曲面三次覆盖的奇点

报告人：　陆俊

二〇〇五年九月

1 背景问题

1.1 有理奇点的判别条件

(I) 二次覆盖上的有理奇点(回顾)

$\pi : X \to Y$ 曲面的二次覆盖, $p \in X$;
$\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ 典范解消;

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\sigma'} & X \\ \tilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\pi \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\sigma} & Y \end{array}$$

$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, σ_{i+1} 是在 $\tilde{p}_i$处的爆发;
p_g : p 的几何亏格;
m_i : 分歧轨迹在 $\tilde{p}_i$ 处的重数, $w_i = [\frac{m_i}{2}]$.

$$p_g = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}(w_i - 1)w_i$$

- p 有理 $\quad\Leftrightarrow\quad w_i \le 1, \forall i \quad\Leftrightarrow\quad m_i \le 3, \forall i.$
- ADE 奇点方程.

$$\begin{aligned} A_n: &\ z^2 = && x^2 + y^{n+1} \\ D_n: &\ z^2 = && y(x^2 + y^{n-2}) \\ E_6: &\ z^2 = && x^3 + y^4 \\ E_7: &\ z^2 = && x(x^2 + y^3) \\ E_8: &\ z^2 = && x^3 + y^5 \end{aligned}$$

(II) 三次覆盖上的有理奇点

• (陈志杰, 杜荣, 谈胜利, 于飞, 2005) 利用三次覆盖局部方程可构造有理二重点以及九类有理三重点.

• 若局部方程 $z^3+sz+t=0$ 定义了孤立二维奇点, 谈胜利证明了以下结论.

命题 1.1.1 *(谈胜利, 2003)* 设 $\pi: X \to Y$ 是曲面的三次覆盖, $p \in X$, $\tilde{p}=\pi(p)$ 是全分歧点. π 在 p 处由局部方程 $z^3+a_0a_1z+b_0a_1=0$ 定义. 那么 p 是有理二重点当且仅当满足以下条件之一成立:
(1) A_0+A_1 在 p 处光滑;
(2) B_0+A_1 在 p 处有二重点, 且 *Milnor* 数 ≤ 4;
(3) B_0+A_1 在 p 处有二重点, 且 *Milnor* 数 ≥ 5, 其切线与 A_0+A_1 的相交数 ≤ 3;
(4) B_0+A_1 在 p 附近是光滑二重曲线, 与 A_0+A_1 的相交数 ≤ 3.

这里 $A_i(B_0)$ 表示 $a_i(b_0)$对应的除子.

例 1. (谈胜利, 2003)$z^3+y^lz+x^2+y^k=0$ 定义了有理二重点.
(1) A_μ ($k=2$ or $l=1$); (2) D_μ ($k=3$ or $l=2$); (3) E_6 ($k=4$, $l\geq 3$);
(4) E_7 ($k\leq 5$, $l\geq 3$); (5) E_8 ($k=5$, $l\geq 4$).

例 2. (陈...) $z^3+x(x^2+y^3)z+x(x^2+y^3)^2y^k=0$, $n=3k+2$ 定义了有理三重点 $F_{n,6}$ 型.

例 3. (陈...) $z^3+xy^2z+xy^2=0$, $z^3+xyz+xy^2=0$ 都定义了同一种有理三重点 $A_{0,0,0}$ 型.

- 如何判定曲面三次覆盖的奇点是否有理.

三个难点:
(1) 同一种奇点对应的分歧轨迹, 在解析变换下不唯一(见例3);
(2) 如何判定奇点的几何亏格 p_g 何时为零;
(3) 如何确定该点是否全分歧.

- (2), (3) 可归结为

秩二向量丛的陈类计算,局部上相当于找出某个合冲模的一组基 (难点).

- 因此, 很难直接仿照二次覆盖来处理奇点问题.

- 主要的想法:

(1) 利用三次覆盖的典范解消;
(2) 考察奇点对应的例外集, 以及三次覆盖的底曲面上由分歧轨迹的爆发所产生的例外集;
(3) 比较两者的基本闭链来研究奇点的性质.

