

代数几何讨论班备用稿

曲面纤维化简明讲义

陆 俊

华东师范大学数学系

二零一零年十一月

前 言

本讲义在肖刚《代数曲面纤维化》以及陈志杰和谈胜利的《代数曲面讲义》等文献基础上进行了补充和整理. 若干章节之间并非完全按照教学顺序展开. 读者可以根据各自情况作适当调整. 为方便读者查阅相关概念或结论等, 书后附有索引及参考文献. 此外, 每一章节末尾配有若干习题.

作者在这里要感谢陈志杰、谈胜利教授所提供的指导与建议. 此外作者特别感谢 T. Ashikaga 教授在伪周期映射理论方面给予的指点, 并感谢他提供了诸多重要的参考文献. 作者同时要感谢左康教授在相关研究中所给予的指导. 最后作者也非常感谢以下各位师弟为本讲义提供了诸多重要的修改建议.

第一章 纤维化基础知识	1
1.1 基本概念和性质	1
1.2 相对典范层与不变量	6
1.3 基变换与稳定约化	10
1.4 Albanese 映射	13
本章习题	17
第二章 整体不变量性质	18
2.1 相对不变量的非负性	18
2.2 基变换不等式	21
2.3 Arakelov 不等式	23
2.4 典范类不等式	27
2.5 肖刚不等式	29
2.6 相对不规则性估计	36
本章习题	37
第三章 局部不变量性质	38
3.1 纤维模型与局部不变量	38
3.2 奇异纤维陈数	40
3.3 局部 Arakelov 型不等式	44
3.4 局部典范类不等式	47
3.5 局部 Miyaoka-Yau 型不等式	51
本章习题	53
第四章 纤维化拓扑性质	54
4.1 基本群与垂直部分	54
4.2 映射类群与伪周期映射	59
4.3 拓扑单值与分裂形变	65
4.4 超椭圆曲线族的拓扑 (I)	69
4.5 超椭圆曲线族的拓扑 (II)	74
本章习题	80
第五章 特殊纤维化研究	81
5.1 几何直纹面	81
5.2 椭圆纤维化	84
5.3 超椭圆纤维化	87
5.4 亏格 3 非超椭圆纤维化	95
5.5 \mathbb{P}^1 上的纤维化	100
5.6 一些例子	104
本章习题	107

第六章 相对典范代数	109
6.1 除子上的可逆层	109
6.2 除子上的典范代数	115
6.3 小亏格纤维的典范代数	119
6.4 1-2-3 猜想与 Green 猜想	124
本章习题	130
第七章 Mordell-Weil 格	132
7.1 格的预备知识	132
7.2 基础性质	133
7.3 具体例子	136
本章习题	138
第八章 其他专题选讲	139
8.1 高维纤维化	139
8.2 特征 p 纤维化	141
8.3 曲线模空间	143
本章习题	145
参考文献	146

第一章 纤维化基础知识

1.1 基本概念和性质

设 S 是光滑射影曲面, C 是亏格为 b 的光滑代数曲线. 曲面 S 上的纤维化 (Fibration) 就是从 S 到 C 的全纯满态射 $f: S \rightarrow C$, 使得每个点 $p \in C$ 在 f 下的原像 F_p 是连通曲线. C 称为 f 的底曲线 (Base curve).

我们称 F_p 为 f 在点 p 处的纤维 (Fiber). 如果一条纤维 F_p 是光滑既约曲线, 那么我们就称之为光滑纤维; 反之, 则称为奇异纤维 (Singular fiber), 并将其像点 p 称为临界点. S 上的一条不可约曲线 Γ 如果其像 $f(\Gamma)$ 是一个点, 则称为垂直的; 否则称为水平的. 如果水平曲线 Γ 与一般纤维相交数为 1, 则称之为 f 的截面 (Section). 显见截面 $\Gamma \cong C$.

命题 1.1.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是纤维化, 则

- (1) f 是平坦态射, 且任何纤维都有相同的算术亏格;
- (2) f 至多只有有限条奇异纤维.

证明 (1) 参看 [Hat77, III9.10/IIIex10.9].

(2) 来自于 Bertini 定理. 这里我们给出另一种较为直观的局部计算性证明. 设 $p \in C$, F_p 是对应的纤维. 任取一点 $q \in F_p$, 考虑 q 附近局部坐标 (x, y) 以及 $p \in C$ 附近的局部坐标 t . 此时, 纤维化 f 在 q 附近的局部方程可写为 $f(x, y) = t$. (F, q) 是曲线奇点当且仅当 q 满足 $(df)_q = 0$, 即

$$\begin{cases} f(x, y) = t, \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

我们令 Σ 是曲面 S 上所有上述奇点构成的集合的闭包. 显见 Σ 是解析子集, 且 $\dim \Sigma \leq 1$. 如果存在不可约曲线 $\Gamma \subseteq \Sigma$, 则我们可以断言 Γ 是垂直分支. 若不然, $f: \Gamma \rightarrow C$ 诱导一个有限覆盖. 因此我们可取 Γ 的一个光滑点及其局部邻域 V , 使得 $f: \Gamma|_V \rightarrow \Delta$ 是局部同构, 此处 Δ 是 C 中相应的像邻域. 换言之, 存在局部全纯函数 $g(t), h(t)$, 使得

$$t \equiv f(g(t), h(t)), \quad \forall t \in \Delta.$$

两边求导得到

$$1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot h'(t).$$

但由 Γ 的选取可知, 在 $\Gamma|_V$ 上恒有 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 这与上式导致矛盾!

这样我们可将 Σ 写为

$$\Sigma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r \cup \Sigma_0,$$

这里诸 Γ_i 是垂直分支, Σ_0 为有限点集. 因此 f 只有有限条奇异纤维. ■

对一般纤维 F , 记其亏格为 $g = g(F)$. 由于 g 不依赖于 F 的选取, 因此我们也称之为纤维化 f 的亏格; f 也常称为亏格 g 纤维化 (Fibration of genus g). 当 $g = 0$ 时, $f: S \rightarrow C$ 亦称为几何

直纹面 (Ruled surface). 当 $g = 1$ 时, f 称为椭圆纤维化 (Elliptic fibration), 而 S 除了少数情形之外都是椭圆曲面.

当 $g \geq 2$ 时, 如果一般纤维 F 都是超椭圆曲线, 即到射影直线 \mathbb{P}^1 上有二次覆盖, 那么我们就称 f 是超椭圆纤维化 (Hyperelliptic fibration); 否则就称为非超椭圆纤维化 (Nonhyperelliptic fibration). 类似地, 如果一般纤维 F 到射影直线 \mathbb{P}^1 上都有三次覆盖, 则称 f 是三点式纤维化 (Trigonal fibration). 亏格 2 纤维化必定是超椭圆纤维化. 亏格 3 非超椭圆纤维化则必定是三点式纤维化.

命题 1.1.2 设 F, F' 是两条纤维, 则

- (1) $\mathcal{O}_F(F) \cong \mathcal{O}_F, F^2 = 0$;
- (2) 若 F 光滑, 则 $\omega_F = \mathcal{O}_F(\omega_S)$, 特别地, 我们有 $2g - 2 = K_S F$;
- (3) F 与 F' 数值等价.

证明 设 $p \in C, F_p = f^*(p)$ 是相应纤维. 由 Moving 引理, 可设 $p \equiv H_1 - H_2$, 这里 H_i 是 C 上不含 p 的非常丰富除子. 于是

$$F_p = f^*(p) = f^*H_1 - f^*H_2 = \sum_{a \in H_1} F_a - \sum_{b \in H_2} F_b.$$

由此立得

$$F^2 = F \left(\sum_{a \in H_1} F_a - \sum_{b \in H_2} F_b \right) = 0.$$

同样地, $\mathcal{O}_F(f^*H_i) \cong \mathcal{O}_F$. 因此

$$\mathcal{O}_F(F) \cong \mathcal{O}_F(f^*H_1) \otimes \mathcal{O}_F(-f^*H_2) \cong \mathcal{O}_F.$$

进一步, 由相伴公式可得 $\omega_F = \mathcal{O}_F(\omega_S \otimes \mathcal{O}_S(F)) = \mathcal{O}_F(\omega_S)$

下面我们证明(3). 回顾如下正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0.$$

它诱导了上同调正合列

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\alpha_S} H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}),$$

这里 $H^1(S, \mathcal{O}_S^*) = Pic(S)$ 是 Picard 群, $Imc_1 = NS(S)$ 是由陈类诱导的 Neron-Severi 群, 其数值等价类的集合即构成数值等价类群 $Num(S)$. 同样地, 我们也有正合列

$$H^1(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\alpha_C} Pic(C) \xrightarrow{\deg} H^2(C, \mathbb{Z}),$$

这里 \deg 可视为求曲线 C 上除子的次数. 我们记 $Pic^0(S) = Im\alpha_S, Pic^0(C) = Im\alpha_C$.

设 $F = f^*(p), F' = f^*(p')$. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^1(S, \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\alpha_S} & Pic(S) & \xrightarrow{c_1} & NS(S) \\ \uparrow & & \uparrow f^* & & \uparrow \beta \\ H^1(C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\alpha_C} & Pic(C) & \longrightarrow & H^2(C, \mathbb{Z}) \end{array}$$

因为 $p - p' \in Pic^0(C)$, 所以 $c_1(F - F') = c_1(f^*(p - p')) = \beta(\deg(p - p')) = 0$, 即 $c_1(F) = c_1(F')$, 亦即 F 与 F' 数值等价. ■

由上述结论, 我们可以再次证明纤维的算术亏格都是 g .

推论 1.1.1 (Zariski 引理) 设 $F_0 = \sum_{i=1}^r n_i C_i$ 是奇异纤维, 这里诸 C_i 是互不相同的不可约既约分支, 分支重数 $n_i > 0$.

(1) 对任何纤维 F , 我们有 $FC_i = 0, i = 1, \dots, r$.

(2) 设 $D = \sum_{i=1}^r m_i C_i, m_i \in \mathbb{Z}$. 那么必有 $D^2 \leq 0$. 进一步, $D^2 = 0$ 当且仅当 $D = \gamma F$, 这里 γ 是某个有理数. 换言之, F_0 是半负定曲线.

证明 (1) 显然. (2) 的证明可参考[Art62], 具体如下.

由(1) 知,

$$C_i^2 = -\frac{1}{n_i} \sum_{k \neq i} n_k C_k C_i.$$

又因为

$$D^2 = \sum_{i=1}^r m_i^2 C_i^2 + 2 \sum_{i < j} m_i m_j C_i C_j,$$

所以有

$$\begin{aligned} D^2 &= -\sum_{i < j} \left(\frac{m_i^2 n_j}{n_i} + \frac{m_j^2 n_i}{n_j} \right) C_i C_j + 2 \sum_{i < j} m_i m_j C_i C_j \\ &= -\sum_{i < j} \left(\frac{m_i}{n_i} - \frac{m_j}{n_j} \right)^2 n_i n_j C_i C_j \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

显然, $D^2 = 0$ 当且仅当 $\frac{m_i}{n_i} = \frac{m_j}{n_j} (i \neq j)$, 即 $D = \gamma F, \gamma = \frac{m_1}{n_1}$. ■

假设 n 是最大的整数, 使得 $\frac{1}{n}F$ 是整除子. 如果 $n > 1$, 那么这样的 F 就称为多重纤维 (Multiple fiber), 此时 n 称为 F 的重数.

作为 Zariski 引理的一个简单应用, 我们给出以下推论, 后面将会用到它.

推论 1.1.2 设 F 是奇异纤维, D, D' 是支集落在 F 中的除子, 且 $D^2 = D'^2 = -1$, 则

(1) 要么 $D \geq 0$, 要么 $D \leq 0$.

(2) 假设 $D \geq 0, D' \geq 0$, 且它们的支集相交非空, 则以下情形之一必定成立 ($\gamma \in \mathbb{Q}$).

(a) $D \geq D'$, 或 $D' \geq D$,

(b) $D + D' = \gamma F$,

(c) $D \wedge D' = \gamma F$, 这里 $D \wedge D'$ 指不超过 D 和 D' 的最大有效除子,

(d) $D + D' - D \wedge D' = \gamma F$.

特别地, 如果 $D + D'$ 的支集是负定曲线, 那么只有情形 (a) 出现; 且当 $D \neq D'$ 时, 恒有 $DD' = 0$.

证明 (1) 设 $D = D_1 - D_2$, 这里 $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0$, 且两者没有公共分支. 今假设 $D_1, D_2 \neq 0$. 若 $D_1^2 = 0$, 则 $D_1 = \gamma F, \gamma \in \mathbb{Q}$. 这就推出 $D_2 = 0$, 与假设矛盾! 故 $D_1^2 \leq -1$, 同理有 $D_2^2 \leq -1$. 于是

$$-1 = (D_1 - D_2)^2 \leq D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \leq D_1^2 + D_2^2 \leq -2,$$

矛盾! 综上可知要么 $D \geq 0$, 要么 $D \leq 0$.

(2) 注意 $-2 \pm 2DD' = (D \pm D')^2 \leq 0$, 从而 $-1 \leq DD' \leq 1$. 如果 $(D - D')^2 = 0$, 则 $D - D' = \gamma F$, $\gamma \in \mathbb{Q}$. 于是 $D \geq D'$, 或者 $D' \geq D$. 如果 $(D + D')^2 = 0$, 则 $D + D' = \gamma F$, $\gamma \in \mathbb{Q}$, 即情形 (b). 如果 $(D_1 \wedge D_2)^2 = 0$, 那么立得情形 (c). 以下不妨假设 $(D \pm D')^2 < 0$, 即 $DD' = 0$, 以及 $(D_1 \wedge D_2)^2 < 0$.

设 $A = D - D \wedge D'$, $B = D' - D \wedge D'$. 由定义及假设条件, 显然有 $A, B \geq 0$, 且 A, B 无公共分支, $(D - A)^2 < 0$, $(D' - B)^2 < 0$. $A = 0$ (相应地, $B = 0$) 当且仅当 $D \leq D'$ (相应地, $D' \leq D$). 进一步, 如果 $(D + B)^2 = 0$, 或者 $(D' + A)^2 = 0$, 那就得到情形 (d). 以下不妨进一步假设 $A \neq 0$, $B \neq 0$, 且 $(D + B)^2 < 0$, $(D' + A)^2 < 0$.

由于 D, D' 支集相交, 且 $DD' = 0$, 所以 $D \wedge D' \neq 0$, 即 $A \neq D$, $B \neq D'$. 进一步, 如果 $A^2 = 0$, 则 $A = \gamma F$, 由于 A 和 B 无公共分支, 故 $B = 0$, 与假设矛盾! 因此 $A^2 \leq -1$, 同理有 $B^2 \leq -1$. 由

$$-2 = (D - D')^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \leq A^2 + B^2 \leq -2.$$

推出 $A^2 = B^2 = -1$, $AB = 0$. 结合前面假设条件可知

$$DA \geq 0, D'B \geq 0, D'A \leq 0, DB \leq 0.$$

另一方面,

$$BD = DD' - D(D \wedge D') = -D(D \wedge D') = AD - D^2 = AD + 1.$$

这就推出 $BD \geq 1$, 矛盾! ■

引理 1.1.1 假设 $F = nF_0$ 是重数为 n 的重纤维, 那么 $\mathcal{O}_F(F_0)$ 及 $\mathcal{O}_{F_0}(F_0)$ 都是 n 阶挠层.

证明 参见 [BPV04, 引理 8.3, page 111], 或者 [Xia92, 引理 2.4.3]. ■

设 $f : S \rightarrow C$ 及 $f' : S' \rightarrow C'$ 是纤维化. 如果存在双有理映射 $\varphi : S \dashrightarrow S'$ 使得下面的交换图成立,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

则称它们是双有理等价的.

如果 $f : S \rightarrow C$ 的任何纤维中都不含有 (-1) -曲线, 那么我们就称其为相对极小纤维化 (Relatively minimal fibration). 一个纤维化

命题 1.1.3 设 $f : S \rightarrow C$ 是纤维化, 那么

- (1) 总存在一个双有理等价于 f 的相对极小纤维化, 我们称之为**相对极小模型** (Relatively minimal model);
- (2) 当 $g > 0$ 时, 相对极小模型是唯一的;
- (3) 若 $b = g(C) > 0$, 那么 f 相对极小当且仅当 S 是极小曲面.

证明 (1)(3) 是显然的. 下面证明(2). 假设 $f_i : S_i \rightarrow C$ ($i = 1, 2$) 是两个不同构的相对极小模型. 我们可构造曲面 S' , 使得 $\rho_i : S' \rightarrow S$ ($i = 1, 2$) 是一系列爆发, 且有交换图

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\rho_2} & S_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ S_1 & \xrightarrow{f_1} & C \end{array}$$

设 E 是 S' 上的 (-1) -曲线, 且被 ρ_1 收缩. 不失一般性, 我们可以假设 E 不被 ρ_2 收缩(否则我们可以用收缩掉 E 后的新曲面代替 S'). 这样, $\rho_2(E)$ 是曲线, 记为 E_2 .

E 落在 $f_1 \cdot \rho_1 : S' \rightarrow C$ 的某个纤维 F' 中, 因此我们可设 F' 在 S_i 中的像纤维为 F_i ($i = 1, 2$). 由于 S_2 相对极小且 $E_2 \subseteq F_2$, 所以 E_2 不是 (-1) -曲线. 因此由 ρ_2 的定义可知, $E_2^2 > E^2 = -1$. 另一方面, 由 Zariski 引理, $E_2^2 \leq 0$, 故得 $E_2^2 = 0$, 即 $F_2 = \gamma E_2$, 对某个有理数 γ 成立. 注意到 E 是有理曲线, 所以 $E_2 \cong \mathcal{P}^1$.

