_i \cup t_i^{-1}$ 构成 $\pi_1(D - K)$ 中的环路.

我们现在要求 (T_1, \dots, T_n) 满足

- (1) $T_i \cap W_j = \emptyset, i \neq j$.
- (2) $\cup_{i=1}^n T_n = u$.
- (3) 对绕 u 的充分小圆周 $c(u)$, $u'_i = T_i \cap c(u)$ 是单点集, 且点集 $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ 恰好沿着 $c(u)$ 逆时针排列.



假如 (T'_1, \dots, T'_n) 是另一组满足此条件的道路集合, 并且有 $l(T_i) = l(T'_i), \forall i$, 那么我们就说 (T_1, \dots, T_n) 与 (T'_1, \dots, T'_n) 等价. 我们把这种道路集合的等价类称作 $(D - K, u)$ 中的丛 (Bush), 记作 $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$. 它诱导了 $\pi_1(D - K)$ 作为自由群的一组基 $(l(T_1), \dots, l(T_n))$, 称为 $\pi_1(D - K)$ 的几何基 (Geometric basis), 简称为 g -基 (g -base).

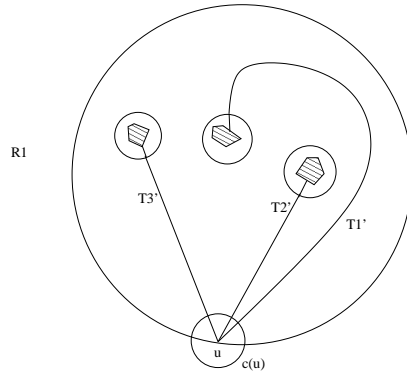
命题 2.1.1 任何两组 g -基都相差有限步 Hurwitz 变换.

证明 由习题 2.1 与 Artin 定理 1.3.1 立得. ■

g -基的 Hurwitz 变换 R_k 自然诱导了丛 $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ 的 Hurwitz 变换

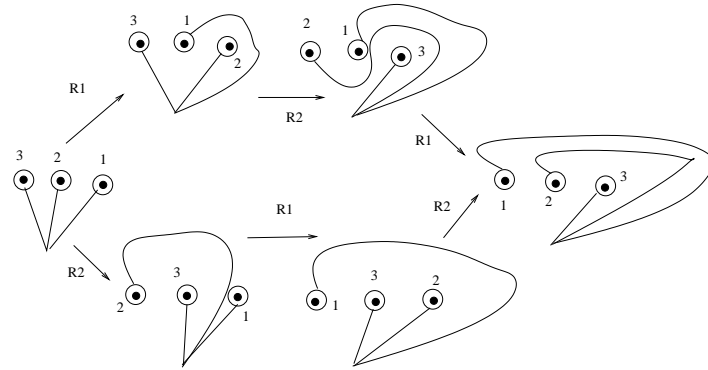
$$R_k : \begin{cases} T'_i = T_i, & i \neq k, k+1, \\ T'_k = T_{k+1} \cdot l(T_i)^{-1}, \\ T'_{k+1} = T_k, \end{cases}$$

这里我们暂时以 $u \in \partial D$ 作为终点, 以上等式是在同伦意义下给出.



引理 2.1.1 $R_k R_{k+1} R_k = R_{k+1} R_k R_{k+1}$.

证明 由下图立得. ■



我们也可以讨论 g -基上的 Hurwitz 变换. 容易验证, $T_i \rightarrow l(T_i)$ 建立的丛与 g -基之间的对应是和 Hurwitz 变换相容的.

2.2 辫群的定义

设 D, u 同上, K 是 D 内 n 个点组成的集合. 设 B 是所有满足以下条件的微分同胚构成的群:

$$\beta \in B \iff \beta(K) = K, \quad \beta|_{\partial D} = \text{Id}|_{\partial D}.$$

每个这样的微分同胚自然诱导 $\pi_1(D - K, u)$ 上自同构, 即有典范同态

$$\psi : B \longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(D - K, u)).$$

我们称 $B_n[D, K] := \text{Im}(\psi)$ 为辫群 (Braid group), 其中的元素称为辫 (Braid). 换言之, 辫群也可以看成 B 商掉一个等价关系. 该等价关系是指: 如果 $\beta_1, \beta_2 \in B$ 诱导 $\pi_1(D - K, u)$ 上相同的自同构, 那么 β_1, β_2 等价.

注 2.2.1 对任何别的圆盘 D' 及 K' ($n = \sharp K'$), 显见 $B_n[D', K'] \cong B_n[D, K]$. 因此辫群定义实际上不依赖于 D, K 的位置. ■

为什么要称 $B_n[D, K]$ 为“辫群”呢? 我们可以用另一种方式来定义辫群, 由此很容易从直观上理解这个名称的来源. 设

$$M_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \quad i \neq j\}.$$

对称群 S_n 自然作用在 M_n 上 (即交换坐标). 因此可设

$$\overline{M}_n := M_n/S_n.$$

设 $D(a_1, \dots, a_n)$ 是多项式方程

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

的判别式. 那么 \overline{M}_n 同构于 \mathbb{C}^n 挖掉由 $D(a_1, \dots, a_n) = 0$ 定义的判别式超曲面 (Discriminant hypersurface) 后的补空间. 选择合适的基点后, 我们可以定义如下基本群

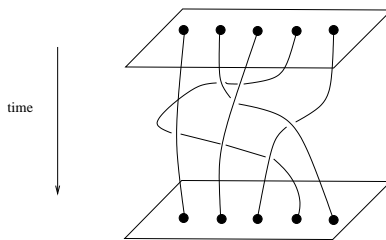
$$P_n := \pi_1(M_n), \quad B_n = \pi_1(\overline{M}_n)$$

它们有如下正合列

$$1 \longrightarrow P_n \longrightarrow B_n \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

P_n 称为 n 条弦的纯辫群 (Pure braid group), B_n 称为 n 条弦的辫群 (Braid group). 事实上, $B_n \cong B_n[D, K]$.

从直观上看, $\pi_1(\overline{M}_n)$ 中的元素可以视作如下图形:



因此它可以自然地想象成我们通常理解的“辫子”.

2.3 辫群的标架

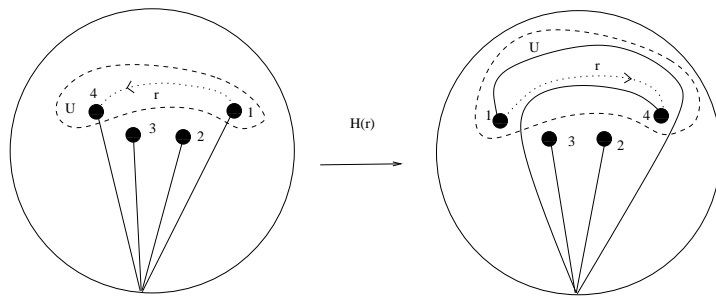
命题 2.3.1 (1) 任何 $b \in B_n[D, K]$ 将 g -基变成 g -基.

(2) 任何两组 g -基之间存在唯一的辫变换, 将其中一个变成另一个.

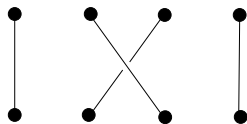
证明 (1) $b \in B_n[D, K]$ 将任何丛变成新的丛, 从而也将 g -基变成 g -基.

(2) $D - K$ 中任何两个丛都可以通过某个保持边界 ∂D 不动的微分同胚, 将其中一个变为另一个. 因此这就意味着任何两组 g -基可以通过某个辫, 将其中一个变成另一个. 注意到这样的变换是由 g -基唯一确定的, 因此由辫的定义可知, 这样的辫是唯一的. ■

对 K 任何两点 a, b , 找一条简单道路 γ 连接 a, b , U 是 γ 的正则小邻域. 由习题 2.2, 可找到一个辫 $H(\gamma)$, 恰好交换了 a 和 b , 且在 $D - U$ 上是恒同映射. 我们称 $H(\gamma)$ 为 (正) 半扭辫 (Half-twist braid).



如果使用辫群的另一定义, 即 $B_n = \pi_1(\overline{M}_n)$, 那么 R_k 对应的半扭辫直观图如下:

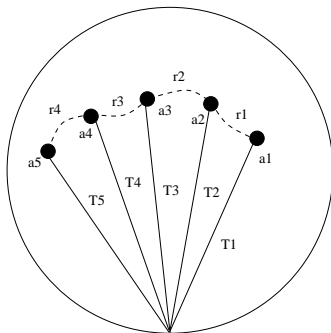


设 $K = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ 是 $D - \partial D$ 中的简单道路, 满足:

- (1) γ_i 连接 a_i, a_{i+1} ,
- (2)

$$\gamma_i \cap \gamma_j := \begin{cases} \emptyset, & |i - j| > 1, \\ a_{i+1}, & j = i + 1. \end{cases}$$

设 $H_i = H(\gamma_i)$ 是 γ_i 的半扭辫. 我们将有序组 (H_1, \dots, H_{n-1}) 称作 $B_n[D, K]$ 的标架 (Frame). 特别地, 如果诸 γ_i 皆直线段, 那么这组标架就称为线性标架 (Linear frame).



设 (T_1, \dots, T_n) 是从 u 出发连接各 a_i 的丛, 要求

$$\gamma_i \cap T_j := \begin{cases} \emptyset, & j \neq i, i - 1, \\ a_i, & j = i, i - 1. \end{cases} \quad (2-1)$$

设 $\Gamma_i = l(T_i)$, $\Gamma^{(0)} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ 是该丛诱导的 g -基. 显然, $\Gamma^{(0)}$ 上的 Hurwitz 变换 R_k 诱导的辫就是 H_k .

引理 2.3.1 设 $b \in B_m[D, K]$, $\Gamma = \Gamma^{(0)}b$ 是另一组 g -基 (右作用). 设 $R_{k,b} \in B_n[D, K]$ 是 Γ 上的 Hurwitz 变换 R_k 诱导的辫, 那么 $R_{k,b}^{\pm 1} = b^{-1}H_k^{\pm 1}b$.

证明 由 $H_k, R_{k,b}$ 的定义直接验证立得. ■

命题 2.3.2 $B_n[D, K]$ 的标架生成 $B_n[D, K]$.

证明 固定 $\Gamma^{(0)}$ 同上. 由命题 2.3.1, $B_n[D, K]$ 的辫一一对应于 $\pi_1(D - K, u)$ 中的 g -基. 设 Γ 是任意 g -基, $b \in B_n[D, K]$ 使得 $\Gamma = \Gamma^{(0)}b$. Γ 上的 Hurwitz 变换 R_k 诱导了辫 $R_{k,b} \in B_n[D, K]$.

由命题 2.1.1, 我们可以依次通过有限个 Hurwitz 变换 $R_{j_1}^{\varepsilon_1}, \dots, R_{j_t}^{\varepsilon_t}$ 将 Γ 变换到 $\Gamma^{(0)}$ (这里诸 $\varepsilon = \pm 1$). 设 $\Gamma' = (\Gamma)R_{i_1, b}^{\varepsilon_1}$, $b' \in B_n[D, K]$ 满足 $\Gamma' = (\Gamma^{(0)})b'$. 由引理 2.3.1, $b' = bR_{j_1}^{\varepsilon_1} = H_{j_1}^{\varepsilon_1}b$. 由归纳法即得 $b = H_{j_1}^{-\varepsilon_1} \dots H_{j_t}^{-\varepsilon_t}$. ■

引理 2.3.2 设 σ_{ij} (相应地, τ_{kl}) 是 $D - \partial D$ 中连接 a_i, a_j (相应地, a_k, a_l) 的简单道路, 并且不和其他 K 中的点相交.

- (1) 若 $\sigma_{ij} \cap \tau_{kl} = \emptyset$, 则 $H(\sigma_{ij})H(\tau_{kl}) = H(\tau_{kl})H(\sigma_{ij})$.
- (2) 若 $j = k$, $\sigma_{ij} \cap \tau_{kl} = a_j$, 则 $H(\sigma_{ij})H(\tau_{kl})H(\sigma_{ij}) = H(\tau_{kl})H(\sigma_{ij})H(\tau_{kl})$.

推论 2.3.1 设 $H = \{H_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是辫群 $B_n := B_n[D, K]$ 的标架.

$$H_i H_j = H_j H_i, \quad H_i H_{i+1} H_i = H_{i+1} H_i H_{i+1}, \quad |i - j| > 1.$$

我们定义

$$Z_{ij}(H) = H_{j-1} \cdots H_{i+1} \cdot H_i \cdot H_{i+1}^{-1} \cdots H_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

在不混淆的情形下, 也简记作 Z_{ij} . 事实上, 在 g -基 $\Gamma^{(0)}$ 上, $Z_{ij} = H(\sigma_{ij})$.

引理 2.3.3 (1) $Z_{i, i+1}(H) = H_i$.

(2) $Z_{ij} Z_{kl} = Z_{kl} Z_{ij}$, $j < k$.

(3) $Z_{ij} Z_{jk} Z_{ij} = Z_{jk} Z_{ij} Z_{jk}$.

证明 由引理 2.3.2 即得. ■

2.4 辫群的典范嵌入

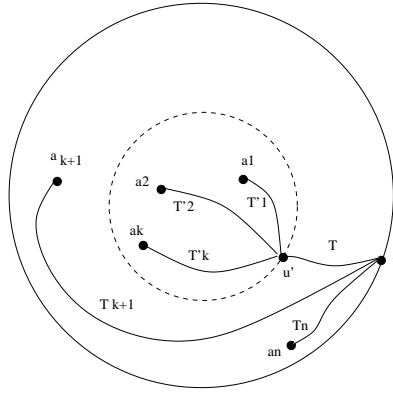
设 (D', K') 是另一个带孔圆盘, $f : (D', K') \rightarrow (D, K)$ 是一个嵌入映射, 要求 $f(K') \subseteq K$, 并令 $k = \sharp K'$, $n = \sharp K$. 我们假设 $(K - f(K')) \cap f(\text{Int}(D)) = \emptyset$.

对任何 $b' \in B_k[D', K']$, 设 $\beta' : (D', K') \rightarrow (D', K')$ 是对应 b' 的某个微分同胚. 我们可以延拓 β' 到 D 上. 具体言之, 可构造微分同胚 $\beta : D \rightarrow D$, 使得 $\beta|_{D-f(D')} = \text{Id}|_{D-f(D')}$, 且 $\beta(a) = f\beta f^{-1}(a)$, $\forall a \in f(D')$. 后一条件相当于说以下交换图成立.

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\beta'} & D' \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

引理 2.4.1 如果上述 $\beta' = \text{Id} \in B_k[D', K']$, 那么其延拓 $\beta = \text{Id} \in B_n[D, K]$.

证明 为方便起见, 我们将 f 之间看作包含映射, 设 $K' = \{a_1, \dots, a_k\}$, $K - K' = \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$. 考虑 $D' - K'$ 的丛 $\langle T'_1, \dots, T'_k \rangle$ (以 $u' \in \partial D'$ 为基点). 并设 T_{k+1}, \dots, T_n 分别是连接 $u \in \partial D$ 和 a_1, \dots, a_n 的简单道路, T 是连接 u, u' 的简单道路, 要求这些道路除了 u 之外互不相交, 并且不与 D' 相交. 具体示意图如下.



设 $T_i = T'_i \cup T$, $1 \leq i \leq k$, 则 $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ 构成 $D - K$ 的丛. 现在我们设 $\langle \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \rangle$ 是 $\pi_1(D - K, u)$ 对应的 g -基, $\langle \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_k \rangle$ 是 $\pi_1(D' - K', u)$ 对应的 g -基. 它们满足关系 $\Gamma_i = T^{-1}\Gamma'_i T$ ($1 \leq i \leq k$), 并且 $\Gamma_j \subseteq \overline{D - D'}$ ($j = k + 1, \dots, n$).

我们有

$$\beta(\Gamma_i) = \begin{cases} T^{-1}\beta'(\Gamma'_i)T, & i \leq k, \\ \Gamma_i, & i > k. \end{cases}$$

因为 $\beta' = \text{Id}$, 所以 $\beta'(\Gamma'_i) = \Gamma'_i$ ($1 \leq i \leq k$). 因此 $\beta(\Gamma_i) = T^{-1}\Gamma'_i T$, 它同伦于 Γ_i . 这就说明 $\beta = \text{Id}$. ■

命题 2.4.1 上述嵌入 f 诱导了辫群的单同态 $\bar{f}: B_k[D', K'] \rightarrow B_n[D, K]$, $\bar{f}(b') = b$.

证明 设 β', β 同上, 这就给出了映射 $b' \rightarrow b$, 这里 $b \in B_n[D, K]$ 是 β 对应的辫. 上面的引理保证了这一映射不依赖于 β' 的选取, 因而这就诱导了我们需要的辫群同态.

假设 $b' \in \text{Ker } f$ 不是平凡的辫. 我们沿用前面所有的记号与假设. 不妨设 $(\Gamma'_r)b' \neq \Gamma'_r$ 对某个 $r (\leq k)$ 成立. 不妨设 $(\Gamma'_r)b' = \prod (\Gamma'_{i_m})^{\varepsilon_m}$ 是既约表示. 这样,

$$(\Gamma_r)\beta = T^{-1}(\Gamma'_r)\beta' T = T^{-1} \prod (\Gamma'_{i_m})^{\varepsilon_m} T = \prod (T^{-1}\Gamma'_{i_m} T)^{\varepsilon_m} = \prod (\Gamma_i)^{\varepsilon_m}.$$

上述表达式不等于 Γ_r , 仍然是既约的, 并且下标均不超过 k . 注意到 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 是 $\pi_1(D - K, u)$ 的自由基, 所以 $(\Gamma_r)\beta$ 不可能同伦等价于 Γ_r . 这就和 b' 的选取矛盾! ■

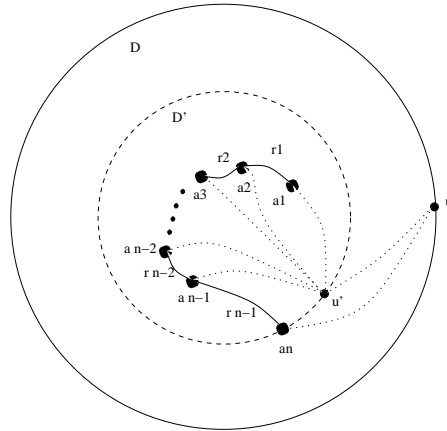
定义 2.4.1 设 $K'' = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq K$, p_i ($i = 1, \dots, m - 1$) 分别是连接 b_i 到 b_{i+1} 的简单道路, 要求

$$p_i \cap p_j = \begin{cases} \emptyset, & |i - j| > 1, \\ b_{i+1}, & j = i + 1. \end{cases}$$

并且诸 p_i 不与 $K - K''$ 中的点相交. 我们将这组首尾相接的道路序列称作 (D, K, K'') 中的骨架 (Skeleton). 两个骨架 (p_1, \dots, p_{m-1}) , (p'_1, \dots, p'_{m-1}) 相同是指对应的正半扭皆相同, 即 $H(p_i) = H(p'_i)$, $i = 1, \dots, m - 1$.

回到嵌入映射 $f: (D', K') \rightarrow (D, K)$. 设 $H'_i = H(\sigma'_i)$ 是 $B_k[D', K']$ 是一组标架. 那么显然 $(f(\sigma'_1), \dots, f(\sigma'_{n-1}))$ 是 $(D, K, f(K'))$ 中的骨架. 这样, $\bar{f}: B_k[D', K'] \rightarrow B_n[D, K]$ 完全由该骨架确定下来. 反过来, 给定一组骨架, 我们也能构造出对应的嵌入映射.

现在我们考虑一类特殊的辫群典范嵌入映射. 设 $H_i = H(\gamma_i)$ ($i = 1, \dots, n-1$) 是 $B_n[D, K]$ 的标架, 这里道路 γ_i 连接 a_i 和 a_{i+1} . 取一个同胚于圆盘的子集 D' 包含 a_1, \dots, a_{n-1} , 并且 $a_n \in \partial D'$.



设 $K' = K - \{a_n\}$. 由包含关系 $i: (D', K') \rightarrow (D, K)$, 我们诱导了典范单射

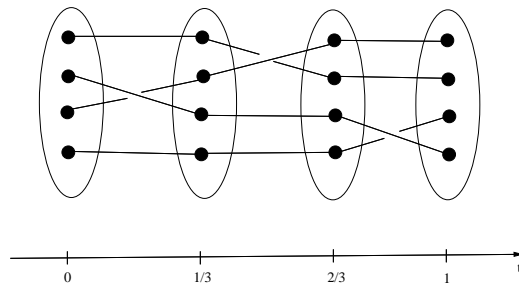
$$\bar{i}: B_{n-1}[D', K'] \hookrightarrow B_n[D, K].$$

道路 $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-2}$ 定义了 $B_{n-1}[D', K']$ 的一组标架, 记作 (H'_1, \dots, H'_{n-2}) . 显见 $\bar{i}(H'_j) = H_j$ ($j = 1, \dots, n-2$).

2.5 运动诱导的辫

设 $K' = \{a'_1, \dots, a'_n\}$ 及 $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是 D 内部的有限点集. K' 到 K 的运动 (Motion) 是指 n 个连续函数 $m_i: [0, 1] \rightarrow D$ ($i = 1, \dots, n$), 满足 $m_i(0) = a'_i$, $m_i(1) = a_i$, 并且对任何 $t \in [0, 1]$, $m_i(t) \neq m_j(t)$ ($i \neq j$). 给定一个运动 \mathcal{M} , 我们自然诱导了一族保持边界 ∂D 不动的微分同胚 $D_{\mathcal{M}, t}: D \rightarrow D$, 使得 $D_{\mathcal{M}, t}(a'_i) = m_i(t)$, 这里 $t \in [0, 1]$.

特别地, 如果 $K' = K$, 那么 $D_{\mathcal{M}, 1}$ 显然诱导了 $B_n[D, K]$ 的一个辫, 记作 $b_{\mathcal{M}}$, 称之为由运动 \mathcal{M} 诱导的辫. 显然这个辫与 $D_{\mathcal{M}, t}$ 选取无关, 只与运动 \mathcal{M} 有关.

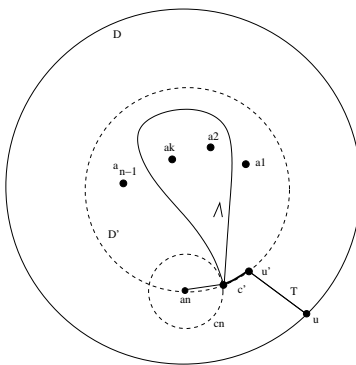


例 2.5.1 任取道路 $\gamma \in \pi_1(D - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, a_n)$ 都定义了一个运动诱导的辫 $b_{\mathcal{M}(\gamma)}$, 它在保持 a_i ($i < n$) 不变, 而 $m_n(t) := \gamma(t)$. 由此我们可以诱导同态

$$w: \pi_1(D - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}, a_n) \longrightarrow P_n, \quad \gamma \rightarrow b_{\mathcal{M}(\gamma)}.$$

引理 2.5.1 上述同态 w 是单射.

证明 设 $\lambda \in \text{Ker}$ 是非平凡元, Λ 是相应的在 $D' - K'$ 中以 a_n 为基点的环路. 考虑含 a_n 的小圆盘 d_n , 其边界记作 c_n . 设 c' 是 ∂D 上一段弧, 连接 u' 和 c_n 上的点. 我们假设 $\Lambda \cap d_n$ 是连接 a_n 和 c' 端点的直线(来回两个不同方向的直线重合). 这样, $\Lambda' = \overline{\Lambda - d_n}$ 就是一个环路. 设 T 仍是连接 u, u' 的简单道路. 以下是示意图.



设 $\Gamma_n = T^{-1}c'_n c_n c'^{-1}T$. 我们的目标是考察运动诱导的辫 $b_{\mathcal{M}(\Lambda)}$ 在 Γ 上的作用. 运动 $a_n(t)$ 显然要诱导了圆周的运动 $c_n(t)$, 因而也牵引了运动 $c'(t)$ (此外保持 T 不动). 显然有 $c_n(1) = c' \cdot \Lambda$. 这样我们也有运动

$$\Gamma_n(t) = T^{-1}c'(t)c_n(t)c'^{-1}(t)T, \quad \Gamma_n(0) = \Gamma_n.$$

因此

$$(\Gamma_n)b_{\mathcal{M}(\Lambda)} = \Gamma_n(1) = W\Gamma_n W^{-1},$$

这里 $W = T^{-1}c'\Lambda c'^{-1}T$. 由 λ 的选取, $(\Gamma_n)b_{\mathcal{M}(\Lambda)} = \Gamma_n$, 因而 $W = \Gamma_n^r$.

现在我们把 D 形变收缩到 D' , d_n 形变收缩到 a_n . 这样, c' 变成了 ∂D 上一段圆弧, 连接 a_n, u' , 而 W 变成 $c\Lambda c^{-1}$, Γ_n^r 变成平凡环路 cc^{-1} . 因此, $c\Lambda c^{-1}$ 在 $D' - K'$ 内同伦于平凡环路. 这就推出 Λ 平凡, 从而 $\lambda = 1 \in \pi_1(D' - K', a_n)$, 与假设矛盾! \blacksquare

2.6 辫群的实现

设 H_1, \dots, H_{n-1} 是 $B_n := B_n[D, K]$ 的标架. 显然辫确定了 K 是的一个置换. 因此有同态 $p_n : B_n \rightarrow S_n$, $p_n(H_i) = \sigma_i$, 这里 $\sigma_i = (i, i+1)$. 由命题 1.2.1, 这是满同态. 我们设 $P_n = \text{Ker}p_n$.