1.2 Horikawa 数的计算

(I) 三次覆盖简介

设 $\pi : X \to Y$ 是曲面的三次覆盖, X 正规, $p \in X$ 奇点, $\tilde{p} = \pi(p)$.
$\pi : X \to Y$ 的定义方程为 $z^3 + sz + t = 0$.

$$a = \frac{4s^3}{\gcd(s^3, t^2)}\ , b = \frac{27t^2}{\gcd(s^3, t^2)}\ , c = a + b. \tag{1}$$

• 三次覆盖数据 $(a,\ b,\ c)$ 分解: $a = 4a_1{a_2}^2{a_0}^3$, $b = 27b_1{b_0}^2$, $c = c_1{c_0}^2$,

$$\gcd(a_i, b_j) = \gcd(a_i, c_j) = \gcd(a_1, a_2) = 1. \tag{2}$$

这里a_1, a_2, b_1, c_1 不含平方因子.

• A_i, B_j, C_k (A, B, C)分别表示 a_i, b_j, c_k (a, b, c) 对应的除子;
$D_1 = B_1 + C_1$: 一般分歧轨迹; $D_2 = A_1 + A_2$: 全分歧轨迹.

• π 的典范解消:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\sigma'_k"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & X_{k-1} \arrow[r, "\sigma'_{k-1}"] \arrow[d, "\pi_{k-1}"'] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\sigma'_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\pi"'] \\
\tilde{Y} \arrow[r, "\sigma_k"] & Y_{k-1} \arrow[r, "\sigma_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

$\tilde{p}_i(\in Y_i)$: π_i 的分歧轨迹奇点;
σ_{i+1} : $\tilde{p}_i$ 处的爆发, $\sigma := \sigma_1 \cdots \sigma_k$;
E_i 是 σ_i 的例外曲线;
$\mathcal{E}_i$: E_i 在 $\tilde{Y}$ 上的完全原像.
${A_j}^{(i)}$ 等 : $\pi_i : X_i \to Y_i$ 的三次覆盖数据;
$\tilde{A}_j^{(i)}$ 等 : 最初的三次覆盖数据 A_j 在 Y_i 上的严格原像.

• $m_{\tilde{p}_i}(*)$ 表示 $\tilde{p}_i$ 处的重数;
$d_i = \min(m_{\tilde{p}_i}(A^{(i)}), m_{\tilde{p}_i}(B^{(i)}), m_{\tilde{p}_i}(C^{(i)}))$;
$m_i = [\frac{m_{\tilde{p}_i}(D_1^{(i)})}{2}]$, $w_i = m_i + n_i$, 此处

$$n_i = \begin{cases} m_{\tilde{p}_i}(D_2^{(i)}) & 3 \mid d_i - m_{\tilde{p}_i}(A^{(i)}), \\ m_{\tilde{p}_i}(D_2^{(i)}) - 1 & otherwise. \end{cases} \tag{3}$$

- 不变量计算式(c_i 是 π 的 trace-free 层的陈类):

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) &= 3\chi(\mathcal{O}_Y)+\frac{1}{2}(c_1^2-c_1K_X)-c_2-p_g(\tau), && (4)\\
p_g &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(w_i-v_i)(w_i-v_i-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}v_i(v_i-1)\\
&\quad -\deg\Delta+\deg\tilde{\Delta}, && (5)\\
K_{\tilde{X}}^2 &= 3K_Y^2+2c_1^2-4c_1K_Y-3c_2\\
&\quad -\sum_{i=0}^{k-1}(2w_i^2-3w_iv_i+3v_i^2-4w_i+3)+3(\deg\Delta-\deg\tilde{\Delta}). && (6)
\end{aligned}$$

设 $\rho:\hat{X}\to\tilde{X}$ 是 π 的极小解消(即收缩例外曲线中所出现的 (-1) 曲线).

定义 1.2.1 设$\tilde{p}=\pi(p)$ 是分歧轨迹奇点. ϵ_p 是限制在 ρ 下, 收缩 $(\sigma\pi)^{-1}(\tilde{p})$ 中的例外曲线的条数.

$$H_p:=\frac{1}{2}\sum_i(2-w_i)(w_i-3)+\epsilon_p=0.$$

此处 i 取遍分歧轨迹奇点 $\tilde{p}$ 在解消过程中出现的下标. H_p 称为奇点 p 的形式 *Horikawa* 数.