由简单计算可知. $K_{S_2} F_2 = \gamma K_{S_2} E_2 = -2\gamma$, 即 $g = g(F_2) = 1 - \gamma$, 从而 $\gamma = 1$, $g = 0$, 与假设矛盾! ■

从上述证明也可看出, 几何直纹面的极小模型不唯一.

本节最后, 我们给出如下结论:

命题 1.1.4 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, F 是任意纤维, 则有

$$h^0(F, \mathcal{O}_F) = 1, \quad h^1(F, \mathcal{O}_F) = g.$$

为证明命题 1.1.4, 我们需要下面一些关于除子技巧的引理 (更多内容可参看 [Men88]).

引理 1.1.2 设 Γ 是曲面 S 上有效除子, \mathcal{L} 是 Γ 上的可逆层, 且它在 Γ 的任何不可约分支上的限制都是零次的. 假设有非零截面 $s \in H^0(\mathcal{L})$, 且 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, 使得 $\Gamma_1 \leq \Gamma$ 是满足 $s|_{\Gamma_1} = 0$ 的极大除子, 那么我们有 $\Gamma_1 \Gamma_2 \leq 0$.

证明 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(-\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_1} \otimes \mathcal{L}.$$

我们得到上同调正合列

$$0 \longrightarrow H^0(\Gamma_2, \mathcal{L}(-\Gamma_1)|_{\Gamma_2}) \xrightarrow{Res} H^0(\Gamma, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\Gamma_1, \mathcal{L}|_{\Gamma_1}).$$

由 Γ_2 定义知, $s \in H^0(\Gamma_2, \mathcal{L}(-\Gamma_1)|_{\Gamma_2})$, 故 s 诱导单态射 $s : \mathcal{O}_{\Gamma_2} \hookrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(-\Gamma_1)$. 考虑相应正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_2} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(-\Gamma_1) \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

它诱导了

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2} \longrightarrow Q \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1) \longrightarrow 0.$$

由于 Γ_1 是满足 $s|_{\Gamma_1} = 0$ 的极大除子, 所以 s 在 Γ_2 上的零点集是有限集, 从而 $Supp(Q) \subseteq Div(s)$ 是有限支集. 这样我们有

$$\chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}) - \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)) = \chi(Q \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)) = h^0(Q \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)).$$

另一方面, 由 Riemann-Roch 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}) &= \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}) + \deg \mathcal{L} |_{\Gamma_2} = \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}). \\ \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)) &= \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}) + \deg \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1) = \chi(\mathcal{O}_{\Gamma_2}) + \Gamma_1 \Gamma_2.\end{aligned}$$

因此 $\Gamma_1 \Gamma_2 = -h^0(Q \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_2}(\Gamma_1)) \leq 0$. ■

引理 1.1.3 设 Γ 和 \mathcal{L} 满足引理 1.1.2 的条件, 且 Γ 是 1-连通除子, 则 $h^0(\mathcal{L}) \leq 1$. 进一步, $h^0(\mathcal{L}) = 1$ 当且仅当 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_\Gamma$. 特别地, 我们有 $h^0(\mathcal{O}_\Gamma) = 1$.

证明 假设存在非零截面 $s \in H^0(\mathcal{L})$, 考虑 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 同引理 1.1.2. 由于 $s \neq 0$, 所以 $\Gamma_2 \neq 0$. 引理 1.1.2 及 Γ 的 1-连通性迫使 $\Gamma_1 = 0$, 即 $\Gamma_2 = \Gamma$. 又因为 \mathcal{L} 在 Γ 的任何不可约分支上次数为零, 所以 $Q = 0$ (见引理 1.1.2). 这就推出 $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_\Gamma$, 从而 $h^0(\mathcal{L}) = 1$. ■

命题 1.1.4 的证明. 由正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-F) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0$$

以及 Riemann-Roch 定理, 我们得到

$$\chi(\mathcal{O}_F) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-F)) = 1 - g.$$

因此, 只需证 $h^0(\mathcal{O}_F) = 1$.

假设 n 是最大整数, 使得 $F_0 = \frac{1}{n}F$ 是整除子. 我们先证明 F_0 是 1-连通除子. 若不然, 可设 $F_0 = A + B$, $A, B \geq 0$, $AB < 0$. 由 Zariski 引理, $2AB = -A^2 - B^2 \geq 0$. 因此 $AB = 0$, $A^2 = B^2 = 0$, 从而 A, B 都有 γF_0 的形式. 这将推出 F_0 仍是可除的, 即与 n 的最大性矛盾! 因此 F_0 是 1-连通除子. 这样, 由引理 1.1.3 知, $h^0(\mathcal{O}_{F_0}) = 1$. 特别地, 对非重纤维来说, 该结论成立. 因此以下只需考虑重纤维情形.

对正整数 $k < n$, 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{F_0}(-kF_0) \longrightarrow \mathcal{O}_{(k+1)F_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{kF_0} \longrightarrow 0.$$

由于 $\mathcal{O}_{F_0}(F_0)$ 是 n 阶挠层(引理 1.1.1), 所以 $h^0(\mathcal{O}_{F_0}(-kF_0)) = 0$. 因此

$$h^0(\mathcal{O}_{(k+1)F_0}) \leq h^0(\mathcal{O}_{kF_0}), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

这就推出 $h^0(\mathcal{O}_F) = h^0(\mathcal{O}_{F_0}) = 1$. ■

1.2 相对典范层与不变量

设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 g 纤维化, $b = g(C)$. 我们可以定义 f 的相对典范层 (Relative canonical sheaf) $\omega_{S/C} = \omega_S \otimes f^* \omega_C^\vee$. 它有时也称为相对对偶层 (Relative dualising sheaf). 对应 $\omega_{S/C}$ 的除子 $K_{S/C} = K_S - f^* K_C$ 称为相对典范除子 (Relative canonical divisor). 类似地, 也可以定义相对 ν -典范层 $\omega_{S/C}^{\otimes \nu}$.

利用以下正合列还可定义层 $\Omega_{S/C}$:

$$0 \longrightarrow f^* \Omega_C \longrightarrow \Omega_S \longrightarrow \Omega_{S/C} \longrightarrow 0.$$

一般来说, $\Omega_{S/C} \neq \omega_{S/C}$, 它甚至不是局部自由的.

引理 1.2.1 设 $D(f) = \sum_F (F - F_{red})$, 这里 F 跑遍所有奇异纤维, F_{red} 是 F 的既约部分.

(1) 设 $\omega \in \Omega_C$, 则 $div(f^*\omega) = f^*div(\omega) + D(f)$.

(2) $c_1(\Omega_{S/C}) = K_{S/C} - D(f)$.

(3) 存在单态射 $\Omega_{S/C}^{\vee} \cong \omega_{S/C}(-D(f)) \hookrightarrow \omega_{S/C}$.

证明 (1) 局部上设 $\omega = h(t)dt$, f 的局部方程 $t = f(x, y)$. 这样 $f^*\omega = h(f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}dx + h(f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}dy$. 从而

$$div(f^*\omega) = Z(h(x, y)) \cup (Z(\frac{\partial f}{\partial x}) \cap Z(\frac{\partial f}{\partial y})) = f^*div(\omega) + div(df).$$

设 Γ 是 F 的某个不可约分支, 重数为 n , $q \in \Gamma$ 是一般点. 在合适的坐标下, f 在 q 处局部方程可写为 $t = x^n$. 于是 $dt = nx^{n-1}dx$, 故 $div(df|_{\Gamma}) = (n-1)\Gamma$. 这就推出 $div(df) = \sum_F (F - F_{red})$.

(2) (3)显然. ■

设 $c_1(S)$, $c_2(S)$ 是曲面 S 上的第一、第二陈类. 从数值上看, 有 $c_1^2(S) = K_S^2$, $c_2(S) = \chi_{top}(S)$. 我们可以定义 f 的相对不变量 (Relative invariants).

$$K_f^2 := c_1^2(S) - 8(g-1)(b-1),$$

$$e_f := c_2(S) - 4(g-1)(b-1),$$

$$\chi_f := \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1),$$

以及相对不规则性 $q_f = q(S) - b$. 由直接计算可知 $K_f^2 = K_{S/C}^2$. 此外, 我们也有相对不变量之间的 Noether 公式

$$12\chi_f = K_f^2 + e_f.$$

此外, 人们也常关心以下不变量:

$$Sign(S) = K_S^2 - 8\chi(\mathcal{O}_S) = K_f^2 - 8\chi_f.$$

它实际上就是 $H^2(S, \mathbb{Q})$ 上相交型的符号差 (Signature), 有时也称为拓扑指标 (Topology index, [Mat90]).

对纤维 F 而言, 我们可以定义局部不变量 $e_F = \chi_{top}(F_{red}) + 2g - 2$, 这里 F_{red} 指 F 的拓扑支集, 亦称 F 的既约部分.

命题 1.2.1 设 F_1, \dots, F_s 是 f 的所有奇异纤维, 那么

$$e_f = \sum_{i=1}^s e_{F_i}.$$

证明 设 $p_i = f(F_i)$ ($i = 1, \dots, s$), $C' = C - \{p_1, \dots, p_s\}$, $S' = S - \bigcup_{i=1}^s F_i$. 设 $f' : S' \rightarrow C'$ 是诱导的纤维化. 由于 f' 是拓扑纤维丛, 所以

$$\chi_{top}(S') = \chi_{top}(C')\chi_{top}(F),$$

这里 F 是一般纤维.

利用下述拓扑事实

$$\chi_{top}(S') = \chi_{top}(S) - \sum_{i=1}^s \chi_{top}(F_{i,red}),$$

我们立得结论. ■

这一结论的重要性在于: 它将整体不变量 e_f 的计算转化成了奇异纤维的局部贡献值计算, 后者只取决于奇异纤维本身的组合与拓扑结构.

研究纤维化的一个主要工具是相对典范层在 C 上的正像层 $f_*\omega_{S/C}$. 我们首先回顾曲线上向量丛的若干事实.

引理 1.2.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是纤维化, \mathcal{F} 是 S 上的局部自由层.

(1) (Grauert) 如果 $R^i f_*\mathcal{F}$ 在 C 上每一点的茎都有相同的秩, 那么它是 C 上局部自由层.

(2) (相对对偶公式)

$$R^i f_*\mathcal{F} \otimes R^{1-i} f_*(\omega_{S/C} \otimes \mathcal{F}^\vee) \cong \mathcal{O}_C.$$

特别地, 如果 $R^i f_*\mathcal{F}$ 及 $R^{1-i} f_*(\omega_{S/C} \otimes \mathcal{F}^\vee)$ 都是局部自由层, 那么

$$R^i f_*\mathcal{F} \cong (R^{1-i} f_*(\omega_{S/C} \otimes \mathcal{F}^\vee))^\vee.$$

(3) (Leray 谱序列)

$$(3a) \quad H^0(S, \mathcal{F}) \cong H^0(C, f_*\mathcal{F}).$$

$$(3b) \quad H^2(S, \mathcal{F}) \cong H^1(C, R^1 f_*\mathcal{F}).$$

(3c) 我们有正合列

$$0 \longrightarrow H^1(C, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(C, R^1 f_*\mathcal{F}).$$

特别地, $h^1(S, \mathcal{F}) = h^1(C, f_*\mathcal{F}) + h^0(C, R^1 f_*\mathcal{F})$.

(4) $f_*\mathcal{F}$ 也是局部自由层.

对局部自由层 \mathcal{F} 来说, 在一般情形下, 我们不能保证 $h^0(F, \mathcal{F}|_F)$ 是不依赖于纤维 F 选取的常数. 此时只有单同态 $f_*\mathcal{F}|_p \hookrightarrow H^0(F_p, \mathcal{F}|_{F_p})$, 这里 $F_p = f^*(p)$.

命题 1.2.2 设 $b = g(C)$, $q_f = q(S) - b$. 我们有

(1) $R^1 f_*\omega_{S/C} \cong f_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_C$.

(2) $R^1 f_*\mathcal{O}_S \cong (f_*\omega_{S/C})^\vee$, $f_*\omega_S = f_*\omega_{S/C} \otimes \omega_C$, 以及 $f_*\omega_{S/C}$ 都是秩为 g 的局部自由层.

(3) 同调维数公式

$$(3a) \quad h^1(C, R^1 f_*\omega_S) = 1, \quad h^0(C, R^1 f_*\omega_S) = h^1(C, f_*\mathcal{O}_S) = b.$$

$$(3b) \quad h^1(R^1 f_*\mathcal{O}_S) = h^0(f_*\omega_S) = p_g(S), \quad h^0(R^1 f_*\mathcal{O}_S) = h^1(f_*\omega_S) = q_f.$$

推论 1.2.1 $\deg f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu} = \frac{\nu(\nu-1)}{2} K_f^2 + \chi_f, \nu \geq 1$.

证明 这里只讨论 $\nu = 1$ 的情形, 其余情形类似.

由相对对偶公式及 Riemann-Roch 定理, 我们有

$$\deg f_*\omega_{S/C} = -\deg R^1 f_*\mathcal{O}_S = -\chi(R^1 f_*\mathcal{O}_S) + g(1 - b).$$

又由命题 1.2.2 (3) 得

$$\chi(R^1 f_*\mathcal{O}_S) = -\chi(f_*\omega_S) = -\chi(\mathcal{O}_S) + 1 - b.$$

结合以上二式即得结论. ■

在处理具体问题时, 将 $f_*\omega_{S/C}$ 视为一个向量丛, 会显得更为方便. 粗略地讲, 在 C 的一个小邻域 V 上,

$$f_*\omega_{S/C} \approx \bigcup_{p \in V} H^0(F_p, \omega_{F_p}), \quad F_p = f^*(p).$$

对一般纤维 F_p , $H^0(F_p, \omega_{F_p})$ 由 g 个线性无关截面 $\omega_{1p}, \dots, \omega_{gp}$ 生成. 向量丛 $f_*\omega_{S/C}$ 在 p 处的茎就是向量空间 $H^0(F_p, \omega_{F_p})$. 因此我们可以将 $\{\omega_{1p}, \dots, \omega_{gp}\}$ 看成该向量空间的一组标架, 而不把它们作为截面来看, 不妨记为 $\{\tilde{\omega}_{1p} \cdots \tilde{\omega}_{gp}\}$.

命题 1.2.3 设 \mathcal{L} 是 S 上的线丛, 则

- (1) 存在自然态射 $f^*f_*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$;
- (2) \mathcal{L} 定义了 C 上的有理映射 $\Phi_{\mathcal{L}, C}: S \dashrightarrow \mathbb{P}(f_*\mathcal{L})$, 即有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \dashrightarrow^{\Phi_{\mathcal{L}, C}} & \mathbb{P}(f_*\mathcal{L}) \\ & \searrow f & \swarrow \\ & & C \end{array}$$

这里 $\mathbb{P}(f_*\mathcal{L})$ 是相应的射影丛.

证明 (1) 来自于 f^* 和 f_* 的相伴性质(参看 [Hat77, II, page 110]). 我们以 $\mathcal{L} = \omega_{S/C}$ 为例, 从局部上来解释此映射. 设 $q \in F_p$. 该映射局部上相当于

$$\mathcal{O}_{S,q}\tilde{\omega}_{1p} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{S,q}\tilde{\omega}_{gp} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,p}\omega_{1p} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{C,p}\omega_{gp}.$$

(2) $f_*\mathcal{L}|_p$ 对应 $H^0(\mathcal{L}|_{F_p})$ 的子空间 Λ_p , 则有有理映射 $\Phi_{\mathcal{L}, C}|_{F_p}: F_p \dashrightarrow \Lambda_p$. 因此诱导了整体上的有理映射 $\Phi_{\mathcal{L}, C}: S \dashrightarrow \mathbb{P}(f_*\mathcal{L})$. ■

当我们取 $\mathcal{L} = \omega_{S/C}^{\otimes \nu}$ 时, 上述映射称为相对 ν -典范映射. $\nu = 1$ 时也称相对典范映射 (Relative canonical map).

我们引入相对分歧指数的概念. 它在处理超椭圆纤维化的计算中非常有用. 设 D 是 S 上的任一有效除子. 我们定义 $r(D) := D^2 + DK_{S/C}$, 称为 D 的相对分歧指数 (Relatively ramification index). 对纤维 F 中的任何既约不可约分支 Γ , 我们有 $r(\Gamma) = 2p_a(\Gamma) - 2$.

由直接计算, 我们有

命题 1.2.4 (相对相伴公式) 设 D 是 S 上的水平既约曲线, $\sigma: (\tilde{S}, \tilde{D}) \rightarrow (S, D)$ 是 D 的正规化, δ 是 D 上所有奇点的几何亏格之和. 那么 $(f\sigma)|_{\tilde{D}}: \tilde{D} \rightarrow C$ 诱导了一个有限覆盖, 其分歧指数恰为 $r(D) - 2\delta$. 特别地, $r(D) \geq 0$, 等号成立当且仅当 D 是截面.