考虑群

$$\overline{B}_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] = \langle x_i, x_j \rangle = 1, \quad |i-j| > 1 \rangle,$$

这里 $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$, $\langle x, y \rangle = xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$. 我们也有满同态 $\bar{p}_n : \overline{B}_n \rightarrow S_n$, $\bar{p}_n(x_i) = \sigma_i$. 我们设 $\overline{P}_n = \text{Ker}\bar{p}_n$. \overline{P}_n 是 \overline{B}_n 中包含诸 x_i^2 的最小正规子群.

进一步, 我们定义同态 $\psi_n : \overline{B}_n \rightarrow B_n$, $\psi_n(x_i) = H_i$. 由命题 2.3.2, ψ_n 也是满的. 容易验证以下交换图成立.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{P}_n & \longrightarrow & \overline{B}_n & \xrightarrow{\bar{p}_n} & S_n \longrightarrow 1 \\ & & \psi_n|_{\overline{P}_n} \downarrow & & \psi_n \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{p_n} & S_n \longrightarrow 1. \end{array}$$

显见 $\psi_n|_{\overline{P}_n}$ 是满射. 事实上, 我们有更强的结论.

定理 2.6.1 (Artin 定理) $\psi_n|_{\overline{P}_n} : \overline{P}_n \rightarrow P_n$ 和 $\psi_n : \overline{B}_n \rightarrow B_n$ 都是同构. 特别地,

$$B_n = \langle H_1, \dots, H_{n-1} \mid [H_i, H_j] = \langle H_i, H_{i+1} \rangle = 1, \quad |i - j| > 1 \rangle.$$

证明 证明 $\psi_n|_{\overline{P}_n}$ 是同构比较困难. 我们这里不再讨论. 现在假设已知该结论成立. 由蛇形引理易知 ψ_n 是同构. 因为 $\psi_n(x_i) = H_i$, 所以 H_i 所满足的关系都来自于 x_i 满足的关系. ■

下面我们来找出纯辫群 P_n 的生成元. 设

$$\overline{Z}_{ij} := x_{j-1} \cdots x_{i+1} x_i x_{i+1}^{-1} x_{i+2}^{-1} \cdots x_{j-1}^{-1}, \quad i < j.$$

我们罗列一些简单的性质, 请读者自己验证.

- 引理 2.6.1 (1) $\psi(\overline{Z}_{ij}) = Z_{i,j}$,
 (2) $\overline{Z}_{ij}^2 \in \overline{P}_n, Z_{i,j}^2 \in P_n$,
 (3) $\langle \overline{Z}_{ij}, x_i \rangle = \langle \overline{Z}_{ij}, x_{i-1} \rangle = 1$,
 (4) $\overline{Z}_{i-1,j} = \overline{Z}_{ij} x_{i-1} \overline{Z}_{ij}^{-1}, \overline{Z}_{i+1,j} = \overline{Z}_{ij}^{-1} x_i \overline{Z}_{ij}$

命题 2.6.1 \overline{P}_n 由诸 \overline{Z}_{ij}^2 生成.

证明 注意到 $\overline{Z}_{i,i+1} = x_i$, 所以我们只需证明 $x_k^{\pm 1} \overline{Z}_{ij}^2 x_k^{\mp 1}$ 可以由诸 \overline{Z}_{lh}^2 的乘积表达. 进一步, 注意到

$$x_k^{-1} \overline{Z}_{ij}^2 x_k = x_k^{-2} (x_k \overline{Z}_{ij}^2 x_k^{-1}) x_k^2,$$

所以我们只需要验证 $x_k^{-1} \overline{Z}_{ij}^2 x_k, x_k \overline{Z}_{ij}^2 x_k^{-1}$ 中的一个满足结论即可. 以下依次罗列各情形的表达式, 请读者自己验证.

- (1) $x_k^{\pm 1} \overline{Z}_{ij}^2 x_k^{\mp 1} = \overline{Z}_{ij}^2, k \notin [i-1, j]$.
 (2) $x_{i-1}^{-1} \overline{Z}_{ij}^2 x_{i-1} = \overline{Z}_{i-1,j}^2$.
 (3) $x_i \overline{Z}_{ij}^2 x_i^{-1} = \overline{Z}_{i+1,j}^2$.
 (4) $x_k \overline{Z}_{ij}^2 x_k^{-1} = \overline{Z}_{ij}^2, k \in [i+1, j-2]$.
 (5) $x_{j-1}^{-1} \overline{Z}_{ij}^2 x_{j-1} = \overline{Z}_{i,j-2}^2$.
 (6) $x_j \overline{Z}_{ij}^2 x_j^{-1} = \overline{Z}_{i,j+1}^2$. ■

推论 2.6.1 P_n 由诸 Z_{ij}^2 生成.

2.7 正辫与 Dehn 扭转

设 $B_n^+ := B_n^+(H_1, \dots, H_{n-1})$ 是由形如 QH_iQ^{-1} 生成的半群.

引理 2.7.1 设 (H'_1, \dots, H'_{n-1}) 是 B_n 的另一标架, 则

$$B_n^+(H_1, \dots, H_{n-1}) = B_n^+(H'_1, \dots, H'_{n-1}).$$

证明 每个 H'_i 都可以写成 QH_iQ^{-1} , $Q \in B_n$ (见习题 2.4). 这样就有 $B_n^+(H'_1, \dots, H'_{n-1}) \subseteq B_n^+$. 类似可证另一包含关系. ■

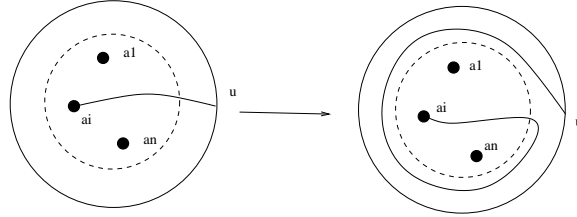
这样, B_n^+ 的定义是合理的, 我们称之为正辫. 每个正半扭辫都落在 B^+ 中, 而 B^+ 中的素元就是那些正半扭辫. 取定一个正半扭辫 H_1 , 因为任何其他正半扭都与它共轭, 所以 B_n 的 Abel

化是由 H_1 生成的无限循环群. 这样, 对 B_n^+ 中任何元素 $z = \prod Q_j H_1^{\varepsilon_j} Q_j^{-1}$ ($\varepsilon_j = \pm 1$), 则可定义 $\deg z = \sum_j \varepsilon_j$.

设 $\ell \in \pi_1(D - K, u)$ 是对应边界 ∂D (正定向) 的元素. 我们定义如下辫 Δ_n^2 (也记作 $\Delta_n^2[D, K]$):

$$(\Gamma_k)\Delta_n^2 = \ell\Gamma_k\ell^{-1},$$

其示意图如下:



Δ_n^2 其实就是由 Dehn 扭转产生的辫. 注意到 ℓ 在任何辫作用下都是不变的, 由此及 Δ_n^2 的定义可知, Δ_n^2 与 B_n 中的任何辫交换.

命题 2.7.1 设 $H_1, \dots, H_n \in B_n$ 是一组标架, 那么

$$\Delta_n^2 = (H_1 \cdots H_{n-1})^n = (H_{n-1} \cdots H_1)^n.$$

特别地, $\Delta_n^2 \in B_n^+$.

证明 取一组从 $\{T_i\}_{i=1}^n$ 同 (2-1), $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ 是对应的 g -基. 并设 $G = H_1 \cdots H_{n-1}$. 我们有以下等式

$$(\Gamma_i)G = \begin{cases} \Gamma_{i-1}, & i \neq 1, \\ \ell\Gamma_n\ell^{-1}, & i = 1. \end{cases} \quad (2-2)$$

对 $i > 1$, 我们有

$$(\Gamma_i)G^n = (\Gamma_i)G^{i-1} \cdot G^{n-i+1} = (\Gamma_1)G \cdot G^{n-i} = (\ell\Gamma_n\ell^{-1})G^{n-i} = \ell\Gamma_1\ell^{-1}.$$

对 $i = 1$, 则有 $(\Gamma_1)G^n = (\Gamma_1)G \cdot G^{n-1} = (\ell\Gamma_n\ell^{-1})G^{n-1} = \ell\Gamma_1\ell^{-1}$. 这就证明了第一个等式. 我们挑选另一组标架, 使得标架的顺序正好相反: H_{n-1}, \dots, H_1 , 这就得到另一等式. ■

命题 2.7.2 设 $f: B_{n-1}[D, K - a_n] \rightarrow B_{n-1}[D, K]$, $f(H_i) = H_i$ ($1 \leq i \leq n-2$). 我们有

$$\Delta_n^2[D, K] = \prod_{i=1}^{n-1} Z_{in}^2 \cdot f(\Delta_{n-1}^2[D, K - a_n]).$$

证明 由命题 2.7.1, 我们有 $\Delta_n^2 = (H_{n-1} \cdots H_1)^n$, $\Delta_{n-1}^2 = (H_{n-2} \cdots H_1)^{n-1}$. 再利用习题 2.7 (3) 即得. ■

如果我们将上述的 f 直接看成包含映射, 那么上述结论相当于说 $\Delta_n^2 = \prod_{i=1}^{n-1} Z_{in}^2 \cdot \Delta_{n-1}^2$.

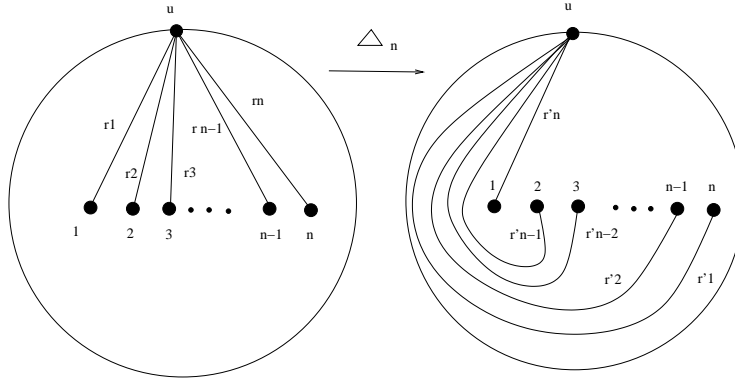
推论 2.7.1 对任何 $b \in B_{n-1}$, b 与 $\prod_{i=1}^{n-1} Z_{in}^2$ 可交换. 特别地, Δ_{n-1}^2 与 $\prod_{i=1}^{n-1} Z_{in}^2$ 可交换.

证明 因为 b 与 Δ_n^2 及 Δ_{n-1}^2 均可交换, 故得结论. ■

事实上, 我们有下面更强的结论 (证略).

定理 2.7.1 辫群 $B_n[D, K]$ 与纯辫群 $P_n[D, K]$ 的中心都是由 $\Delta_n^2[D, K]$ 生成的无限循环群 ($n > 2$).

为什么我们用 Δ_n^2 来表示 Dehn 扭转对应的辫呢? 这是因为我们可以定义所谓的广义半扭辫 Δ_n , 其直观图如下:



给定标架 $H = (H_1, \dots, H_{n-1})$ 后, 设 $A_j(H) := H_1 \cdots H_j$ 及 $Z_n(H) = A_{n-1}(H) \cdots A_1(H)$. 由直接计算可知

推论 2.7.2 $\Delta_n(H) = Z_n(H)$.

广义正半扭辫的概念当然也可以推广到任意骨架上, 这里我们不再赘述了.

本章习题

习题 2.1 设 D 是圆盘, K 是 D 内 n 个互不相交的可缩子集之并, $u \in \partial D$ 是取定的边界点. $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 是 $\pi_1(D - K, u)$ 的 g -基. 证明:

- (1) 乘积 $\Gamma_1 \cdots \Gamma_n = \partial D$ (逆时针方向).
- (2) 假设 $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_n$ 是另一组 g -基, 则每个 Γ'_i 都共轭于某个 Γ_{j_i} .
- (3) 任何 g -基在 Hurwitz 变换下仍是 g -基.

习题 2.2 考虑复函数 $h(z) = |z|e^{i(\arg z + \alpha(|z|)\pi)}$, 这里 $\alpha(x)$ 是实的光滑单调函数, 满足

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{3}{2}], \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

设 $\tilde{D} = \{z \mid |z| \leq 2\}$, $\tilde{K} = [-1, 1]$, $\tilde{u} = -2i$, $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ 分别是 $\pi_1(\tilde{D} - \tilde{K}, \tilde{u})$ 中从 \tilde{u} 出发环绕 $-1, +1$ 的环路. 证明:

(1) h 诱导了 $\pi_1(\tilde{D} - \tilde{K}, \tilde{u})$ 上的自同构 h_* , 满足 $h_*(\tilde{\Gamma}_1) = \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Gamma}_2 \tilde{\Gamma}_1^{-1}$, $h(\tilde{\Gamma}_2) = \tilde{\Gamma}_1$.

(2) 设 D, K, u 同上题, 且 K 是有限点集, $a, b \in K$, $K_{a,b} = K - a - b$. 设 γ 是 $D - \partial D - K_{a,b}$ 中的简单道路, U 是包含 γ 的正则小邻域. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ 是微分同胚, 使得 $f(\gamma) = [-1, 1]$, $f(U) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. 那么 $(f \circ h \circ f^{-1})|_D$ 诱导了 D 的微分同胚, 该同胚在 $D - U$ 上是恒同映射, 且恰好交换 a, b . 它对应了半扭辫 $H(\gamma)$.

习题 2.3 证明引理 2.6.1 的结论.

习题 2.4 设 z_1, z_2 是辫群 B_n 的正半扭辫, 证明: 存在 $Q \in B_n$, 使得 $z_1 = Q^{-1}z_2Q$.

习题 2.5 设 K 是 D 内有限点集, $a, b \in K$, γ 是 $D - (K - \{a, b\})$ 中连接 a, b 的简单道路, $l(\gamma)$ 是 $\pi_1(D - K)$ 中对应的道路, $H(\gamma)$ 是对应正半扭辫. 设 b 是由 γ 诱导的运动的辫. 证明: $b = H(\gamma)^2$.

习题 2.6 验证式 (2-2).

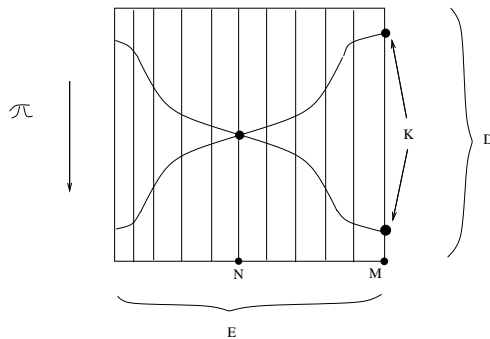
习题 2.7 设 H_1, \dots, H_{n-1} 是 B_n 的一组标架, 证明诸等式都是等价分解:

- (1) $H_{n-1} \cdots H_1 \cdot H_i = H_{i-1} \cdot H_{n-1} \cdots H_1, i \geq 2$.
- (2) $H_{n-1} \cdots H_k \cdot H_k = Z_{k,n} \cdot Z_{k,n} \cdot H_{n-1} \cdots H_{k+1}, k \leq n$.
- (3) $(H_{n-1} \cdots H_1)^n = \prod_{i=1}^{k-1} (Z_{i,n} \cdot Z_{i,n}) \cdot H_{n-1} \cdots H_k (H_{n-1} \cdots H_1)^{n-k} \cdot (H_{n-2} \cdots H_1)^{k-1}$.

第三章 辫单值的基础知识

3.1 辫单值的定义

考虑 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 的坐标 (x, y) . 设 E 是 x 轴上的闭圆盘, D 是 y 轴上的闭圆盘. 设 C 是 \mathbb{C}^2 中的代数曲线在 $E \times D$ 中的限制. 考虑投影映射 $\pi_1 : E \times D \rightarrow E$ 及 $\pi_2 : E \times D \rightarrow D$, 设 $\pi = \pi_1|_C : C \rightarrow E$, $\deg \pi = n$. 为方便期间, 我们假设 π 是正常态射, 即 C 不含垂直分支. 设 $N = \{x \in E \mid \#\pi^{-1}(x) < n\}$, 并假设 N 落在 E 内部. 设 $M \in \partial E$, $K = \pi^{-1}(M) = \{a_1, \dots, a_n\}$.

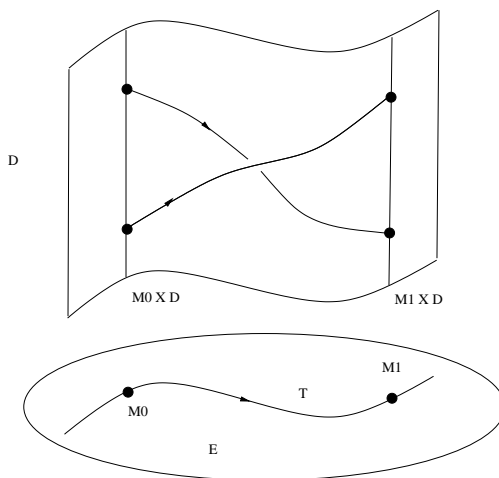


任取环路 $\gamma \in \pi_1(E - N, M)$, γ 的提升分别诱导从 a_i 出发的道路 $(i = 1, \dots, n)$. 将它们投影到 D 内, 则得到 K 的运动 $\{a_1(t), \dots, a_n(t)\}$. 这个运动诱导了 $B_n[D, K]$ 的辫. 同伦的道路诱导的辫是相同的, 因此我们得到同态

$$\varphi : \pi_1(E - N, M) \longrightarrow B_n[D, K].$$

这个同态称为 C 关于 $(E \times D, \pi_1, M)$ 的辫单值 (Braid monodromy).

我们可以考虑更一般的情形. 设 $M_0, M_1 \in E - N$, T 是 $E - N$ 中连接 M_0, M_1 的道路. $K_x := \pi_1(x) \cap C$, $x \in E - N$. 我们可以找到微分同胚族 $\psi(t) : M_0 \times D \rightarrow T(t) \times D$, $t \in [0, 1]$, 使得 $\psi(t)(K_{M_0}) = K_{T(t)}$ 以及 $\psi(t)(M_0, y) = (T(t), y)$, $\forall y \in \partial D$.



这样, T 就诱导了以下微分同胚: $\Psi_T = \psi(1) : M_0 \times D \rightarrow M_1 \times D$, 称之为由 T 诱导的 Lefschetz 微分同胚 (Lefschetz diffeomorphism). 如果 T 是 $\pi_1(E - N, M)$ 中的环路, 那么辫 $\varphi(T)$ 就是微

分同胚 ψ_T 诱导的辨.

进一步, 我们有诱导的辨群映射 $\bar{\psi}(t) : B_n[M_0 \times D, K_{M_0}] \rightarrow B_n[T(t) \times D, K_{T(t)}]$. 我们称 $L_T := \bar{\psi}(1)$ 为由 T 诱导的 Lefschetz 同构. L_T 显然只依赖于 $E - N$ 中 T 的同伦类.

例 3.1.1 设 $E = \{x \mid |x| \leq 1\}$, $D = \{y \mid |y| < R\}$ (R 充分大), C 由方程 $y^2 = x^m$ 定义. 此时覆盖次数 $n = 2$, $N = \{0\}$, $K = \{-1, 1\}$, $\pi_1(E - N, 1)$ 由边界 ∂E (正向) 生成. 考虑辨单值 $\varphi : \pi_1(E - N, 1) \rightarrow B_2[D, K]$. 设 h 是关于道路 $[-1, 1]$ 的半正扭辫, 于是 $\varphi(\partial E) = h^m$. ■

例 3.1.2 将上例中的 C 方程替换为 $x^n + y^n = 0$. 我们有 $\varphi(\partial E) = \Delta_n^2[\pi_2^{-1}(M), K(M)]$. ■

类似地, 我们也可以考虑射影直线的辨单值. 设 C 是 n 次平面射影曲线, L 选作充分一般的无穷远直线. 这样我们可以考虑 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 - L$ 仿射坐标 (x, y) . 然后我们可以类似定义 C 关于 $L, \pi_1, M(\in \partial D)$ 的辨单值

$$\varphi : \pi_1(E - N, M) \longrightarrow B_n[M \times D, (M \times D) \cap C].$$

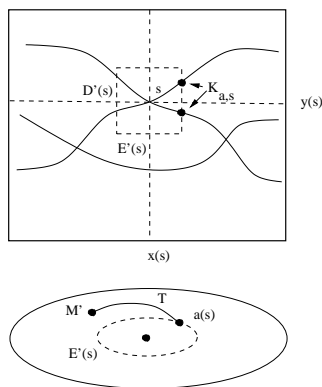
但请读者注意, 我们要求 E, D 足够大, 使得 $N = \{x \in \mathbb{C} \mid \#\pi_1^{-1}(x) \cap C < n\}$ 含于 E 内部, 并且 $\pi_1^{-1}(E) \cap C \subseteq E \times D$.

命题 3.1.1 设 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ 是 $\pi_1(E - N, M)$ 的 g -基, 则

$$\prod_{i=1}^r \varphi(\Gamma_i) = \Delta_n^2[M \times D, (M \times D) \cap C].$$

证明 取 E 充分大, 我们让 C 的方程连续形变, 最终使得 C 变成 n 条直线交于同一点 (因为 E 充分大, 故包含该点). 由例 3.1.2 即得所需结论. ■

假设 s 是 $\pi := \pi_1|_C$ 的奇点, 其坐标记为 $(x(s), y(s))$. 我们分别在 x 和 y 轴上取以 $x(s), y(s)$ 为中心的充分小圆盘 $E'(s)$ 和 $D'(s)$, 使得 $x(s) \times D'(s) \cap C = \{s\}$, 并且对任何 $x \in E' - x(s)$, $x \times \text{int}(D'(s)) \cap C$ 中点的个数无关于 x 的选取—这个点数称作 π 在 s 处的局部次数, 记为 $\deg_s \pi$. 取 $a(s) \in \partial E'$, $M' \in E - N$, T 是 $E - N - \text{int}E'$ 中连接 $a(s)$ 和 M' 的道路. 为方便起见. 我们简记 $a = a(s)$, $D' = D'(s)$, 并设 $K_{a,s} = (a' \times \text{int}(D')) \cap C$.



考虑由 T 诱导的 Lefschetz 微分同胚 $\Psi_T : a \times D \rightarrow M' \times D$ 在 $a \times D'$ 上的限制 $\psi_T := \Psi|_{a \times D'} : a \times D' \rightarrow M' \times D$, 称其为由 T 诱导的 Lefschetz 嵌入 (Lefschetz embedding). 由此我们可以得到辨群的典范嵌入

$$L_T := \bar{\psi}_T : B_k[a \times D', K_{a,s}] \longrightarrow B_n[M' \times D, K],$$

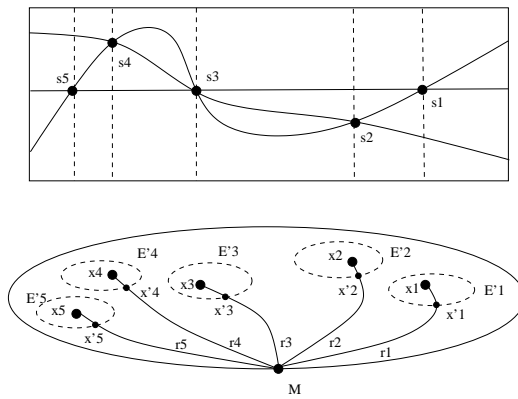
这里 $k = \deg_s \pi$. 该映射称作由 T 诱导的 Lefschetz 单射 (Lefschetz injection).

进一步, 考虑 $B_k = B_k[a \times D, K_{a,s}]$ 的线性标架 $(H') = (H'_1, \dots, H'_{k-1})$ 及 $(M' \times D, \psi_T(K_{a,s}))$ 的一组骨架 $\langle \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \rangle$, 满足 $L_T(H_i) = H(\xi_i)$ ($i = 1, \dots, k-1$). 我们将这组标架与骨架合称为 T 诱导的 Lefschetz 零化闭链 (Lefschetz vanishing cycle), 记作 $L.V.C.(T)$. L_T 当然是由 Lefschetz 零化闭链完全确定的.

3.2 射影曲线的辨单值

我们采用上一节各记号. 设 $N = \{x_1, \dots, x_q\}$, $M \in \partial E$, $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$ 是 $E - N$ 的丛. 当无穷远直线取得充分一般时, 我们可以假设对每个 $x_i \in N$, $\pi^{-1}(x_i)$ 上仅有一个 π 的奇点 s_i , 且记局部次数 $m_i = \deg_{s_i} \pi$.

对每个 s_i , 我们分别取小圆盘 E'_i, D'_i 同前, 并取 $x'_i \in \partial E'_i$. 假设 γ_i 经过 x'_i . 我们设 $\tilde{\gamma}_i$ 是 γ_i 中从 x'_i 到 M 的部分.



$\tilde{\gamma}_i$ 诱导了 Lefschetz 单射

$$L_i := L_{\tilde{\gamma}_i} : B_{m_i}[x'_i \times D'_i, (x'_i \times D'_i) \cap C] \longrightarrow B_n[M \times D, K].$$

我们可以在每个 $B_{m_i}[x'_i \times D'_i, (x'_i \times D'_i) \cap C]$ 中固定线性标架 $(H'_{1,i}, \dots, H'_{m_i-1,i})$. 这就得到 Lefschetz 零化闭链 $LVC(\tilde{\gamma}_i)$, 即有一组骨架 $\xi_{\tilde{\gamma}_i} := \langle \xi_{1,\tilde{\gamma}_i}, \dots, \xi_{m_i-1,\tilde{\gamma}_i} \rangle$, 满足 $L_i(H'_{j,i}) = H(\xi_{j,\tilde{\gamma}_i})$. 我们把骨架序列 $(\xi_{\tilde{\gamma}_1}, \dots, \xi_{\tilde{\gamma}_q})$ 称作对应于丛 $\langle \gamma_i \rangle_{i=1}^q$ 的 Lefschetz 树 (Lefschetz tree), 记作 $LT(\langle \gamma_i \rangle)$. 进一步, 我们还可以定义 Lefschetz 树上的 Hurwitz 变换

$$R(\xi_{\tilde{\gamma}_1}, \dots, \xi_{\tilde{\gamma}_q}) = (\xi_{\tilde{\gamma}_1}, \dots, \xi_{\tilde{\gamma}_{k-1}}, (\xi_{\tilde{\gamma}_k})\varphi(\Gamma_k)^{-1}, \xi_{\tilde{\gamma}_k}, \xi_{\tilde{\gamma}_{k+2}}, \dots, \xi_{\tilde{\gamma}_q}),$$

这里 $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_q)$ 是 $\pi_1(E - N, M)$ 中关于 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$ 的 g -基, $\varphi : \pi_1(E - N, M) \rightarrow B_n[M \times D, K]$ 是辨单值. 上式右边仍是 Lefschetz 树的原因来自于以下引理 (留给读者验证).