(注: 这里的定义, 形式上与原定义稍有不同,见 Upper bound on the slope of a genus 3 fibration, Z. -J. Chen, S. -L. Tan, 2005)

我们有:

$$K_{\hat{X}}^2-3\chi(\mathcal{O}_{\hat{X}})=3(K_Y^2-3\chi(\mathcal{O}_Y))+\frac{1}{2}(c_1^2-5c_1K_Y)+\sum_p H_p. \qquad (7)$$

这里 $\tilde{p}$ 跑遍所有分歧轨迹的奇点.

(II) Horikawa 数与亏格 3 纤维化

设 $f: S \to C$ 是相对极小非超椭圆亏格3纤维化.

假设 f 有一个截面 Γ, 诱导一个到几何直纹面 P_0 的 $3:1$ 有理映射$\phi': S \dashrightarrow P_0$. 我们有交换图:

$$
\begin{tikzcd}
\hat{S} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & S_0 \arrow[d, "\pi_0"'] & \tilde{S} \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \\
S \arrow[r, dashed, "\phi'"] & P_0 & \tilde{P} \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}
$$

$\phi = \phi' \circ \hat{\pi}: \hat{S} \to P_0$ 是一个态射;

$\phi = \pi_0 \circ \varepsilon$ 是 ϕ 的 Stein 分解, π_0 是三次覆盖;

$\tilde{\pi}: \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是 π_0 的典范解消.

- $f: S \to C$ 实际上是 $\tilde{S} \to C$ 的相对极小模型.

- $\tilde{\tau}: \tilde{S} \to S$ 是双有理态射.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{S} \arrow[rr, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\tau}"'] & & \tilde{P} \arrow[d, "\sigma"'] \\
S \arrow[rr, dashed, "\phi'"] \arrow[dr, "f"'] & & P_0 \arrow[dl, "\varphi_0"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

- **(Horikawa)** $K_f^2 - 3\chi_f = \sum\limits_F H_F$.

F 跑遍 $f: S \to C$ 所有的纤维.
$H_F = \text{length coker } \left(S^2 f_*\omega_{S/C} \hookrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes 2})\right)_p$, $p = f(F)$.

- 由三次覆盖的不变量公式, F 的 Horikawa 数 H_F 满足:

$$H_F = \sum_{\varphi_0(q)=f(F)} H_q + {\varepsilon'}_F$$

${\varepsilon'}_F$: 额外收缩 (-1) 曲线的个数.

- **Miles Reid 猜测**

$$\begin{aligned} \chi_f &= \frac{1}{9}(a_0 + a_1 + 3a_2 + 5a_3), && (8)\\ K_f^2 &= \frac{1}{3}(a_0 + 4a_1 + 9a_2 + 14a_3), && (9)\\ K_f^2 - 3\chi_f &= a_1 + 2a_2 + 3a_3. && (10) \end{aligned}$$

这里 a_i 是一些非负整数.

- 计算形式 Horikawa 数 H_p.

理想形式: $H_p = s_1 + 2s_2 + 3s_3$, $s_i \geq 0$.
s_i: 依赖于 $\pi_0 : S_0 \to P_0$ 上的奇点性质.

2 主要结果

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\sigma'_k"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & X_{k-1} \arrow[r, "\sigma'_{k-1}"] \arrow[d, "\pi_{k-1}"'] & \dots \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\sigma'_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "\pi"'] \\
\tilde{Y} \arrow[r, "\sigma_k"] & Y_{k-1} \arrow[r, "\sigma_{k-1}"] & \dots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & Y \\
 & E_{k-1}, \tilde{p}_{k-1} & & E_1, \tilde{p}_1 & \tilde{p}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{p}_i(\in Y_i)$: π_i 的分歧轨迹奇点;
σ_{i+1} : $\tilde{p}_i$ 处的爆发, $\sigma := \sigma_1 \cdots \sigma_k$;
E_i 是 σ_i 的例外曲线;
$\mathcal{E}_i$: E_i 在 $\tilde{Y}$ 上的完全原像;
$w_i = m_i + n_i$, $m_i = [\frac{m_{\tilde{p}_i}(D_1^{(i)})}{2}]$, $n_i = m_{\tilde{p}_i}(D_2^{(i)})$ 或 $m_{\tilde{p}_i}(D_2^{(i)}) - 1$.