对于纤维化曲面上的除子线性系, 可以作适当的分析. 这里先回顾一些一般性的事实, 具体细节可参考 [Tan03]. 设 S 是代数曲面, D 是 S 上除子, Δ 是零维子概型, $\deg \Delta = k$, \mathcal{I}_Δ 是理想层. 如果 $h^0(S, \mathcal{I}_\Delta(D)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - k$, 我们称 Δ 对线性系 $|D|$ 给出了独立性条件, 或者说 Δ 可以区分 Δ 中的点. 如果任何次数为 k 的零维子概型 Δ 都对 $|D|$ 给出独立性条件, 那么我们称 $|D|$ 是 k -可分的 (k -separated), 或者 $(k-1)$ -very ample. 此外我们规定 $|D|$ 是 0-可分的当且仅当 $h^1(S, \mathcal{O}_S(D)) = 0$.

命题 1.2.5 ([Tan03]) 设 $L^2 > 4k$, $|K_S + L|$ 不是 k 可分的, Δ 是次数不超过 k 且对 $|K_S + L|$ 不给出独立性条件的极小零维子概型. 那么存在有效除子 D , 使得 $\Delta \subseteq D$, 且满足

$$DL - k \leq D^2, \quad DA < \frac{1}{2}LA,$$

这里 A 是 nef 的, 且不数值等价于 0.

设 $T \geq 0$, $L = nF + T - K_S$, 这里 F 是一般纤维. 设 $d = TF$, 那么我们有以下结论

推论 1.2.2 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 相对极小纤维化, F 是一般纤维, $b = g(C)$. 设 $T \in \text{Pic}(S)$, $d = TF$, 满足

$$2(n+2-2b)(d+2-2g) + (T - K_{S/C})^2 > 4k.$$

如果 $|nF + T|$ 不是 k 可分, 那么存在 $D \geq 0$ 满足

$$(n+2-2b)DF \leq r(D) - DT + k,$$

$$DF < \frac{1}{2}(d+2-2g).$$

1.3 基变换与稳定约化

设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, \tilde{C} 是光滑曲线, $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 是有限态射; $S \times_C \tilde{C}$ 是纤维积, $\Pi' : S \times_C \tilde{C} \rightarrow S$ 是相应态射; $\rho_1 : S_1 \rightarrow S \times_C \tilde{C}$ 是 $S \times_C \tilde{C}$ 的正规化, $\rho_2 : S_2 \rightarrow S_1$ 是 S_1 的极小奇点解消; $\tilde{\rho} : S_2 \rightarrow \tilde{S}$ 是相对极小模型. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{S} & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & S_2 & \xrightarrow{\rho_2} & S_1 & \xrightarrow{\rho_1} & S \times_C \tilde{C} & \xrightarrow{\Pi'} & S \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array} \quad (1-1)$$

我们称 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 为基变换 (Base change), \tilde{f} 为 f 在基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 下的拉回. 设 Σ 是 C 上临界点全体构成的集合. 如果 π 在 Σ 上不分歧, 则称 π 是一个 Σ -基变换 或好的基变换. 以下我们总设 $\Pi_2 = \Pi' \rho_1 \rho_2 : S_2 \rightarrow S$, $\Pi : \tilde{S} \dashrightarrow S$ 是交换图 1-1 诱导的有理映射.

基变换实质上可以归结为局部情形, 即在 C 的局部小邻域上构造基变换. 我们首先引入局部纤维化的概念. 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是从复曲面 S 到单位圆盘 $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$ 的可分全纯映射, 使得 $F_t = f^{-1}(t)$ 是亏格 $g \geq 1$ 的光滑曲线, $\forall t \in \Delta^* = \Delta - \{0\}$. f 称为局部纤维化, 或亏格 g 曲线之退化 (Degeneration), $F_0 = f^{-1}(0)$ 称为中心纤维, 有时我们也称该曲线退化为 F_0 的纤维芽 (Fiber germ). 若该曲线退化不含 (-1) -曲线, 则谓之极小. 若对另一曲线退化 $f' : S' \rightarrow \Delta'$, 存在同胚 $H : S \rightarrow S'$ 及 $h : \Delta \rightarrow \Delta'$, 使得 $h(0) = 0$ 且 $hf = f'H$, 则称 f 与 f' 拓扑等价. 一般说来, 具有相同中心纤维的曲线退化不一定拓扑等价, 也不一定解析等价.

设 $\pi_n : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ 是映射 $t \rightarrow t^n$, 即以 $0 \in \Delta$ 为全分歧点的局部 n 次局部循环覆盖. $\pi_n : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ 给出了局部纤维化的基变换

$$\begin{array}{ccccccc} S^{(n)} & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & S_2 & \xrightarrow{\rho_2} & S_1 & \xrightarrow{\rho_1} & S \times_{\Delta} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\Pi'} & S \\ f^{(n)} \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{\Delta} & \xlongequal{\quad} & \tilde{\Delta} & \xlongequal{\quad} & \tilde{\Delta} & \xlongequal{\quad} & \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\pi_n} & \tilde{\Delta} \end{array} \quad (1-2)$$

我们称 $f^{(n)} : S^{(n)} \rightarrow \Delta$ 是由基变换 $\pi_n : \Delta \rightarrow \Delta$ 诱导的 n -次根纤维化 (n -th root fibration). 此时 $\Pi' : S \times_{\Delta} \Delta \rightarrow S$ 是局部循环 Galois 覆盖. 设 $q \in F_0$ 局部坐标 (x, y) , f 的局部方程可写为 $f(x, y) = t$. 因此 $S \times_{\Delta} \Delta$ 的局部方程为 $t^n = f(x, y)$.

进一步, 假设 F_0 中经过 q 的所有不可约分支为 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$, n_i 是 Γ_i 在 F 中的重数. Γ_i 在 q 点的局部方程可写为 $f_i(x, y) = 0$, 从而 $f(x, y) = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}(x, y)$. 我们设 $d_q = \gcd(n, n_1, \dots, n_r)$. 于是

$$t^n - f = \prod_{j=0}^{d_q-1} (t^{n/d_q} - e^{2\pi j\sqrt{-1}/d_q} \prod_{i=1}^r f_i^{n_i/d_q}).$$

因此 S_1 局部上分解为 d_q 个彼此同构的 n/d_q 次循环 Galois 覆盖.

引理 1.3.1 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是中心纤维 F_0 的纤维芽, $f^{(n)} : S^{(n)} \rightarrow \Delta$ 是 n 次根纤维化. 设 $q \in F_0$, d_q 定义同上. 我们有

- (1) $(\Pi'\rho_1)^{-1}(q)$ 恰有 d_q 个点组成.
- (2) 设 Γ 是 F_0 中的不可约分支, $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 在 Π_2 拉回下严格原像中的不可约分支. 设 $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ 在各自纤维中的重数分别为 m, \tilde{m} . 那么 $\tilde{m} = \frac{m}{(m, n)}$.
- (3) 如果 $F_0 = nH$ 是 n 重纤维, 那么 S_1 是非奇异曲面, 即 $S_1 = S^{(n)}$, 且 $S_2 \rightarrow S$ 是无分歧覆盖. $f^{(n)} : S^{(n)} \rightarrow \Delta$ 的中心纤维不是重纤维. 特别地, 单连通纤维不可能是重纤维.

证明 (1) 采用前面的记号. 由上讨论已知 S_1 局部上有 d_q 个彼此同构的覆盖. 不妨设 $d_q = 1$. 设 $q_i \in \Gamma_i$ 是一般点, 则 $(\Pi'\rho_1)^{-1}(q_i)$ 有 $d_i = (n, n_i)$ 个点. 由于 $\Pi'\rho_1$ 是 n 次循环 Galois 覆盖, 所以 $\sharp(\Pi'\rho_1)^{-1}(q) \mid d_i$, $i = 1, \dots, r$. 因此 $\sharp(\Pi'\rho_1)^{-1}(q) = 1$.

(2) 令 $\tilde{n} = \frac{n}{(n, m)}$, $\tilde{m} = \frac{m}{(n, m)}$. 设 $q \in \Gamma$ 是一般点. 在合适坐标下, S_1 局部上有 (n, m) 个彼此同构的覆盖, 每个局部方程可写为 $t^{\tilde{n}} = x^{\tilde{m}}$. 由此易知 $\tilde{\Gamma}$ 在 $\Pi_2^*(\Gamma)$ 的严格原像中的重数为 \tilde{n} .

今以 F_2 表示 F_0 在 Π_2 下的原像纤维. 由交换图 1-2 知,

$$nF_2 = \Pi_2^*(F_0) = \Pi_2^*(m\Gamma + \dots) = m\tilde{n}\tilde{\Gamma} + \dots,$$

所以 $\tilde{\Gamma}$ 在 F_2 中的重数为 \tilde{m} .

(3) 由(1)(2)立得. ■

一条相对极小纤维 F 如果是既约曲线, 且 F 的所有奇点最多是结点, 那么我们就称 F 是半稳定纤维 (Semistable fiber). 如果一条半稳定纤维不含任何 (-2) -曲线, 则称之为稳定纤维 (Stable fiber). 如果一个相对极小纤维化 f 的每条奇异纤维都是半稳定的, 那么我们就称其为半稳定纤维化 (Semistable fibration).

任何相对极小纤维 F 总是可以通过爆发其上的奇点, 最终得到一个只有结点的纤维 \overline{F} , 并且 \overline{F} 中的任何 (-1) -曲线至少要和其他分支相交 3 个点. 这样的 \overline{F} 是唯一确定的. 我们称之为 F 的极小正规交模型 (Minimal normal-crossing model).

定理 1.3.1 (稳定约化定理, [DM69], [AW71]) 设 $f : S \rightarrow C$ 是任意纤维化, 则存在基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, 使得拉回的纤维化 $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是半稳定的. 这样的基变换称为 f 的半稳定约化 (Semistable reduction).

证明 显然我们只需要考虑局部纤维化的情形. 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是中心纤维 F_0 的纤维芽, \overline{F}_0 是极小正规交模型, F_2 是 \overline{F}_0 在 Π_2 拉回的原像纤维. 我们令 M 是 \overline{F}_0 中所有不可约分支的重数的最小公倍数. 由 1.3.1, \overline{F}_0 中的不可约分支拉回的严格原像分支在 F_2 中都是单重的. 剩下的就是验证: S_1 的奇点对应的例外曲线分支在 F_2 中也是单重的.

设 $q \in \overline{F}_0$ 是一个结点, S_1 的局部方程写为 $t^M = x_i^{n_i} y_j^{n_j}$, 这里 n_i, n_j 是经过 q 的分支重数. 因此这些奇点的例外曲线是一些由 (-2) -曲线组成的链. 由 Zariski 引理可知, 每条这样的 (-2) -曲线在 F_2 中重数为 1. ■

定理 1.3.2 (Kodaira-Parshin 构造 [Voj88]) 设 $f : S \rightarrow C$ 在 C 上有 s 个临界点, 则存在 f 的基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, 满足

- (1) π 在 s 个临界点上一致分歧, 且 π 在每个分歧点处的分歧指数恰为 e ;
- (2) 如果 $g(C) > 0$, 则 e 可以是任何正整数; 如果 $g(C) = 0$, 则 e 可以是任何奇数.

注 1.3.1 如果临界点个数 $s \geq 3$, 那么不管 C 的亏格是多少, 我们总能找到一个这样的稳定约化, 使得上述 e 被每条纤维极小正规交模型中的任何分支的重数整除, 且 e 可以任意大 ([Tan96, 定理 4.7]).

以下我们设 $K_1 = \tilde{\rho}^* K_{\tilde{S}/\tilde{C}}$, $K_2 = \Pi_2^* K_{S/C}$. 设 Γ 是 $f_2 : S_2 \rightarrow \tilde{C}$ 纤维 F_2 中不被 Π_2 收缩的不可约分支, 且 $\Pi_2(\Gamma)$ 不是点. 令 n_Γ 是 π 在 $f_2(\Gamma)$ 处的分歧指数, m_Γ 是 $\Pi_2(\Gamma)$ 在像纤维中的重数, $l_\Gamma = \gcd(n_\Gamma, m_\Gamma)$. 前已证 Γ 在纤维 F_2 中的重数恰好是 m_Γ/l_Γ . 我们定义 $k_\Gamma = \frac{1}{l_\Gamma}(n_\Gamma m_\Gamma - n_\Gamma - m_\Gamma) + 1$.

引理 1.3.2 (Beauville) 设 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 是 f 的基变换, 则

$$K_{S_2/\tilde{C}} = K_2 - \sum_{\Gamma} k_\Gamma \Gamma - Z,$$

这里 Z 是由例外曲线构成的有效除子; Γ 跑遍奇异纤维中不被 Π_2 收缩的不可约分支; k_Γ 定义如上.

进一步, $D = K_2 - K_1 \geq 0$, 且含在纤维中.

证明 由 $K_{S_2/\tilde{C}} - K_2 = (K_{S_2} - \Pi_2^* K_S) - f_2^*(K_{\tilde{C}} - \pi^* K_C)$ 可知这是一个局部问题, 我们不妨考虑局部纤维化情形 $f : S \rightarrow \Delta$, $\pi : \Delta \rightarrow \Delta$ 诱导 n 次根纤维化, 即 $n_\Gamma = n$. 于是

$$K_{S_2} - \Pi_2^* K_S = \sum_{\Gamma} \left(\frac{n}{(m_\Gamma, n)} - 1 \right) \Gamma + Z_1,$$

$$f_2^*(K_{\tilde{C}} - \pi^* K_C) = \sum_{\Gamma} \frac{(n-1)m_\Gamma}{(m_\Gamma, n)} \Gamma + Z_2,$$

这里 Z_i 都是例外除子. 令 $Z = Z_2 - Z_1$, 我们即得命题中的表达式.

设 E 是任一例外曲线分支. 注意到 E 落在纤维中, 故由 Zariski 引理知 $K_{S_2/\tilde{C}} E = K_{S_2} E \geq -1$. 又因为 ρ_2 是极小解消, 所以 $K_{S_2/\tilde{C}} \geq 0$. 因为 $K_2 E = 0$, $\Gamma E \geq 0$, 所以 $K_{S_2/\tilde{C}} E \leq -ZE$, 从而 $ZE \leq 0$. 这表明 $Z \geq 0$ 是闭链.

$D' = K_{S_2/\tilde{C}} - K_1$ 显然是被 $\tilde{\rho}$ 收缩的例外曲线支集构成的既约有效除子. 综上, $D = K_2 - K_1 \geq 0$ 是垂直的除子. ■

推论 1.3.1 设 $f : S \rightarrow C$ 是半稳定纤维化, 那么 f_2 也是半稳定的, 且 $K_{S_2/\tilde{C}} = K_2$. 进一步, 如果 f 是相对极小的, 那么 $f_2 : S_2 \rightarrow \tilde{C}$ 也是相对极小的, 即 $S_2 = \tilde{S}$, 从而 $K_{S_2/\tilde{C}}^2 = \deg \pi \cdot K_{S/C}^2$.

证明 由引理 1.3.1(2) 以及 Zariski 引理, 易知 f_2 也是半稳定的. 此时 $k_\Gamma = 0$, S_2 中任一例外曲线分支 E 都是 (-2) -曲线, 从而 $ZE = K_{S_2/\tilde{C}}E = 0$, 故 $Z = 0$.

如果 E' 是 $f_2 : S_2 \rightarrow \tilde{C}$ 中垂直 (-1) -曲线, 则 $-1 = K_{S_2/\tilde{C}}E' = K_{S/C} \cdot \Pi_{2*}E'$. 这意味着, $\Pi_{2*}E'$ 是 f 中垂直 (-1) -曲线. ■

如果纤维化 $f : S \rightarrow C$ 在某个有限平展基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 后得到平凡纤维化, 那么我们称 f 为局部平凡纤维化 (Local trivial fibration), 或者解析纤维丛. 如果 $f : S \rightarrow C$ 在某个基变换后成为平凡纤维化, 则称为 Isotrivial 纤维化, 或称为常模映射.

1.4 Albanese 映射

这一节中, 我们要回顾一下 Albanese 映射的基础知识. 它是处理纤维化问题的一种有效工具.

设 S 是光滑代数曲面. 对每个同调类 $[\gamma] \in H_1(S, \mathbb{Z})$, 我们可以定义 $H^0(S, \Omega_S)$ 上的映射

$$\int_\gamma : H^0(S, \Omega_S) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [\omega] \rightarrow \int_\gamma \omega.$$

由 Stokes 定理可知, 上述定义是合理的, 即不依赖于同调类的选取.

这样我们就诱导了如下映射

$$i : H_1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S)^\vee, \quad [\gamma] \rightarrow \int_\gamma.$$

引理 1.4.1 设 $q(S)$ 是 S 的非正则性.

- (1) $\text{Ker } i$ 恰好是 $H_1(S, \mathbb{Z})$ 的挠子群;
- (2) $\text{rank}_{\mathbb{R}} \text{Im } i = 2q(S)$. 因此 $H^0(S, \Omega_S)^\vee / \text{Im } i$ 是复环面.

(读者自证)

我们定义 $\text{Alb}(S) = H^0(S, \Omega_S)^\vee / \text{Im } i$ 为 S 的 Albanese 簇. 可以证明它是一个 Abel 簇. 取定 S 中的一点 p_0 , 那么对任意 $p \in S$, 可定义 $\text{Alb}(S)$ 中的元素 $\int_{p_0}^p (\cdot) \in \text{Alb}(S)$. 显然这里的积分路径只相差 $H_1(S, \mathbb{Z})$ 中的闭合回路, 因此 $\int_{p_0}^p (\cdot)$ 只相差 $\text{Im } i$ 里的元素, 故定义是合理的. 这样就诱导了 Albanese 映射.

$$\alpha : S \longrightarrow \text{Alb}(S), \quad p \rightarrow \int_{p_0}^p (\cdot).$$

命题 1.4.1 设 $A = \text{Alb}(S)$, $\alpha : S \rightarrow A$ 是 Albanese 映射, $\alpha(p_0) = 0$. 那么

- (1) $\alpha^* : H^0(A, \Omega_A) \rightarrow H^0(S, \Omega_S)$ 是同构.
- (2) (泛性质) 设 T 是任意 Abel 簇, $f : X \rightarrow T$ 是任意映射, 使得 $f(p_0) = 0$. 那么存在唯一的全纯映射 $g : A \rightarrow T$ 使得 $g\alpha = f$.
- (3) $\alpha(S)$ 作为抽象群生成 A .