引理 3.2.1 $R_k(LT(\langle \gamma_i \rangle)) = LT(R_k(\langle \gamma_i \rangle))$.

注意到每个 Γ_i 都可以写成 $\tilde{\gamma}_i^{-1} \cdot \partial E'_i \cdot \tilde{\gamma}_i$. 因此为了计算 $\varphi(\Gamma_i)$, 我们需要分别计算 Lefschetz 单射 L_i 和局部辨单值

$$\varphi_{s_i} : \pi_1(E'_i - x_i, x'_i) \longrightarrow B_{m_i}[x'_i \times D'_i, K_{x'_i, s_i}].$$

具体言之, 我们有 $\varphi(\Gamma_i) = (\varphi_{s_i}(\partial E'_i))L_{\tilde{\gamma}_i}$.

引理 3.2.2 设 s_j 是 C 的奇点, 局部方程为 $y^2 = x^n$, 其由 $\tilde{\gamma}_i$ 诱导的 Lefschetz 零化闭链写作 $\langle \xi_{\tilde{\gamma}_j, 1} \rangle$. 那么 $\varphi(\Gamma_j) = (H(\xi_{\tilde{\gamma}_j, 1}))^n$.

证明 $\varphi(\Gamma_j) = (\varphi_{s_j}(\partial E'_j))L_{\tilde{\gamma}_j} = ((H'_{j,1})^n)L_{\tilde{\gamma}_j} = ((H'_{j,1})L_{\tilde{\gamma}_j})^n = (H(\xi_{\tilde{\gamma}_j, 1}))^n$. ■

命题 3.2.1 设 $\varphi : \pi_1(E - N, M) \rightarrow B_n[M \times D, K]$ 是辫单值, $\{\Gamma_i\}$ 是 $\pi_1(E - N, M)$ 的一组 g -基, 则所有 $\varphi(\Gamma_i) \in B_n[D, K]^+$.

证明 我们取一条次数与 C 相同的光滑曲线 $C^{(1)}$, 它充分接近 C . 设 $\pi^{(1)} = \pi_1|_{C^{(1)}}$, $K^{(1)} = \pi_1^{-1}(M) \cap C^{(1)}$. 因为两条曲线充分接近, 所以我们可以将 $B_n[M \times D, K]$ 和 $B_n[M \times D, K^{(1)}]$ 等同.

π 的每个奇点 s_j 分裂成 $\pi^{(1)}$ 的有限个奇点 s_{ji} , 其中每个的局部方程都是 $x = y^2$ (即和垂直纤维相切). 因此每个 x_j 也分裂成 $\{x_{ji}\}$ (这里 $\pi_1(s_{ji})$). 这样, 我们可构造 $\pi_1(E - N^{(1)}, M)$ 的 g -基 $\{\Gamma_{ji}\}$, 使得 $\Gamma_j = \prod_i \Gamma_{ji}$ (这里 $N^{(1)} = \cup x_{ji}$).

设 $\varphi^{(1)} : \pi_1(E - N^{(1)}, M) \rightarrow B_n[M \times D, K^{(1)})$ 是 $C^{(1)}$ 对应的辫. 这样就有

$$\varphi(\Gamma_j) = \prod_i \varphi^{(1)}(\Gamma_{ji}).$$

由引理 3.2.2, 每个 $\varphi^{(1)}(\Gamma_{ji})$ 是正半扭辫, 因此这就推出所需结论. ■

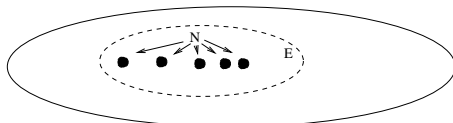
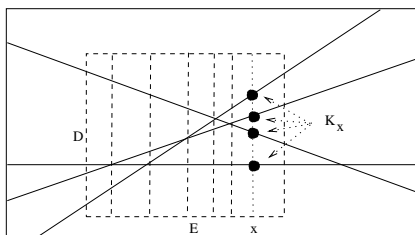
由命题 3.1.1, 对任何 $\pi_1(E - N, M)$ 的 g -基 $\{\Gamma_i\}$, 都有 Δ_n^2 的分解

$$\Delta_n^2 = \prod_i \varphi(\Gamma_i). \quad (3-1)$$

我们把它称作辫单值关于 g -基 $\{\Gamma_i\}$ 的乘积形式 (Product-form). 假设 $\{\Gamma'_i\}$ 是另一组 g -基. 因为它和 $\{\Gamma_i\}$ 相差一系列 Hurwitz 变换, 所以分解式 $\Delta_n^2 = \prod_i \varphi(\Gamma'_i)$ 与 (3-1) 当然是等价的. 反过来, 任何与 (3-1) 等价的分解 $\Delta_n^2 = \prod_i Z_i$ 也都相差一系列 Hurwitz 变换, 因此将这一系列变换作用到 $\{\Gamma_i\}$ 我们就得到一组新的 g -基 $\{\Gamma'_i\}$, 它对应的辫恰好满足 $\varphi(\Gamma'_i) = Z_i$. 一般说来, 除非 C 光滑, 否则 Δ_n^2 的乘积形式不是素分解.

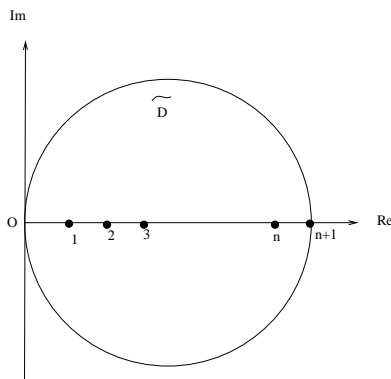
3.3 实线排列的辫单值

线排列 (Line arrangement) 就是指射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 上一些射影直线的并集构成的代数曲线. 如果每条直线都可以实系数方程表达, 我们就称该线排列为实线排列. 我们仍采用前面诸记号, 并要求圆盘 E, D 的中心均在实轴上. $E \times D$ 内的实线排列就是指平面实线排列在其上的限制, 并要求 $\pi_1^{-1}(x) \cap C \subseteq x \times \text{int}(D)$, $\forall x \in E$. 为方便读者回顾前面的记号, 我们提供下示意图.



设 $E'_{\mathbb{R}} = \{x \in E - N \mid x \in \mathbb{R}\}$, 对任何 $x \in E'_{\mathbb{R}}$, $K_x := \pi^{-1}(x) \cap C$ 有 n 个实坐标点 $(x, y_i(x))$ ($i = 1, \dots, n$), 我们可以要求 $y_1(x) < y_2(x) < \dots < y_n(x)$. 为了讨论方便, 我们可以通过微分同胚, 把 $x \times D$ 视作如下的平面内圆盘

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{n+1}{2}| < \frac{n+1}{2}\}, \quad \tilde{K} = \{1, 2, \dots, n\}.$$



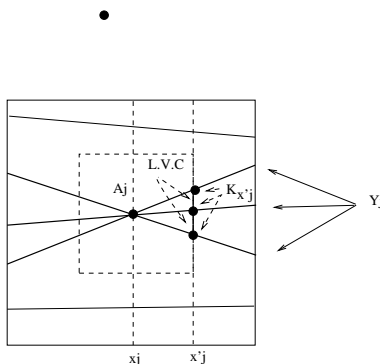
这个微分同胚记作 $\beta_x : x \times D \rightarrow \tilde{D}$, 要求 $\beta_x(K_x) = \tilde{K}$, 将圆盘 D 的实部映到 \tilde{D} 的实部 (保序), 并且限制在边界的映射与 x 选取无关.

定义 $\tilde{H}_i := H([i, i+1])$, 我们得到 $B_n[\tilde{D}, \tilde{K}]$ 的线性标架 $\tilde{H} = (\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1})$. 类似地, 设 $H_{x,i} = H([y_i(x), y_{i+1}(x)])$, 它给出了 $B_n[x \times D, K_x]$ 的标架. 辨群的典范同构 $\tilde{\beta}_x : B_n[x \times D, K_x] \rightarrow B_n[\tilde{D}, \tilde{K}]$ 正是由 $\tilde{\beta}_x(H_{x,i}) = \tilde{H}_i$ 给出.

为讨论方便, 我们不妨设每个 $x_i \in N$ 对应的垂直纤维上仅有 C 的一个奇点 A_j , 并设 Y_j 是 C 中所有过 A_j 的不可约分支的并. 设 $x'_j = x_i + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 充分小).

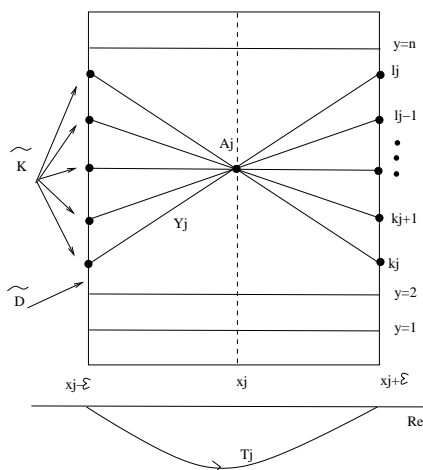
$$K'_{x'_j} := Y_j \cap (x'_j \times D) = \{y_{k_j}(x'_j), y_{k_j+1}(x'_j), \dots, y_{l_j}(x'_j)\}$$

恰好是序列 $K_{x'_j}$ 中一段相连的子序列. 我们把数组 (k_j, l_j) 称作 A_j 的 Lefschetz 配对 (Lefschetz pair). 直线段 $[y_{k_j+r-1}(x'_j), y_{k_j+r}(x'_j)]$ ($r = 1, \dots, l_j - k_j$) 显然表示了 $(x'_j \times D, K_{x'_j}, K'_{x'_j})$ 中的一个骨架, 我们称之为 A_j 的局部 Lefschetz 零化闭链 (Local Lefschetz vanishing cycle), 简记作 L.V.C. 它当然是由 Lefschetz 配对 (k_j, l_j) 唯一确定的, 并且给出了 $B_n[x'_j \times D, K'_{x'_j}]$ 的线性标架. 为方便起见, 我们把 A_j 的 L.V.C. 在 $\beta_{x'_j}$ 下的像简记为 $\langle k_j, l_j \rangle$, 它是 $(\tilde{D}, \tilde{K}, (k_j, \dots, l_j))$ 的骨架.



引理 3.3.1 设 T_j 是 $E - N$ 中从 $x_j - \varepsilon$ 到 $x_j + \varepsilon$, 沿着以 x_j 为圆心的下半圆周构成的道路. 那么 $\beta_{x_j+\varepsilon} \cdot \psi_{T_j} \cdot \beta_{x_j-\varepsilon}^{-1}$ 实现了关于骨架 $\langle k_j, l_j \rangle$ 的广义正半扭辫 $\Delta \langle k_j, l_j \rangle \in B_n[\tilde{D}, \tilde{K}]$, 这里 ψ_{T_j} 是 T_j 诱导的 Lefschetz 微分同胚.

证明 不妨假设 $x_j = 0$. 设 $E' = \{x \mid |x| \leq \varepsilon\}$. 我们可以适当扰动这些直线, 使得奇点不变, 并且 $D = \tilde{D}$, $K_{x_j-\varepsilon} = K_{x_j+\varepsilon} = \tilde{K}$. Y_j 的各分支皆可写成方程 $y = (r - \frac{l_j-k_j}{2})\frac{x}{\varepsilon} + \frac{l_j+k_j}{2}$. C 的其他分支则写成 $y = i$ ($i = 1, \dots, k_j - 1, l_j + 1, \dots, n$).



在这种简单情形下, 由直线方程可知, $\beta_{x_j+\varepsilon} \cdot \psi_{T_j} \cdot \beta_{x_j-\varepsilon}^{-1}$ 就是以 $\frac{l_j+k_j}{2}$ 为中心扭转点列 (k_j, \dots, l_j) 半圈, 即 $\Delta \langle k_j, l_j \rangle$. ■

由例 3.1.2, 我们有

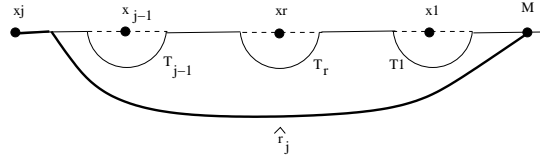
引理 3.3.2 设 $E'_j = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_j| \leq \varepsilon\}$, D'_j 是 y 轴上, 以 $y(A_j)$ 为圆心的圆盘, 使得 $C \cap (x \times D'_j) = Y_j \cap (x \times D'_j)$, $\varphi_{A_j} : \pi_1(E'_j - x_j, x_j) \rightarrow B_{m_j}[x'_j \times D'_j, K'_{x'_j}]$ 是 A_j 的局部辨单值. 那么 $\varphi_{A_j}(\partial E'_j) = \Delta^2 \langle \text{local L.V.C.}(A_j) \rangle = \Delta^2_{m_j}[x'_j \times D'_j, D'_{x'_j}]$.

设 T 是 $E - N - \text{int}(E'_j)$ 中连接 x'_j 到给定点 $M' \in E - N$. $L.V.C.(T)$ 是对应的 Lefschetz 零化闭链. 显然我们有 $L.V.C.(T) = (\text{local L.V.C.}(A_j))\psi_T$. 设 γ 是 $E - N$ 中连接 x_j 和 $M \in \partial E$ 的简单道路, 且包含线段 $[x_j, x'_j]$. 设 γ' 是 γ 的一部分, 它从 x'_j 到 M . 设 $\varphi : \pi_1(E - N, M) \rightarrow B_n[M \times D, K_M]$ 是 C 关于 $(E \times D, \pi_1, M)$ 的辨单值, $\Gamma \in \pi_1(E - N, M)$ 是 $l(\Gamma)$ 对应的元素.

推论 3.3.1 $\varphi(\Gamma) = \Delta^2 \langle L.V.C.(\gamma') \rangle$.

设 $N = \{x_1, \dots, x_q\}$, 并取定实坐标点 $M \in \partial E$, 要求 $x_q < x_{q-1} < \dots < x_1 < M$. 设 $\varepsilon > 0$ 是充分小数, T_j 是连接 $x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon$ 的下半圆周, γ_j 是从 x_j 到 M 的道路 (如图)

$$\gamma_j = [x_j, x_{j-1} - \varepsilon] \cdot T_{j-1} \cdot [x_{j-1} + \varepsilon, x_{j-2} - \varepsilon] \cdot T_{j-2} \cdots T_1 \cdot [x_1, M].$$



它在 $E - N$ 中显然同伦于 $\hat{\gamma}_j$ (在实轴下方连接 x_j, M 并且包含 $[x_j, x_j + \varepsilon]$ 的道路). $\langle \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_q \rangle$ 是 $E - N$ 的丛, 它诱导了 $\pi_1(E - N, M)$ 的 g -基 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$. 设 γ'_j (相应地, $\hat{\gamma}'_j$) 是 γ_j (相应地, $\hat{\gamma}_j$) 的一部分, 连接 $x'_j := x_j + \varepsilon$ 到 M . 显然 $L.V.C.(\hat{\gamma}'_j) = L.V.C.(\gamma'_j)$.

我们仍假设 A_j 是 x_j 对应的唯一奇点, (k_j, l_j) 是 Lefschetz 配对, $\langle \tilde{D}, \tilde{K}, (k_j, k_j + 1, \dots, l_j) \rangle$ 中关于 A_j 的局部 L.V.C 的骨架.

由引理 3.3.1 及直接验证可得如下结论.

定理 3.3.1

$$L.V.C.(\hat{\gamma}'_j) = L.V.C.(\gamma'_j) = \begin{cases} \beta_M^{-1} \left(\langle k_j, l_j \rangle \prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle \right), & j > 1, \\ \beta_M^{-1} (\langle k_j, l_j \rangle), & j = 1. \end{cases}$$

这里

$$\prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle := \Delta \langle k_{j-1}, l_{j-1} \rangle \cdot \Delta \langle k_{j-2}, l_{j-2} \rangle \cdots \Delta \langle k_1, l_1 \rangle.$$

推论 3.3.2 设 $\varphi : \pi_1(E - N, M) \rightarrow B_n[M \times D, K_M]$ 是 C 关于 $(E \times D, \pi_1, M)$ 的辨单值. 对任何 $j = 1, 2, \dots, q$, 我们有

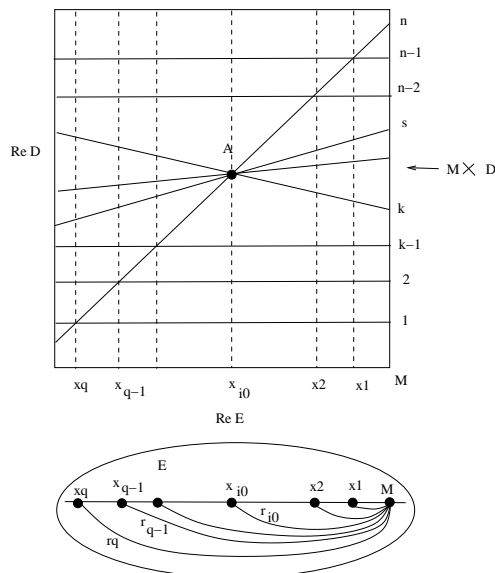
$$\varphi(\Gamma_i) = \overline{\beta_M^{-1}} \left(\prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle \right)^{-1} (\Delta^2 \langle k_i, l_i \rangle) \prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle.$$

证明 由推论 3.3.1 和定理 3.3.1, 我们有

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma_i) &= \Delta^2 \langle L.V.C.(\gamma_i) \rangle = \Delta^2 \langle \beta_M^{-1} (\langle k_j, l_j \rangle) \prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle \rangle \\ &= \overline{\beta_M^{-1}} (\Delta^2 \langle \langle k_j, l_j \rangle \rangle) \prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle. \end{aligned}$$

由习题 3.3, 即得所需结论. ■

我们考虑以下的实线排列 C . 这里 A 是一个奇点, 其中直线 L_k, L_{k+1}, \dots, L_s 及 L_n 是过 A 的全分支, 其余直线均为水平. C 的其他奇点都是结点, 并且这些结点恰好是 L_n 与那些不过 A 的直线相交得到. 这里设 $E = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x(A)| < \varepsilon\}$, $M = x(A) + \varepsilon$, $y_i(M) = L_i \cap (M \times D)$ (递增序列), $N = \{x_1, \dots, x_q\}$ (递减序列), 其中 $x_{i_0} = x(A)$. 对任何 $i \neq i_0$, 我们规定 $f(i)$ 如下: $x_i = x(L_{f(i)} \cap L_n)$.



设 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$ 是 $E - N$ 的丛, 这里道路 γ_i 连接 x_i 到 M , 且在实轴下方. 设 $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_q\}$ 是对应的 g -基 ($q = n - s + k - 1$). 考虑 Lefschetz 树 $L.V.C(\{\gamma_i\}_{i=1}^q) = \{\xi^{(i)}\}_{i=1}^q$. 由推论 3.3.1, $\varphi(\Gamma_i) = \Delta^2 \langle \xi^{(i)} \rangle$, 这里 $\varphi: \pi_1(E - N, M) \rightarrow B_n[M \times D, K_M]$ 是 C 的辨单值. 因此我们的目标是计算 $\xi^{(i)}$.

C 的各个奇点的 Lefschetz 配对所对应的局部 L.V.C 的骨架分别是

$$\langle k_i, l_i \rangle = \begin{cases} [n - i, n - i + 1], & 1 \leq i \leq n - s - 1, \\ [q - i + 1, q - i + 2], & n - s + 1 \leq i \leq q, \\ \{[k, k + 1], \dots, [s - 1, s], [s, s + 1]\}, & i = i_0 = n - s. \end{cases}$$

由定理 3.3.1.

$$\xi^{(j)} = L.V.C.(\hat{\gamma}'_j) = L.V.C.(\gamma'_j) = \begin{cases} \beta_M^{-1} \left(\langle k_j, l_j \rangle \prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle \right), & j > 1, \\ \beta_M^{-1} (\langle k_j, l_j \rangle), & j = 1. \end{cases}$$

以下两个简单引理, 我们留给读者验证.

引理 3.3.3 设 $\tilde{H}_i = H([i, i + 1]) \in B_n[\tilde{D}, \tilde{K}]$.

$$\prod_{m=j-1}^1 \Delta \langle k_m, l_m \rangle = \begin{cases} \tilde{H}_{n-i+1} \tilde{H}_{n-i+2} \cdots \tilde{H}_{n-1}, & 2 \leq i \leq i_0, \\ \tilde{H}_{q-i+2} \cdots \tilde{H}_{k-1} \Delta \langle k, s \rangle \tilde{H}_{s+1} \cdots \tilde{H}_{n-1}, & i_0 + 2 \leq i \leq q, \\ \Delta \langle k, s \rangle \tilde{H}_{s+1} \cdots \tilde{H}_{n-1}, & i = i_0 + 1. \end{cases}$$

引理 3.3.4 设 ζ_{ij} 是 \tilde{D} 中连接 i, j 的简单道路, 且要求落在实轴下方, $\langle \zeta_{ij} \rangle$ 是对应的同伦类. 那么

(1)

$$\langle \langle \zeta_{ij} \rangle \rangle \tilde{H}_r = \begin{cases} \langle \zeta_{i, j+1} \rangle, & r = j, \\ \langle \zeta_{i, j} \rangle, & r > j. \end{cases}$$

(2)

$$\langle \langle \zeta_{ij} \rangle \rangle \Delta \langle k, s \rangle = \begin{cases} \langle \zeta_{is} \rangle, & j = k, \\ \langle \zeta_{ij} \rangle, & j < k. \end{cases}$$

由这两个引理, 我们得到以下结论.

定理 3.3.2 在以上假设与记号下, 我们有

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} \langle \underline{Z}_{f^{(i)},n} \rangle, & i \neq i_0, \\ \langle [y_k(M), y_{k+1}(M)], \dots, [y_{s-1}(M), y_s(M)], \underline{Z}_{s,n} \rangle, & i = i_0, \end{cases}$$

此处 $\underline{Z}_{i,n}$ 是 $M \times D$ 中连接 $y_i(M), y_j(M)$ 且落在实轴下方的简单道路, 即满足 $\beta_M(\underline{Z}_{i,n}) = \zeta_{ij}$.

特别地, $\varphi(\Gamma_i) = \Delta^2 \langle \xi^{(i)} \rangle$.

3.4 一般线排列的辫单值

如果一个线排列只含结点作为其奇点, 我们就说这是一般线排列 (Generic line arrangement). 这相当于说, 所有的直线处于一般位置. 由命题 3.1.1 和例 3.1.1, 一般线排列的辫单值的乘积形式都可写为

$$\Delta_n^2 = \prod_i (Q_i^{-1} H_1^2 Q_i), \quad (3-2)$$

这里 H_1 是 B_n 中某个正半扭辫 (也可参见习题 3.2).

引理 3.4.1 设 C 是 n 次一般线排列, $\Delta_n^2 = \prod_i (Q_i^{-1} H_1^2 Q_i)$ 是辫单值 φ 的某个乘积形式, $b \in B_n[M \times D, C \cap (M \times D)]$ (这里 $M \in \partial E$). 那么存在 $\pi_1(E - N, M)$ 的一组 g -基, 使得辫单值在该基下对应的乘积形式恰好是

$$\Delta_n^2 = \prod_i (b^{-1} (Q_i^{-1} H_1^2 Q_i) b). \quad (3-3)$$

特别地, 这两个乘积式是 Δ_n^2 的等价分解.

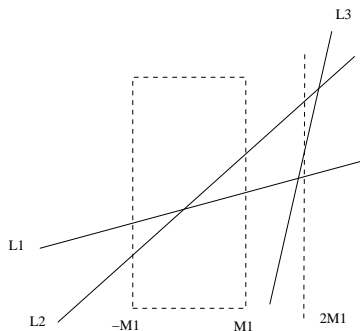
证明 设 $K = C \cap (M \times D)$, b 对应了 $(M \times D, K)$ 的一个运动 $\mathcal{M} = \{y_i(t)\}_{i=1}^n$, 使得 $y_i(0) = y_i(1)$. 我们可以构造连续形变的一般线排列族 $\{C(t)\}_{t \in [0,1]}$, 满足 $C(0) = C(1)$, $K(t) := C(t) \cap \pi_1^{-1}(M)$ 恰好就是运动 \mathcal{M} . 进一步, 我们可设 $N(t) = \{x \in \mathbb{C} \mid \sharp(\pi_1^{-1}(x) \cap C(t)) < n\}$ 始终在 E 的内部, $\pi_1^{-1}(x) \cap C(t)$ 也始终在 D 的内部, 并且 $\pi_1^{-1}(x) \cap C(t)$ 至多只含一个奇点 ($x \in E$).