记号 2.0.2 *(1)* 若 $\tilde{p}_i$ 是全分歧点, 设 $\pi_i^{-1}(\tilde{p}_i) = \{p_i\}$, 我们记 Z_{p_i} 为 p_i 的例外集 $E_{p_i}(\subseteq \tilde{X})$ 所对应的基本闭链;
(2) 若 $\tilde{p}_i(\in Y_i)$ 是一般分歧点, 设 $\pi_i^{-1}(\tilde{p}_i) = \{p_i, q_i\}$, π_i 在 p_i 附近是局部二次覆盖, Z_{p_i} 意义同上;
(3) 若 $\tilde{p}_i(\in Y_i)$ 是无分歧点, 设 $\pi_i^{-1}(\tilde{p}_i) = \{p_i, q_i, r_i\}$, Z_{p_i} 意义同上.

2.1 与典范解消有关的分解定理

定理 2.1.1 设 $\pi : X \to Y$ 是曲面的三次覆盖, $p \in X$, $\tilde{p} = \pi(p)$, 则有以下分解

$$\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_{p_i} + Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)}, i = 0, \cdots, k-1. \tag{11}$$

这里要么 $Z_j^{(i)} = 0$, 要么 $\mathrm{supp}(Z_j^{(i)})$ 是连通的负定曲线, $Z_j^{(i)}$ 是 $\mathrm{supp}(Z_j^{(i)})$ 上的基本闭链, 并且满足:

$$Z_{p_i}Z_1^{(i)} = Z_pZ_2^{(i)} = Z_1^{(i)}Z_2^{(i)} = 0. \tag{12}$$

进一步, 在适当交换 $Z_j^{(i)}$ 的下标后, 我们有

(1) 如果 $\tilde{p}_i$ 是全分歧点, 那么 $0 \le Z_2^{(i)} \le Z_1^{(i)} < Z_{p_i}$;

(2) 如果 $\tilde{p}_i$ 是一般分歧点, 那么 $\mathrm{supp}(Z_2^{(i)})$ 是第一类有理曲线,
$0 \le Z_1^{(i)} < Z_{p_i}$, 且 $\mathrm{supp}(Z_2^{(i)})$ 与 $E_{p_i} = \mathrm{supp}(Z_{p_i})$ 无公共分支;

(3) 如果 $\tilde{p}_i$ 是无分歧点, 那么 E_{p_i} 和 $\mathrm{supp}(Z_j^{(i)})$ $(j = 1, 2)$ 都是第一类有理曲线, 并且两两无公共分支.

推论 2.1.2 p_i, $\tilde{p}_i$, Z_{p_i}, w_i 同上, 则

$$w_i = p_a(Z_{p_i}) + p_a(Z_1^{(i)}) + p_a(Z_2^{(i)}). \tag{13}$$

从而 $w_i \ge 0$, 并且 $w_i = 0$ 当且仅当 $\pi^{-1}(\tilde{p})$ 中的点都是光滑点.

引理 2.1.3 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $w_0 = 1$, 则 p 恰是以下几类奇点之一:

(1) 有理二重点;

(2) 弱椭圆奇点, $Z_p^2 = -1$, $\mathrm{supp}(Z_1)$, $\mathrm{supp}(Z_2)$ 是第一类有理曲线.

引理 2.1.4 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $w_0 = 2$, 则 p 恰是以下几类奇点之一:

(1) 有理三重点;

(2) 弱椭圆奇点, $Z_p^2 = -2$, $\mathrm{supp}(Z_1)$ 是第一类有理曲线;

(3) 弱椭圆奇点, $Z_p^2 = -1$, $\mathrm{supp}(Z_1)$ 是弱椭圆曲线, $\mathrm{supp}(Z_2)$ 是第一类有理曲线;

(4) 超椭圆奇点, $p_a(Z_p) = 2$, $Z_p^2 = -1$, $\mathrm{supp}(Z_1)$, $\mathrm{supp}(Z_2)$ 是第一类有理曲线.