证明 (1) 设 $H^0(S, \Omega_S) = \mathbb{C}\langle \omega_1, \dots, \omega_q \rangle$. 令 $z_i(p) = \int_{p_0}^p \omega_i$ (商去格), 那么由 A 定义可知 z_1, \dots, z_q 是 A 的局部参数坐标. 显然有 $H^0(A, \Omega_A) = \mathbb{C}\langle dz_1, \dots, dz_q \rangle$.

设 $\sum_{i=1}^q \beta_i dz_i \in \text{Ker} \alpha^*$, 则有

$$0 = \alpha^* \left(\sum_{i=1}^q \beta_i dz_i \right) = \sum_{i=1}^q \beta_i d \left(\int_{p_0}^p \omega_i \right) = \sum_{i=1}^q \beta_i \omega_i.$$

因此 $\beta_i = 0, \forall i$. 这就证明了 α^* 是单射. 由于 $H^0(A, \Omega_A)$ 和 $H^0(S, \Omega_S)$ 有相同维数, 因此 α^* 是同构.

(2) 由交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0(S, \Omega_S)^\vee & \xrightarrow{(f^*)^\vee} & H^0(T, \Omega_T)^\vee \\ i_S \uparrow & & \uparrow i_T \\ H_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_1(T, \mathbb{Z}). \end{array}$$

可诱导 $g: A \rightarrow \text{Alb}(T) \cong T$, 也就是以下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ f \downarrow & g \searrow & \downarrow \\ T & \longrightarrow & \text{Alb}(T). \end{array}$$

其唯一性直接来自于 (3).

(3) 假设 $H = \langle \alpha(S) \rangle$ 是 $\alpha(S)$ 在 A 中生成的子群. 由泛性质, 存在映射 $h: A \rightarrow H$, 并有交换图 ($i: H \rightarrow A$ 包含映射, $j: H \rightarrow \text{Alb}(H) \cong H$)

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \alpha \downarrow & & \downarrow h & & \uparrow i \\ H & \xrightarrow{j} & H & \xlongequal{\quad} & H \end{array}$$

由此可知 $H \cong A$. ■

推论 1.4.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是纤维化, 那么存在 *Abel* 簇的满同态 $g: A \rightarrow J(C)$ 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ C & \longrightarrow & J(C) \end{array}$$

这里 $J(C)$ 是 C 的雅可比簇.

命题 1.4.2 设 S 是光滑曲面.

- (1) 如果 $\dim \alpha(S) = 2$, 那么 $p_g(S) > 0$.
- (2) 如果 $\alpha(S) = C$ 是曲线, 那么 C 光滑, 且 α 纤维连通. 此时 $\text{Alb}(S) = J(C)$, $q(S) = g(C)$.

为证明命题 1.4.2, 我们需要做一些准备工作.

引理 1.4.2 设 $h \in \text{Rat}(S)$ 是 S 上的有理函数, 且不是常数, 那么

- (1) h 诱导了有理映射 $h: S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$;

- (2) 存在极小次数的解消 $\sigma: \bar{S} \rightarrow S$, 将 h 提升为全纯映射 $\bar{h}: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$;
 (3) 考虑 \bar{h} 的 Stein 分解(见以下交换图), 这里 $h_0: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是有限覆盖, $f: S \rightarrow C$ 纤维连通.

$$\begin{array}{ccc} \bar{S} & \xrightarrow{f} & C \\ \sigma \downarrow & \searrow \bar{h} & \downarrow h_0 \\ S & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

如果 h 不是全纯映射 (即 $\sigma \neq id$), 那么 $C \cong \mathbb{P}^1$.

- (4) dh 不可能是 S 上的非零全纯 1-形式.

证明 (1) $div(h) = H_0 - H_\infty = div(s_0) - div(s_\infty)$, 这里 H_0 (H_1) 是 h 零点 (极点) 对应的除子部分. 于是诱导有理 $h: S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, $h(x) = [s_0(x), s_\infty(x)]$.

(2) 爆发由 H_0, H_∞ 构成的子线性系中所有基点即得.

(3) 此时 \bar{S} 中有水平的 (-1) -曲线 E , 从而诱导有限覆盖 $f|_E: E \rightarrow C$. 由 Hurwitz 公式可知, $g(C) = 0$.

(4) $dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$. 若 dh 是全纯 1-形式, 那么 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial y}$ 全纯, 推出 h 全纯, 从而 h 是常数, 矛盾! ■

引理 1.4.3 设 $0 \neq \omega \in H^0(S, \Omega_S)$. 如果存在有理函数 $\varphi, h \in Rat(S)$, 使得 $\omega = h d\varphi$. 那么存在纤维化 $f: S \rightarrow C$ 以及有理函数 $\varphi_0, h_0 \in Rat(C)$, 满足以下条件:

- (1) $\alpha = h_0 d\varphi_0 \in H^0(C, \Omega_C)$ 是全纯的, 从而 $g(C) > 0$;
 (2) $\varphi = f^* \varphi_0, h = f^* h_0, \omega = f^* \alpha$.

证明 由引理 1.4.2 知, h 不是常数, $div(h) = H_0 - H_\infty$, 且有交换图

$$\begin{array}{ccc} \bar{S} & \xrightarrow{f} & C \\ \sigma \downarrow & \searrow \bar{h} & \downarrow h_0 \\ S & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$\bar{h} = f^* h_0 = \sigma^* h$ 可以看作是 \bar{S} 上的函数, 记 $div(\bar{h}) = \bar{H}_0 - \bar{H}_\infty = div(\bar{s}_0) - div(\bar{s}_\infty)$. 同样地, 可以考虑有理函数 $\bar{\varphi} = \sigma^* \varphi$, 记 $div(\bar{\varphi}) = G_0 - G_\infty$. 我们分几步来完成证明.

Claim 1. $\bar{H}_0 \geq G_\infty + (G_\infty)_{red}$. 这里 $(G_\infty)_{red}$ 指 G_∞ 的既约部分.

假设 Γ 是 G_∞ 的不可约分支, 在 G_∞ 中重数为 n . 我们只需要证明 $\bar{H}_0 \geq (n+1)\Gamma$ 即可. 设 $p \in \Gamma$ 是一般的光滑点, Γ 的局部方程 $x = 0$, $\bar{\varphi} = \frac{1}{x^n}$. 注意到 $\sigma^* \omega = -n \bar{h} \frac{dx}{x^{n+1}}$ 是全纯的, 这就意味着 $x^{n+1} | \bar{s}_0$, 即 $\bar{H}_0 \geq (n+1)\Gamma$.

Claim 2. $\bar{\varphi}: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是全纯的.

$\bar{H}_0 = \bar{h}^*([0, 1]) = f^* h_0^*([0, 1]) = f^*(p_1 + \dots + p_k) = F_1 + \dots + F_k$ 显然由一些纤维构成. 由 Claim 1 知, G_∞ 落在纤维中, 从而由 Zariski 引理推出 $G_\infty^2 \leq 0$. 另一方面, $G_\infty \equiv G_0$, 所以 $G_\infty^2 = G_\infty G_0 \geq 0$, 故 $G_\infty G_0 = G_\infty^2 = 0$. 这表明 $\bar{\varphi}: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是全纯的.

Claim 3. 存在 C 上有理函数 φ_0 , 使得 $\bar{\varphi} = f^* \varphi_0$.

注意到 $\bar{\varphi}$ 的纤维都与 G_0 线性等价, 且 $G_0 F = 0$, 这就表明 $\bar{\varphi}$ 的纤维都被 f 收缩, 即存在有

限覆盖 $\varphi_0 : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \bar{S} & \xrightarrow{f} & C \\ \bar{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Claim 4. $\alpha = h_0 d\varphi_0$ 是全纯的, 从而 $g(C) \geq 1$. 进一步由引理 1.4.2 知, h 是全纯的 (即 $\sigma = id$).

这是一个局部问题. 我们不妨设 F 是任意纤维, Γ 是 F 中的一条不可约分支, 重数为 n ; 设 $q \in \Gamma$ 是一般的光滑点. f 在 q 处的局部方程可写为 $t = x^n$, 这里 t 是 $p = f(F)$ 的局部坐标. 设 $\alpha = h_0(t)d\varphi_0(t) = t^\nu dt \cdot u(t)$, $u(0) \neq 0$. 于是

$$\sigma^* \omega = \bar{h} d\bar{\varphi} = f^*(\alpha) = f^*(t^\nu dt \cdot u(t)) = nx^{n-1+n\nu} dx \cdot u(x^n).$$

注意到 $\sigma^* \omega$ 是全纯的, 因此 $n - 1 + n\nu \geq 0$, 即 $\nu \geq 0$. 这就证明了 α 的全纯性.

至此, 我们完成了证明. ■

引理 1.4.4 设 ω_1, ω_2 是 S 上 \mathbb{C} -线性无关的全纯 1-形式, 满足 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. 那么存在纤维化 $f : S \rightarrow C$ 以及 $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(C, \Omega_C)$, 使得 $\omega_1 = f^* \alpha_1$, $\omega_2 = f^* \alpha_2$. 此时显然有 $g(C) \geq 2$.

证明 在局部邻域上, $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy$, $\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy$. 条件 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ 相当于 $(f_1 g_2 - f_2 g_1) dx \wedge dy = 0$, 因此可以定义局部有理函数 $\varphi = \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}$. 由直接计算可验证 φ 的定义不依赖于坐标选取, 因此可以延拓为 S 上的有理函数. 因此 $\omega_1 = \varphi \omega_2$. 由于 ω_1, ω_2 是 \mathbb{C} -线性无关, 所以 φ 不是常数.

注意到 $0 = d\omega_1 = d\varphi \wedge \omega_2$, 我们有 $\omega_2 = h d\varphi$, $h \in \text{Rat}(S)$. 由引理 1.4.3, 存在纤维化 $f : S \rightarrow C$ 以及 C 上有理函数 h_0, φ_0 , 使得 $h = f^* h_0$, $\varphi = f^* \varphi_0$. 令 $\alpha_1 = \varphi_0 h_0 d\varphi_0$, $\alpha_2 = h_0 d\varphi_0$, 那么我们有 $\omega_1 = f^* \alpha_1$, $\omega_2 = f^* \alpha_2$. 类似于引理 1.4.3 的证明, 可检验 α_i 的全纯性. ■

命题 1.4.2 的证明. (1) 因为 $q(S) \geq 2$, 所以存在线性无关的全纯 1-形式 ω_1, ω_2 . 假设 $p_g(S) = h^0(S, \Omega_S) = 0$, 则 $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. 由引理 1.4.4, 存在纤维化 $f : S \rightarrow C$ 以及 C 上全纯 1-形式 α_1, α_2 , 使得 $\omega_i = f^* \alpha_i$. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{j} & J(C) \end{array}$$

这里 $A := \text{Alb}(S)$. 因为 $g(C) \geq 2$, 所以 j 是单射. 注意到 $h\alpha(S) = jf(S) = j(C)$, 且 $\alpha(S)$ (相应地, $j(C)$) 生成 A (相应地, $J(C)$), 所以 $h(A)$ 生成 $J(C)$, 从而 $h(A) = J(C)$. 因此 $q(S) \geq g(C)$.

取定一组基 $H^0(S, \Omega_S) = \mathbb{C}\langle \omega_1, \dots, \omega_q(S) \rangle$. 由引理 1.4.4 可知, $\omega_1 \wedge \omega_i = 0$ 诱导的纤维化都是相同的, 从而 $\omega_i = f^* \alpha_i$, $\alpha_i \in H^0(C, \Omega_C)$. 这就推出 $g(C) \geq q(S)$. 因此 $g(C) = q(S)$.

这样, $f^* : H^0(C, \Omega_C) \rightarrow H^0(S, \Omega_S)$ 是同构, 从而 $h : A \rightarrow J(C)$ 是有限映射. 因此 $h|_{\alpha(S)} : \alpha(S) \rightarrow J(C)$ 也是有限映射. 但是 $\dim \alpha(S) > \dim J(C)$, 矛盾!

(2) 考虑 $\alpha : S \rightarrow \alpha(S)$ 的 Stein 分解.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow \alpha & \downarrow \varepsilon \\ & & \alpha(X) \end{array}$$

分别利用 α 及 ε 对应的 Albanese 映射泛性质, 我们得到 $h : A \rightarrow J(C)$ 及 $g : J(C) \rightarrow A$, 且有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\alpha} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ f \downarrow & \nearrow \varepsilon & \downarrow h & & \uparrow g \\ C & \xrightarrow{j} & J(C) & \xlongequal{\quad} & J(C) \end{array}$$

由此易知 $A \cong J(C)$. 此时 $g(C) \geq 1$, 故 j 是嵌入, 因此 $\varepsilon = gj$ 是同构, 即 $\alpha(S) \cong C$. ■

本章习题

习题 1.1 设 $f : S \rightarrow C$ 是纤维化, F_1, \dots, F_s 是所有奇异纤维, l_i 是 F_i 的不可约分支个数, $\rho(S)$ 是数值等价群的秩. 证明: $\rho(S) \geq 2 + \sum_{i=1}^s (l_i - 1)$. 试构造一类纤维化, 使得上述不等式等号成立.

习题 1.2 设 D 是 $f : S \rightarrow C$ 的水平不可约曲线. 证明: 存在基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, 使得在新纤维中 D 的原像由截面组成.

习题 1.3 设 $f : S \rightarrow C$ 是半稳定纤维化. 证明: 存在映射 $u : \Omega_{S/C} \rightarrow \omega_{S/C}$. 假设 $\mathcal{N} = \text{coker } u$, 给出 \mathcal{N} 的结构, 并计算 $\deg \mathcal{N}$.

习题 1.4 设 $f : S \rightarrow C$ 是纤维化, \mathcal{F} 是 S 上的局部自由层, 证明: $f_* \mathcal{F}$ 是局部自由的. 举例说明高次正像层 $R^1 f_* \mathcal{F}$ 未必是局部自由的.

习题 1.5 对命题 3.4.1 中的 22 类奇异纤维芽作半稳定约化.

习题 1.6 证明引理 1.4.1 的结论.

习题 1.7 设 $\omega \in H^0(S, \Omega_S)$ 是曲面 S 上的非零全纯 1-形式, 证明: $d\omega = 0$.

习题 1.8 (Beauville) 设 $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是半稳定亏格 g 纤维化, $\Pi : \tilde{S} \rightarrow S$ 是无分歧覆盖, 证明: 存在由 Π 诱导的半稳定亏格 \tilde{g} 纤维化 $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$, 使得 $2\tilde{g} - 2 = \deg \Pi \cdot (2g - 2)$.

习题 1.9 请构造一个局部平凡的纤维化.

习题 1.10 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, 证明: 存在充分大的整数 n , 使得 $(K_S + nF)$ 是 nef, big 的, 且 $h^0(S, K_S + nF) > 0$.

第二章 整体不变量性质

这一章中, 如无特别声明, 我们总假设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 1$ 纤维化, F_1, \dots, F_s 是所有的奇异纤维.

2.1 相对不变量的非负性

设 F 是任一纤维, \bar{F} 是 F 的极小正规交模型. 我们定义 F 的一些数值量.

- (1) $N_F = g - p_a(F_{red}), N_{\bar{F}} = g - p_a(\bar{F}_{red});$
- (2) $g(\bar{F}) = \sum_{\Gamma} g(\tilde{\Gamma}),$ 此处 Γ 跑遍 \bar{F}_{red} 所有的不可约分支, $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 的正规化;
- (3) $l(F)$ (相应地, $l(\bar{F})$) 是 F_{red} (相应地, \bar{F}_{red}) 的不可约分支个数;
- (4) 对 $q \in F, \mu_q(F)$ 是奇点 (F, q) 的 Milnor 数, δ_q 是奇点的几何亏格. μ_F 是 F 上所有奇点的 Milnor 数总和. 这一定义也适用于任何既约曲线.

引理 2.1.1 设 B 是既约曲线, $q \in B$ 是奇点, 则

- (1) (Milnor 公式 [Mil68]) $\mu_q = 2\delta_q - k_q + 1,$ 这里 k_q 是 B 在 q 附近的局部分支数.
- (2) ([Tan94, 引理 1.1]) $\chi_{top}(B) = 2\chi(\mathcal{O}_B) + \mu_B.$
- (3) ([Tan94, 引理 1.3]) 设 m 是奇点 q 的重数, $\sigma: (\bar{B}, E) \rightarrow (B, q)$ 关于 q 的一次爆发, E 是例外曲线. \bar{B} 与 E 的交点 $q_1, \dots, q_r.$ 那么

$$\mu_q(B) = \sum_{i=1}^r \mu_{q_i}(\bar{B}) + m(m-1) - (r-1),$$

$$\mu_q(B) = \sum_{i=1}^r \mu_{q_i}(\bar{B} + E) + m(m-3) + 1,$$

证明 我们用(1)证明(2). 设 $\tilde{B} \rightarrow B$ 是 B 的正规化, 则有

$$\chi_{top}(B) = \chi_{top}(\tilde{B}) - \sum_{q \in B} (k_q - 1),$$

$$\chi(\mathcal{O}_B) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{B}}) - \sum_{q \in B} \delta_q,$$

$$\chi_{top}(\tilde{B}) = 2\chi(\mathcal{O}_{\tilde{B}}).$$

由此立得结论.