设 $\{\Gamma_i\}_{i=1}^q$ 是对应乘积形式 (3-2) 的 g -基. 因此我们可以考虑该基的一组形变族 $\{\Gamma_i(t)\}_{i=1}^q$ ($\pi_1(E - N(t), M)$ 的 g -基) 使得 $\Gamma_i(0) = \Gamma_i(1)$, 以及 $C(t)$ 的辫单值 $\varphi_t : \pi_1(E - N(t), M) \rightarrow B_n[M \times D, K(t)]$. 运动 \mathcal{M} 也诱导了同构 $j_t : B_n[M \times D, K] \rightarrow B_n[M \times D, K(t)]$. 我们显然有 $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi$ 及 $j_t \varphi(\Gamma_i) = \varphi_t(\Gamma_i(t))$. j_1 显然是 $B_n[M \times D, K]$ 的内自同构, 即 $j_1(Q) = b^{-1} Q b$, $\forall Q \in B_n$. 现在我们有

$$\varphi(\Gamma_i(1)) = j_1(\varphi(\Gamma_i)) = b^{-1} \varphi(\Gamma_i) b = b^{-1} (Q_i^{-1} H_1^2 Q_i) b.$$

这样, $\{\Gamma_i(1)\}$ 就是我们需要的基, 它正好给出了乘积形式 (3-3). ■

我们首先考虑一种特殊的一般实线排列. 设 $C^{(k)} = L_1 \cup L_2 \cdots \cup L_k$, $E_k = \{x \in \mathbb{C} \mid |x_k| \leq M_k\}$, $N_k = \{x \in \mathbb{C} \mid \sharp(\pi^{-1}(x) \cap C^{(k)}) < k\}$, 这里 L_k 是直线, M_k 是常数, 并要求 N_k 含于 E_k 内部, L_k 则非常接近于垂直曲线 $x = 2M_{k+1}$.



我们取 $E = E_n, M = M_n, D = D_n, N = N_n$ 及 $K = C \cap (M \times D) = \{y_1, \dots, y_n\}$ (递增序列). 设 ℓ_{ij} 是 $M \times D$ 中连接 y_i, y_j 且落在实轴下方的简单道路, $\underline{Z}_{ij} = H(\ell_{ij}) \in B_n[M \times D, K]$. 设 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$ 是 $(E - N, M)$ 的丛, 诸道路分别连接 N 中的点和 N , $\langle \Gamma_1, \dots, \Gamma_q \rangle$ 是对应的 g -基.

命题 3.4.1 以上假设下, 辨单值关于 $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_q)$ 有乘积形式

$$\Delta_n^2 = \prod_{i=n}^2 \prod_{k=i-1}^1 \underline{Z}_{ki}^2.$$

(留给读者验证)

推论 3.4.1 设 C 是 n 次一般线排列, $H = (H_1, \dots, H_{n-1})$ 是 $B_n[M \times D, K]$ 的标架. 那么存在 $\pi_1(E - N, M)$ 中的 g -基, 使得辨单值在该基下的乘积形式恰好是

$$\Delta_n^2 = \prod_{i=n}^2 \prod_{k=i-1}^1 Z_{ki}(H)^2. \quad (3-4)$$

证明 首先, 我们通过连续形变, 将线排列归结成上面的特殊情形. 由命题 3.4.1, 存在一组标架 $H' = (H'_1, \dots, H'_{n-1})$ 使得

$$\Delta_n^2 = \prod_{i=n}^2 \prod_{k=i-1}^1 Z_{ki}(H')^2.$$

此时存在 $b \in B_n[M \times D, K]$, 使得 $H_i = bH'_i b^{-1}$. 由引理 3.4.1, 我们即找到所需要的基. ■

推论 3.4.2 对任何 n 次光滑平面曲线 C , 以下分解

$$\Delta_n^2 = (H_1 \cdots H_{n-1})^n = \underbrace{H_1 \cdots H_{n-1} \cdot H_1 \cdots H_{n-1} \cdots H_{n-1}}_{n(n-1) \text{ 个元}}$$

是辨单值的乘积形式.

证明 由连续形变, 我们可以把问题归结成一般线排列情形. 由习题 2.7, 式 (3-4) 右边和 $(H_1 \cdots H_{n-1})^n$ 的分解等价. 又由第 3.2 最末的讨论, 这意味着它也是辨单值的一个乘积形式. ■

本章习题

习题 3.1 验证引理 3.2.1.

习题 3.2 假设 C 是尖点曲线 (即只含结点和通常尖点), 证明: C 的辨单值的乘积形式必能写成 $\Delta_n^2 = \prod_i (Q_i^{-1} H_1^{\rho_i} Q_i)$, 这里 H_1 是正半扭瓣, $\rho_i = 1, 2, 3$.

习题 3.3 设 $\langle \xi \rangle$ 是辫群 $B_n[D, K]$ 中的骨架, $Q \in B_n[D, K]$, 证明: $\Delta^2(\langle \xi \rangle Q) = Q^{-1} \Delta^2(\langle \xi \rangle) Q$.

习题 3.4 验证引理 3.3.4 和引理 3.3.4 的结论.

习题 3.5 验证命题 3.4.1.

第四章 Zariski Van-Kampen 定理

4.1 Van-Kampen 定理

下面我们用融合积的语言重新回顾基本群的 Van-Kampen 定理.

设 X 是道路连通拓扑空间, U_1, U_2 是 X 的道路连通开集, $b \in U_{12} := U_1 \cap U_2$ 是给定点, 并满足

- (1) $U_1 \cup U_2 = X$,
- (2) U_{12} 也是道路连通的.

设 $i_k : U_{12} \rightarrow U_k$ 及 $j_k : U_k \rightarrow X$ 均为包含映射, $i_{k*} : \pi_1(U_{12}, b) \rightarrow \pi_1(U_k, b)$ 及 $j_{k*} : \pi_1(U_k, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ 是诱导的基本群同态 ($k = 1, 2$).

定理 4.1.1 在上述假设条件下, $(\pi_1(X, b), j_{1*}, j_{2*})$ 是 i_{1*}, i_{2*} 的融合积.

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(U_1, b) & \\
 i_{1*} \nearrow & & \searrow j_{1*} \\
 \pi_1(U_{12}, b) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(X, b) \\
 i_{2*} \searrow & & \nearrow j_{2*} \\
 & \pi_1(U_2, b) &
 \end{array}$$

例 4.1.1 (1) 考虑 n 个依次相切的圆周 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$, 由 Van-Kampen 定理,

$$\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1) \cong \mathbb{F}_n.$$

(2) 设 $\Sigma = \{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq \mathbb{C}$, 那么

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Sigma) \cong \mathbb{F}_n.$$

(3) 设 $\Sigma = \{p_1, \cdots, p_n\} \subseteq \mathbb{C}P^1$, 则有

$$\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \Sigma) \cong \mathbb{F}_{n-1}.$$

4.2 局部平凡纤维空间

设 $p : E \rightarrow B$ 是局部平凡纤维空间, $s : B \rightarrow E$ 是截面, 即满足 $p \circ s = \text{id}_B$. 设 $b \in B$, $\tilde{b} = s(b)$ 是给定点, $F_b = p^{-1}(b)$. 设 $u : I \rightarrow B$ 是以 b 为基点的环路, $w : I \rightarrow F_b$ 是以 \tilde{b} 为基点的环路, 这里 $I = [0, 1]$ 是单位区间. 对每个 $t \in I$, 我们可以连续地变形 w 为 $p^{-1}(u(t))$ 中以 $s(u(t))$ 为基点的环路 $w_t : I \rightarrow p^{-1}(u(t))$. 显然 w_1 代表了 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 中的元素, 我们把它记作 $[w]^{[u]}$. 这样, 我们就定义了 $\pi_1(B, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的单值作用 (Monodromy action).

命题 4.2.1 假设 E 是道路连通的, 那么我们有同构

$$\pi_1(E, \tilde{b}) = \pi_1(F_b, \tilde{b}) \rtimes \pi_1(B, b),$$

这里半直积来自于 $\pi_1(B, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的单值作用.

证明 设 $i : F_b \hookrightarrow E$ 是包含映射. 我们有同伦群的正合列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_2(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_2(B, b) \rightarrow \pi_1(F_b, \tilde{b}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, \tilde{b}) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 1.$$

截面诱导的同态 $s_* : \pi_k(B, b) \rightarrow \pi_k(E, \tilde{b})$ ($k = 1, 2$) 满足 $p_* \circ s_* = \text{id}$. 因而 p_* 是满射, 这就推出短正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(F_b, \tilde{b}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, \tilde{b}) \xrightarrow[p_*]{s_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 1. \quad (4-1)$$

不妨将 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 视为 $\pi_1(E, \tilde{b})$ 的正规子群. 由命题 1.1.3, 这就得到同构

$$\pi_1(E, \tilde{b}) \cong \pi_1(F_b, \tilde{b}) \rtimes \pi_1(B, b), \quad w \rightarrow (w \cdot s_*(p_*(w))^{-1}, p_*(w)), \quad w \in \pi_1(E, \tilde{b}).$$

其逆映射为 $(\gamma, u) \rightarrow i(\gamma) \cdot s_*(u)$, 这里的半直积来自于 $\pi_1(B, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的作用

$$\gamma \longrightarrow s_*(u)^{-1} \cdot \gamma \cdot s_*(u), \quad u \in \pi_1(B, b), \quad \gamma \in \pi_1(F_b, \tilde{b}).$$

可以验证, 单值作用与上述定义的作用一致. ■

注 4.2.1 上述结论也可以看成后文所述的 Zariski Van-Kampen 定理在局部平凡纤维空间情形的特殊形式, 它等价于同伦群正合列 (4-1). ■

我们可以用局部平凡纤维空间的单值作用来重新解释前面所讲的辨单值. 设 D 是复平面内以原点为圆心半径为 R 的开圆盘 (R 是充分大正数),

$$M'_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in D^n \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}, \quad \overline{M}'_n := M'_n / S_n,$$

这里 S_n 是 n 阶置换群. 辨群 $B_n \cong \pi_1(\overline{M}'_n, K)$ (见第 2.2 节). 设

$$\mathcal{C}' = \{(K, u) \mid \overline{M}'_n \times \overline{D} \mid u \notin K\},$$

这里 \overline{D} 是对应的闭圆盘.

我们可以诱导局部平凡纤维空间

$$p : \mathcal{C}' \longrightarrow \overline{M}'_n.$$

取 u 为 \overline{D} 的固定边界点. 对任何 $K \in \overline{M}'_n$, 纤维 $p^{-1}(K)$ 是挖掉 K 的闭圆盘 $\overline{D} - K$, 其基本群 $\pi_1(\overline{D} - K, u)$ 就是自由群 \mathbb{F}_n . 考虑截面映射

$$s : \overline{M}'_n \longrightarrow \mathcal{C}', \quad K \rightarrow (K, u).$$

这样, 我们就诱导了辨群 $B_n = \pi_1(\overline{M}'_n, K)$ 在自由群 $\pi_1(\overline{D} - K, s(K))$ 上的单值作用, 即前面说的辨单值.

4.3 补空间的基本群

设 M 是连通复流形, V 是 M 的非平凡解析闭子簇, $i : M - V \hookrightarrow M$ 是包含映射, $b \in M - V$. 我们有诱导的同态

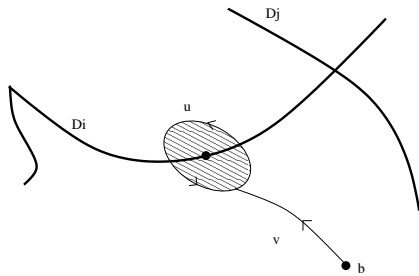
$$i_* : \pi_1(M - V, b) \longrightarrow \pi_1(M, b).$$

引理 4.3.1 上述同态 i_* 是满射. 特别地, 如果 V 的复余维数大于等于 2, 那么该同态也是同构.

证明 设 $\gamma : I \rightarrow M$ 是任何以 b 为基点的环路. 因为 V 的实余维数大于等于 2, 所以我们可以扰动 γ , 使得新环路 γ' 与 V 不相交, 从而 $[\gamma'] \in \pi_1(M - V, b)$, 并且 $[\gamma] = [\gamma'] \in \pi_1(M, b)$. 这就证明了 i_* 是满射.

假设 V 的复余维数大于等于 2, 则其实余维数至少是 4. 设 $\sigma : I \rightarrow M - V$ 是一个环路, 使得 $[\sigma] \in \text{Ker} i_*$, 即 σ 在 M 中同伦等价于零环路 0_b . 因此我们有同伦映射 $F : I \times I \rightarrow M$, 使得 $F|_{I \times \{0\}} = g, F|_{I \times \{1\}} = 0_b$. 因为实余维数大于等于 4, 所以 F 可以扰动到新的同伦映射 $F' : I \times I \rightarrow M$ 同样满足以上要求, 并且 F' 的像与 V 不相交. 这就推出 σ 在 $M - V$ 中也同伦于零环路. ■

我们的下一个目标就是研究 M 的余维数 1 闭子簇情形中上述同态 i_* 的核. 不妨假设 $V = \sum_{i=1}^n V_i$ 是超曲面, 其中 V_i 是不可约分支, $V_i^0 = V_i - (V_i \cap \text{sing} V)$. 任取一点 $p \in V_i^0$, 我们找 M 中的一个圆盘 Δ , 使得 V_i 与 Δ 横截相交于 p (无其他交点). 将 Δ 边界看作一个环路 $u : I \rightarrow \partial\Delta$. 取道路 v 连接 b 到 $u(0) = u(1)$. 这样我们就得到 $M - V$ 中的环路 vuv^{-1} , 称之为 V_i 的套索 (Lasso) 或经线 (Meridian).

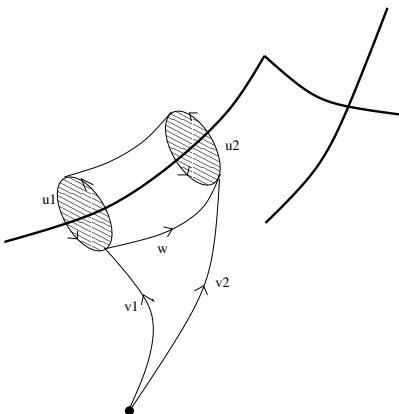


引理 4.3.2 V_i 的任何两个套索都在 $\pi_1(M - V, b)$ 中共轭. 反之, V_i 的任一套索在 $\pi_1(M - V, b)$ 中的共轭元也是 V_i 的套索. 因此 V_i 的套索同伦类全体构成了 $\pi_1(M - V, b)$ 的一个共轭类.

证明 设 $v_1 u_1 v_1^{-1}, v_2 u_2 v_2^{-1}$ 分别是 V_i 的两个套索. 由 V_i^0 的连通性, 我们可构造同伦映射 $F : I \times I \rightarrow M - V$, 使得 $F|_{I \times \{0\}} = u_1, F|_{I \times \{1\}} = u_2, F(0, s) = F(1, s), \forall s \in I$. 考虑从 $u_1(0)$ 到 $u_2(0)$ 的道路 $w : I \rightarrow M - V. w(s) = F(0, s)$. 注意到 u_1 与 $w u_2 w^{-1}$ 在 $M - V$ 中同伦, 因此我们有

$$[v_1 u_1 v_1^{-1}] = [v_1 w u_2 w^{-1} v_1^{-1}] = [(v_1 w v_2^{-1})(v_2 u_2 v_2^{-1})(v_1 w v_2^{-1})^{-1}] \in \pi_1(M - V, b).$$

这表明两个套索彼此共轭.



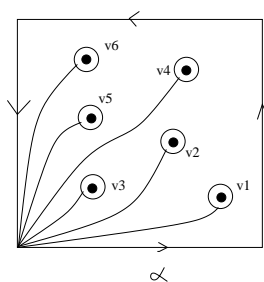
反过来, 给定 V_i 的套索 vwv^{-1} 以及以 b 为基点的环路 $w : I \rightarrow M - V$, $w(vwv^{-1})w^{-1} = (wv)u(wv)^{-1}$ 显然也是 V_i 的一个套索. ■

命题 4.3.1 $i_* : \pi_1(M - V, b) \rightarrow \pi_1(M, b)$ 的核恰好是 $\pi_1(M - V, b)$ 中包含 $\Sigma(V_1) \cup \dots \cup \Sigma(V_n)$ 的最小子群, 这里 $\Sigma(V_i)$ 是 V_i 的套索的共轭类.

证明 任何 V_i 的套索在 M 中都同伦于零环路, 因而 $\Sigma(V_i)$ 含于 $\text{Ker}i_*$ 中.

设 $\gamma : I \rightarrow M - V$ 是以 b 为基点的环路, 对应 $\text{Ker}i_*$ 中的元素, 即在 M 中同伦于零环路. 考虑定端同伦映射 $F : I \times I \rightarrow M$, 使得 $F|_{I \times \{0\}} = \gamma$, $F|_{I \times \{1\}} = 0_b$. 我们可以扰动 F 成新的同伦映射 $G : I \times I \rightarrow M$, 保持以上诸要求, 并且 $\text{Im}(G)$ 与 V 不相交 (注意到 $\text{Sing}(V)$ 余维数至少是 2), $G(\partial(I \times I))$ 与 V 不相交, $\text{Im}(G)$ 与 V 正常交.

设 $G^{-1}(V) = \{q_1, \dots, q_l\}$. 对每个 q_i , 我们在 $I \times I$ 中构造一个以 $(0, 0)$ 为基点的套索 v_i . 设 $\alpha : I \rightarrow I \times I$ 是以 $(0, 0)$ 为基点围绕单位正方形边界逆时针绕行的环路.



显然, α 在 $I \times I - G^{-1}(V)$ 中同伦于诸套索 v_i 的乘积. 注意到 $G \circ v_i$ 是 V 的一些不可约分支上的套索或其逆 (视方向而定), 而 γ 在 $M - V$ 中同伦等价于 $G \circ (\alpha^{-1})$, 这就推知 γ 同伦等价于这些 $G \circ v_i$ 的乘积. 因而 $[\gamma]$ 含于由 $\cup \Sigma(V_i) \subseteq \pi_1(M - V, b)$ 生成子最小子群. ■

推论 4.3.1 假设 V_1 是 V 的光滑不可约分支. 我们取 V_1 的一个合适的管状邻域 W , 并假设 V 在 W 中是正规交的. 设 γ 是 V_1 的套索. 那么

$$\pi_1(W - V) \longrightarrow \pi_1(W)$$

是满射, 其核就是 γ 生成的子群, 因而 $\gamma \in \pi_1(W - V)$ 是中心的.

推论 4.3.2 设 $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ 是万有覆盖, $\widetilde{V} = p^{-1}(V)$, 则有正合列

$$1 \rightarrow \pi_1(\widetilde{M} - \widetilde{V}) \rightarrow \pi_1(M - V) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow 1.$$

证明 考虑如下两行正合列的交换图.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & \pi_1(\widetilde{M} - \widetilde{V}) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(\widetilde{V}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ 1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \pi_1(M - V) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(M) \longrightarrow 1 \end{array}$$

显见 $K_1 \rightarrow K_2$ 是单射. 因为 p 是无分歧覆盖, 故由命题 4.3.1, 可知 $K_1 \cong K_2$. 由于 $\pi_1(\widetilde{M}) = \{1\}$, 所以 $K_1 \cong \pi_1(\widetilde{M} - \widetilde{V})$. 这就证明了结论. ■

4.4 Zariski Van-Kampen 定理

这一节中, 我们总假设 $f : M \rightarrow C$ 是全纯满态射, 其中 M 是连通复流形, C 是 1 维单连通复流形, 并且存在全纯的截面映射 $s : C \rightarrow M$ 使得 $f \circ s = \text{id}$. 进一步, 假设存在有限点集 $Z = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq C$, 使得

$$f_0 : M_0 := f^{-1}(C - Z) \rightarrow C_0 := C - Z$$

是局部平凡纤维空间 (仅需拓扑意义下). 设 $b \in C_0$, $\tilde{b} = s(b) \in M_0$, $F_b = f^{-1}(b)$ 是纤维, $i : F_b \hookrightarrow M$ 是包含映射. 易知 M_0, F_b 都是道路连通的.

基本群 $\pi_1(C_0, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的作用写为

$$a \mapsto a^\mu, \quad a \in \pi_1(F_b, \tilde{b}), \mu \in \pi_1(C_0, b).$$

定理 4.4.1 (Zariski Van-Kampen 定理) (1) 在上述假设条件下, 我们有满态射

$$i_* : \pi_1(F_b, \tilde{b}) \rightarrow \pi_1(M, \tilde{b}).$$

(2) 进一步假设对每个 $p \in Z$, $f^{-1}(p)$ 都是不可约的, 那么核 $\text{Ker} i_*$ 是 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 中包含以下集合的最小子群

$$S = \{a^{-1}a^\mu \mid a \in \pi_1(F_b, \tilde{b}), \mu \in \pi_1(C - Z, b)\}.$$

证明 设 $D_i = f^{-1}(a_i)$. $s : C \rightarrow M$ 定义的截面与每个 D_i 正常交于一个光滑点, 因此 D_i 有唯一的不可约分支 D_i^1 经过该交点, 我们将 D_i 中其他分支记作 D_i^2 . 设

$$M' = M - \bigcup_i D_i^2,$$

$f' : M' \rightarrow C$ 是限制映射. 此时我们仍然有截面映射 $s : C \rightarrow M'$. 注意到 f' 满足命题 (1)(2) 的全部条件, 并且我们有满同态 $\pi_1(M', \tilde{b}) \rightarrow \pi_1(M, \tilde{b})$ (引理 4.3.1), 因此为了证明 (1), 我们只需要证明 (2) 就足够了.

以下我们不妨假设 $f : M \rightarrow C$ 满足命题 (2) 的条件. 设 $s_0 : C_0 \rightarrow M_0$ 是截面映射的限制, $i_0 : F_b \hookrightarrow M_0$ 和 $j : M_0 \hookrightarrow M$ 是包含映射. 由命题 4.2.1, 我们有同构

$$\pi_1(F_b, \tilde{b}) \rtimes \pi_1(C_0, b) \longrightarrow \pi_1(M_0, \tilde{b}), \quad (w, \mu) \mapsto i_{0*}(w)s_{0*}(\mu).$$

设 $g_i : I \rightarrow C_0$ 是以 b 为基点, 围绕 a_i 套索. 由 C 的单连通性可知 $\pi_1(C_0, b)$ 由这些套索生成. 另一方面, $s_0 \circ g_i$ 也是以 \tilde{b} 为基点围绕 D_i 的套索. 由命题 4.3.1 及假设条件, $j_* : \pi_1(M_0, \tilde{b}) \rightarrow \pi_1(M, \tilde{b})$ 的核就是 $\pi_1(M_0, \tilde{b})$ 中包含 $s_{0*}[g_i]$ 的共轭类的最小子群, 即包含 $\text{Im} s_{0*}$ 的最小正规子群.

现在我们有以下的交换图, 其中纵横列都是短正合列.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{Ker } j_* & & \\
 & & & & \downarrow & \swarrow s_{0*} & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(F_b, \tilde{b}) & \xrightarrow{i_{0*}} & \pi_1(M_0, \tilde{b}) & \xrightarrow{f_{0*}} & \pi_1(C_0, b) \longrightarrow 1 \\
 & & \searrow i_* & & \downarrow j_* & & \\
 & & & & \pi_1(M, \tilde{b}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

回顾命题 1.1.4 的记号, 令 $N = \pi_1(F_b, \tilde{b})$, $H = \pi_1(C_0, b)$, $K = \text{Ker } j_*$, 则由命题 1.1.4 立得结论. ■

推论 4.4.1 在以上定理 (2) 的假设条件下, 如果 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 是由 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 生成的自由群, $\pi_1(C_0, b)$ 由 g_1, \dots, g_n 生成, 那么 $\pi_1(M, \tilde{b})$ 可实现为

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_d \mid \alpha_i^{g_j} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, n \rangle.$$

证明 见习题 1.3. ■

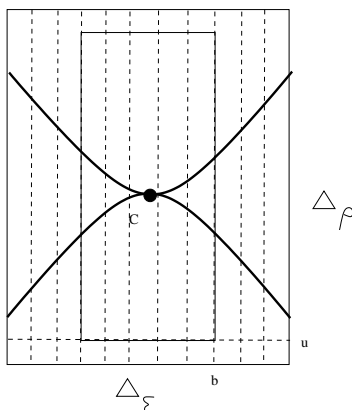
注 4.4.1 定理中的基本群生成元 α_i 有时也被称为几何生成元 (Geometric generator). ■

4.5 曲线奇点的单值和基本群

设 $\Delta_\varepsilon, \Delta_\rho$ 是复平面内以原点为圆心半径分别为 ε, ρ (充分小正数) 的开圆盘. 设 C 是 $\Delta_\varepsilon \times \Delta_\rho$ 内的局部曲线, 局部方程为 $f(x, y) = 0$, 且在 $(0, 0)$ 之外处处光滑. 设投影 $\bar{p}: \Delta_\varepsilon \times \Delta_\rho \rightarrow \Delta_\varepsilon$,

$$Y = \bar{p}^{-1}(\Delta_\varepsilon^*) \cap (\Delta_\varepsilon \times \Delta_\rho - C),$$

这里 $\Delta_\varepsilon^* = \Delta_\varepsilon - \{0\}$. 通过限制到 Y 上, 我们得到局部平凡纤维空间 $p: Y \rightarrow \Delta_\varepsilon^*$. 通过取合适的 ε, ρ , 我们还可以假设限制投影 $C - \{0, 0\} \rightarrow \Delta_\varepsilon^*$ 是平坦的, 并且 $C \cap \bar{p}^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. 取 Δ_ε^* 内固定点 $b = \frac{\varepsilon}{2}$, 再取 Δ_ρ 内固定点 u , 使得对任意点 $x \in \Delta_\varepsilon^*$, $C \cap \bar{p}^{-1}(x)$ 都落在圆盘 $\Delta_{|u|} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |u|\}$ 内.