此外, 当 $w_0 \ge 3$ 时, p 必不是有理奇点.

2.2 有理奇点的判别条件

定理 2.2.1 设 $p \in X$, $\tilde{p} = \pi(p)$ 是全分歧点, p 是有理二重点当且仅当 $w_0 = 1$ 且满足以下情形之一:
(1) E_1 一般分歧;
(2) E_1 全分歧, E_1 上有两个分歧轨迹奇点;
(3) E_1 全分歧, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, E_2 不是全分歧;
(4) E_1 全分歧, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, E_2 全分歧, E_2 上至少有一个分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_2$ 满足 $w_2 = 1$.

此外, (1), (2) 对应 A_n 型; (3) 对应 D_n 型; (4) 对应 E_6, E_7, E_8 型.

定理 2.2.2 设 $p \in X$, $\tilde{p} = \pi(p)$ 是全分歧点, p 是有理三重点当且仅当 $w_0 = 2$ 且满足以下情形之一:
(1) E_1 无分歧;
(2) E_1 一般分歧, E_1 上至少有两个分歧轨迹奇点;
(3) E_1 一般分歧, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, $w_1 \leq 2$;
(4) E_1 全分歧, E_1 上至少有两个分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$,
且满足 $w_1 = 1$, $w_2 = 2$;
(5) E_1 全分歧, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, $w_1 = 2$, E_2 无全分歧.

此外, (1) 对应 $A_{n,m,k}$ 型; (2) 对应 $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ 型; (3) 对应 $D_{n,5}$, $F_{n,6}$ 型; (4) 对应 $G_{n,0}$, $E_{6,0}$, $E_{0,7}$ 型; (5) 对应 $E_{7,0}$ 型.

三次覆盖上的有理二重点 ($\tilde{p}$ 是全分歧点)

p 的类型	一般分歧轨迹 D_1的方程	全分歧轨迹 D_2 的方程	备注
A_n	1	x^2+y^2	A_2
	x^2+y^{3m+1}	y	A_2
	$(x^2+y^{3m+1})(x^2+y^{3l+1})$	1	A_2
	x	$x+y^{2m}$	A_{3m-1}
	$(x+y^{2m})(x^2+y^{3l+4m})$	1	A_{3m-1}
	x^3+y^{2n+2}	1	
D_n	1	x^2+y^3	D_4
	$(x^2+y^3)^2+x^{m+3}$	1	D_4
	$(x^2+y^3)(x^2+y^{n-1})$	1	$n \geq 5$
E_6	1	x^2+y^4	
	x^2+y^{3m+2}	$x+y^2$	
	$(x^2+y^{3n+2})((x+y^2)^2+y^{3m+2})$	1	
E_7	x^4+y^9	1	
E_8	1	x^2+y^5	
	$(x^2+y^5)^2+y^{3n+9}$	1	
	$(x^2+y^5)^2+x^3y^{3n}$	1	

类似可得有理三重点的分歧轨迹局部方程(略).

有理奇点对应的分歧轨迹奇点 ($\tilde{p}$ 是全分歧点)