(3) 来自于直接计算, 我们留给读者自己证明. ■

我们回顾拓扑量 $e_F = \chi_{top}(F_{red}) - (2 - 2g).$ 引理 1.2.1 证明了

$$e_f = \sum_F e_F.$$

引理 2.1.2 (1) $e_F = 2N_F + \mu_F = 2N_{\bar{F}} + \mu_{\bar{F}} - \sigma_{\bar{F}}.$ 此处 $\sigma_{\bar{F}}$ 是 \bar{F} 中 (-1) -曲线个数.

(2) ([Tan94, 引理 1.4]) $0 \leq N_F \leq N_{\bar{F}} \leq g.$

(3) (Hirzebruch) $\mu_{\bar{F}} = l(\bar{F}) + \alpha(\bar{F}) - 1$, 此处 $\alpha(\bar{F})$ 是 \bar{F} 的复式对偶图中所含的圈与回路的总个数, 亦称对偶图的第一 Betti 数.

(4) $\alpha(\bar{F}) = p_a(\bar{F}_{red}) - g(\bar{F})$. 换言之, 我们有 $g = g(\bar{F}) + N_{\bar{F}} + \alpha(\bar{F})$.

证明 (1) 是引理 2.1.1 的直接推论.

(2) 因为 $p_a(\bar{F}) \geq 0$, 所以 $N_{\bar{F}} \leq g$. 由相对极小性知, 对 F 中的任一不可约分支 Γ , $K_{S/C}\Gamma = K_S\Gamma \geq 0$, 故 $= K_{S/C}(F - F_{red})$. 因此 $N_F = \frac{1}{2}K_{S/C}(F - F_{red}) - \frac{1}{2}F_{red}^2 \geq 0$. 由(1), 为证 $N_F \leq N_{\bar{F}}$, 我们只需证 $\mu_F - \mu_{\bar{F}} + \sigma_F \geq 0$. 不失一般性, 可设 $\sigma_F = 1$, 则由引理 2.1.1, 立得该不等式.

(3) 等价于计算欧拉示性数.

(4) 设 $\bar{F}_{red} = \sum_{\Gamma} \Gamma$, 这里 Γ 跑遍所有不可约分支. $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 的正规化. 由(3) 立得

$$p_a(\bar{F}_{red}) = \sum_{\Gamma} p_a(\tilde{\Gamma}) - l(\bar{F}) + 1 + \mu_{\bar{F}} = \sum_{\Gamma} p_a(\tilde{\Gamma}) + \alpha(\bar{F}).$$

推论 2.1.1 (1) $N_F = 0$ 当且仅当要么 F 既约, 要么 $F = nF_{red}$ 是亏格 1 纤维.

(2) $N_F = g$ 当且仅当 F 是极小正规交模型且 F_{red} 是由光滑有理曲线构成的树.

(3) $e_f \geq 0$, 等号成立当且仅当 f 没有奇异纤维 ($g > 1$), 或者每条奇异纤维都是某个光滑椭圆曲线的整数倍 ($g = 1$).

我们回顾推论 1.2.1, $\deg f_*\omega_{S/C} = \chi_f$.

定理 2.1.1 (1) (Fujita [Fuj84]) $f_*\omega_{S/C}$ 是半正定的, 即它的任何商层的次数都是非负的. 特别地, $\chi_f \geq 0$. 此外, $f_*\omega_{S/C}$ 有一个秩 q_f 的平凡饱和子层, 即 $f_*\omega_{S/C} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus q_f}$, \mathcal{F} 是局部自由层.

(2) (Parshin-Arakelov, [Par68][Ara71]) $\chi_f = 0$ 当且仅当 f 是局部平凡纤维化 ($g > 1$), 或者每条奇异纤维都是某个光滑椭圆曲线的整数倍 ($g = 1$).

证明 也可参看 [Xia92, §6.2, Page 130]. ■

下面我们要证明 $K_{S/C}$ 的数值正性. 为此我们需要做些准备工作.

如前所述, 在曲线 C 的一个小邻域 V 上, 向量丛 $f_*\omega_{S/C}|_V = \mathcal{O}_V\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_V\omega_g$. 这里的基 ω_i 限制在一般纤维 F 上, 就构成了 $H^0(F, \omega_F)$ 的一组基. 在 F 的一点 q 局部, 可设 $\omega_i|_F = h_i(t)dt$. 我们令 $\frac{d^k}{dt^k}\omega_{Fi} := \frac{d^k h_i}{dt^k}(dt)^{k+1} \in H^0(F, \omega_F^{k+1})$. q 是 F 的 Weierstrass 点当且仅当

$$[\omega_{F1}, \dots, \omega_{Fg}](t) := \begin{vmatrix} \omega_{F1} & \cdots & \omega_{Fg} \\ \frac{d}{dt}\omega_{F1} & \cdots & \frac{d}{dt}\omega_{Fg} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{g-1}}{dt^{g-1}}\omega_{F1} & \cdots & \frac{d^{g-1}}{dt^{g-1}}\omega_{Fg} \end{vmatrix} \in H^0(F, \omega_F^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}})$$

在 q 点等于零. 上述表达式可以过渡到整体截面上, 因而 $\text{div}([\omega_{F1}, \dots, \omega_{Fg}]) \equiv \frac{g(g+1)}{2}K_F$ 就是 Weierstrass 点的集合. 进一步, 我们可以将 $\text{div}([\omega_{F1}, \dots, \omega_{Fg}])$ 延拓为 $\omega_{S/C}^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ 的局部截面 $\text{div}([\omega_1, \dots, \omega_g])$. 我们可以定义除子 D 为所有光滑纤维上的 Weierstrass 点集合的闭包, 称为 S 上的 Weierstrass 除子.

命题 2.1.1 (Arakelov) 设 $\mathcal{O}_C(\delta) := \det(f_*\omega_{S/C})$. 我们有

$$D \equiv \frac{g(g+1)}{2}K_{S/C} - f^*\delta.$$

证明 设 $\omega'_i = \sum_{j=1}^g a_{ij}\omega_j$ 另一组基(a_{ij} 在纤维上取常数). 于是

$$[\omega'_1, \dots, \omega'_g] = \det(a_{ij})[\omega_1, \dots, \omega_g].$$

这就诱导了整体态射

$$f^*\mathcal{O}_C(\delta) \longrightarrow \omega_{S/C}^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}, \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g \longrightarrow [\omega_1, \dots, \omega_g].$$

从而诱导正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{s} \omega_{S/C}^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}} \otimes f^*\mathcal{O}_C(-\delta).$$

显然 $\operatorname{div}(s) \equiv D$. 这就得到结论. ■

引理 2.1.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定纤维化, 那么 $K_{S/C}$ 是 nef 的. 特别地, $K_{S/C}^2 \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\chi_f = 0$ ($g > 1$) 或者 $g = 1$.

证明 由推论 1.3.1, 在某个基变换后, 我们可以不妨假设 Weierstrass 除子 D 由一些截面截面及纤维分支构成. 因此

$$\frac{g(g+1)}{2}K_{S/C} \equiv \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^k m_j E_j + f^*\delta,$$

这里 Γ_i 是纤维分支, E_j 是截面.

设 Γ 是一条不可约曲线. 我们分情况讨论.

- (1) 如果 $\Gamma \neq \Gamma_i, E_j$, 那么 $\frac{g(g+1)}{2}K_{S/C}\Gamma \geq \chi_f \cdot F\Gamma \geq 0$.
- (2) 如果 Γ 是垂直分支, 则由纤维的相对极小性, $K_{S/C}\Gamma = K_S\Gamma = 2p_a(\Gamma) - 2 - \Gamma^2 \geq 0$.
- (3) 如果 $\Gamma = E_j$, 易知 $K_{S/C}\Gamma = -\Gamma^2$. 若 $\Gamma^2 > 0$, 则

$$\frac{g(g+1)}{2}K_{S/C}\Gamma \geq m_j\Gamma^2 + \chi_f > 0,$$

矛盾! 因此 $K_{S/C}\Gamma \geq 0$.

如果 $K_{S/C}^2 = 0$, 则

$$0 = \frac{g(g+1)}{2}K_{S/C}^2 = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i K_{S/C} + \sum_{j=1}^k m_j E_j K_{S/C} + (2g-2)\chi_f.$$

其中右式每一项都是非负的, 因此这就推出 $\chi_f = 0$ ($g > 1$), 或者 $g = 1$.

如果 $\chi_f = 0$, 由 Noether 公式及 e_f 的非负性, 立得 $K_{S/C}^2 = 0$. 若 $g = 1$, 则 $K_{S/C}^2 = 0$ 是经典结果. ■

定理 2.1.2 (Beauville) 设 $f: S \rightarrow C$ 亏格 $g \geq 1$ 相对极小纤维化, 则 $K_{X/C}$ 是 nef 的, 从而 $K_{S/C}^2 \geq 0$. 进一步, 若 $g \geq 2$, 则 $K_{S/C}^2 = 0$ 当且仅当 $\chi_f = 0$.

证明 设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 f 的半稳定约化. 由引理 1.3.2 的证明, 我们有

$$K_2 = K_1 + \sum_{\Gamma} k_{\Gamma}\Gamma + Z + D',$$

这里 Z 是由奇点解消例外曲线构成的有效除子; Γ 跑遍奇异纤维中不被 Π_2 收缩的不可约分支; D' 是被 $\tilde{\rho}$ 收缩的例外曲线支集构成的既约有效除子.

设 B 是 S 上的不可约曲线. 若 B 垂直, 则有相对极小性知 $K_{S/C}B \geq 0$. 今设 B 是水平曲线. 由引理 2.1.3, 我们知道 $K_{\tilde{S}/\tilde{C}}$ 是 nef 的, 从而 $\Pi_2^*B \cdot K_1 \geq 0$. 由于 Z 中的曲线分支都被 Π_2 收缩, 所以 $\Pi_2^*B \cdot Z = 0$. 注意到 D' 是垂直的, 因此 $\Pi_2^*B \cdot D' = B \cdot \Pi_{2*}D' \geq 0$. 这样就有 $K_{S/C}B \geq 0$.

定理后半部分证明类似于引理 2.1.3 的证明. \blacksquare

对于非局部平凡的纤维化 $f: S \rightarrow C$, 我们可以定义 f 的斜率(Slope) $\lambda_f = K_f^2/\chi_f$. 由诺特公式以及相对不变量的正性, 我们显然有以下结论.

推论 2.1.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g > 1$ 的非局部平凡纤维化, 那么 $\lambda_f \leq 12$. 等号成立当且仅当 f 所有的纤维都光滑. 这样的纤维化也称作小平纤维化(Kodaira fibration).

2.2 基变换不等式

我们回顾基变换的交换图 (1-1)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{S} & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & S_2 & \xrightarrow{\rho_2} & S_1 & \xrightarrow{\rho_1} & S \times_C \tilde{C} & \xrightarrow{\Pi'} & S \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xlongequal{\quad} & \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

$\Pi_2 = \Pi' \rho_1 \rho_2: S_2 \rightarrow S$, $\Pi: \tilde{S} \dashrightarrow S$ 以及 $K_1 = \tilde{\rho}^* K_{\tilde{S}/\tilde{C}}$, $K_2 = \Pi_2^* K_{S/C}$. 设 $d = \deg \pi$. 我们定义

$$K_\pi^2 = K_{S/C}^2 - \frac{K_{\tilde{S}/\tilde{C}}^2}{d}, \quad \chi_\pi = \chi_f - \frac{\chi_{\tilde{f}}}{d}, \quad e_\pi = e_f - \frac{e_{\tilde{f}}}{d}.$$

它们称为 π 的基变换不变量. 显然有 Noether 公式 $12\chi_\pi = K_\pi^2 + e_\pi$.

由相对典范除子的数值正性可知 K_1, K_2 是 nef 的. 又由引理 1.3.2, $D = K_2 - K_1 \geq 0$ 落在纤维中. 如果 $K_1 = K_2$, 我们就称 π 是不变基变换 (Invariant base change).

命题 2.2.1 $K_\pi^2 \geq 0, \chi_\pi \geq 0$.

证明 由 $K_2^2 = K_1^2 + K_1 D + K_2 D \geq K_1^2$ 立得第一个不等式.

注意到

$$\tilde{f}_* \omega_{\tilde{S}/\tilde{C}} = f_{2*} \mathcal{O}_{S_2}(K_1) \subseteq f_{2*} \mathcal{O}_{S_2}(K_2) = \pi^* f_* \omega_{S/C},$$

因此我们有 $\chi_{\tilde{f}} = \deg \tilde{f}_* \omega_{\tilde{S}/\tilde{C}} \leq d \cdot \deg f_* \omega_{S/C} = d\chi_f$. \blacksquare

设 $q \in F$ 是纤维 F 上奇点, 用局部方程 $f(x, y) = 0$ 定义. 如果 $z^d = f(x, y)$ 定义的一个孤立曲面奇点是 ADE 奇点, 那么我们就称 (F, q) 是 d -简单奇点. 设 d_F 是 π 在 $f(F)$ 上的最大分歧指数, 如果 $f(F)$ 不在分歧点上, 或者 F 既约且它的奇点最差就是 d_F -奇点, 那么我们就说 F 是 π -不变纤维.

命题 2.2.2 设 $g \geq 2$, 以下各命题彼此等价:

(1) π 是不变基变换.

- (2) $K_\pi^2 = 0$.
 (3) $\chi_\pi = 0$.
 (4) S_2 相对极小, ρ_1 是同构(即 $S \times_C \tilde{C}$ 正规), S_1 上的奇点都是有理二重点.
 (5) f 的所有纤维都是 π -不变纤维.

证明 (1) \Rightarrow (2) 显然.

(2) \Rightarrow (1) 如果 $K_2^2 = 0$, 那么 f 是局部平凡的 (定理 2.1.1 及 2.1.2). 此时显然 π 是不变的. 若 $K_2^2 > 0$, 则 $K_1 D = K_2 D = D^2 = 0$. 由 Hodge 指标定理可知 $D = 0$, 即 $K_1 = K_2$.

(1) \Rightarrow (3) 显然.

(3) \Rightarrow (1) 此时 $\deg f_{2*} \mathcal{O}_{S_2}(D) = 0$. 由引理 1.1.3 知, $f_{2*} \mathcal{O}_{S_2}(D) = \mathcal{O}_{\tilde{C}}$.

(1) \Rightarrow (4) 回顾引理 1.3.2 的关系式

$$D = K_2 - K_1 = \sum_{\Gamma} k_{\Gamma} \Gamma + Z + D'.$$

此时 $D = 0$ 显然蕴含 S_2 相对极小(即 $D' = 0$), $k_{\Gamma} = 0$ (即 $S \times_C \tilde{C}$ 是正规曲面), $Z = 0$. 于是 $K_{S_2/\tilde{C}} = K_2$. 设 E 是奇点解消中例外分支, 那么 $K_{S_2/\tilde{C}} E = K_2 E = 0$, 这表明 E 是 (-2) -曲线.

(4) \Rightarrow (1) 此时显然有 $k_{\Gamma} = 0$, $D' = 0$. $K_{S_2/\tilde{C}} = K_2 - Z$. 对任何 Z 中的例外分支 E , 因为 E 是 (-2) -曲线, 所以 $0 = K_{S_2/\tilde{C}} E = K_2 E - Z E$, 即 $Z E = 0$. 这就推出 $Z = 0$. 因此 $K_1 = K_2$.

(4) \Rightarrow (5) 显然.

(5) \Rightarrow (4) 不失一般性, 我们假设 $f(F)$ 上全分歧. 设 F_2 是 F 在 $f_2 : S_2 \rightarrow \tilde{C}$ 上对应的原像纤维. 我们只需证 F_2 相对极小.

由假设条件, $K_{S_2/\tilde{C}} = K_2 - Z$, Z 由 (-2) -曲线组成. 因此 $Z^2 = (K_2 - K_{S_2/\tilde{C}})Z = 0$, 故 $Z = 0$, 从而 $K_{S_2/\tilde{C}} = K_2$. 设 E 是 F 的不可约分支, E' 是 E 在 F_2 中的任一严格原像分支. 我们有 $E' K_{S_2/\tilde{C}} = E' K_2 = K_{S/C} E \geq 0$. 因此 E' 不可能是 (-1) -曲线. 这表明 F_2 中没有 (-1) -曲线. ■

[Xia92] 曾猜测 e_π 的非负性. 由于这是个局部问题, 所以我们不妨考虑以 F 为中心纤维的局部纤维芽, 基变换 π 在 $p = f(F)$ 处全分歧, $\deg \pi = d$. 实际上, 我们只需要证明 $de_F - e_{F_2} \geq 0$ 即可. 这一结论被 [Tan94] 证明.

命题 2.2.3 $e_\pi \geq 0$. 进一步, 设 $g \geq 2$, 则 $e_\pi = 0$ 当且仅当 π 是不变基变换.

设 $F = \sum_{\Gamma} n_{\Gamma} \Gamma$, 这里 Γ 跑遍 F 中所有不可约分支, n_{Γ} 是 Γ 在 F 中的重数; $\tilde{\Gamma} = \rho_1^{-1} \Pi'(\Gamma)$; $d_{\Gamma} = (d, n_{\Gamma})$. 设 $Sing(F)$ 是 F_{red} 上所有奇点组成的集合. 设 $p \in Sing(F)$, $d_p = \gcd\{d_{\Gamma} \mid p \in \Gamma\}$, $E_p = \Pi_2^{-1}(p)$.