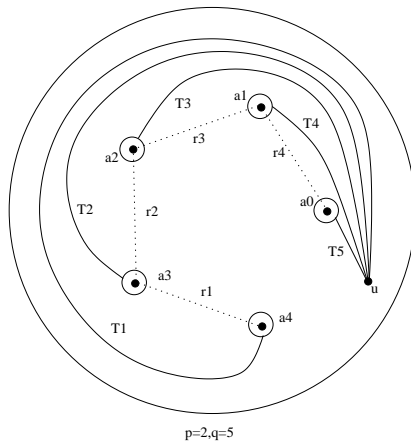


我们有一个截面映射 $s : \Delta_\varepsilon \rightarrow Y, x \rightarrow (x, u)$. 设 $F_b = p^{-1}(b), \tilde{b} = s(b)$, 我们得到 $\pi_1(\Delta_\varepsilon^*, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的单值作用.

例 4.5.1 设 C 的局部方程是 $x^p - y^q = 0$, 其中 p, q 是互素的正整数. $\gamma \in \pi_1(\Delta_\varepsilon^*, b)$ 对应的道路取为 $\gamma(t) = \frac{\varepsilon}{2} e^{2\pi i t}$. 纤维 F_b 同胚于 $\Delta_\rho - K$, 这里

$$K = \{a_k \in \Delta_\rho \mid a_k = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p/q} \cdot e^{2k\pi i p/q}, \quad k = 0, \dots, q-1\}.$$

设 γ_i 是连接 a_{q-i-1}, a_{q-i} 的线段, (T_1, \dots, T_n) 是 $\Delta_\rho - K$ 中以 u 为基点的丛, 其中 T_i 连接 u 到 a_{q-k} , 它们满足式 2-1 诸要求. 此时我们得到辫群的一组线性标架 (H_1, \dots, H_{q-1}) .



$\pi_1(\Delta_\varepsilon, b)$ 在 $\pi_1(F_b, \tilde{b})$ 上的单值作用就是 $(H_1 \cdots H_{q-1})^p$ 右作用在上述 g -基上.

上述结论对 p, q 不互素的情形也成立. 这是因为该单值作用相当于 $(1, q)$ 情形的单值作用复合 p 次 (从 p -次基变换角度看). 特别地, $x^q - y^q = 0$ 对应的单值作用就是 Dehn-扭转 $\Delta_q^2[\Delta_\rho, K]$ (见命题 2.7.1). ■

设 $X = \Delta_\varepsilon \times \Delta_\rho - C$, 考虑投影映射 $p : X \rightarrow \Delta_\varepsilon$. $\pi_1(F_b, u)$ 是由 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 生成的自由群, $\pi_1(\Delta_\varepsilon^*, b) = \langle \gamma \rangle$. 由推论 4.4.1, 我们有

$$\pi_1(X) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_d \mid \alpha_i^\gamma = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d \rangle.$$

例 4.5.2 我们仍讨论例 4.5.1 的情形 (p, q 互素). 设 $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q-1})$ 是对应丛 (T_1, \dots, T_{q-1}) 的 g -基, $\alpha = \Gamma_1 \cdots \Gamma_q$. 为方便讨论, 我们规定 $\Gamma_{j-aq} = \alpha^a \Gamma_j \alpha^{-a}, \forall a \in \mathbb{Z}$. 设 $\beta = \Gamma_{q-p+1} \Gamma_{q-p+2} \cdots \Gamma_q$.

取整数 A_j, B_j 满足 $A_j q + B_j p = j$. 可以验证如下等式

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \alpha^{A_1 + A_{q-j}} \beta^{B_1} \alpha^{-A_{q-j}}, \\ \alpha^p &= \beta^q. \end{aligned} \tag{4-2}$$

因此, $\pi_1(X) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^p = \beta^q \rangle$. 特别地, 通常尖点的基本群是 $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 \rangle$. ■

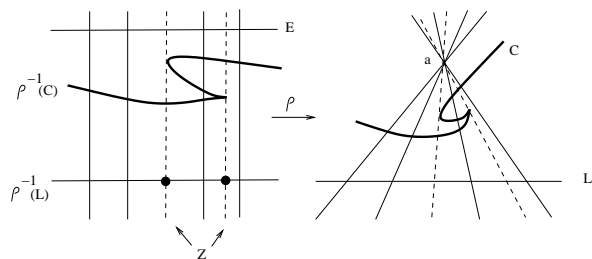
注 4.5.1 曲线结点 $x^2 - y^2 = 0$ 的基本群是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ■

4.6 平面曲线的基本群

设 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 是由方程 $F(X, Y, Z) = 0$ 定义的 d 次既约平面代数曲线. 通过一个合适的坐标

变换, 我们可以假设 $a = [0, 0, 1]$ 不落在 C 上, 换言之 F 中出现 Z^d 项. 设 L 是由 $Z = 0$ 定义的直线.

现在我们考虑爆发 $\rho: (\bar{X}, E) \rightarrow (\mathbb{P}^2, a)$, $E = \rho^{-1}(a)$. 设 $X = \bar{X} - \rho^{-1}(C)$, $f: X \rightarrow L$ 是自然诱导的投影映射. f 限制在 C 上就是一个到 L 的有限覆盖. 设 $Z \subseteq L$ 是 $f|_C: C \rightarrow L$ 的分歧点和奇点对应的 L 上的像点集.



因为 $X - E \cong \mathbb{P}^2 - (C \cup \{a\})$, 所以由引理 4.3.1, 我们有以下正合列交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(X - E) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}^2 - (C \cup \{a\})) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(X) & \xrightarrow{(\rho|_X)_*} & \pi_1(\mathbb{P}^2 - C) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

$f_0: X_0 := f^{-1}(L - Z) \rightarrow L_0 := L - Z$ 显然是局部平凡纤维空间, E 是 f 的截面. 设 $\tilde{b} \in E - (E \cap f^{-1}(Z))$, $b = f(\tilde{b})$. L 是单连通的, f 的每条纤维都是不可约的. 此外, $\pi_1(F, \tilde{b})$ 是由围绕 $F \cap \rho^{-1}(C)$ 中的 $d - 1$ 个点的套索 $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ 生成的自由群. 设 Z 由 e 个点构成, 因此 $\pi_1(L_0, b)$ 由围绕其中 $e - 1$ 个点的套索 $\gamma_1, \dots, \gamma_{e-1}$ 生成.

现在由 Zariski Van-Kampen 定理即得

定理 4.6.1

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \mid \alpha_i^{\gamma_j} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d-1, \quad j = 1, \dots, e-1 \rangle.$$

注 4.6.1 设 $x \in C$ 是奇点, U 是 x 的小邻域, 上面的讨论实际上也给出了一个同态 (依赖于路径的选取)

$$\psi: \pi_1(U - C) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 - C).$$

例 4.6.1 ([Shi07]) 考虑三次曲线 $C: Y^2Z = X^2(X + Z)$ 的对偶曲线 C^\vee :

$$G(U, V, W) := -4WU^3 + 36UV^2W - 27V^2W^2 - 8U^2V^2 + 4V^4 + 4U^4 = 0.$$

C^\vee 是带有三个尖点的四次曲线.

我们在 $a = [1, 0, 0] \in \mathbb{P}^2$ 处爆发. 由定理 4.6.1, 我们可得基本群

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C^\vee, a) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = (\beta\alpha)^2 \rangle.$$

注意到 $\beta^{-2} = (\beta^{-1}\alpha^2)^2 = (\beta^{-1}\alpha^3)^2 = \beta^2$, 所以 $\beta^4 = \alpha^6 = 1$, 因而上述基本群是 12 阶有限非交换群. ■

例 4.6.2 ([Bar97]) 设 $C_{d,a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ 是 d 有理尖点曲线 (即正规化后是有理曲线), $a \geq b > 0$ 满足 $a+b = d-2$. $C_{d,a,b}$ 带有三个尖点, 它们的 Puiseux 配对 (Puiseux pair) 分别是 $(d-1, d-2)$, $(2a+1, 2)$, $(2b+1, 2)$ (所谓 Puiseux 配对 (m, n) , 这里可理解为奇点在拓扑意义下等价于由局部方程 $x^m - y^n = 0$ 所定义). 此时我们有

$$G_{d,n} := \pi_1(\mathbb{P}^2 - C_{d,a,b}) = \langle c_1, c_2 \mid (c_2c_1)^{d-1} = c_2^{d-2}, \quad (c_2c_1)^n c_2 = c_1(c_2c_1)^n \rangle,$$

这里 $2n+1 = \gcd(2a+1, 2b+1)$. $C_{4,1,1}$ 就是例 4.6.1 所描述的带有三个尖点的四次曲线.

$G_{d,n}$ 只和 d, n 有关. 这个例子可以看到, 补空间基本群不能完全确定平面曲线奇点的类型和个数, 比如 $C_{13,10,1}$ 和 $C_{13,7,4}$ 有相同的基本群 $G_{13,1}$. ■

命题 4.6.1 例 4.6.2 所述曲线的补空间基本群 $G_{d,n}$ 满足以下性质:

- (1) $G_{d,n}$ 是交换群当且仅当 $n = 0$. 当 $n = 0$ 时, $G_{d,n}$ 是 d 次循环群;
- (2) 考虑群

$$T_{p,q,r} = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle.$$

当 $n > 0$ 时, $G_{d,n}$ 是 $T_{2,2n+1,d-2}$ 的中心扩张.

- (3) $(d, a, b) = (4, 1, 1)$ 对应的群 $G_{3,1}$ 是 12 阶非交换有限群; $(d, a, b) = (7, 4, 1)$ 对应的群 $G_{7,1}$ 是 840 阶非交换有限群;
- (4) 如果 $(d, a, b) \neq (4, 1, 1), (7, 4, 1)$ 且 $n > 0$, 那么 $G_{d,n}$ 是非交换无限群.

平面代数曲线的补空间基本群什么时候是交换群? 这是一个很有趣味的问题. 下面我们罗列一些经典的结果.

定理 4.6.2 (Zariski-Deligne-Fulton, [Zar71, Deg08, Ful80]) 如果 C 是一条平面结点曲线, 那么 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ 是交换群.

定理 4.6.3 (Nori, [Nor83]) 如果 C 是一条 d 次平面尖点曲线, 带有 c 个尖点, n 个结点, 且满足 $d^2 > 6c + 2n$ 及 $c > 0$, 那么 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ 是交换群.

定理 4.6.4 (Shimada, [Shi98]) 如果 C 是一条 d 次平面尖点曲线, 其中带有 n 个结点, 且满足 $2n \geq d^2 - 5d + 8$, 那么 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ 是交换群.

本章习题

习题 4.1 验证式 (4-2).

习题 4.2 验证命题 4.6.1.

第五章 曲面的一般覆盖

5.1 一些经典的射影簇

我们回顾几个经典的射影簇.

例 5.1.1 d 次 Veronese 映射

$$v_d: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad [X_0, \dots, X_n] \rightarrow [\dots X^I \dots], \quad N = \binom{n+d}{d} - 1,$$

这里 X^I 跑遍所有关于 X_0, \dots, X_n 的 d 次单项式. $\text{Im}v_d$ 称作 Veronese 簇. $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ 也简称作 Veronese 曲面. ■

例 5.1.2 Segre 映射

$$\sigma: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}, \quad [X_0, \dots, X_n] \times [Y_0, \dots, Y_m] \rightarrow [\dots X_i Y_j \dots],$$

这里 $X_i Y_j$ 跑遍所有的乘积. $\Sigma_{n,m} := \text{Im}\sigma$ 称作 Segre 簇. ■

例 5.1.3 设 $O = [a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n$ 是点, $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是由方程 $F(X_0, \dots, X_n) = 0$ 定义的超曲面. 我们定义配极算子 (Polarizing operator)

$$\Delta_O = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

$\Delta_O F = 0$ 定义了一个代数簇, 称作 X 的配极超曲面 (Polar hypersurface), 简记作 $\Delta_O X$, O 称作极点 (Pole). 若 X 是平面代数曲线 (相应地, \mathbb{P}^3 中的曲面), 则对应的配极超曲面也称做配极曲线 (相应地, 配极曲面). ■

例 5.1.4 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是光滑射影簇, $\Delta \subseteq X \times X$ 是对角线. 对任意 $(p, q) \in X \times X - \Delta$, 存在唯一的射影直线 $\langle p, q \rangle$ 经过 p, q , 我们称之为割线. X 的所有割线的并集构成 \mathbb{P}^n 中的代数簇, 称作 X 的割簇 (Secant variety) 或弦簇 (Chordal variety), 记作 $\text{Sec}(X)$. 如果一条割线只与 X 有两个交点, 就称之为双点割线 (Bisecant); 否则称为多点割线 (Multisecant). 类似地, 我们也可以定义三点割线 (Trisecant) 等等.

X 在每个点处的切空间的并集也构成一个簇, 称作切簇 (Tangential variety), 记作 $\text{Tan}(X)$. 以上各概念也可以推广到 X 是奇异簇的情形, 这里不再赘述. ■

例 5.1.5 考虑 Veronese 映射

$$v_2: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5, \quad [X, Y, Z] \rightarrow [X^2, Y^2, Z^2, XY, XZ, YZ].$$

取一点 $O = [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2$, 考虑 \mathbb{P}^5 的齐次坐标 $[U_0, \dots, U_5]$. $v_2(\mathbb{P}^2)$ 在点 $v_2(O)$ 处的切平面方程为

$$\begin{cases} U_0 + x^2 U_2 - 2x U_4 & = 0 \\ U_1 + y^2 U_2 - 2y U_5 & = 0, \\ xy U_2 + U_3 - y U_4 - x U_5 & = 0. \end{cases}$$

由此可得切簇方程

$$U_2U_3^2 + U_1U_4^2 + U_0U_5^2 = U_0U_1U_2 + 2U_3U_4U_5.$$

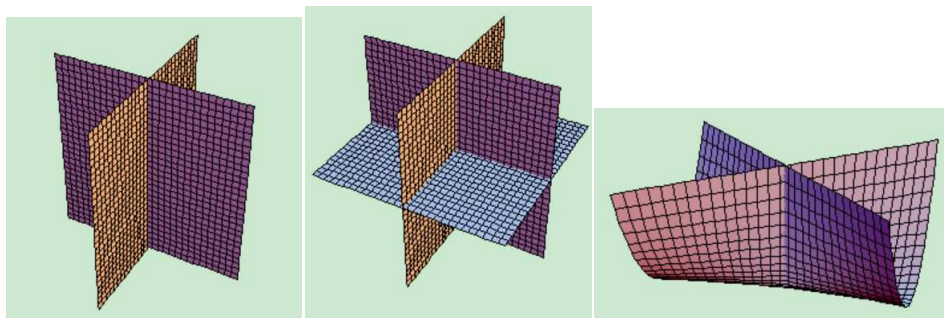
类似的方法可以证明, 其割簇和切簇相同, 因此也是由上述方程定义. ■

定义 5.1.1 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{P}^4$ 是非退化曲面 (可能奇异). 如果 $P \in \Sigma$ 是两个光滑分支的交点并且两个切平面横截相交, 我们就称之为非正常二重点 (Improper double point). 如果 Σ 最多只有非正常二重点, 我们就称其为 \mathbb{P}^4 中的一般曲面 (Generic surface).

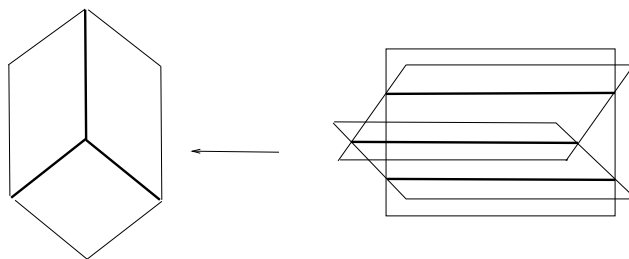
定义 5.1.2 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{P}^3$ 是超曲面. 如果它的奇点轨迹是一条曲线 Γ —称作 Σ 的二重曲线 (Double curve)—且满足以下条件, 我们就说 Σ 带有通常奇点 (Ordinary singularity):

- (1) Γ 最多只有有限个三重点 (Triple point), 其局部方程为 $xyz = 0$.
- (2) Γ 的光滑点要么是 Σ 的结点 (nodal point)—亦称横截二重点 (Transverse double point), 其局部方程为 $x^2 - y^2 = 0$; 要么是 Σ 的拧点 (Pinch point)—亦称平坦点 (Flat point) 或尖点 (Cuspidal point), 其局部方程为 $x^2 = zy^2$.
- (3) Γ 的任何不可约分支上的一般点都是结点, Σ 只有有限个拧点.

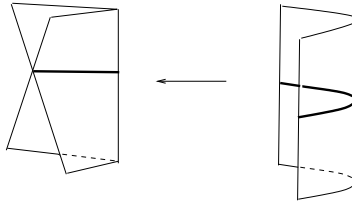
为方便起见, 我们也把光滑超曲面归入带通常奇点的超曲面. 以下是结点、三重点和拧点的局部图像.



例 5.1.6 这里我们具体实现带通常奇点的曲面 $S_0 \subseteq \mathbb{P}^3$ 的解消 (参见 [GH78, Ch. IV, Sec. 6.4]). 设 p_1, \dots, p_t 是 S_0 的三重点, 可考虑 \mathbb{P}^3 关于 p_1, \dots, p_t 的爆发 $\sigma_1: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$, $E_i \cong \mathbb{P}^2$ 是关于 p_i 的例外除子. 设 S_1 是 S 在爆发下的严格原像. 在每个 E_i 附近的邻域内, S_1 局部形状如图所示



设 $\pi_2: X \rightarrow Y$ 是沿着 S_1 的二重曲线 \tilde{C} 的爆发, \tilde{S} 是 S_1 的严格原像. 由 π_1 及通常二重点定义可知, \tilde{C} 是由一些光滑的不可约分支 \tilde{C}_i 构成. 设 D_i 是 \tilde{C}_i 的严格原像, 则 $\pi_2: D_i \rightarrow \tilde{C}_i$ 是二重覆盖, \tilde{C}_i 上的分歧点就是那些拧点.



因此, $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 : \tilde{S} \rightarrow S_0$ 是 S_0 的解消. ■

5.2 一般投影映射

例 5.2.1 设 $\Lambda = \mathbb{P}^k$ 是 \mathbb{P}^n 的给定子空间, \mathbb{P}^{n-k-1} 是它的一个补空间. 考虑以下映射

$$\pi_\Lambda : \mathbb{P}^n - \Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}, \quad q \rightarrow \overline{q, \Lambda} \cap \mathbb{P}^{n-k-1},$$

这里 $\overline{q, \Lambda}$ 是由 q, Λ 张成的空间. 假设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是任何与 Λ 不相交的代数簇, 那么 π_Λ 在 X 上的限制就诱导了正则映射, 它的像 $\pi_\Lambda(X)$ 就称作 X 从 Λ 到 \mathbb{P}^{n-k-1} 的投影 (Projection).

我们可以考虑如下特殊的投影. 取 $\Lambda = \{[X_0, \dots, X_n] \mid X_{k+1} = \dots = X_n = 0\}$, $\pi_\Lambda([X_0, \dots, X_n]) = [X_{k+1}, \dots, X_n]$. ■

我们也可以如下方式来写投影映射. 设 V 是 $n+1$ 维线性空间, W 是余维数为 $n-k$ 的线性子空间, $\Lambda = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^k$. 这样, 投影 $\pi : \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V/W)$ 就是由通常的线性空间投影 $V \rightarrow V/W$ 诱导. 如果 W 处于一般位置, $X \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$, 那么诱导的投影 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}(V/W)$ 就称作一般投影映射 (Generic projection map). 特别地, 如果 W 的余维数恰好是 $\dim X + 1$, 那么就得到一个有限覆盖 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim X}$, 其中 $\deg \pi = \deg X$, 我们就说 π 是 X 到 $\mathbb{P}^{\dim X}$ 的一般覆盖 (Generic cover). 容易看到, 对超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^n$, 投影 $\pi_\Lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 的分歧除子就是 X 和 $\Delta_O X$ 的交.

命题 5.2.1 任何正则映射 $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ 都可以由以下映射复合: Veronese 映射 $v_d : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$, 以 Λ 为中心的投影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{m'}$ (这里 Λ 与 Veronese 簇 $v_d(\mathbb{P}^n)$ 不相交), 包含映射 $i : \mathbb{P}^{m'} \hookrightarrow \mathbb{P}^m$.

命题 5.2.2 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是 r 维光滑簇, 且 $n \geq 2r + 2$, 那么存在点 $\Lambda \notin X$, 使得以 Λ 为极点的投影映射诱导了闭浸入 $\pi_\Lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$.

证明 割簇 $\text{Sec}(X)$ 局部地是以下映射的像

$$(X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad (p, q, t) \rightarrow t(\in \langle p, q \rangle).$$

因此 $\dim \text{Sec}(X) \leq 2r + 1$.

同样地, 切簇 $\text{Tan}(X)$ 局部上是 $X \times \mathbb{P}^r$ 的像, 因而维数不超过 $2r$. 这样, $\text{Sec}(X) \cup \text{Tan}(X) \neq \mathbb{P}^n$. 我们只需取点 Λ 不落在切簇和割簇中, 则得到闭浸入. ■

推论 5.2.1 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是 r 维光滑簇, 且 $n \geq 2r + 2$, 那么 X 同构于 \mathbb{P}^{2r+1} 中的光滑 r 维簇. 特别地, 任何光滑射影曲面都可以嵌入到 \mathbb{P}^5 中; 任何光滑曲线都可以嵌入到 \mathbb{P}^3 内.

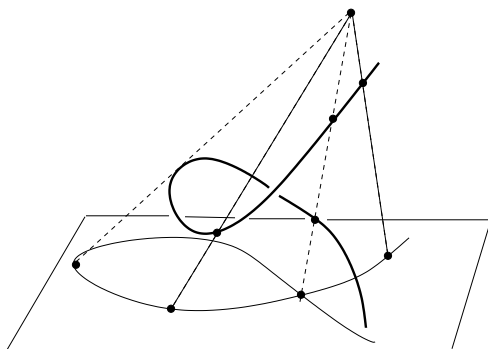
命题 5.2.3 设 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ 是非退化的光滑曲线, 那么存在 \mathbb{P}^3 中与 X 不相交的开集, 对其中任一点 Λ , 以 Λ 为极点的投影映射 $\pi_\Lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^{2r}$ 都是双有理态射, 并且其像曲线是最多带有有限多个结点.

证明 以下证明来自于 [Har77, Ch. IV, Sec. 3, page 310-314].

(1) 现先证明至少存在一条 X 的双点割线. 假设每条割线都是多点割线. 给定一点 $R \in X$, 考虑投影映射 $\psi : X - R \rightarrow \mathbb{P}^2$. 设 T 是 $\psi(X)$ 的光滑点. 由假设条件, $\psi^{-1}(T)$ 至少包含两个不同点 P, Q . 设 $T_P(X), T_Q(X)$ 是对应的切线. 因为这两个切空间都映到 $\psi(X) \subseteq \mathbb{P}^2$ 在 T 处的切线, 所以 $T_P(X), T_Q(X)$ 交于一点. 这一性质对几乎所有的点对 $(P, Q) \in X \times X$ 都成立, 所以这是一个开条件. 另一方面, $T_P(X), T_Q(X)$ 交于一点显然也是一个闭条件, 因而对任何 $P, Q \in X$, 其割线都满足该性质.

今取两个不同点 $P, Q \in X$, 设 $A = T_P(X) \cap T_Q(X)$, H 是 $T_P(X), T_Q(X)$ 张成的平面, 显然 $X \cap H$ 是有限个点. 对任何 $R \in X - X \cap H$, 切线 $T_R(X)$ 分别要与 $T_P(X), T_Q(X)$ 相交, 又因为 $T_R(X)$ 不落在平面 H 内, 这就迫使 $T_R(X)$ 经过 A . 注意到这个性质也是闭条件, 因而它对曲线上每个点都成立. 这样, 从 A 出发的投影要么将曲线映成一个点 (即 X 是退化直线), 要么处处分歧 (这在复数域上是不可能的), 因此都和命题假设矛盾. 这就证明了至少存在一条 X 的双点割线

(2) 由上讨论, X 有一条双点割线, 还有一条割线上有两割点对应的切线不相交. 稍微扰动这两类割线, 显然仍满足这样的性质, 因此 $X \times X$ 中有一个开集, 其中的每个点对 (P, Q) 对应的割线不但是双割线, 而且它们的切线不相交. 换言之, 不满足这个性质的点对最多只有 1 维, 从而过这些点对的割线的并集在 \mathbb{P}^2 中的维数至多是 2. 另一方面, 前面已证切簇 $\text{Tan}(X)$ 最多是 2 维的. 这样, 存在 \mathbb{P}^3 中的开集 U , 对任何 $\Lambda \in U$, 从 Λ 出发的任何射线都不与 X 相切, 其中的割线都是双点割线, 并且割点处的切线不相交. 这三个条件等价于说像曲线只有结点.



(3) 若割簇 $\text{Sec}(X)$ 维数不超过 2, 那么我们只需取 Λ 不落在割簇中即可. 今假设割簇就是 \mathbb{P}^3 . 此时, 我们有有限态射 $(X \times X - \Delta) \rightarrow \mathbb{P}^3$. 因此存在 \mathbb{P}^3 中的开集, 使得其中每个点的原像都由有限个点组成, 即这些点都只落在有限条割线上. 换言之, 一般位置的投影是双有理映射. ■

注 5.2.1 如果一条射影曲线 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 存在一个点 A , 使得点 A 落在所有 X 的切线中, 我们就说 X 是怪异的. 上述证明中, 我们已说明一条曲线如果没有双点割线的话, 则必是怪异的, 并且在复数域上这样的曲线只能是直线. [Sam66] 给了更一般的结论: 如果一条非直线的射影曲线是怪异的, 那么它一定是定义在特征为 2 的域上的平面圆锥曲线 (也可参见 [Har77, 定理 3.9]). ■

对 \mathbb{P}^5 中非退化光滑射影曲面的投影, 我们也有类似的结果.