p 的类型	E_1 的类型	E_1 上的奇点类型 ($\tilde{p}_i$)	E_{i+1} 的类型
$E_{6,0}$	t	$A_{0,0,0}$, A_5	n, g
$E_{7,0}$	t	$A_{6,0,0}$	n
$E_{0,7}$	t	$A_{0,0,0}$, E_6	n, t
$G_{3,0}$	t	$A_{0,0,0}$, A_2, A_2	n, t(g), t(g)
$G_{n,0}$ $(n \geq 4)$	t	$G_{n-3,0}$, A_2	t, t(g)
$B_{0,3}$	g	*cusps* (t), A_1 (g), A_1 (g)	t, n, n
$B_{m,3}$ $(m \geq 1)$	g	$A_{m-1,0,0}$, A_1 (g), A_1 (g)	n, n, n
$B_{0,n}$ $(n \geq 4)$	g	A_{n-2} (t), A_1 (g)	g, n
$B_{m,4}$	g	$A_{m-1,2,0}$, A_1 (g)	n, n
$B_{m,n}$	g	$B_{m-1,n-2}$, A_1 (g)	g, n
$C_{0,4}$	g	*cusps* (t), A_3 (g)	t, n
$C_{0,n}$ $(n \geq 5)$	g	*cusps* (t), D_{n-1} (g)	t, g
$C_{m,4}$ $(m \geq 1)$	g	$A_{m-1,0,0}$, A_3 (g)	n, n
$C_{m,n}$	g	$A_{m-1,0,0}$, D_{n-1} (g)	n, g
$D_{0,5}$	g	A_4 (t)	g
$D_{n,5}$ $(n \geq 1)$	g	$A_{n-1,4,0}$	n
$A_{0,0,0}$	n	*cusps* (t)	t
$A_{n,0,0}$	n	A_{n-1}	t
$A_{n,m,0}$ $(m \geq 1)$	n	A_{n-1}, A_{m-1}	t,t
$A_{n,m,k}$ $(k \geq 1)$	n	$A_{n-1,m-1,k-1}$	n
$F_{0,6}$	g	D_5 (t)	t
$F_{n,6}$ $(n \geq 1)$	g	$C_{n-1,5}$	g
E_6	t	$G_{3,0}$	t
E_7	t	$E_{6,0}$	t
E_8	t	$E_{0,7}$	t
D_4	t	$A_{1,1,1}$	n
D_n $(n \geq 5)$	t	$C_{1,n-2}$	g
A_2	t	$A_{0,0,0}$, $A_{0,0,0}$	n, n
A_n $(n \geq 2)$	g	$A_{n-2,0,0}$ (t)	n
A_1	g	*cusps* (t)	t

注: 表 A 中, “ t ”指全分歧, “ g ”指一般分歧, “ n ”指不分歧.

2.3 形式 Horikawa 数

令 $z_{\tilde{p}_i}(x)=(x-w_i)(x-p_a(Z_1^{(i)}))(x-p_a(Z_2^{(i)}))$, 用 h_i 表示 $z_{\tilde{p}_i}(x)$ 在 $x=0$ 处的重数.

定理 2.3.1 设 $\pi: X\to Y$ 是曲面的三次覆盖, X 正规, $p\in X$, 则 p 的形式 *Horikawa* 数

$$H_p=\sum_{i=0}^{k-1}(h_i+\frac{1}{2}(w_i-2)(3-w_i)), \tag{14}$$

亦即

$$\epsilon_p=\sum_{i=0}^{k-1}h_i. \tag{15}$$

推论 2.3.2 假设 $w_i\leq 3$, $i=1,\cdots,k$. 我们有

$$H_p=\sum_{w_i\leq 2}p_a(Z_{p_i})+\sum_{w_i=3}(p_a(Z_{p_i})-1) \tag{16}$$

从而在命题条件下, $H_p\geq 0$.

推论 2.3.3 以下条件等价:
(1) p 有理;
(2) $H_p = 0$, 且 $w_i \leq 2$, $i = 1, \cdots, k$.

命题 2.3.4 假设 $\tilde{p}$ 全分歧, $m_{\tilde{p}}(D_1^{(0)}) + 2m_{\tilde{p}}(D_2^{(0)}) \leq 5$. 我们有

$$\begin{aligned} H_p &= a_1 + 2a_2; & (17) \\ a_1 &= \#\{\tilde{p}_i \mid m_{\tilde{p}_i}(D_1^{(i)}) + 2m_{\tilde{p}_i}(D_2^{(i)}) = 5\}; & (18) \\ a_2 &= \#\{\tilde{p}_i \mid w_i = 1, p_a(Z_{p_i}) = 1\}. & (19) \end{aligned}$$

这里 $\#\{*\}$ 表示有限集的元素个数.

- 上式中 a_2 对应的全分歧奇点有以下性质(一般分歧情形有类似讨论).

引理 2.3.5 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $w_0 = 1$, $p_a(Z_p) = 1$. $\tilde{p}_1$是 E_1 上的分歧轨迹奇点. E_2 是 $\tilde{p}_1$ 对应的例外曲线. 我们有:
(1) E_1 全分歧, $\tilde{p}_1$是唯一的分歧轨迹奇点, $w_1 = 2$;
(2) E_2 全分歧, $E_2(\subseteq Y_2)$ 上有两个分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_3$,
满足 $Z_{p_2}^2 = Z_{p_3}^2 = -3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$.