引理 2.2.1 s_{Γ} 是 $Sing(F)$ 中落在分支 Γ 上的奇点个数, 我们有

- (1) $\chi_{top}(F_2) = \chi_{top}(F_1) + \sum_{p \in Sing(F)} (\chi_{top}(E_p) - d_p)$.
 (2) $\chi_{top}(F_1) = \chi_{top}(F) + \sum_{\Gamma} (d_{\Gamma} - 1)(\chi_{top}(\Gamma) - s_{\Gamma}) + \sum_{p \in Sing(F)} (d_p - 1)$.
 (3) 结合以上二式则有

$$de_F - e_{F_2} = 2(d-1)N_F - \sum_{\Gamma} (d_{\Gamma} - 1)(\chi_{top}(\Gamma) - s_{\Gamma})$$

$$+ \sum_{p \in \text{Sing}(F)} ((d-1)\mu_p - (\chi_{\text{top}}(E_p) - 1)).$$

证明 (1)

$$\begin{aligned} \chi_{\text{top}}(F_2) &= \chi_{\text{top}}(F_2 \setminus \sum_p E_p) + \sum_p \chi_{\text{top}}(E_p) \\ &= \chi_{\text{top}}(F_1 - \sum_p \sum_{i=1}^{d_p} p_i) + \sum_p \chi_{\text{top}}(E_p) \\ &= \chi_{\text{top}}(F_1) + \sum_p (\chi_{\text{top}}(E_p) - d_p). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \chi_{\text{top}}(F_1) &= \chi_{\text{top}}(F_1 - \sum_p \sum_{i=1}^{d_p} p_i) + \sum_p d_p \\ &= \sum_{\Gamma} \chi_{\text{top}}(\tilde{\Gamma} - \sum_{p \in \Gamma \cap \text{Sing}(F)} \sum_{i=1}^{d_p} p_i) + \sum_p d_p \\ &= \sum_{\Gamma} d_{\Gamma} \chi_{\text{top}}(\Gamma - \sum_{p \in \Gamma \cap \text{Sing}(F)} p) + \sum_p d_p \\ &= \sum_{\Gamma} d_{\Gamma} (\chi_{\text{top}}(\Gamma) - s_{\Gamma}) + \sum_p d_p. \end{aligned}$$

注意到 $\chi_{\text{top}}(F) = \sum_{\Gamma} (\chi_{\text{top}}(\Gamma) - s_{\Gamma}) + \sum_p 1$, 即得等式. ■

[Tan94] 对上述引理的 (3) 式进行了细致的估计. 由于证明过程较为繁琐, 我们不再详细讨论. 有兴趣的读者不妨直接阅读该文献.

2.3 Arakelov不等式

所谓 Arakelov 不等式即指如下命题.

定理 2.3.1 (Arakelov-Faltings) 设 $f: S \rightarrow C$ 是非局部平凡半稳定纤维化, s 是奇异纤维个数, 则

$$\chi_f \leq \frac{g - q_f}{2} (2b - 2 + s). \quad (2-1)$$

Arakelov 不等式的一个更弱形式为

推论 2.3.1 (Arakelov [Ara71]) $\chi_f < \frac{g}{2} (2b - 2 + s)$.

这一节中, 我们要证明改进的 Arakelov 型不等式.

定理 2.3.2 设 s_1 是那些满足 $g(\overline{F}) < g$ 的奇异纤维个数. 我们有

$$\chi_f \leq (g - q_f)(b - 1 + s_1). \quad (2-2)$$

进一步, 若 f 是半稳定纤维化, 那么我们有

$$\chi_f \leq \frac{g - q_f}{2}(2b - 2 + s_1). \quad (2-3)$$

此时 s_1 就是雅可比奇异纤维 (Jacobian singular fiber)-即对偶图含有圈的纤维-的个数.

在这一节中, 我们首先将证明如下等式.

定理 2.3.3

$$\begin{aligned} 2\chi_f + (h^{1,1}(S) - 2q_f b - 2 - \sum_{i=1}^s (l(F_i) - 1)) \\ = (g - q_f)(2b - 2) + \sum_{i=1}^s N_{\bar{F}_i} + \sum_{i=1}^s (g - g(\bar{F})) \end{aligned} \quad (2-4)$$

证明 由 e_f, χ_f 的定义及 Hodge 分解, 我们有

$$\begin{aligned} e_f &= 2 - 4q + 2p_g + h^{1,1}(S) - 4(g - 1)(b - 1), \\ \chi_f &= 1 - q + p_g - (g - 1)(b - 1). \end{aligned}$$

这样就有

$$2\chi_f - e_f = 2q + 2(g - 1)(b - 1) - h^{1,1}(S). \quad (2-5)$$

另一方面, 由 $l(F_i) = l(\bar{F}_i) - \sigma(\bar{F}_i)$, 我们有

$$e_f = \sum_{i=1}^s N_{\bar{F}_i} + \sum_{i=1}^s (g - g(\bar{F})) + \sum_{i=1}^s (l(F_i) - 1). \quad (2-6)$$

结合公式 (2-5) 和 (2-6), 即得(2-4). ■

为证明不等式 (2-2) 和 (2-3), 我们需要一些引理.

引理 2.3.1 $g(\bar{F}_i) \geq q_f$.

证明 设 \tilde{F} 是 F 的正规化, 由 Albanese 泛性质, 我们有映射 $\beta : J(\tilde{F}) \rightarrow \text{Alb}(S)$. 考虑 Abel 簇 $Q = \text{Alb}(S)/\text{Im}\beta$, 则可诱导映射 $\bar{\alpha} : S \rightarrow Q$. 由于 $J(\tilde{F}) \rightarrow Q$ 是零映射, 所以 $\bar{\alpha}(F)$ 是 Q 中的点. 由刚性定理, $\bar{\alpha}$ 收缩 f 所有的纤维. 这表明 $\bar{\alpha}$ 可以通过 f 分解

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & Q \\ f \downarrow & \nearrow & \\ C & & \end{array}$$

从而由泛性质进一步诱导了映射 $v : J(C) \rightarrow Q$. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F} & \longrightarrow & J(\tilde{F}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \beta & \searrow & \\ S & \xrightarrow{\alpha} & \text{Alb}(S) & \longrightarrow & Q \\ f \downarrow & & \downarrow g & \nearrow v & \\ C & \xrightarrow{j} & J(C) & & \end{array}$$

因为 $\alpha(S)$ 生成 $Alb(S)$, 所以 $\bar{\alpha}(S)$ 生成 Q . 若 $g(C) = 0$, 那么 Q 等于零. 换言之, $J(\tilde{F}) \rightarrow Alb(S)$ 是满射. 这样 $g(\tilde{F}) = \dim J(\tilde{F}) \geq \dim Alb(S) = q$. 若 $g(C) > 0$, 则 $\text{Im}v = \text{Im}\bar{\alpha}$, 从而 $\text{Im}v$ 生成了 Q . 这样 $J(C) \rightarrow Q$ 是满射. 故

$$g(C) = \dim J(C) \geq \dim Q = q - \dim \text{Im}\beta,$$

即 $\dim \text{Im}\beta \geq q_f$, 因此 $g(\tilde{F}) = \dim J(\tilde{F}) \geq \dim \text{Im}\beta \geq q_f$. ■

命题 2.3.1

$$h^{1,1}(S) - 2q_f b - 2 - \sum_{i=1}^s (l(F_i) - 1) \geq 0. \quad (2-7)$$

证明 考虑分解 $H^0(\Omega_S) = V_1 \oplus V_0$, 这里 $V_0 = f^*H^0(\Omega_C)$, $\dim V_1 = q_f$. 设

$$V_0 = \langle \alpha_1 \cdots \alpha_b \rangle, \quad V_1 = \langle \theta_1, \cdots, \theta_{q_f} \rangle,$$

此处诸 α_i (相应地, 诸 θ_j) 是 V_0 (相应地, V_1) 的一组基向量.

我们可以定义如下态射

$$h : V_0 \otimes \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_0 \otimes V_1 \longrightarrow H^{1,1}(S),$$

满足 $h(x \otimes y) = x \wedge y$, $x \otimes y \in V_0 \otimes \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_0 \otimes V_1$.

设 V_2 是 $Pic(S)$ 中由所有纤维中的分支生成的子空间. 由陈类定义, 我们可以自然诱导态射 $c_1 : V_2 \rightarrow H^{1,1}$. 于是 $\text{Im}c_1 = 1 + \sum_{i=1}^s (l(F_i) - 1)$.

Claim 1. 我们断言, 对任何丰富除子 H , $c_1(H) \notin \text{Im}h + \text{Im}c_1$.

事实上, 假如 $H \in \text{Im}h + \text{Im}c_1$. 我们取一般纤维 F . 任给 $\alpha \in \text{Im}h$, 由 h 的选取, 很容易看到 $\alpha|_F = 0$. Zariski 引理蕴含着 $\beta|_F = 0$, 对任何 $\beta \in \text{Im}c_1$ 成立. 因此 $HF = 0$, 矛盾!

Claim 2. 注意 $\alpha_i \wedge \bar{\alpha}_k$ 是 $H^{1,1}(C)$ 中某个形式的拉回, 而 $h^1(C, \Omega_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$. 因此我们可以假设 $\alpha_i \wedge \bar{\alpha}_k = \varepsilon_{ik} \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1$. 现在我们来证明 $E = (\varepsilon_{ik})_{1 \leq j, k \leq b}$ 是可逆的.

假如存在向量 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_b) \neq 0$ 使得 $E \cdot (\lambda_1, \cdots, \lambda_b)^T = 0$, 即 $\sum_k \varepsilon_{ik} \lambda_k = 0, \forall i$. 那么 $\sum_k \varepsilon_{ik} \lambda_k \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 = 0$. 换言之, 我们有

$$\sum_k \lambda_k \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_k = \alpha_i \wedge \sum_k \lambda_k \bar{\alpha}_k = 0, \quad \forall i.$$

故有 $\sum_k \bar{\lambda}_k \alpha_k \wedge \sum_k \lambda_k \bar{\alpha}_k = 0$, 亦即 $\sum_k \lambda_k \bar{\alpha}_k = 0$. 所以对任何 i 有 $\lambda_i = 0$, 矛盾!

Claim 3. 我们断言 h 是单射. 假设 h 的核中存在非零元, 即

$$\sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b a_{ij} \alpha_i \wedge \bar{\theta}_j + \sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b b_{ij} \bar{\alpha}_i \wedge \theta_j = du.$$

两边外积 $\bar{\alpha}_k \wedge \theta_l$ 得到

$$\sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b a_{ij} \alpha_i \wedge \bar{\theta}_j \wedge \bar{\alpha}_k \wedge \theta_l = d(u \wedge \bar{\alpha}_k \wedge \theta_l).$$

故得

$$\sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b a_{ij} \varepsilon_{ik} \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\theta}_j \wedge \theta_l = d(-u \wedge \bar{\alpha}_k \wedge \theta_l).$$

取 $\omega_k = \sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b \bar{a}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ik} \theta_j$. 我们得到 $\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\omega}_k \wedge \theta_l = d(-u \wedge \bar{\alpha}_k \wedge \theta_l)$ 对每个 l 综合上述这些等式, 则推出 $\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\omega}_k \wedge \omega_k = d(-u \wedge \bar{\alpha}_k \wedge \omega_k)$.

由 Stokes 公式,

$$0 = \int_S \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\omega}_k \wedge \omega_k = \int_S (\alpha_1 \wedge \omega_k) \wedge \overline{(\alpha_1 \wedge \omega_k)}.$$

故 $\alpha_1 \wedge \omega_k = 0$, 即 $\omega_k = f^* \beta_k$, 对某个 $\beta_k \in H^0(C, \Omega_C)$. 这样 $\omega_k \in V_0 \cap V_1$, 即 $\omega_k = 0, \forall k$. 因此我们得到 $\sum_i a_{ij} \varepsilon_{ik} = 0, \forall i, k$. 这样 Claim 2 i 推出所有的 a_{ij} 都是 0. 类似地, 我们有 $b_{ij} = 0, \forall i, j$. 这就与假设矛盾!

Claim 4. $\text{Im}h \cap \text{Im}c_1 = 0$.

假设存在 $L \in V_2$ 满足 $c_1(L) \in \text{Im}h \cap \text{Im}c_1$, 且 $c_1(L) \neq 0$. 设

$$c_1(L) = \sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b a_{ij} \alpha_i \wedge \bar{\theta}_j + \sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b b_{ij} \bar{\alpha}_i \wedge \theta_j.$$

注意到 $c_1(L)$ 是实形式, 且 h 是单射, 所以易知 $\bar{a}_{ij} = b_{ij}$ 及 $c_1(L) = \beta + \bar{\beta} + du$, 此处 $\beta = \sum_{j=1}^{q_f} \sum_{i=1}^b a_{ij} \alpha_i \wedge \bar{\theta}_j$.

由于 $\alpha_i \wedge \alpha_k = 0$, 所以作为同调类有 $\beta \wedge \beta = \bar{\beta} \wedge \bar{\beta} = 0$. 故 $c_1(L) \wedge c_1(L) = \beta \wedge \bar{\beta} + \bar{\beta} \wedge \beta + d\gamma$. 因此

$$L^2 = \int_S c_1(L) \wedge c_1(L) = 2 \int_S \beta \wedge \bar{\beta} \geq 0.$$

因为 L 落在纤维里, 所以 $L^2 \leq 0$. 这就推出 $\int_S \beta \wedge \bar{\beta} = 0$, 即 $\beta = 0$. 这样作为同调类就有 $c_1(L) = 0$.

Claim 5. 综合上面各论断, 我们有 $h^{1,1} \geq 1 + \dim \text{Im}h + \dim \text{Im}c_1$, 也就是不等式 (2-7). ■

推论 2.3.2 如果 f 是半稳定的, 那么我们有

$$\chi_f \leq \frac{g - q_f}{2} (2b - 2 + s_1).$$

证明 此时 $F = \bar{F}$, $N_F = 0$, $g = g(F) + \alpha(F)$. (2-2) 来自于引理 2.3.1 和定理 2.3.1. ■

推论 2.3.3 如果 f 非半稳定, 则

$$\chi_f \leq (g - q_f)(b - 1 + s_1).$$

证明 由 $N_{\bar{F}} \leq g - g(\bar{F})$, 我们得到 (2-2). ■

作为 Arakelov 不等式的应用, 我们有如下结论.

定理 2.3.4 如果 $C \cong \mathbb{P}^1$, 且 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定的, 那么

$$p_g \leq \frac{(g - q_f)}{2} (s_1 - 4). \quad (2-8)$$

进一步, $s_1 = 4$ 当且仅当 $f: S \rightarrow C$ 满足以下条件,

- (1) $p_g(S) = 0$;
- (2) $h^{1,1}(S) = 2 + \sum_{i=1}^s (l_i - 1)$;
- (3) $g(\overline{F}_i) = q_f, i = 1, \dots, s_1$;
- (4) $q(S) \leq 1$.

证明 公式 (2-8) 来自于 (2-3). 显然定理 2.3.4 中的条件蕴含了 $s_1 = 4$. 反之, 若 $s_1 = 4$, 则定理 2.3.4 中的条件 (1)-(3) 成立. 因此我们只需验证(4).

假设 $q \geq 2$. 由于 $p_g(S) = 0$ 及 $q \geq 2$, 所以 S 是直纹面. 设 $\alpha: S \rightarrow Alb(S)$ 是 Albanese 映射. 则 $B = \text{Im}\alpha$ 是亏格 q 的曲线. α 的一般纤维同构于 \mathbb{P}^1 .

因为 $g(\overline{F}_i) = q \geq 2$, \overline{F}_i 的某个不可约分支(记为 Γ_i) 不落在 α 的纤维里. 因此由 Hurwitz 公式可知 $g(\Gamma_i) \geq q = g(B)$. 这样 $g(\Gamma_i) = q$, 且 Γ_i 是 $\alpha: S \rightarrow B$ 的截面. 由于 $g(\overline{F}_i) = q$, 这就推出 Γ_i 是 F_i 的唯一的水平不可约分支. 设 F' (相应地, F) 是 α (Resp. f) 的一般纤维. 我们有 $F'F_i = F'\Gamma_i = 1$, 从而 $F'F = 1$. 因此 $F \cong B$, 故 f 是 isotrivial. 进一步, 我们可以断言 f 是平凡的. ■

对于高维纤维化情形, 左康和 E. Viehweg 给出了更强的 Arakelov 不等式 [VZ01, VZ06]. 我们这里介绍一下曲面纤维化情形的这一结果.

定理 2.3.5 设 \mathcal{F} 是 $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes v}$ 的子层, 则有

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \frac{v}{2}(2b - 2 + s), \quad v > 0, \quad (2-9)$$

这里 $\mu(\mathcal{F})$ 是 \mathcal{F} 的斜率.

2.4 典范类不等式

我们首先回顾 Miyaoka-Yau 不等式 (更多细节可参考 [Hir86]).