例 5.2.2 设 $S = v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ 是 veronese 曲面, 取一点 $O = [1, 0, 0, 0, 0, 1]$. 由例 5.1.5, 以 O 为极点的投影将 S 光滑嵌入 \mathbb{P}^4 中, 其像曲面 Σ 是光滑四次曲面, 它的方程是

$$\begin{cases} U_0U_2U_4 + U_2^2U_3 - U_4^3 & = 0, \\ U_0U_1U_3 + U_1^2U_4 - U_3^3 & = 0, \\ U_0^2U_2 - U_1U_2^2 + U_2U_3U_4 - U_0U_4^2 & = 0, \\ U_0^2U_1 - U_2U_1^2 + U_1U_3U_4 - U_0U_3^2 & = 0, \\ U_1U_4^2 - U_2U_3^2 & = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

注 5.2.2 \mathbb{P}^5 中 Veronese 曲面投影到 \mathbb{P}^4 中的像也称做 \mathbb{P}^4 中的 Veronese 曲面. \blacksquare

命题 5.2.4 设 $S \subseteq \mathbb{P}^5$ 是非退化光滑射影曲面.

- (1) 一般投影 $S \rightarrow \mathbb{P}^4$ 的像曲面 Σ 是 \mathbb{P}^4 中的一般曲面.
- (2) ([MP97, 定理 3]) S 的一般投影的像曲面光滑当且仅当 $S = v_2(\mathbb{P}^2)$ 是 Veronese 曲面.

如果我们将曲面 $S \subseteq \mathbb{P}^5$ 先投影到 \mathbb{P}^4 中的一般曲面 Σ , 再将它一般投影到 \mathbb{P}^3 中, 那么像曲面带有通常奇点.

定理 5.2.1 (一般投影定理 [MP97]) 设 Σ 是 \mathbb{P}^4 中的一般曲面, 则一般投影 $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^3$ 的像曲面有通常奇点. 进一步, 若 Σ 不是 Veronese 曲面, 则其像曲面的二重曲线是不可约的; 否则二重曲线包含三条交于一点的异面直线.

特别地, 任何射影曲面都可以一般投影到 \mathbb{P}^3 中, 使得其像曲面带有通常奇点.

注 5.2.3 (1) 我们也可以直接将 S 一般投影到 \mathbb{P}^3 中, 即取某条一般位置的直线 L , 以 L 为极点作投影映射 $\pi_L: S \rightarrow \mathbb{P}^3$, 然后证明一般投影的像曲面 S_0 有通常奇点. 具体可参见 [GH78, Ch. IV, Sec 6.3].

(2) 由例 5.1.6, 我们可以得到同构

$$\tilde{S} - \pi^{-1}(\{p_1, \dots, p_t\}) \longrightarrow S - \pi_L^{-1}(\{p_1, \dots, p_t\}).$$

因此 $\tilde{S} \rightarrow S$ 实际上就是 S 在 $\pi_L^{-1}(\{p_1, \dots, p_t\})$ (共 $3t$ 个点) 上的爆发, $S \rightarrow S_0$ 是极小解消. \blacksquare

进一步, 我们可以将曲面投影到 \mathbb{P}^2 上, 这就诱导了一般覆盖 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$.

定理 5.2.2 (一般覆盖定理 [CF11]) 设 $S \subseteq \mathbb{P}^r$ 是光滑不可约射影曲面, $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是一般覆盖, $B \subseteq \mathbb{P}^2$ 是分歧轨迹 (也称一般覆盖的判别式曲线), 那么

- (1) B 是不可约的尖点曲线 (即只含有结点和通常尖点),
- (2) $f^*B = 2B^* + C$, 这里 B^* 是不可约的, C 是既约曲线,
- (3) $\pi|_{B^*}: B^* \rightarrow B$ 是 B 的正规化.

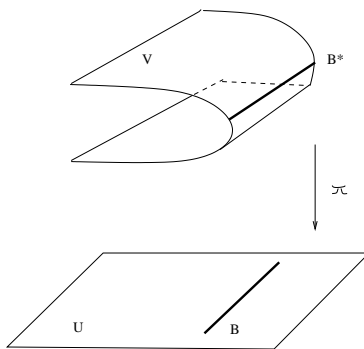
注 5.2.4 一些文献也常以一般覆盖定理中的条件 (1)(2)(3) 作为一般覆盖的定义. \blacksquare

例 5.2.3 设 $U \subseteq \mathbb{C}^2$ 是原点附近的小邻域, 局部坐标为 (x, y) ,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^2 - x = 0\}.$$

我们有局部二次覆盖

$$\pi: V \rightarrow U, \quad (x, y, z) \rightarrow (x, y).$$



其分歧轨迹 $B : x = 0$ 局部上是光滑曲线, 分歧曲线 $B^* : z = 0$ 也在原点附近光滑的. ■

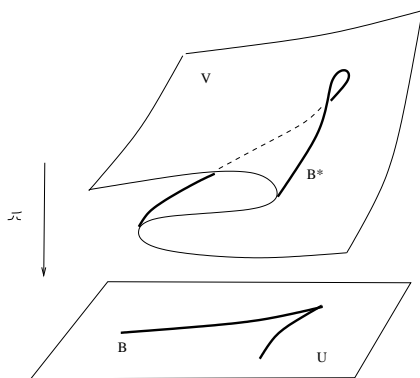
例 5.2.4 设 $U \subseteq \mathbb{C}^2$ 是原点附近的小邻域, 局部坐标为 (x, y) ,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^3 - 3xz + 2y = 0\}.$$

这就诱导局部三次覆盖 (见下面的示意图)

$$\pi : V \rightarrow U, \quad (x, y, z) \rightarrow (x, y).$$

其分歧轨迹 B 有尖点 $x^3 - y^2 = 0$, 分歧曲线 $B^* : x - z^2 = 0$ 在原点附近光滑的, $C : 4x - z^2 = 0$. B^*, C 在原点相切数为 2.



由例 4.5.2, $\pi_1(U - B) = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$. π 诱导的同态 $\varphi : \pi_1(U - B) \rightarrow S_3$ 由 $\varphi(a) = (1, 2), \varphi(b) = (2, 3)$ 给出.

设 $W = \{(z, w, u) \mid z + w + u = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ 是局部超平面, 我们可以定义覆盖 $f : W \rightarrow U$ 如下

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}(wz + zu + uw), \\ y = -\frac{1}{2}z w u. \end{cases}$$

这是一个六次覆盖, 显然 (z, w, u) 三个分量轮换得到的点都投影到同一像上. 因此 f 可以分解为 π 和一个二次覆盖

$$g : W \rightarrow V, \quad (z, w, u) \rightarrow (z, x, y).$$

g 的分歧轨迹就是 C . 设 $g^*C = 2\bar{C}$, $g^*B^* = \bar{B}' + \bar{B}''$, 则 $\bar{C}, \bar{B}', \bar{B}''$ 的方程分别是

$$w = u, \quad z = u, \quad z = w.$$

显然它们两两相交数都是 1.

设 $V' = \{(v, x, y) \mid v^2 = 3(x^3 - y^2)\} \in \mathbb{C}^3$ 是局部超曲面 (带有一个 A_2 型奇点), 我们可定义

循环三次覆盖 $g' : W \rightarrow V'$ 如下

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}(wz + zu + uw), \\ y = -\frac{1}{2}z w u, \\ v = \frac{1}{6}(z - w)(w - u)(u - z). \end{cases}$$

(z, w, u) 的分量三阶轮换得到的点都投影到同一像上, 原点是唯一的分歧点. 此外, 我们还有二次覆盖 $\pi' : V' \rightarrow U$, $(v, x, y) \rightarrow (x, y)$. 现在我们得到以下的交换图

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & V \\ g' \downarrow & \searrow f & \downarrow \pi \\ V' & \xrightarrow{\pi'} & U \end{array}$$

事实上, 任何尖点附近的一般覆盖局部上都是这种类型. ■

5.3 尖点曲线

如果一条曲线 C 最多只含有结点和通常尖点作为其奇点, 我们就称其为结点-尖点曲线 (nodal-cuspidal curve), 或简称为尖点曲线. 我们用 $V(d, c, n)$ 表示带有 n 个结点和 c 个尖点的 d 次曲线全体. 它构成一个簇, 称作尖点曲线的 Severi-Enriques 簇.

设 $C \in V(d, c, n)$, 容易计算

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2), \quad g(C) = p_a(C) - c - n, \quad \chi_{\text{top}}(C) = 2 - 2g(C).$$

为了简化讨论, 我们常用 (d, c, χ) 代替 (d, c, n) , 这里 χ 是 χ_{top} 的简写, 它与 n 的换算关系如下:

$$n = \frac{1}{2}d(d-3) - c + \frac{1}{2}\chi.$$

若 $C \in V(d, c, n)$ 的对偶曲线 C^\vee 也是尖点曲线 (对应的 Severi-Enriques 簇记作 $V(d^*, c^*, n^*)$), 我们就称 C 是 Plücker 曲线. 我们有以下的 Plücker 公式:

$$\begin{pmatrix} d^* \\ c^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ \chi \end{pmatrix}.$$

推论 5.3.1 对 Plücker 曲线 $C \in V(d, c, n)$, 我们有以下不等式

$$2c - \chi \leq d(d-3), \quad \chi \leq 2, \quad c + \chi \leq 2d, \quad 2c + 3\chi \leq 3d.$$

证明 这四个不等式分别等价于 n, g, d^*, c^* 的非负性. ■

命题 5.3.1 ([Zar31]) 设 $\beta = \lfloor \frac{d-1}{6} \rfloor$, 则

$$c < \frac{1}{2}(d-\beta)(d-\beta-3) + 2.$$

命题 5.3.2 对任何尖点曲线 $C \in V(d, c, n)$, 我们有

$$2c + \chi \leq d^2 - d + 2.$$

证明 考虑 C 的两个一般位置极点给出的配极曲线 C_i ($i = 1, 2$). 由 Bézout 定理, $C_1 C_2 = (d-1)^2$. 另一方面, C_1, C_2 在 C 的结点处相交, 在 C 的尖点处相交数至少为 2, 因而得

$$2c + n \leq (d-1)^2,$$

等价于命题所述的不等式. ■

设 $B(d, c, n)$ 是 $V(d, c, n)$ 的子簇, 它由那些平面上的一般投影覆盖对应的分歧轨迹曲线构成. 并不是所有的尖点曲线都能成为 $B(d, c, n)$ 中的元素, 比如 $B(d, c, n)$ 中的曲线都是偶数次的 (引理 5.4.1). 设 $B \in B(d, c, n)$ 是一般覆盖 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 对应的分歧轨迹曲线, 这里 S 是某个光滑不可约射影曲面, $\nu = \deg \pi$, $g = g(B)$ (指正规化后的几何亏格). 下面我们罗列一些经典结论.

引理 5.3.1 设 $\psi: \pi_1(\mathbb{P}^2 - B) \rightarrow S_\nu$ 是单值表示, 这里 S_ν 是 ν 阶置换群, 则 ψ 是满射. 特别地, 若 $\nu > 2$, 那么 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - B)$ 不是交换群, 从而 $c > 0$.

证明 设 $H = \text{Im} \psi$. 因为 π 是一般覆盖, 所以 H 由一些对换生成. 又因为 S 不可约, 故 H 可迁地作用在 ν 个点上. 由习题 1.7, $H = S_\nu$, 即 π 是满射. 当 $\nu > 2$ 时, 这就推知 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - B)$ 非交换. 进一步, 由定理 4.6.2 可知 $c > 0$. ■

推论 5.3.2 设 $B \in B(d, c, n)$, 则有

- (1) $6c + 2n \geq d^2$ (即 $4c + \chi - 3d \geq 0$),
- (2) $2n < d^2 - 5d + 8$ (即 $2c - \chi - 2d + 8 > 0$).

证明 当 $\nu = 2$ 时, 由 S 的光滑性可知 C 必须光滑, 矛盾! 因此 $\nu > 2$, 由引理 5.3.1 知 $c > 0$ 且 $\pi_1(\mathbb{P}^2 - B)$ 是非交换群, 故由定理 4.6.3 可得 $6c + 2n \geq d^2$. 同理, 由定理 4.6.4 即得第二个不等式. ■

命题 5.3.3 (曲面陈数公式 I)

$$\begin{cases} c_1^2(S) = 9\nu - \frac{9}{2}d - \frac{1}{2}\chi, \\ c_2(S) = 3\nu - \chi - c. \end{cases}$$

等价地, 我们有

$$\begin{cases} n = c_2(S) - 3c_1^2(S) + 24\nu + \frac{d^2}{2} - 15d, \\ c = 2c_1^2(S) - c_2(S) - 15\nu + 9d. \end{cases}$$

证明 (1) 取充分一般直线 $L \in \mathbb{P}^2$. 由 Hurwitz 公式, 我们有 $K_S = -3\pi^*L + R$, 这里 $R \subseteq S$ 是对应的分歧曲线. 因为 $\pi: R \rightarrow B$ 是 B 的正规化, 所以 $g(R) = g$. 由相伴公式,

$$2g - 2 = (K_S + R)R = (-3\pi^*L + 2R)R = -3d + 2R^2.$$

因此

$$c_1^2(S) = (-3\pi^*L + R)^2 = 9\nu - 6d + R^2 = 9\nu - \frac{9}{2}d - \frac{1}{2}\chi.$$

(2) 取充分一般点 $p \in \mathbb{P}^2$, 过 p 的线束诱导了 S 上的 Lefschetz 线束 C_t . 设 s 是该线束中奇异纤维的个数, F 是其中的一般纤维. 我们有如下公式

$$c_2(S) = 2\chi_{\text{top}}(F) + s - C_t^2. \quad (5-1)$$

取充分一般的直线 $L \subseteq \mathbb{P}^2$, 由 Hurwitz 公式立得 $\chi_{\text{top}}(S) = 2\nu - d$. 此外显然有 $C_t^2 = \nu$. 另一方面, s 就是对偶曲线 B^\vee 的次数, 即等于 $d(d-1) - 3c - 2n$. 综合以上各式, 就得到所需等式.

$$\begin{aligned} c_2(S) &= \chi_{\text{top}}(S - R) + \chi_{\text{top}}(R) \\ &= \nu \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^2 - B) + \chi \\ &= 3\nu - \nu \chi_{\text{top}}(B) + \chi \end{aligned}$$

至此, 我们完成了证明. ■

推论 5.3.3 ([Nemir]) (1) 若 S 不双有理于任何非正则的直纹面, 则有 $10n + 16c \leq 5d^2 - 6d$ (即 $5\chi + 6c - 9d \leq 0$).

(2) 若曲面 S 双有理于某个非正则的直纹面, 则有 $10n + 16c < 5d^2$ (即 $15d - 5\chi - 6c > 0$).

证明 (1) 由 Miyaoka-Yau 不等式及命题 5.3.3 立得. (2) 的情形, 可类似考虑不等式 $c_1^2(S) \leq 2c_2(S)$. ■

推论 5.3.4 ([MT90]) 设 $B \in B(d, c, n)$, 则 c 必是 3 的倍数, n 必是 4 的倍数.

证明 设 $d = 2d'$ (引理 5.4.1), 则由命题 5.3.3 得

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \nu + \frac{1}{2}d'(d' - 3) - \frac{c}{3} - \frac{n}{4} = \nu + \frac{1}{12}(3g - 3 - 9d' - c).$$

由此立得结论. ■

推论 5.3.5 设 $R \subseteq S$ 是一般覆盖的分歧除子, 则它在 S 上是 ample 的, $R^2 = \frac{3}{2}d + g - 1$.

证明 假设 R 不是 ample 的, 则存在不可约曲线 Γ 满足 $\Gamma R \leq 0$. 由命题 5.3.3 的证明, $R^2 > 0$. 又因为 R 不可约, 这就推出 $R\Gamma = 0$. 由 Hodge 指标定理即知 $\Gamma^2 < 0$. 注意 Γ 是不可约的, 因而我们有 $K_S\Gamma \geq -1$. 由命题 5.3.3 的证明, $K_S = -3\pi^*L + R$ (L 是直线), 从而 $K_S\Gamma = -3\pi^*L \cdot \Gamma + R\Gamma \leq -3$, 矛盾! 这就证明了 R 是不可约的. ■

5.4 \mathbb{P}^3 中的曲面投影

曲面 S 到平面 \mathbb{P}^2 的一般投影覆盖 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 显然可以分解如下:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & \Sigma \subseteq \mathbb{P}^3 \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_O \\ & & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (5-2)$$

这里 π_O 是以一般位置点 O 为极点的投影, Σ 是带有通常奇点的曲面.

设 (作为概型论的交)

$$B_{Total}^* = \Sigma \cap \Delta_O \Sigma = \text{Supp}(\Omega_{S/\mathbb{P}^2}), \quad B^* = \Sigma_{\text{smooth}} \cap \Delta_O \Sigma, \quad Q_{Total}^* = B_{Total}^* \cap \Delta_O^2 \Sigma,$$

$F^* = \text{supp}(f_*\Omega_{S/\Sigma})$ 是 Σ 的二重曲线, $E^* = \text{supp}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(f_*\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_\Sigma))$ 是 Σ 的二重曲线的既约闭子概型, $[F^*] = 2[E^*]$ (作为 Weil 除子). 设 B_{Total}, B, F, E 分别是 $B_{Total}^*, B^*, F^*, E^*$ 的投影像. 我们有 (作为概型论的分解)

$$B_{Total}^* = B^* + F^*, \quad B_{Total} = B + F, \quad [F] = 2[E].$$

我们记 Q^* 为 B^* 的光滑点全体, 它就是 B 的尖点的原像集合.

设 $E^* = \cup_{i=1}^u E_i^*$ 是所有的不可约分支,

$$e = \deg E^*, \quad e_i = \deg E_i^*, \quad \nu = \deg \Sigma, \quad d = \deg B^*.$$

设 V_i^* 是 E_i^* 上满足以下条件的点全体—称作垂直点 (Vertical point): Σ 在该点处的切平面包含极点 O . 记 $V^* = \cup V_i^*$. 设 T^* 是 E^* 上三重点的集合 (共含 t 个点), 并记 τ_{ij} 是出现在 E_i^* 上的三重点 (以 j 排序), $|\sum_i \tau_{ij}^*| = 3$, $|\sum_{i,j} \tau_{ij}^*| = 3t$. 设 $Pinch_i^*$ 是 E_i^* 上的拧点集合 (共 p_i 个), 记 $Pinch^* = \cup Pinch_i^*$, $p = \sum_i p_i$.

引理 5.4.1 (1) $\deg \pi = \deg S = \deg \Sigma = \nu$.

(2) $\deg B = \deg B^* = d = \nu(\nu - 1) - 2e$, 特别地, d 是偶数.

(3) $0 \leq e \leq \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2)$.

(4) $2(\nu - 1) \leq d \leq \nu(\nu - 1)$.

证明 (1) 显然. (2) 设 H 是 \mathbb{P}^3 中充分一般的超平面.

$$\deg B_{Total}^* = B_{Total}^* \cdot H = \Sigma \cdot \Delta_O \Sigma \cdot H = \nu(\nu - 1), \quad \deg F = 2 \deg E = 2e.$$

由此即得 $\deg B^* = d = \nu(\nu - 1) - 2e$.

取充分一般直线 $L \subseteq \mathbb{P}^2$, $\bar{L} := \pi_O^*(L)$ 当然是 Σ 的充分一般超平面截面, 因而也是 ν 次平面曲线, 且带有 e 个结点. 故其几何亏格 $g(\bar{L}) = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - e$. 由 Hurwitz 公式,

$$2g(\bar{L}) - 2 = -2\nu + \deg B.$$

由此立得 $\deg B = d$.

(3) 由 $g(\bar{L}) \geq 0$ 立得. (4) 是 (3) 的直接推论. ■

命题 5.4.1 (拧点个数公式) 设 $g_i = g(E_i^*)$, $\bar{g} = \sum_{i=1}^u g_i$.

(1) (局部公式) $p_i = 2(\nu - 4)e_i - 2|\sum_j \tau_{ij}^*| - 4g_i + 4$.

(2) (整体公式) $p = 2(\nu - 4)e - 6t - 4\bar{g} + 4u$.

证明 采用例 5.1.6 的记号与概念, 我们有二重覆盖 $\pi_2 : D_i \rightarrow \tilde{C}_i$, 故由 Hurwitz 公式可知

$$p_i = 2g(D_i) - 2g_i = D_i(K_{\tilde{S}} + D_i) - 4g_i + 4.$$

另一方面, 由相伴公式可得

$$D_i(K_{\tilde{S}} + D_i) = 2(\nu - 4)e_i - 2 \sum_j \tau_{ij}^*.$$

这就得到局部拧点公式. 整体公式是其直接推论. ■

命题 5.4.2 (曲面陈数公式 II)

$$\begin{cases} c_1^2(S) = \nu(\nu - 4)^2 - (5\nu - 24)e - 4(u - \bar{g}) + 9t, \\ c_2(S) = \nu^2(\nu - 4) + 6\nu - (7\nu - 24)e - 8(u - \bar{g}) + 15t, \\ \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{6}\nu(\nu - 2)(\nu - 4) + \frac{\nu}{2} - (\nu - 4)e - (u - \bar{g}) + 2t. \end{cases} \quad (5-3)$$

证明 参见 [GH78, page 624]. ■

推论 5.4.1 设 c 是分歧轨迹 B 的尖点个数, $\chi = 2 - 2g(B)$, 则

$$\begin{cases} \chi = -\nu(\nu - 1)(2\nu - 5) + 10(\nu - 3)e + 8(u - \bar{g}) - 18t, \\ c = \nu(\nu - 1)(\nu - 2) - 3(\nu - 2)e + 3t. \end{cases} \quad (5-4)$$

证明 由命题 5.3.3 和命题 5.4.2 及引理 5.4.1 立得结论. ■

命题 5.4.3 (1)

$$[Q_{Total}^*] = [\Delta_0^2 \Sigma \cap F^*] + [Q^*].$$

特别地, $\Delta_0^2 \Sigma \cap E^*$ 的投影像都是 B 的光滑点.

(2)

$$[B^* \cap E_i^*] = [Pinch_i^*] + [V_i^*],$$

$$[B^* \cap E^*] = [Pinch^*] + [V^*].$$

特别地, $B^* \cap E^*$ 的投影像都是 B 的光滑点.

(3)

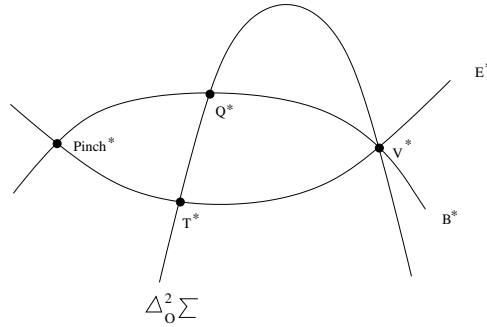
$$[\Delta_0^2 \Sigma \cap E_i^*] = [V_i^*] + \sum_j [\tau_{ij}^*],$$

$$[\Delta_0^2 \Sigma \cap E^*] = [V^*] + 3[T^*].$$

(4)

$$[\Delta_0^2 \Sigma \cap B^*] = [V^*] + [Q^*].$$

以下是示意图



The images of T^* , V^* and $Pinch^*$ are smooth points of B

The images of Q^* are cusps of B

证明 参见 [SR49, Ch. IX, Sec. 3.1,3.2] 的证明. ■

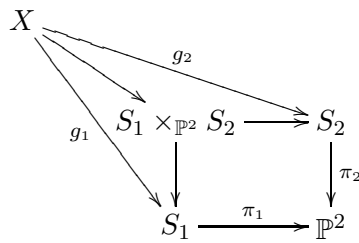
5.5 Chisini 猜想

Chisini 猜想是说, 次数不小于 5 的曲面一般覆盖应该由分歧轨迹唯一确定. Kulikov [Kul99, Kul08] 证明了该猜想. 具体述之如下:

定理 5.5.1 (Kulikov 定理) 设 $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是一般覆盖, 则除了 Veronese 曲面 $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ 之外, π 在等价意义下被分歧轨迹 $B \subseteq \mathbb{P}^2$ 唯一确定.

注 5.5.1 两个一般覆盖 $\pi_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 及 $\pi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 如果满足以下条件则称为等价: 存在同构 $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$, 使得 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$. ■

为了证明上述定理, 我们需要一些准备工作. 我们假设 $\pi_i : S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ ($i = 1, 2$) 都是以 B 为分歧轨迹的一般覆盖, $\deg \pi_i = \nu_i$, $\pi_i^* B = 2R_i + C_i$, R_i 是分歧曲线. 考虑如下交换图



其中 X 是纤维积 $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ 的正规化. 记

$$\begin{cases} \tilde{R} = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(R_2), \\ \tilde{C} = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(C_2), \\ \tilde{C}_1 = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(C_2), \\ \tilde{C}_2 = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(R_2) \end{cases} \quad (5-5)$$

设 $\pi_{1,2} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是诱导的 $\nu_1 \nu_2$ 次覆盖, 它诱导了同态

$$\varphi_{1,2} := \varphi_1 \times \varphi_2 : \pi_1(\mathbb{P}^2 - B) \rightarrow S_{\nu_1} \times S_{\nu_2} \subseteq S_{\nu_1 \nu_2},$$

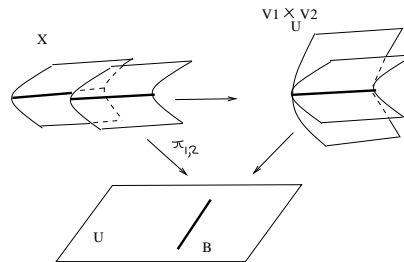
这里 $\varphi_i : \pi_1(\mathbb{P}^2 - B) \rightarrow S_{\nu_i}$ 是对应 π_i 的满同态 (因为 S_i 不可约).