- $a_3 =?$, 需要放宽条件 $m_{\tilde{p}}(D_1^{(0)}) + 2m_{\tilde{p}}(D_2^{(0)}) \leq 7$.

3 证明概要

步骤 1. 固定 Z_p^2 的值.

- 因为 $1 \le -Z_p^2 \le 3$, 所以可以分情形讨论.

命题 3.0.6 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $Z_p^2 = -1$. $\tilde{p}_1$ 是 E_1 上的分歧轨迹奇点, 则 E_1 全分歧. 此外, $-2 \le Z_{p_1}^2 \le -1$, $Z_{p_1} Z_1^{(0)} = 0$, 并且
(1) 如果 $Z_{p_1}^2 = -1$, 则 $Z_{p_1} < Z_2^{(0)}$, $Z_{p_1} Z_p = 0$;
(2) 如果 $Z_{p_1}^2 = -2$, 则 $Z_{p_1} = Z_p - Z_2^{(0)}$, $Z_{p_1} Z_p = -1$.

特别地, 当 $p_a(Z_2^{(0)}) = 0$ 时, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, 且满足 $Z_{p_1}^2 = -2$.

命题 3.0.7 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $Z_p^2 = -2$. $\tilde{p}_1$ 是 E_1 上的分歧轨迹奇点. 在记号 *2.0.2*下, 我们有 $-1 \le Z_{p_1} Z_p \le 0$. 此外,
(1) 如果 $Z_{p_1}^2 = -1$, 则 $Z_{p_1} Z_p = 0$, $Z_{p_1} < Z_1^{(0)}$;
(2) 如果 $Z_{p_1}^2 \le -2$, 则 $Z_{p_1} Z_p = -1$. 因此, 满足此条件的点至多有两个;
(3) 如果 E_1 上恰有两个分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, 满足 $Z_{p_i} Z_p = -1$, 则 E_1 全分歧. 此外我们有, $Z_p = 2Z_1^{(0)} + Z_{p_1} + Z_{p_2}$, $Z_{p_1}^2 = Z_{p_2}^2 = -3$, E_2, E_3 无分歧.

步骤 2. 固定 w_0 的值.

(比如前节中讨论的 $w_0 \le 2$ 的情形)

命题 3.0.8 设 $\tilde{p}$ 全分歧, $Z_p^2 = -2$, $p_a(Z_1^{(0)}) = 0$, 并且 $p_a(Z_p) \le 1$. 那么 p 满足以下情形之一:
(1) E_1 一般分歧, $Z_p C_2^{(0)} = -2$. 此时 E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, 且 $\tilde{p}_1$ 是全分歧的 *cusp* 点. 因此, p 是 A_1型奇点;
(2) E_1 一般分歧, $Z_p C_2^{(0)} = -1$. 此时 E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, 且 $\tilde{p}_1$ 是全分歧的, $Z_{p_1}^2 = -3$, $Z_p = Z' + Z_1^{(0)} + Z_{p_1}$, $p_a(Z_p) = p_a(Z_{p_1})$;
(3) E_1 全分歧, E_1 上仅有两个分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$. 此时,
$Z_p = 2Z_1^{(0)} + Z_{p_1} + Z_{p_2}$, $Z_{p_1}^2 = Z_{p_2}^2 = -3$, E_2, E_3 无分歧;
(4) E_1 全分歧, E_1 上有唯一的分歧轨迹奇点 $\tilde{p}_1$, 且满足 $Z_{p_1} Z_p = -1$. 此时, 我们有 $Z_p \ge 2Z_1^{(0)} + Z_{p_1}$.

由此可得有理奇点的判别法则.

步骤 3. 确定每一条例外曲线 E_i 的拉回提供了多少可以收缩的曲线.

- 所有可以被收缩的曲线(回忆 ε_p) 都落在 $\mathrm{supp}(Z_j^{(i)})$ 中.
(回忆 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = Z_{p_i} + Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)}, i = 0, \cdots, k-1.$)

最终, 由归纳法得到形式 Horikawa 数的计算公式.