命题 2.4.1 ([Miy84]) 设 E_1, \dots, E_r 是曲面 S 上的互不连通的 ADE 曲线, 且 K_S 是 nef 的, 那么

$$3c_2(S) - c_1^2(S) \geq \sum_{i=1}^s m(E_i).$$

这里 $m(E)$ 定义如下

$$m(E) = \begin{cases} 3(r+1) - \frac{3}{r+1}, & E = A_r, \\ 3(r+1) - \frac{3}{4(r-2)}, & E = D_r, \\ 21 - \frac{1}{8}, & E = E_6, \\ 24 - \frac{1}{16}, & E = E_7, \\ 27 - \frac{1}{40}, & E = E_8. \end{cases}$$

设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 半稳定纤维化, 有 s 条奇异纤维, $b = g(C)$. 设 $f^\sharp: S^\sharp \rightarrow C$ 是 f 的稳定模型(即收缩 f 的奇异纤维中的所有 (-2) -曲线). 设 q 是 S^\sharp 的 A_n 奇点, $\mu_q = n$ 是 (S^\sharp, q) 的 Milnor 数. 对于奇异纤维在 S^\sharp 上光滑部分中的奇点 q , 我们也可以规定 q 的 Milnor 数为 0.

引理 2.4.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 半稳定纤维化, 则

$$K_{S/C}^2 \leq \sum_q \frac{3}{\mu_q + 1} + (2g - 2)(2b - 2).$$

证明 由 e_f 的计算易知 $e_f = \sum_q (\mu_q + 1)$. 利用 Miyaoka-Yau 不等式, 我们立得结论. ■

考虑在这 s 个临界点上一致分歧的 Kodaira-Parshin 构造基变换 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$, $\deg \pi = de$, 且 π 在每个分歧点处的分歧指数恰为 e . 我们有下面的简单引理.

引理 2.4.2 设 \tilde{f} 是上述基变换对应的新纤维化, \tilde{s} 是奇异纤维个数, $\tilde{b} = g(\tilde{C})$, 于是

- (1) $\tilde{s} = ds$, $\mu_{\tilde{q}} + 1 = e(\mu_q + 1)$;
- (2) $2\tilde{b} - 2 = de(2b - 2) + d(e - 1)s$;
- (3) $K_{\tilde{S}/\tilde{C}}^2 = deK_{S/C}^2$.

特别地, 我们有

$$K_{\tilde{S}/\tilde{C}}^2 - (2g - 2)(2\tilde{b} - 2 + \tilde{s}) = de(K_{S/C}^2 - (2g - 2)(2b - 2 + s)).$$

在上述基础上, 我们得到典范类不等式(Classical canonical inequality), 有时也称 Vojta 不等式.

定理 2.4.1 (典范类不等式 [Voj88]) 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 半稳定纤维化, 有 s 条奇异纤维, $b = g(C)$, 那么

$$K_{S/C}^2 \leq (2g - 2)(2b - 2 + s).$$

进一步, 如果 $s > 0$, 那么这个不等式是严格的.

证明 当 $s = 0$ 时, 由引理 2.4.1 立得不等式. 以下不妨设 $s > 0$. 对纤维化 \tilde{f} 使用引理 2.4.1 和引理 2.4.2 的结论, 得到

$$K_{\tilde{S}/\tilde{C}}^2 - (2g - 2)(2\tilde{b} - 2 + \tilde{s}) \leq -\frac{(2g - 2)s}{e} + \frac{1}{e^2} \sum_q \frac{3}{\mu_q + 1}.$$

显然, 取充分大的 e 后, 上述不等式右边小于 0. 至此, 命题得证. ■

注 2.4.1 [Liu96] 用微分几何的方法证明上述典范类不等式在任何情况下都是严格的.

典范类不等式本质上等价于开曲面上的对数 Miyaoka-Yau 不等式. 为了说明这一点, 我们首先回顾一些相关内容. 设 D 是 S 上的只带有结点的既约有效除子, 我们称开曲面 $S' = S \setminus D$ 为对数曲面 (Logarithmic surface). $\Gamma = K_X + D$ 称为相伴除子, $\bar{P}_m := \dim H^0(S, m\Gamma)$. 当 $\bar{P}_m > 0$ 时, 由线性系 $|m\Gamma|$ 诱导的映射 $\Phi_{|m\Gamma|}$ 称为 (S, D) 的 m -重对数典范映射 (m -th logarithmic canonical map), $\bar{\kappa}(S) = \max_{m>0} \dim \Phi_{|m\Gamma|}(S)$ 称为对数小平维数 (Logarithmic Kodaira dimension).

我们可以定义层 $\Omega_S^1(\log D)$, 局部上看, 它是由那些极点落在 D 中的半纯 1-形式组成的. 比如当 q 是 D 的结点时, $\Omega_S^1(\log D)$ 在 q 的局部小邻域上的截面相当于 $a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + a'dx + b'dy$, 此处 a, b, a', b' 是全纯函数. 对数表面上的陈类定义为

$$\bar{c}_1(S') := -c_1(\Omega_S^1(\log D)) \quad \bar{c}_2(S') := c_2(\Omega_S^1(\log D)).$$

引理 2.4.3 ([Sak80][Kob85]) 我们有以下结论

- (1) $\bar{c}_1^2(S') = (K_S + D)^2$, $\bar{c}_2(S') = \chi_{top}(S) - \chi_{top}(D)$.
 (2) 如果 $\bar{\kappa}(S) = 2$, 那么 $\bar{c}_1^2(S')^2 \leq 3\bar{c}_2(S')$, 等号成立当且仅当 S' 的万有覆盖全纯同构于复球 B^2 .

命题 2.4.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 半稳定纤维化, F_1, \dots, F_s 是奇异纤维 (假设 $s > 0$), $D = \sum_{i=1}^s F_i$. 设 $S' = S \setminus D$, $\bar{c}_1(S')$, $\bar{c}_2(S')$ 同上, 于是对数 Miyaoka-Yau 不等式 $\bar{c}_1^2(S')^2 \leq 3\bar{c}_2(S')$ 等价于典范类不等式. 特别地, 不等式是严格的.

证明 将 $D = \sum_{i=1}^s F_i$ 代入引理 2.4.3, 立得不等式. 如果等号成立, 则诸 F_i 被收缩成点, 从而由 Grauert 判则 [Gra62], F_i 是负定曲线, 矛盾! 因此不等式是严格的. ■

注 2.4.2 典范类不等式也可以从左康和 E. Viehweg 的 Arakelov 型不等式 (定理 2.3.5) 得到. 只需取 $\mathcal{F} = f_*\omega_{X/Y}^{\otimes \nu}$, 然后让 ν 趋向于无穷, 这时 Arakelov 型不等式的极限情形恰好是典范类不等式.

利用对数 Miyaoka-Yau 不等式还能证明截面个数的有限性.

引理 2.4.4 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 非局部平凡纤维化, E 是一个截面. 那么我们有

$$\frac{K_{S/C}^2}{4g(g-1)} \leq -E^2 \leq 3e_f - K_{S/C}^2 + (g(C) - 1)(4g - 2).$$

证明 第一个不等式来自于 [Szp81]. 我们用 Hodge 指标定理来推导. 取一般纤维 F , 及有理数 γ , 使得 $(K_{S/C} - (2g - 2)E + \gamma F)K_{S/C} = 0$, 因此

$$K_{S/C}^2 + 4g(g-1)E^2 = (K_{S/C} - (2g-2)E + \gamma F)^2 \leq 0.$$

对开曲面 $S' = S - E$ 运用对数 Miyaoka-Yau 不等式

$$(K_S + E)^2 \leq 3c_2(S) - 3\chi_{top}(E).$$

整理上式即得第二个不等式. ■

定理 2.4.2 (Grauert-Manin, [Gra65, Man66]) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 非局部平凡纤维化, 那么 f 只有有限多个截面.

证明 设 E 是一个截面, $\tilde{E} = (2g - 2)E + (E^2)F$, 则 $\tilde{E}K_{S/C} = 0$, $\tilde{E}^2 = 4g(g-1)E^2$. 因此 \tilde{E} 在 $NS(S)$ 中的像落在 $K_{S/C}$ 的正交补空间中. 由于 $K_{S/C}$ 是 nef, big 的, 且 \tilde{E}^2 有下界 (引理 2.4.4), 所以这样的 \tilde{E} 只有有限个. ■

2.5 肖刚不等式

我们首先回顾一些关于曲线上的局部自由层的内容. 假设 C 是光滑射影曲线, \mathcal{E} 是 C 上的秩 r 局部自由层. 如果局部自由子层 \mathcal{F} 对应的商层 \mathcal{E}/\mathcal{F} 也是局部自由, 那么就称 \mathcal{F} 为 \mathcal{E} 的饱和子层. 我们定义局部自由层 \mathcal{E} 的斜率 (Slope) $\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg \mathcal{E}}{r}$. 如果对任何的局部自由子层 \mathcal{F} , 有 $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$, 我们就称 \mathcal{E} 是半稳定的.

引理 2.5.1 ([Xia92], 附录 §A1) 设 \mathcal{E} 是 C 上的秩 r 局部自由层.

(1) \mathcal{E} 中的子层也是局部自由的.

(2) 设 \mathcal{F} 是 \mathcal{E} 的子层, 则存在 \mathcal{E} 中唯一的饱和子层 $\tilde{\mathcal{F}}$, 使得 $\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, $rk(\tilde{\mathcal{F}}) = rk(\mathcal{F})$. $\tilde{\mathcal{F}}$ 称为 \mathcal{F} 的饱和化. 我们定义 $rk(\mathcal{E}/\mathcal{F}) = rk(\mathcal{E}/\tilde{\mathcal{F}})$, 从而有 $rk(\mathcal{E}) = rk(\mathcal{F}) + rk(\mathcal{E}/\mathcal{F})$.

(3) 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

是局部自由层的正合列, 则 $\deg \mathcal{E} = \deg \mathcal{E}_1 + \deg \mathcal{E}_2$.

(4) $\chi(\mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} + rk(\mathcal{E})(1 - g)$.

(5) 存在数 $M = M(\mathcal{E})$, 使得任何的局部自由子层 \mathcal{F} 的斜率 $\mu(\mathcal{F}) \leq M$.

引理 2.5.2 设 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ 是 C 上半稳定局部自由层, $\alpha: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ 是非零映射, 那么 $\mu(\mathcal{E}_1) \leq \mu(\mathcal{E}_2)$.

证明 设 $\mathcal{F} = \text{Im} \alpha \neq 0$, $\mathcal{N} = \text{Ker} \alpha$. 由半稳定层的定义 $\mu(\mathcal{N}) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$. 由次数和秩的可加性推出 $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(\mathcal{E}_1)$. 同样地, $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_2)$. 因此我们有 $\mu(\mathcal{E}_1) \leq \mu(\mathcal{E}_2)$. \blacksquare

\mathcal{E} 的一个滤过

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$$

如果满足以下条件, 就称为 Harder-Narashimhan 滤过:

(1) $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 是半稳定的, $i = 1, \dots, n$;

(2) $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}) < \mu(\mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_{i-2})$, $i = 2, \dots, n$.

我们称 $\mu(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})$ 为 \mathcal{E} 的最后斜率 (Final slope), 记为 $\mu_f(\mathcal{E})$. 若 \mathcal{E} 的最后斜率 $\mu_f(\mathcal{E}) > 0$ (相应地, $\mu_f(\mathcal{E}) \geq 0$), 那么我们就称其为正定的 (相应地, 半正定的). 类似地, 若 \mathcal{E}^\vee (半)正定, 则称 \mathcal{E} 为(半)负定.

命题 2.5.1 每个局部自由层 \mathcal{E} 都有唯一的 Harder-Narashimhan 滤过.

证明 我们对 $rk(\mathcal{E})$ 施归纳法. 当 \mathcal{E} 是半稳定层时, 结论显然. 特别地, 当它是可逆层时, 必是半稳定的. 因此我们不妨设 \mathcal{E} 不是半稳定的.

设 $\mu_1 = \max\{\mu(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}\}$ 及 $r_1 = \max\{rk(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}, \mu(\mathcal{F}) = \mu_1\}$. 我们取子层 \mathcal{E}_1 使得 $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu_1$, $rk(\mathcal{E}_1) = r_1$. 由定义显见 \mathcal{E}_1 是半稳定的, 且 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 是局部自由的, 其秩比 \mathcal{E} 的秩小. 因此由归纳假设, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 有 Harder-Narashimhan 滤过, 从而也诱导了 \mathcal{E} 如下的滤过:

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}.$$

这里 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 是半稳定的 ($1 \leq i \leq n$) 且 $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}) < \mu(\mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_{i-2})$, $3 \leq i \leq n$.

令 $\mu_2 = \mu(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2)$, $r_2 = rk(\mathcal{E}_2)$. 于是由 \mathcal{E}_1 的选取立得

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{r_2(\mu(\mathcal{E}_1) - \mu(\mathcal{E}_2))}{r_2 - r_1}.$$

这样就证明了上述滤过是 \mathcal{E} 的 Harder-Narashimhan 滤过.

假设 \mathcal{E} 有另一 Harder-Narashimhan 滤过:

$$0 = \mathcal{E}'_0 \subsetneq \mathcal{E}'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'_m = \mathcal{E}.$$

由上面 \mathcal{E}_1 的选取, 我们有 $\mu(\mathcal{E}_1) \geq \mu(\mathcal{E}'_1)$. 此时存在下标 i , 使得 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}'_i$, $\mathcal{E}_1 \not\subseteq \mathcal{E}'_{i-1}$. 于是存在半稳定层之间的非零映射 $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}$. 由引理 2.5.2, 我们有 $\mu(\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}) \geq \mu(\mathcal{E}_1) \geq \mu(\mathcal{E}'_1)$. 这就推出 $i = 1$, $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}'_1)$, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}'_1$, 从而由 \mathcal{E}_1 的选取知 $rk(\mathcal{E}_1) = rk(\mathcal{E}'_1)$, $\deg \mathcal{E}_1 = \deg \mathcal{E}'_1$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}'_1 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

这里 \mathcal{I} 是挠层, 支集是零维的. 于是由 Riemann-Roch 定理及欧拉示性类的可加性得

$$h^0(\mathcal{I}) = \chi(\mathcal{E}'_1) - \chi(\mathcal{E}_1) = 0.$$

因此 $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}'_1$. 由 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ 上的归纳假设, 我们就导出了滤过的唯一性. ■

推论 2.5.1 \mathcal{E}^\vee 的 Harder 滤过恰好是

$$0 = (\mathcal{E}/\mathcal{E}_n)^\vee \subsetneq (\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})^\vee \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}^\vee.$$

特别地, \mathcal{E} 正定 (半正定) 当且仅当 \mathcal{E} 的任何商层的斜率 > 0 (≥ 0).

设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 d 次有限覆盖, 那么 \mathcal{E} 在 π 下的拉回 $\tilde{\mathcal{E}} = \pi^*\mathcal{E}$ 也是局部自由层, 显然有

$$rk(\tilde{\mathcal{E}}) = rk(\mathcal{E}), \quad \deg \tilde{\mathcal{E}} = d \cdot \deg \mathcal{E}, \quad \mu(\tilde{\mathcal{E}}) = d \cdot \mu(\mathcal{E}).$$

进一步, C 上的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

在 π 下的拉回是 \tilde{C} 上的正合列. 类似地, 一个局部自由层滤过的拉回是相应的层滤过.

命题 2.5.2 (1) $\tilde{\mathcal{E}} = \pi^*\mathcal{E}$ 半稳定当且仅当 \mathcal{E} 半稳定.

(2) 设 \mathcal{E} 的 Harder 滤过为

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n = \mathcal{E},$$

则

$$0 = \pi^*\mathcal{E}_0 \subsetneq \pi^*\mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \pi^*\mathcal{E}_n = \tilde{\mathcal{E}}$$

是 $\tilde{\mathcal{E}}$ 的 Harder 滤过.

(3) $\tilde{\mathcal{E}} = \pi^*\mathcal{E}$ 正定 (相应地, 半正定, 负定, 半负定) 当且仅当 \mathcal{E} 正定 (相应地, 半正定, 负定, 半负定).

证明 (1) \implies 显然. 下证 \impliedby . 不失一般性, 可设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 Galois 覆盖. 如果 $\tilde{\mathcal{E}}$ 不是半稳定, 那么由 Harder 滤过, 存在唯一的极大斜率子层 $\tilde{\mathcal{E}}_1$, 且秩达到极大. 对任何 $g \in Gal(\tilde{C}/C)$, 显见 $g(\tilde{\mathcal{E}}_1)$ 也满足此条件, 因此由唯一性知 $g(\tilde{\mathcal{E}}_1) = \tilde{\mathcal{E}}_1$. 这表明 $\tilde{\mathcal{E}}_1 = \pi^*\mathcal{E}_1$, 对某个子层 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$. 于是

$$\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\tilde{\mathcal{E}}_1)/(\deg \pi) > \mu(\tilde{\mathcal{E}})/(\deg \pi) = \mu(\mathcal{E}).$$

所以 \mathcal{E} 不是半稳定的.

(2)(3) 都是直接推论. ■

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化.