下面我们考察几个纤维积 $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ 的例子.

例 5.5.1 设 $\pi_i : S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ 都是以 B 为分歧轨迹的二次覆盖, $\pi_i^* B_i = 2R_i$. 我们将讨论限制在局部情形. 设 $s \in B$ 是光滑点, $p_i = \pi_i^{-1}(s) \in S_i$, 分别取小邻域,

$$U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}, \quad V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^2 = x\} \subseteq S_1, \quad V_2 = \{(x, y, w) \mid w^2 = x\} \subseteq S_2,$$

要求 $s = (0, 0) \in U$.



局部二次覆盖 $\pi_i : V_i \rightarrow U_i$ 的纤维积

$$V_1 \times_U V_2 = \{(x, y, z, w) \mid z^2 = w^2 = x\},$$

它在局部上显然有两个不可约分支, 分别对应方程 $z = w$ 和 $z = -w$. 因此其正规化 $X = \widetilde{V_1 \times_U V_2}$ 局部上由两个不相交的光滑不可约分支构成, \tilde{R} 限制在每个分支上都是一条局部光滑曲线. 因而 $g_i|_{\tilde{R}} : \tilde{R} \rightarrow R_i$ 是二次无分歧覆盖. ■

例 5.5.2 设 $\pi_i : S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ 都是以 B 为分歧轨迹的三次覆盖, $\pi_i^* B_i = 2R_i + C_i$. 设 $s \in B$ 是通常尖点, $p_i = \pi_i^{-1}(s) \in S_i$.

我们将覆盖限制到局部情形 $\pi_i : V_i \rightarrow U$, 这里 $U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$,

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^3 - 3xz + 2y = 0\} \subseteq S_1, \quad V_2 = \{(x, y, w) \mid w^3 - 3xw + 2y = 0\} \subseteq S_2.$$

局部二次覆盖 $\pi_i : V_i \rightarrow U_i$ 的纤维积

$$V_1 \times_U V_2 = \{(x, y, z, w) \mid z^3 - 3xz + 2y = w^3 - 3xw + 2y = 0\},$$

它在局部上有两个不可约分支, 分别对应方程 $z = w$ 和 $z^2 + zw + w^2 - 3x = 0$. 因此其正规化 $X = \widetilde{V_1 \times_U V_2}$ 局部上由两个不相交的光滑不可约分支 $X_{1,1}, X_{1,2}$ 构成, 它们的局部方程分别为

$$X_{(1,1)} = \{(x, y, z) \mid z^3 - 3xz + 2y = 0\},$$

$$X_{(1,2)} = \{(x, y, z, w) \mid z^2 + zw + w^2 - 3x = -w^2z - wz^2 + 2y = 0\}.$$

$\pi_{1,2} : X_{1,1} \rightarrow U$ 显然与 $\pi_i : V_i \rightarrow U$ 等价. 注意到

$$X_{1,2} \cong W = \{(z, w, u) \in \mathbb{C}^3 \mid z + w + u = 0\},$$

所以 $\pi_{1,2} : X_{(1,2)} \rightarrow U$ 就是例 5.2.4 中的六次覆盖, $g_i : X \rightarrow V_i$ 是以 C_i 为分歧轨迹的二次覆盖.

$g_i : \tilde{R} \cap X_{(1,1)} \rightarrow R_i$ 显然是同构,

$$g_i : \tilde{R} \cap X_{(1,2)} \cong \{(z, w, u) \mid z + w + u = w - z = 0\} \rightarrow R_i$$

也是同构. 这样, $g_i : \tilde{R} \rightarrow R_i$ 局部上是无分歧二次态射.

因为 $\pi_{1,2} : X_{1,1} \rightarrow U$ 与 $\pi_i : V_i \rightarrow U$ 等价, 所以 $X_{(1,1)} \cap \tilde{C}_i = \emptyset$. 此外有

$$\tilde{C}_1 \cap X_{(1,2)} \cong \{(z, w, u) \mid z + w + u = z - u = 0\},$$

$$\tilde{C}_2 \cap X_{(1,2)} \cong \{(z, w, u) \mid z + w + u = w - u = 0\}.$$

因此 \tilde{R} 与 \tilde{C}_i 局部上正规交于一点, 并且该交点落在 $X_{(1,2)}$ 内, 其在 U 内的投影像就是尖点 $s \in B$. 此外显然有 $g_i^* R_i = \tilde{R} + \tilde{C}_i$. ■

注 5.5.2 我们也可以如下方式证明上例中 X 局部上有两个分支 $X_{1,1}, X_{1,2}$. 首先注意 $\pi_{1,2}$ 对应同态

$$\varphi_{1,2} := \varphi_1 \times \varphi_2 : \pi_1(U - B) \rightarrow \Delta \subseteq S_3 \times S_3.$$

$G = \varphi_{1,2}(\pi_1(U - B))$ 作用在 9 个点上. 易知其轨道有两个, 即 (1, 1) 的轨道和 (1, 2) 的轨道. 因此 X 局部上有两个分支 $X_{(1,1)}, X_{(1,2)}$. 更细致的讨论可参见 [Cat86, 引理 1.6]. ■

引理 5.5.1 (1) $g_i|_{\tilde{R}} : \tilde{R} \rightarrow R_i$ 是无分歧二次覆盖.

(2) $(\tilde{R}, \tilde{C}_i) = c$, 这里 c 是 B 上的尖点个数.

(3) $g_i^* R_i = \tilde{R} + \tilde{C}_i$.

证明 这是局部问题, 我们可以归结到例 5.5.1 和例 5.5.2 的局部情形, 由此立得结论. ■

引理 5.5.2 如果 $(S_1, \pi_1), (S_2, \pi_2)$ 是不等价的, 则 X 是不可约光滑曲面.

证明 设 $G = \text{Im} \pi_{1,2}$. G 作用在 $\{1, \dots, \nu_1\} \times \{1, \dots, \nu_2\}$ 上. 不失一般性, 我们可以假设某个几何生成元 (注记 4.4.1) 的像恰好是 $((1, 2), (1, 2))$. 设 $St_{(1,1)} \subseteq G$ 是作用在 (1, 1) 上的稳定子群. 我们可以诱导 X 的不可约分支 $X_{(1,1)}$, 使得 $\deg \pi|_{X_{(1,1)}} = [G : St_{(1,1)}]$. 由命题 1.2.2, 除了

以下反例, 其余情形都有 $\deg \pi|_{X_{(1,1)}} = \nu_1\nu_2$, 从而 $X = X_{(1,1)}$ 不可约. 该反例是指 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G \cong \Delta \subseteq S_\nu \times S_\nu$, 这相当于说 $(S_1, \pi_1), (S_2, \pi_2)$ 是等价的, 不符合命题条件.

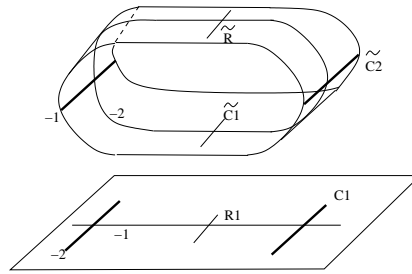
为验证光滑性, 我们只需要考察点 $z \in \pi_{1,2}^{-1}(B)$ 处的光滑性, 这里要求 $p_i := g_i(z) \in R_i \subseteq S_i$ ($i = 1, 2$). 设 $s = \pi_{1,2}(z)$, $V_i \subseteq S_i$ 是 p_i 的邻域, 且满足 $\pi_i(V_i) = U \subseteq \mathbb{P}^2$ 是 s 的邻域. 这样, 问题就可以归结到例 5.5.1 和例 5.5.2 的局部情形, 由此即得所需结论. ■

引理 5.5.3 设 $m = 3d + 2g - 2$, 这里 d, g 分别是 B 的次数和几何亏格. 我们有

$$\begin{cases} \tilde{R}^2 = m - c, \\ \tilde{C}_1^2 = (\nu_2/2 - 1)m - c, \\ \tilde{C}_2^2 = (\nu_1/2 - 1)m - c. \end{cases}$$

证明 由引理 5.5.1, $g_1|_{\tilde{R}}$ 是无分歧二次覆盖. 为了计算自交数 \tilde{R}^2 , 我们首先要分析局部覆盖 $g_i: X \rightarrow V_i$ 中 R 与分歧曲线的相交情形, 并利用典范解消让 \tilde{R} 的严格原像不经过分歧点. 如果 $s \in B$ 是光滑点或者结点, 这就是例 5.5.1 的情形, 此时 \tilde{R} 有两条不相交的不可约分支, 都不过分歧点. 今设 s 是尖点, 采用前面诸记号.

由例 5.2.4 和例 5.5.1, R_1, C_1 在每个交点处相切二重, \tilde{R} 与 g_i (限制在 $X_{(1,2)}$ 上) 的分歧曲线 $g^*(C_1) = 2\tilde{C}_2$ 相交. 为此我们对 R_1, C_1 的相切点爆发两次, 并诱导典范解消 $\tilde{g}: \tilde{X}_{(1,2)} \rightarrow V_i$. 下图是局部解消后的二次覆盖



这里仍用 \tilde{R}, \tilde{C}_i 等分别表示 \tilde{R}, \tilde{C}_i 等在典范解消后的严格原像. 在两次爆发后, R_1 和 $\tilde{X}_{(1,1)}$ 的自交数减少 2, 而 $\tilde{R} \cap X_{(1,2)}$ 的自交数减少 1.

今对 R_1 上所有这样的点 (共 c 个) 各做两次爆发, 这样 R_1^2 的值共减少 $2c$, \tilde{R}^2 的自交数减少 $3c$. \tilde{R} 作为解消后的严格原像, 不与分歧曲线相交, 因而我们有

$$\tilde{R}^2 - 3c = 2(R_1^2 - 2c).$$

由推论 5.3.5, $R_1^2 = \frac{3}{2}d + g - 1$, 所以 $R^2 = 3d + 2g - 2 - c$.

因为 $\deg g_1 = \nu_2$, 由引理 5.5.1 (3) 及上面的讨论, 我们得到

$$\nu_2 R_1^2 = (\tilde{R} + \tilde{C}_1)^2 = \tilde{R}^2 + \tilde{C}_1^2 + 2c.$$

这就推出

$$\tilde{C}_1^2 = (\nu_1 - 2)\left(\frac{3}{2}d + g - 1\right) - c.$$

命题 5.5.1 ([Kul99]) 设 B 是 ν 次一般覆盖 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 的分歧轨迹. 如果

$$\nu > \frac{2(3d + 2g - 2)}{(3d + 2g - 2) - c},$$

那么 π 由 B 唯一确定, 即 Chisini 猜想在该情形下成立.

证明 由推论 5.3.1 及引理 5.5.3, $\tilde{R}^2 > 0$, 故由 Hodge 指标定理

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}^2 & \tilde{R}\tilde{C}_i \\ \tilde{R}\tilde{C}_i & \tilde{C}_i^2 \end{vmatrix} \leq 0$$

即得

$$\nu_i \leq \frac{2(3d + 2g - 2)}{(3d + 2g - 2) - c}.$$

这就证明了结论. ■

推论 5.5.1 ([Nem01]) Chisini 猜想对次数 $\nu \geq 12$ 的一般覆盖成立. 进一步, 如果 S 不是一般型曲面, 那么次数 $\nu \geq 8$ 时, Chisini 猜想也成立.

证明 由命题 5.5.1 及推论 5.3.3 的证明立得. ■

推论 5.5.2 如果 $\nu \geq 5$, 并且 $c_1^2(S) \leq 3c_2(S)$, 那么 Chisini 猜想成立.

证明 由推论 5.5.1, 我们可以假设 $5 \leq \nu \leq 11$. 设

$$A = c - \frac{(\nu - 2)}{\nu}(3d - \chi), \quad B = \frac{3}{2}d - \frac{5\chi}{6} - c.$$

我们有

$$\begin{cases} \chi = -\frac{9d(\nu-4)}{12-\nu} - \frac{6A\nu}{12-\nu} - \frac{6B\nu}{12-\nu}, \\ c = \frac{6d(\nu-2)}{12-\nu} + \frac{5A\nu}{12-\nu} + \frac{6B(\nu-2)}{12-\nu} \end{cases}$$

由推论 5.4.1 及引理 5.4.1, 我们也有

$$\begin{cases} \chi = 3\nu(\nu - 1)(\nu - 2) - (5\nu - 11)d - 8(e - u + \bar{g}) - 18t, \\ c = -\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)(\nu - 2) + \frac{3}{2}(\nu - 2)d + 3t. \end{cases} \quad (5-6)$$

综合以上各式, 即得

$$\begin{cases} t = \frac{d(\nu-2)(\nu-8)}{2(12-\nu)} + \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu-2) + \frac{5A\nu}{3(12-\nu)} + \frac{2B(\nu-2)}{12-\nu}, \\ e - u + \bar{g} = -\frac{d(\nu-3)(\nu-4)}{2(12-\nu)} - \frac{3A\nu}{12-\nu} - \frac{3B(5\nu-12)}{4(12-\nu)}. \end{cases}$$

命题 5.3.3, $B \geq 0$. 另一方面, $e - u + \bar{g} \geq 0$, 这就推出 $A < 0$, 即命题 5.5.1 的不等式成立, 从而 Chisini 猜想正确. ■

推论 5.5.3 三次一般覆盖由分歧轨迹唯一确定.

证明 设 A 同上, 类似推论 5.5.2 的计算可得

$$\frac{9}{8}t + (e - u + \bar{g}) = -\frac{5}{16}d + \frac{9}{8} - \frac{3A}{8}.$$

因为 $d \geq 4$ (引理 5.4.1), 所以上式推出 $A < 0$, 因而命题 5.5.1 的不等式成立, 从而 Chisini 猜想成立. ■

推论 5.5.4 如果 $\nu \geq 5$, 并且 $c_1^2(S) \leq 2c_2(S) \leq -2$, 那么 Chisini 猜想成立.

证明 由推论 5.5.1, 我们可以假设 $5 \leq \nu \leq 7$. 设 A 同上, $B' = \frac{9}{2}d - \frac{3}{2}\chi - 2c - 3\nu$. 由假设条件, $B' \geq 0$.

$$\begin{cases} \chi &= 3d - \left(\frac{2\nu}{8-\nu}\right)(3\nu + 2A + B'), \\ c &= \frac{6\nu(\nu-2)}{8-\nu} + \frac{3A\nu}{8-\nu} + \frac{2B'(\nu-2)}{8-\nu}, \\ t &= -\frac{d}{2}(\nu-2) - \frac{(\nu-2)(\nu^2-9\nu-4)}{6(8-\nu)} + \frac{A\nu}{8-\nu} + \frac{2B'(\nu-2)}{3(8-\nu)}, \\ e-u+\bar{g} &= \frac{d}{4}(2\nu-5) - \frac{3\nu(5\nu-12)}{4(8-\nu)} - \frac{7A\nu}{4(8-\nu)} - \frac{B'(5\nu-12)}{4(8-\nu)}. \end{cases}$$

因此

$$(2\nu-5)t + 2(\nu-2)(e-u+\bar{g}) = -\frac{\nu(\nu-2)^2(2\nu^2-19\nu+44)}{6(8-\nu)} - \frac{\nu(3\nu-4)}{2(8-\nu)}A - \frac{7\nu^2-30\nu+32}{6(8-\nu)}B. \quad (5-7)$$

当 $\nu = 6, 7$ 时, 由上式及 $B', t, (e-u+\bar{g}) \geq 0$ 推出 $A < 0$, 因而 Chisini 猜想成立.

当 $\nu = 5$ 时, 式 (5-7) 等价于

$$30t + 36(e-u+\bar{g}) = 15 - 55A - 19B.$$

如果 $t \geq 1$ 或 $e-u+\bar{g} \geq 1$ 或 $B' \geq 1$, 则 $A < 0$. 不妨设 $t = e-u+\bar{g} = B' = 0$, 因而 $A = \frac{3}{11}$. 但由 A 的定义, $5A = 5c - 3(3d - \chi)$ 是整数, 这就得到矛盾! ■

定理 5.5.1 的证明: 由以上的讨论, 我们只需考虑 $\nu = 4$ 的情形. 此时引理 5.4.1 推出 $e \leq 3$. 设 A 同前. 假设 $A \geq 0$, 则由 (5-6), 我们有

$$24 - 12e + 8(e-u+g) + 12t \leq 0.$$

因而 $2 \leq e \leq 3$. 此时有三种可能

- (1) $e = 3, e-u+\bar{g} = 1, t = 0$,
- (2) $e = 3, e-u+\bar{g} = 0, t = 1$,
- (3) $e = 2, e-u+\bar{g} = 0, t = 0$.

进一步, 由陈数公式, 我们有

$$-\chi = 36 - 18e + 8(e-u+\bar{g}) + 18t \geq -2.$$

因此情形 (1) 不可能出现.

如果情形 (3) 出现, 那么 $e = u = 3, \bar{g} = 0$. 由此可知 $d = 8, g = 1, c = 12, n = 8$. 假如此时存在两个覆盖 $\pi_i : S' \rightarrow \mathbb{P}^2$ 也以 B 为分歧轨迹, 那么由命题 5.5.1 知 $\deg f_i \leq 4$. 注意到 B 有结点, 所以 $\deg f_i = 4$. 由引理 5.5.1 和引理 5.5.3, 我们有

$$\tilde{R}^2 = \tilde{C}_1^2 = \tilde{C}_2^2 = \tilde{R}\tilde{C}_1 = \tilde{R}\tilde{C}_2 = 12.$$

因此

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}^2 & \tilde{R}\tilde{C}_1 \\ \tilde{R}\tilde{C}_1 & \tilde{C}_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

所以 \tilde{C}_1 与 \tilde{R} 在 Neron-severity 群中线性相关. 又因为 $\tilde{R}^2 = \tilde{C}_1^2$, 所以它们是数值等价的. 同理 \tilde{C}_2 与 \tilde{R} 是数值等价的. 这样, $\tilde{C}_1\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1^2 = 12$. 但另一方面, $\tilde{C}_1\tilde{C}_2 = c + 2n = 28$ (习题 5.6), 矛盾! 因此情形 (3) 不可能出现.

情形 (2) 对应 Veronese 曲面 $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ 到 \mathbb{P}^2 的一般投影. 此时分歧轨迹 B 是带九个尖点的六次曲线. 由经典的结果, 它有四种不等价的一般覆盖 (见 [Cat86]).

设 $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是一般覆盖, B 是分歧轨迹. 设 $p_i \in B$ 是分歧轨迹奇点 ($i = 1, \dots, n+c$), U_i 是 p_i 的小邻域. 由例 4.5.2 及注记 4.5.1, 我们有

$$\pi_1(U_i - B) = \begin{cases} \langle a, b \mid aba = bab \rangle, & \text{如果 } p_i \text{ 是通常尖点,} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{如果 } p_i \text{ 是结点.} \end{cases}$$

由注记 4.6.1, 存在同态 $\psi_i : \pi_1(U_i - B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 - B)$. 我们记

$$\psi_i(\pi_1(U_i - B)) = \begin{cases} G_i, & \text{如果 } p_i \text{ 是通常尖点} \\ \Gamma_i, & \text{如果 } p_i \text{ 是结点} \end{cases}$$

命题 5.5.2 ([Kul99]) 具有给定分歧轨迹 B 的 ν 次一般覆盖的集合与满足以下条件的满同态 $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 - B) \rightarrow S_\nu$ 的集合之间存在一一对应 (这里 S_ν 是 ν 阶置换群):

- (1) 对任何几何生成元 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^2 - B)$, $\varphi(\gamma)$ 是 S_ν 中的对换,
- (2) 对任何尖点 p_i , $\varphi(G_i)$ 有两个对换生成, 并且同构于 S_3 ,
- (3) 对任何结点 p_i , $\varphi(\Gamma_i)$ 有两个对换生成, 并且同构于 $S_2 \times S_2$.

5.6 一般覆盖的拓扑

5.7 Veronese 曲面的一般覆盖

我们考虑 \mathbb{P}^2 到 \mathbb{P}^2 的一般覆盖

$$\pi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [X, Y, Z] \rightarrow [F_1(X, Y, Z), F_2(X, Y, Z), F_3(X, Y, Z)],$$

这里诸 F_i 是 k 次多项式, 因而 $\deg \pi = k^2$. 这一态射显然可以如下分解:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^2 \\ & \searrow v_k & \nearrow pr \\ & \mathbb{P}^{(k^2+3k)/2} & \end{array}$$

这里 v_k 是 k 阶 Veronese 态射, pr 是一般位置的投影映射.

引理 5.7.1 分歧除子 R 的方程为

$$J(X, Y, Z) := \left| \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(X, Y, Z)} \right| = 0,$$

特别地, $\deg R = 3(k-1)$.

证明 π 在 $P = [X_0, Y_0, Z_0]$ 处分歧当且仅当, 存在不全为零的常数 a, b, c 使得 $G = aF_1 + bF_2 + cF_3 = 0$ 定义的曲线在 P 处奇异, 亦即

$$\frac{\partial G}{\partial X} \Big|_P = \frac{\partial G}{\partial Y} \Big|_P = \frac{\partial G}{\partial Z} \Big|_P = 0.$$

将 a, b, c 视作变量, 这些方程等价于系数矩阵 $\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(X, Y, Z)}$ 在 P 处是退化的, 也就是雅克比行列式 $J(P) = 0$. ■

引理 5.7.2 设 B 是 π 的分歧轨迹曲线, 带有 c 个尖点和 n 个结点, 则

$$\deg B = 3k(k-1), \quad c = 3(k-1)(4k-5), \quad n = \frac{3}{2}(k-1)(k-2)(3k^2+3k-8).$$

证明 在底射影平面上取充分一般的直线 L , 并设 $H = \pi^*L$. 由 Hurwitz 公式,

$$2g(H) - 2 = k^2(-2) + \deg B.$$

因为 H 是 k 次光滑平面曲线, 所以 $g(H) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$, 这就推出 $\deg B = 3k^2 - 3k$.

由命题 5.3.3 以及 $c_1^2(S) = 9$, $c_2(S) = 3$, 立得其余诸式. ■

本章习题

习题 5.1 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 由齐次方程 $F = 0$ 定义, $Q \in \mathbb{P}^n - X$, Δ_Q 是配极算子.

- (1) 证明: 配极超曲面 $\Delta_Q X$ 与 X 的交集恰好是那些过 Q 且与 X 相切的切线的切点构成.
- (2) 证明: 由方程 $\Delta_Q^2 F = 0$ 定义的二阶配极超曲面 $\Delta_Q^2 X$ 与 $X, \Delta_Q X$ 的公共交集恰好是那些切点中的拐点构成.

习题 5.2 验证公式 (5-1).

习题 5.3 设 $X \subseteq \mathbb{P}^{2r+1}$ 是非退化 r 维光滑射影簇.

- (1) 证明: 存在 X 上的两个点, 它们的切空间要么不相交, 要么交集维数小于 $r-1$.
- (2) 利用上一小题证明: 存在双点割线.
- (3) 证明: 存在 \mathbb{P}^n 中与 X 不相交的开集, 使得以其中任何点作的投影映射是双有理态射, 任何射线不与 X 相切, 并且像簇的每个奇点局部都是两个 r 维切空间的交.

习题 5.4 设 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是一般覆盖, $\nu = \deg \pi$, $B \subseteq \mathbb{P}^2$ 是分歧轨迹, $d = \deg B$, g 是 B 的几何亏格. $L \subseteq \mathbb{P}^2$ 是充分一般的直线, $E = \pi^*L$. 证明:

$$\nu \leq \frac{2d^2}{3d - \chi},$$

等号成立当且仅当 K_S 数值等价于 mE , $m \in \mathbb{Q}$ (提示: 用 Hodge 指标定理).

习题 5.5 设 $(S_1, \pi_1), (S_2, \pi_2)$ 是两个等价的一般覆盖, X 是纤维积 $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ 的正规化. 证明:

- (1) X 是光滑的;
- (2) X 由两个不相交的不可约分支 $X_{(1,1)}, X_{(1,2)}$ 构成, 其中投影 $g_i|_{X_{(1,1)}}: X_{(1,1)} \rightarrow S_i$ 都是同构, $g_i|_{X_{(1,2)}}: X_{(1,2)} \rightarrow S_i$ 都是 $N-1$ 次覆盖, 这里 $N = N_1 = N_2$.

习题 5.6 设 \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 如式 (5-5) 所定义, 证明: $\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 = c + 2n$.

第六章 弱 Lefschetz 定理

6.1 代数簇的基本群

假设 X, Y 都是光滑簇, $f: X \rightarrow Y$ 是态射. 由 Hironaka 奇点解消, 可假设存在正常态射 $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow Y$, 其中 \bar{X} 是光滑簇, $i: X \rightarrow \bar{X}$ 是开浸入, 满足 $f = \bar{f} \circ i$, $D = \bar{X} - i(X)$ 是正规交除子. 设 $S \subseteq Y$ 是余维数 2 的子集, 使得对任意 $p \in Y - S$, $f^{-1}(p)$ 在至少一条不可约分支上是一般既约的.

命题 6.1.1 设 X, Y, f 同上.

- (1) 存在非空的 Zariski 开集 $U \subseteq Y$ 使得 $f^{-1}(U) \rightarrow U$ 在通常拓扑意义下是纤维丛.
- (2) 设 f 是支配的, 则 $[\pi_1(Y) : \text{Im}\pi_1(X)] < +\infty$.
- (3) 设 F 是一般纤维, 则有如下正合列:

$$\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y) \rightarrow 1.$$

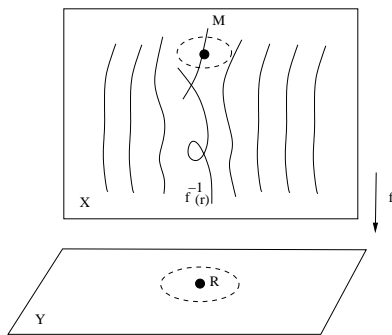
证明 (1) 设 D_1, \dots, D_r 是 D 的所有不可约分支. 对任何子集 $B \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, 定义 $D(B) = \bigcap_{i \in B} D_i$. 这些 $D(B)$ 是光滑的. 由 Sard 定理, 我们可以找到 Y 中的 Zariski 开集 U , 使得 \bar{f} 限制在 $\bar{f}^{-1}(U) \cap D(B)$ 诱导的切映射是满的. 这样我们就得到了所需结论.

(2) 设 $F = f^{-1}(p)$, $p \in U$. 我们有正合列

$$\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(f^{-1}(U)) \rightarrow \pi_1(U) \rightarrow \pi_0(F).$$

因为 F 是代数簇, 所以 $\pi_0(F)$ 是有限的. 因此 $\pi_1(f^{-1}(U))$ 在 $\pi_1(U)$ 中的像有有限指标. 注意到 $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(Y)$ 是满射, 所以 $\pi_1(f^{-1}(U))$ 在 $\pi_1(Y)$ 中的像也有有限指标. 因此 $[\pi_1(Y) : \text{Im}\pi_1(X)] < +\infty$.

(3) 设 $T = \{q \in Y \mid \dim f^{-1}(q) > \dim F\}$ (其余维数 ≥ 2), $L = S \cup \bar{T}$. 设 R 是 $Y - U$ 的任一不可约分支, $r \in R$ 是一光滑点且不在 L 内, 因而 $f^{-1}(r)$ 有一光滑点 m 且 $\dim F = \dim f^{-1}(r)$. 此时 f 在 m 处诱导的切空间映射是满的. 设 M 是 $f^{-1}(R)$ 中唯一经过 m 的不可约分支, $\gamma(M)$ 是 X 中围绕 M 的套索的共轭类. 设 $\gamma(R)$ 是 Y 中围绕 R 的套索的共轭类.



考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \text{Ker}b & \longrightarrow & \pi_1(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{b} & \pi_1(X) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow d \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker}c & \longrightarrow & \pi_1(U) & \xrightarrow{c} & \pi_1(Y) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

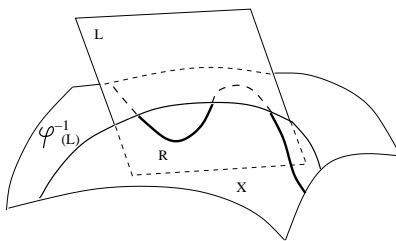
显见 $\alpha(\gamma(M)) \subseteq \gamma(R)$. 由 α 的满射性进一步可得 $\alpha(\gamma(M)) = \gamma(R)$. 因为 $\text{Ker}c$ 是由这些 $\gamma(R)$ 生成的, 并且 $\gamma(M) \subseteq \text{Ker}b$, 所以这就推出 $\text{Ker}c \subseteq \alpha(\text{Ker}b)$. 另一方面由交换图显然可得另一方向的包含关系, 所以 $\text{Ker}c = \alpha(\text{Ker}b)$. 由蛇形引理即得结论. ■

6.2 一般超平面截口

设 X 是复数域上的光滑完备代数簇, R 是 X 的 Zariski 闭子集.

定理 6.2.1 设 $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^N$ 是态射, L 是 \mathbb{P}^N 中充分一般的线性子空间, 要求 $\text{codim}L < \dim \phi(X)$, 则有

- (1) $\phi^{-1}(L)$ 是光滑连通的,
- (2) $\pi_1(\phi^{-1}(L) - R) \rightarrow \pi_1(X - R)$ 是满射.



我们将定理 6.2.1 的证明放在后面. 这里先介绍它的一系列推论.

定义 6.2.1 设 D 是 X 上的有效除子, 如果对某个正整数 m , 由线性系 $|mD|$ 诱导的有理映射 $\phi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ 满足 $\dim \phi(X) \geq 2$, 我们就说 D 不是线束复合.

设 $|mD|$ 诱导非线束复合的有理映射 $\phi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$. 我们可以诱导如下交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{X} & & \\
 \psi \downarrow & \searrow \bar{\phi} & \\
 X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^N
 \end{array}$$

这里 $\psi: \overline{X} \rightarrow X$ 是光滑簇之间的双有理态射, $\bar{\phi}$ 也是态射.

设 U 是上述 D 的支集的邻域 (通常拓扑下). 我们取超平面 $H_0 \subseteq \mathbb{P}^N$, 使得 $\bar{\phi}^{-1}(H_0)$ 包含 D 的支集. 这样, $\bar{\phi}^{-1}(H_0) \subseteq \psi^{-1}(U)$. 这样, 集合

$$V := \{H \in (\mathbb{P}^N)^* \mid \bar{\phi}^{-1}(H) \subseteq \psi^{-1}(U)\}$$

是对偶空间 $(\mathbb{P}^N)^*$ 中包含 H_0 的邻域. 满足定理 6.2.1 条件 (1)(2) 的超平面截口全体构成 $(\mathbb{P}^N)^*$

的 Zariski 开集 W , 因此 $V \cap W$ 非空, 我们可以从中选取超平面 H , 因而有如下的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\bar{\phi}^{-1}(H) - \psi^{-1}(R)) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(\bar{\phi}^{-1}(U - R)) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(\bar{X} - \phi^{-1}(R)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma \\ & & \pi_1(U - R) & \xrightarrow{\delta} & \pi_1(X - R) \end{array}$$

由定理 6.2.1, $\beta \circ \alpha$ 是满射, 从而 β 也是满的. 注意到 ψ 是双有理的, 因而 γ 也是满射. 因此 δ 是满射. 这就得到如下推论.

推论 6.2.1 设 D 不是线束复合, U 是 D 的支集的邻域 (通常拓扑下), 则以下映射是满射:

$$\pi_1(U - R) \longrightarrow \pi_1(X - R).$$

推论 6.2.2 设 X 是曲面, C 是 S 上的不可约曲线, $C^2 > 0$, 则

- (1) 对 C 的任何邻域 U , $\pi_1(U - R) \rightarrow \pi_1(X - R)$ 是满射,
- (2) 若 C 与 R 正规交 (允许 $R = \emptyset$), 那么

$$\pi_1(C - C \cap R) \longrightarrow \pi_1(X - R)$$

是满射.

证明 (1) 来自推论 6.2.1.

(2) 取 C 的合适的邻域 U , 使得 $C - C \cap R$ 同伦等价于 $U - R$. 再由 (1) 即得结论. ■

推论 6.2.3 设 X 是曲面, C, D 都是曲线, 且正规交, 其中 D 是结点曲线, D 中每条不可约分支 Γ 都满足 $\Gamma^2 > 0$, 那么

$$\pi_1(X - D \cup C) \rightarrow \pi_1(X - C)$$

的核在中 $\pi_1(X - D \cup C)$ 中是中心的.

证明 设 Γ 是 D 的任一不可约分支, $\gamma(\Gamma)$ 是对应的套索. 取 Γ 的合适的管状小邻域 U . 由推论 4.3.1, $\gamma(\Gamma) \in \pi_1(U - D \cup C)$ 是中心的. 由推论 6.2.2, $\pi_1(U - D \cup C) \rightarrow \pi_1(X - D \cup C)$ 是满态射, 因此 $\gamma(\Gamma)$ 在 $\pi_1(X - D \cup C)$ 中也是中心的.

由命题 4.3.1, $\pi_1(X - D \cup C) \rightarrow \pi_1(X - C)$ 的核由上述这些套索生成, 由此立得结论. ■

推论 6.2.4 设 X, D 同推论 6.2.2, $\phi: Y \rightarrow X$ 是有限覆盖的解消. 那么

$$\phi_*: \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$$

的核与余核都是有限集, 并且核是中心的.

证明 考虑如下两行正合列的交换图, 其中 $K_i := \text{Ker } j_i$, $\bar{\phi}_*$ 是单射.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & \pi_1(Y - \phi^*D) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(Y) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \bar{\phi}_* & & \downarrow \phi_* \\ 1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \pi_1(X - D) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(X) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (6-1)$$

由蛇形引理, 我们可诱导正合列

$$1 \rightarrow \text{Ker } \phi_* \rightarrow K_2 / \bar{\phi}_* K_1 \rightarrow \pi_1(X - D) / \bar{\phi}_* \pi_1(Y - \phi^*D) \rightarrow \pi_1(X) / \phi_* \pi_1(Y) \rightarrow 1.$$

由推论 6.2.2, $K_2 \subseteq \pi_1(X - D)$ 是中心的, 因而 $K_2/\bar{\phi}_*K_1$ 是由有限个套索生成的有限交换群, 故 $\text{Ker}\phi_*$ 是有限的. 注意到 ϕ 的有限性, 由上面正合列立得余核的有限性. 为证 $\text{Ker}\phi_*$ 是中心的, 我们只需证 $K := j_1^*(\text{Ker}\phi_*) \subseteq \pi_1(Y - \phi^*D)$ 是中心的 (因为 j_1 是满的). 注意到 $\bar{\phi}_*K \subseteq K_2$, 所以 $\bar{\phi}_*K$ 在 $\bar{\phi}_*\pi_1(Y - \phi^*D)$ 中是中心的, 因而得证. ■

推论 6.2.5 设 $\phi: Y \rightarrow X$ 是簇 X 上以光滑 ample 除子 D 为分歧轨迹的 n 次循环覆盖且 $\dim X \geq 2$, 那么 $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)$.

证明 仍采用图 (6-1) 的记号. 由蛇形引理可得长正合列

$$1 \rightarrow \text{Ker}\phi_* \rightarrow K_2/\bar{\phi}_*K_1 \rightarrow \pi_1(X - D)/\bar{\phi}_*\pi_1(Y - \phi^*D) \rightarrow \pi_1(X)/\phi_*\pi_1(Y) \rightarrow 1.$$

此时

$$K_2/\bar{\phi}_*K_1 \cong \pi_1(X - D)/\bar{\phi}_*\pi_1(Y - \phi^*D) \cong \mathbb{Z}_n.$$

这就得到所需结论. ■

推论 6.2.6 设 D 是 \mathbb{P}^N 中的除子, D 上所有非正规交的奇点都落在余维数 3 的子集内, 则 $\pi_1(\mathbb{P}^N - D)$ 是交换群.

证明 取充分一般的线性子空间 $L \subseteq \mathbb{P}^N$ 使得 $\dim L = 2$. 由定理 6.2.1, $\pi_1(L - D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^N - D)$ 是满射, 并且 $L \cap D$ 是 L 中的结点曲线. 由定理 4.6.2 即得结论. ■

下面我们设 G 是 \mathbb{P}^N 中的所有余维数为 l 的线性子空间全体构成的格拉斯曼流形.

引理 6.2.1 设 M 是不可约复流形, $\dim M \neq l - 1$, $\psi: M \rightarrow \mathbb{P}^N$ 是有限态射, 定义

$$A(M) = \begin{cases} \{L \in G \mid \dim \psi^{-1}(L) > \dim M - l\}, & \text{若 } \dim M \geq l, \\ \{L \in G \mid \psi^{-1}(L) \neq \emptyset\}, & \text{若 } \dim M \leq l - 2. \end{cases}$$

那么 $\text{codim}A(M) \geq 2$.

证明 设

$$J = \{(x, L) \in M \times G \mid \psi(x) \in L\}.$$

J 显然是 $M \times G$ 中余维数为 l 的不可约子簇. 设 $B(M)$ 是 $A(M)$ 在 $J \rightarrow G$ 的原像. 如果 $\text{codim}(M) \leq 1$, 那么

$$\dim B(M) \geq \begin{cases} \dim A + \dim M - (l - 1) \geq \dim(M \times G) - 1, & \text{若 } \dim M \geq l, \\ \dim A \geq \dim G - 1, & \text{若 } \dim M \leq l - 2. \end{cases}$$

在第二种情形中, $\dim B(M) > \dim J$, 矛盾! 在第一种情形, $\dim B(M) \geq \dim J$, 因而由 J 的不可约性知 $J = B(M)$. 这意味着 $J \rightarrow G$ 不是满的, 矛盾! ■

推论 6.2.7 设 Z 是 k 维簇, U 是其 Zariski 开集, $Z - U$ 是纯余维数 1 的 (即 $Z - U = \cup_{i=1}^h M_i$, M_i 是 $k - 1$ 维不可约分支). 设 $g: Z \rightarrow \mathbb{P}^N$ 是有限态射,

$$F = \{L \in G \mid U \cap g^{-1}(L) = \emptyset\}.$$

那么 $\text{codim}F \geq 2$.

证明 设 $\psi_i = g|M_i$. 易知 $F \subseteq \cap_{i=1}^h A(M_i)$, 故由引理 6.2.1 知, $\text{codim}F \geq 2$. ■

定理 6.2.1 的证明: 考虑 $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^N$ 的 Stein 分解 $\phi = g \circ f$, 其中 $f: X \rightarrow Z$ 是纤维连通的, $g: Z \rightarrow \mathbb{P}^N$ 是有限态射. 设 $\dim Z = k > l \geq 2$. 对充分一般的 $L \in G$, $g^{-1}(L)$ 是连通的. 因此由 Zariski 连通性定理, 对任何 $L \in G$, $g^{-1}(L)$ 都是连通的. 注意到 f 的纤维是连通的, 故 $\phi^{-1}(L)$ 也是连通的.

今取 Z 的 Zariski 开集, 满足

- (i) $f|_{f^{-1}(U)}$ 是光滑,
- (ii) $g|_U$ 诱导的切映射处处都是单射.
- (iii) U 是光滑的,
- (iv) 对任何 $x \in U$, $f^{-1}(x) \not\subseteq R$,
- (v) $Z - U$ 是纯余维数 1 的.

考虑子簇

$$S = \{(x, L) | \phi(x) \in L\} \subseteq X \times G,$$

及

$$S' = \{(x, L) | g(x) \in L, g|_U \text{ 在 } x \in U \text{ 处关于 } L \in \mathbb{P}^N \text{ 非横截正则}\} \subseteq U \times G$$

(注: 所谓关于 L 非横截正则, 是指切空间的像含于 L 中). 显见 $S \rightarrow X$, $S' \rightarrow U$ 是 Zariski 局部纤维丛, 其中前者的纤维是 \mathbb{P}^{N-1} 中余维数 l 子空间构成的格拉斯曼流形, 后者的纤维维数 $\dim G - k - 1$. 这样, $1 + \dim S' = \dim G$. 这表明 $S' \rightarrow G$ 除了一个余维数为 2 的子集 $H \subseteq G$ 外, 具有有限纤维.

今取 F 同推论 6.2.7, $T = F \cup H$. 对任何 $L \in G - T$, $U \cap g^{-1}(L)$ 非空且维数 $\geq k - l$, 它仅有有限个奇点. 由 U 定义, 这就推出 $\phi^{-1}(L) \cap f^{-1}(U) - R$ 含有光滑点. 由命题 6.1.1 (注意 $S - (R \times G) \rightarrow G$ 满足命题条件) 以及 G 的单连通性, 我们有开集 $W \subseteq G$, 使得对任何 $L \in W$, 都有满态射 $\pi_1(\phi^{-1}(L) - R) \rightarrow \pi_1(S - (R \times G))$. 另一方面, $S - (R \times G) \rightarrow X - R$ 显然是纤维连通的光滑正常态射, 因此也有满射 $\pi_1(S - (R \times G)) \rightarrow \pi_1(X - R)$. 这就得到满射

$$\pi_1(\phi^{-1}(L) - R) \longrightarrow \pi_1(X - R).$$

这样, 我们就完成了证明. ■

6.3 态射的形变

我们在这一节中只考虑复解析子空间和全纯映射.

定义 6.3.1 设 $f_0: P_0 \rightarrow Q$ 在每点切空间诱导的切映射是单的, 其中 P_0 是紧的, $1 + \dim P_0 = \dim Q$. f_0 的形变 (Deformation) 是指一个参数空间 (S, s_0) , 满足:

- (1) 存在态射 $f: P \rightarrow S \times Q$ 使得 $p_1 \circ f: P \rightarrow S$ 是平坦正常映射,
 - (2) 存在 $s_0 \in S$ 以及同构 $j: P_0 \rightarrow (p_1 \circ f)^{-1}s_0$, 使得 $p_2 \circ f \circ j = f_0$.
- 对任意 $s \in S$, 我们规定 $P_s := (p_1 \circ f)^{-1}s$ 及 $f_s = p_2 \circ f|_{P_s}: P_s \rightarrow Q$.

设 P, S 等同上, 我们定义

$$P_S^k = \underbrace{P \times_S P \times_S \cdots \times_S P}_k$$

及 $q_k : P_S^k \rightarrow S$. 令

$$T(k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in q_k^{-1}(s_0) | x_i \neq x_j\}.$$

定义 6.3.2 设 $b \geq 0$, 如果上述形变满足以下诸条件, 就称其在 s_0 处是 b -优势的:

- (1) S 在 s_0 处光滑,
- (2) 对任何 $1 \leq k \leq b$, P_S^k 在 $T(k)$ 的每一点上都光滑, 并且有维数

$$\dim_{s_0} S + k \cdot \dim P_0.$$

- (3) 对任何 $1 \leq k \leq b$, $P_S^k \rightarrow Q^k$ 在 $T(k)$ 的每一点处都光滑.

设 P_s 是 $P \rightarrow S$ 在 $s \in S$ 上的纤维,

$$B_s(K) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \underbrace{P_s \times_Q P_s \times_Q \dots \times_Q P_s}_k | x_i \neq x_j\}.$$

令

$$G(k) = P \times_{S \times Q} P \times \dots \times_{S \times Q} P \times_{S \times Q} P$$

及

$$F(k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in G(k) | x_i \neq x_j\}.$$

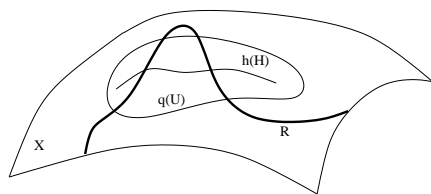
引理 6.3.1 设 $f : P \rightarrow S \times Q$ 是 $f_0 : P_0 \rightarrow Q$ 的形变是 b -优势. 对任何 $k \leq b$, 存在 S 的解析真子集 F , 使得对任何 $s \in S - F$, $B_s(k)$ 是维数为 $\dim Q - k$ 的光滑子集.

如果 \mathcal{O}_{P_0} 没有非常值的整体截面, 那么 P_s 是光滑连通的.

6.4 弱 Lefschetz 定理

设 U 是至少 2 维的连通复流形, H 是 U 中由某个局部主理想层定义的紧复解析子空间 (未必既约), 并且 $\mathcal{O}_U(H)|_H$ 是 ample 的, $i : H \rightarrow U$ 是包含映射. 设 X 是光滑射影簇, $R \subseteq X$ 是任一 Zariski 闭子集, $q : U \rightarrow X$ 是局部可逆的全纯映射, $h = q \circ i$. 设 G 是如下映射的像:

$$\pi_1(U - q^{-1}(R)) \longrightarrow \pi_1(X - R).$$



定理 6.4.1 (弱 Lefschetz 定理) 在上述记号下, 我们有

- (1) G 在 $\pi_1(X - R)$ 中有有限指标.
- (2) 若 $h(H) \cap R = \emptyset$, 则 $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(X - R)$ 的像具有有限指标.
- (3) 若 $\dim X = \dim U = 2$, 则 $[\pi_1(X - R) : G] \leq (\text{Div} h)^2 / H^2$, 这里 $\text{Div} h$ 是 $h_* \mathcal{O}_H$ 的第一陈类.

本章习题

参考文献

- [Ara71] S. Ju. Arakelov: Families of algebraic curves with fixed degeneracy, *Math. USSR Izv.*, **5**(1971), 1277–1302.
- [AS78] E. Arbarello, E. Sernesi: Petri’s approach to the study of the ideal associated to a special divisor, *Invent. Math.*, **49**(1978), 99–119.
- [Bar97] E. Artal-Bartolo: *Fundamental group of class of rational cuspidal curves*, *Manuscripta Math.*, **93** (1997), 273-281.
- [But94] David C. Butler: *Normal generation of vector bundles over a curve*, *J. Differential Geometry*, **39** (1994), 1-34.
- [Cat86] F. Catanese: *On a problem of Chisini*, *Duke Math. J.*, **53** (1986), 33-42.
- [CF11] C. Cliberto, F. Flamini: *On the branch locus curve of a general projection of a surface to plane*, *Trans. AMS*, **363** no.7 (2011), 3457-3471.
- [Deg08] A. Degtyarev: *On deformations of singular plane sextics*, *J. Algeb. Geom.*, **17** (2008), 101-135.
- [Fri98] R. Friedman: *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Springer Verlag, 1998.
- [Ful80] W. Fulton: *On the fundamental group of the complement of a node curve*, *Ann. of Math.*, **111** (1980), 407-409.
- [GH78] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [Har77] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math **52**, Springer-Verlag, (1977).
- [Kul99] Vik. Kulikov: *On Chisini’s Conjecture*, *Izv. RAN. Ser. Mat.*, (1999), **63**:6, 83116, 1139–1170.
- [Kul08] Vik. Kulikov: *On Chisini’s Conjecture II*, *Izv. Math.*, **72**(2008).
- [Mir96] R. Miranda: *Triple covers in algebraic geometry*, *Amer. J. Math.*, **107**(1985), 1123–1158.
- [MP97] E. Mezzetti, D. Portelli: *A tour through some classical theorems on algebraic surfaces*, *An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat.*, **5**(1997), no. 2, 51–78. (cf. also http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Kronecker-Castelnuovo)
- [MT88] B. Moishezon, M. Teicher: *Braid group technique in complex geometry, I, Line arrangements in \mathbb{P}^2* , *Contemp. Math.*, **78**(1988), 425–555.

- [MT90] B. Moishezon, M. Teicher: *Braid group technique in complex geometry, II, From arrangements of lines and conics to cuspidal curves*, Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math., **1479**(1990), 131–180.
- [Mum66] D. Mumford: *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Ann. Math. Stud., **59**(1966).
- [Mum70] D. Mumford: *Varieties defined by quadratic equations*, in " Corso CIME in Questions on Algebraic Varieties, Rome, 1970," 30–100.
- [Nemir] S. Nemirovski: *A remark on the Chisini conjecture*, e-print AG/0001113.
- [Nem01] S. Nemirovski: *On Kulikov's theorem on the Chisini Conjecture*, Izv. Math., **65:1**(2001),71–74.
- [Nor83] M. Nori: *Zariski's conjecture and related problems*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **16**(1983), 305–344.
- [Pao95] R. Paoletti: *Free pencils on divisors*, Math. Ann., **303**(1995), 109–123.
- [Sam66] P. Samuel: *Lectures on old and new results on algebraic curves*, notes by S. Anantharaman, Tata Inst. Fund. Res., (1966), 127 pp.
- [Shi98] I. Shimada: *On the communitativity of fundamental groups of complements to plane curves*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **123**(1998), no. 1, 49–52.
- [Shi07] I. Shimada: *Lecture on Zariski Van-Kempen theorem*, Lectures Notes, March 2007.
- [SR49] J. Semple. L.Roth: *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford University Press, 1949.
- [Zar31] O. Zariski: *On the irregularity of cyclic multiple planes*, Annals of Mathematics (2), **32**(1931), 485–511.
- [Zar71] O. Zariski: *Algebraic surfaces*, Springer Heidelberg, (1971), 2nd. ed.

索引

- b -优势, 64
 g -基, 9
 Hurwitz 变换, 6
 Lefschetz 配对, 25
 多点割线, 41
 Artin 定理, 7, 17
 Chisini 猜想, 51
 Kulikov 定理, 51
 Lefschetz 单射, 23
 Lefschetz 零化闭链, 23
 Lefschetz 嵌入, 22
 Lefschetz 树, 23
 Lefschetz 同构, 22
 Lefschetz 微分同胚, 21
 Plücker 公式, 47
 Plücker 曲线, 47
 Puiseux 配对, 40
 Segre 簇, 41
 Segre 映射, 41
 Severi-Enriques 簇, 47
 Veronese 簇, 41
 Veronese 映射, 41
 Zariski Van-Kampen 定理, 36
 半扭辫, 11
 半直积, 2
 辫, 10
 辫单值, 21, 33
 辫单值乘积形式, 24
 辫群, 10
 标架, 12
 垂直点, 50
 纯辫群, 11
 丛, 9
 单值作用, 32
 等价分解, 7
 二重曲线, 42
 非正常二重点, 42
 割簇, 41
 骨架, 14
 广义半扭辫, 19
 换位子, 6
 换位子群, 6
 极点, 41
 几何基, 9
 几何生成元, 37
 尖点曲线, 30, 47
 结点, 42
 结点-尖点曲线, 47
 经线, 34
 局部次数, 22
 拧点, 42
 拧点个数公式, 50
 判别式超曲面, 11
 判别式曲线, 45
 配极超曲面, 41
 配极曲线, 41
 配极算子, 41
 切簇, 41
 曲面陈数公式, 48, 50
 群的实现, 3
 融合积, 1
 弱 Lefschetz 定理, 64
 三点割线, 41
 三重点, 42

实线排列, 24

双点割线, 41

套索, 34

通常奇点, 42

投影, 43

弦簇, 41

线排列, 24

线束复合, 60

线性标架, 12

形变, 63

一般覆盖, 43

一般覆盖定理, 45

一般曲面, 42

一般投影定理, 45

一般投影映射, 43

一般线排列, 29

有理尖点曲线, 40

运动, 15

正辫, 17

中心, 6

中心扩张, 6

自由积, 1

自由群, 1