考虑 $f_*\omega_{S/C}$ 的 Harder-Narashimhan 滤过

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n = f_*\omega_{S/C}.$$

设 $r_i = rk(\mathcal{E}_i)$, $\mu_i = \mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$. 此时显然有

$$r_1 < \cdots < r_n = g, \quad \mu_1 > \cdots > \mu_n \geq 0 := \mu_{n+1}.$$

回顾典范态射 $\alpha : f^*f_*\omega_{S/C} \rightarrow \omega_{S/C}$. 显见 α 诱导了限制映射 $\alpha_i = \alpha|_{f^*\mathcal{E}_i} : f^*\mathcal{E}_i \rightarrow \omega_{S/C}$. 我们设 $Im\alpha_i = \mathcal{I}_{\Delta_i}(-Z_i) \otimes \omega_{S/C}$. 这里 $\mathcal{I}_{\Delta_i}(-Z_i)$ 是理想层, 其中 Δ_i 是零维子概型, $Z_i \geq 0$ 是除子部分. 对一般纤维 F 来说, $Z_i \cap F$ 可以看成是 $H^0(F, \omega_F)$ 相应子空间的固定部分. 特别地, $H^0(F, \omega_F)$ 无基点, 因此 α 限制在 F 上是满的. 这表明 Z_n 落在某些奇异纤维中. 一般地, 我们有

$$Z_1 \geq \cdots \geq Z_n \geq 0 := Z_{n+1}.$$

现在我们定义除子 $N_i = K_{S/C} - Z_i - \mu_i F$.

引理 2.5.3 N_i 是 nef 除子.

证明 设 Γ 是 S 中的不可约曲线, $\sigma : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ 是正规化, $\pi := f\sigma$. 易知 $\sigma^*\alpha_i : \pi^*\mathcal{E}_i \rightarrow \sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i))$ 是非零映射.

如果 Γ 垂直, 即 $f(\Gamma)$ 是点, 那么 $\pi^*\mathcal{E}_i$ 是平凡层, 因此有非零映射 $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i))$. 这表明 $\sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i))$ 有非零截面, 故 $\deg \sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i)) \geq 0$, 即 $N_i\Gamma = (K_{S/C} - Z_i)\Gamma \geq 0$.

以下我们假设 Γ 是水平曲线. 假设 $j (< i)$ 满足: $\sigma^*\alpha_i(\mathcal{E}_j) = 0$, $\sigma^*\alpha_i(\mathcal{E}_{j+1}) \neq 0$. 于是有非零映射 $\pi^*(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j+1}) \rightarrow \sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i))$. 由引理 2.5.2, 我们有

$$\mu(\pi^*(\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j)) \leq \mu(\sigma^*(\omega_{S/C}(-Z_i))).$$

相当于 $\deg \pi \cdot \mu_j \leq (K_{S/C} - Z_i)\Gamma$. 因此 $N_i\Gamma \geq (\mu_j - \mu_i)F\Gamma \geq 0$.

至此我们证明了结论. ■

命题 2.5.3 设 $d_i = N_i F$. 取指标序列 $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, 则

$$K_{S/C}^2 \geq \sum_{p=1}^m (d_{i_p} + d_{i_{p+1}})(\mu_{i_p} - \mu_{i_{p+1}}),$$

这里 $i_{m+1} := n+1$. 特别地, 我们有

$$K_{S/C}^2 \geq \sum_{i=1}^n (d_i + d_{i+1})(\mu_i - \mu_{i+1}).$$

证明 对 $i > j$, 显然有 $N_i = N_j + (Z_j - Z_i) + (\mu_j - \mu_i)F$. 由前可知 $Z_j \geq Z_i$, $\mu_j > \mu_i$. 又由引理 2.5.3, N_i, N_j 是 nef 的, 从而

$$\begin{aligned} N_i^2 &\geq N_j N_i + (\mu_j - \mu_i) F N_i \\ &\geq N_j (N_j + (\mu_j - \mu_i) F) + (\mu_j - \mu_i) F N_i \\ &= N_j^2 + (\mu_j - \mu_i)(d_j + d_i). \end{aligned}$$

即 $N_i^2 - N_j^2 \geq (\mu_j - \mu_i)(d_j + d_i)$. 因此

$$K_{S/C}^2 = \sum_{p=1}^m (N_{i_p}^2 - N_{i_{p+1}}^2)$$

$$\geq \sum_{p=1}^m (d_{i_p} + d_{i_{p+1}})(\mu_{i_p} - \mu_{i_{p+1}}). \quad \blacksquare$$

回顾 $r_i = rk(\mathcal{E}_i)$, 我们有

引理 2.5.4 $d_i \geq 2r_i - 2$.

证明 将满态射 $f^*\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{I}_{\Delta_i}(K_{S/C} - Z_i) \rightarrow 0$ 限制在纤维 F 上, 我们立得 $h^0(F, \omega_F(-Z_i)) \geq r_i$. 又因 $h^1(F, \omega_F(-Z_i)) = h^0(F, \mathcal{O}_F(Z_i)) \geq 1$, 所以我们有 Clifford 不等式

$$r_i \leq h^0(F, \omega_F(-Z_i)) \leq \frac{1}{2} \deg \omega_F(-Z_i) + 1 = \frac{d_i}{2} + 1.$$

这样我们就得到了不等式. \blacksquare

回顾纤维化 $f: S \rightarrow C$ 的斜率 $\lambda_f := K_f^2/\chi_f$. 现在我们将证明肖刚的斜率不等式.

定理 2.5.1 (斜率不等式 [Xi87a]) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, 那么

$$\lambda_f \geq \frac{4(g-1)}{g},$$

即

$$K_f^2 \geq \frac{4(g-1)}{g} \chi_f.$$

证明 如果 $f_*\omega_{S/C}$ 半稳定, 那么 Harder-Narasimhan 滤过为 $0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 = f_*\omega_{S/C}$. 此时 $d_1 = d_2 = 2g - 2$, $\mu_1 = \chi_f$, $\mu_2 = 0$. 由命题 2.5.3 立得

$$K_{S/C}^2 \geq (d_1 + d_2)(\mu_1 - \mu_2) = (4 - \frac{4}{g})\chi_f.$$

以下设 $f_*\omega_{S/C}$ 不是半稳定. 结合命题 2.5.3 及引理 2.5.4, 我们有

$$\begin{aligned} K_{S/C}^2 &\geq \sum_{i=1}^n (d_i + d_{i+1})(\mu_i - \mu_{i+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} (2r_i + 2r_{i+1} - 4)(\mu_i - \mu_{i+1}) + (d_n + d_{n+1})\mu_n \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} (4r_i - 2)(\mu_i - \mu_{i+1}) + (4g - 4)\mu_n \\ &= 4\chi_f - 2(\mu_1 + \mu_n). \end{aligned}$$

这里我们用到了等式 $\chi_f = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_i - \mu_{i+1})$ (留给读者自证).

另一方面, 对指标集 $\{1, n\}$, 命题 2.5.3 推出

$$\begin{aligned} K_{S/C}^2 &\geq (d_1 + d_n)(\mu_1 - \mu_n) + (d_n + d_{n+1})(\mu_n - \mu_{n+1}) \\ &\geq (2g - 2)(\mu_1 - \mu_n) + (4g - 4)\mu_n \\ &= (2g - 2)(\mu_1 + \mu_n). \end{aligned}$$

将上面的两个不等式综合起来

$$K_{S/C}^2 \geq 4\chi_f - 2(\mu_1 + \mu_2) = 4\chi_f - \frac{K_{S/C}^2}{g-1},$$

整理后即得斜率不等式. ■

注 2.5.1 在半稳定情形, Cornalba 和 Harris [CH88] 也得到了这个不等式, 因此有时我们也称其为 Cornalba-Harris-Xiao 不等式.

此外, 结合斜率不等式和典范类不等式我们立刻得到弱形式的 Arakelov 不等式 (推论 2.3.1). 为了能进一步推出经典的 Arakelov 不等式, 肖刚猜测有以下更强的斜率不等式

$$K_f^2 \geq \left(\frac{4g-4}{g-q_f} \right) \chi_f.$$

注 2.5.2 利用类似的估计方法, [Kon96] 给出三点式纤维化 (Trigonal fibration) 的斜率下界, 即

$$\lambda_f \geq 14(g-1)/(3g+1).$$

[Che93] 则证明亏格 4 非超椭圆纤维化的斜率 $\lambda_f \geq \frac{24}{7}$, 且该下界是可以达到的.

此外, [SF00] 用其他方法证明了半稳定三点式纤维化的斜率满足以下不等式

$$\lambda_f \geq \frac{24(g-1)}{5g+1}.$$

通过 Harder 滤过分级估计斜率的方法也能用在其他一些问题中. 下面举一些实际的应用.

引理 2.5.5 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, F 是一般纤维, 则 $K_{S/C} - (\chi_f/g^2)F$ 是 nef 的 \mathbb{Q} -除子.

证明 仍采用前面的诸记号. 对于 $j = 1, \dots, g$, 可找到唯一的 i 使得 $r_i \geq j > r_{i-1}$. 我们定义 $h_j = \mu_i$. 于是

$$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_g,$$

且满足

$$\sum_{j=1}^g \frac{2g-2j+1}{g^2} \chi_f = \deg f_* \omega_{S/C} = \sum_{i=1}^n r_i (\mu_i - \mu_{i+1}) = \sum_{j=1}^n h_j.$$

因此存在 j 使得 $h_j \geq (2g-2j+1)\chi_f/g^2$, 从而存在 i 使得

$$\mu_i \geq (2g-2r_i+1)\chi_f/g^2.$$

此外, 由引理 2.5.4, $d_i \geq 2r_i - 2$, 从而 $Z_i F \leq 2g - 2r_i$. 特别地, Z 中的非垂直分支的重数不超过 $2g - 2r_i$.

设 Γ 是 S 中的不可约曲线, $D = K_{S/C} - (\chi_f/g^2)F$. 如果 Γ 是垂直分支, 则显然 $D\Gamma \geq 0$. 今设 Γ 非垂直. 如果 Γ 不落在固定部分 Z_i 中, 那么

$$D\Gamma = N_i\Gamma + Z_i\Gamma + \left(\mu_i - \frac{\chi_f}{g^2}\right)F\Gamma \geq 0.$$

如果 Γ 落在 Z_i 中, 设重数为 m , 那么 $m \leq 2g - 2r_i$. 由相对相伴公式我们有

$$(m+1)D\Gamma = mK_{S/C}\Gamma + N_i\Gamma + Z_i\Gamma + \left(\mu_i - \frac{m+1}{g^2}\chi_f\right)F\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&\geq mK_{S/C}\Gamma + Z_i\Gamma + \left(\mu_i - \frac{2g - 2r_i + 1}{g^2}\chi_f\right)F\Gamma \\
&\geq m(K_{S/C} + \Gamma)\Gamma \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

这就证明了 D 是 nef 的. ■

引理 2.5.6 设 \mathcal{E} 是 C 上的局部自由层, $\deg \mathcal{E} > 0$, 则必定存在 Σ -基变换 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$, 使得 $\pi^*\mathcal{E}$ 有正次数的截面. 特别地, 任何不是半负定的局部自由层必定在某个 Σ -基变换下的拉回具有正次数的整体截面.

证明 证明类似于 [Xia92, 定理 1.2.5]. ■

命题 2.5.4 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, F 是一般纤维, $\gamma \in \mathbb{Q}$ 是使得 $K_{S/C} - \gamma F$ 是 nef 的非负有理数. 那么 $\mu_f(f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu}) \geq (\nu - 1)\gamma, \forall \nu \geq 2$.

证明 任取有理数 $c < \gamma$, 我们要证明 $\mu_f(f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu}) \geq (\nu - 1)c$, 从而得证结论.

不失一般性, 我们可以假设 c, γ 都是整数 (必要时可以做适当的 Galois 基变换). 设 $D_\gamma = K_{S/C} - \gamma F$, $D_c = K_{S/C} - cF$. 这样, $D_c^2 = D_\gamma^2 + (4g - 4)(\gamma - c) > 0$. 由 Mumford 消失定理, $h^1(S, (1 - \nu)D_c) = 0$. 再由对偶定理

$$h^1(S, \nu K_{S/C} + f^*K_C - (\nu - 1)cF) = 0.$$

利用 Leray 谱序列及上述结论, 我们得到

$$h^0(C, (f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu})^\vee \otimes \mathcal{O}_C(c(\nu - 1)f(F))) = 0.$$

假如 $\mathcal{E} := (f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu})^\vee \otimes \mathcal{O}_C(c(\nu - 1)f(F))$ 不是半负定的, 那么由引理 2.5.6, 它在一个 Σ -基变换后具有正次数截面. 由于上述的等式对所有不变基变换的拉回都成立, 这就得到矛盾! 因此 \mathcal{E} 是半负定的, 亦即 $f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu} \otimes \mathcal{O}_C(c(1 - \nu)f(F))$ 是半正定的. 计算斜率即得所需不等式. ■

定理 2.5.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, 则

$$\mu_f(f_*\omega_{S/C}^{\otimes \nu}) \geq (\nu - 1)\chi_f/g^2.$$

特别地, 如果 f 不是局部平凡的, 那么 $f_*(\omega_{S/C}^{\otimes \nu})$ 是正定的.

证明 结合命题 2.5.4 和引理 2.5.5 立得. ■

引理 2.5.7 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的纤维化, \mathcal{F} 是 $f_*\omega_{S/C}$ 的饱和子层, 则

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \frac{6}{(g-1)}\chi_f.$$

证明 设 \mathcal{E}_1 是 $f_*\omega_{S/C}$ 的 Harder 滤过第一项. 对滤过 $0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq f_*\omega_{S/C}$, 应用命题 2.5.3, 即得

$$(2g - 2)\mu(\mathcal{F}) \leq (2g - 2)\mu(\mathcal{E}_1) \leq K_{S/C}^2 \leq 12\chi_f.$$

整理后即得结论. ■

2.6 相对不规则性估计

引理 2.6.1 $0 \leq q_f \leq g$. 进一步, $q_f = g$ 当且仅当 f 是平凡的 ($g > 1$), 或者 f 的每条纤维都是某条光滑椭圆曲线的整数倍 ($g = 1$).

证明 由命题 1.2.2 及引理 2.3.1 立得 $0 \leq q_f \leq g$ (或者直接由定理 2.1.1). 今假设 $g = q_f$. 由定理 2.3.2 可知 $\chi_f = 0$, 从而 $e_f = K_f^2 = 0$. 当 $g = 1$ 时, 由定理 5.2.3 立得结论. 以下假设 $g \geq 2$, 我们要证 f 是平凡的.

此时 $h^0(K_{S/C}) = h^0(f_*\omega_{S/C}) = h^0(\mathcal{O}_C^{\oplus g}) = g$. 我们先证明 $|K_{S/C}|$ 无固定部分. 设 $|K_{S/C}| = |M| + Z$, Z 是固定部分. 因为

$$K_{S/C}^2 = M^2 + MZ + K_{S/C}Z \geq M^2 \geq 0,$$

所以 $M^2 = MZ = Z^2 = 0$. 由于每条纤维光滑, 所以 Z 没有垂直分支. Z 与一般纤维 F 的交是 $|K_{S/C}|$ 在 F 上的限制的固定部分. 由假设 $f_*\omega_{S/C} = \mathcal{O}_C^{\oplus g}$, 所以 $|K_{S/C}|$ 在 F 上的限制就是 $|K_F|$ 全体, 所以无固定点, 因此 $Z = 0$.

这样, $|K_{S/C}|$ 定义了态射 $\Phi: S \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. 因为 $K_{S/C}^2 = 0$, 所以 $\text{Im}\Phi$ 是曲线. 由 Stein 分解, 我们得到一个纤维化 $\varphi: S \rightarrow D$, 显然 F 不落在 φ 的垂直分支里. 当 F 是非超椭圆曲线时, φ 在 F 上的限制诱导了典范同构 $F \cong D$. 因此一般 F 是 φ 的截面. 这就得到 $S \cong C \times D$.

现在考虑 F 是超椭圆情形, 此时 φ 诱导了超椭圆二次覆盖 $F \rightarrow D \cong \mathbb{P}^1$. 因此 φ 的一般纤维到 C 上的投影是二次的. 利用相对相伴公式可知, 该投影是平展的. 由此我们诱导了二次覆盖

$$\theta: S \rightarrow C \times D, \quad p \rightarrow (f(p), \varphi(p)).$$

分歧轨迹 $B \equiv 2(p_1^*\delta_1 + p_2^*\delta_2)$, 这里 δ_1 是 C 上的二阶挠元, δ_2 是 D 上的 $g+1$ 次除子. 由二次覆盖计算得

$$f_*\omega_{S/C} = p_{1*}(\omega_{P/C} \otimes p_1^*\delta_1 \otimes p_2^*\delta_2) = p_{1*}p_2^*(\omega_D \otimes \delta_2) \otimes \delta_1.$$

由 $f_*\omega_{S/C}$ 的平凡性即得 δ_1 的平凡性. 这样, φ 的一般纤维不连通, 矛盾! ■

推论 2.6.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, 且斜率 $\lambda_f < 4$, 那么 S 的代数基本群的垂直部分 \mathcal{V}_f 是有限群. 特别地, $q_f = 0$.

证明 假设 \mathcal{V}_f 是无限群, 那么对任何正整数 $n \geq 2$, 存在 n 阶平展覆盖 $\Pi: \tilde{S} \rightarrow S$, $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是诱导的亏格 \tilde{g} 纤维化 (见引理 4.1.4). 此时 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = n\chi(\mathcal{O}_S)$, $K_{\tilde{S}}^2 = nK_S^2$ 及

$$(\tilde{g} - 1)(g(\tilde{C}) - 1) \geq n(g - 1)(g(C) - 1),$$

等号成立当且仅当诱导覆盖 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 也是平展的. 这样, $\lambda_{\tilde{f}} \leq \lambda_f < 4$. 由肖刚不等式可知, $4 - \frac{4}{\tilde{g}} \leq \lambda_{\tilde{f}} < 4$, 即 $\tilde{g} \leq \frac{4}{4 - \lambda_{\tilde{f}}}$. 注意到 $g \geq 2$, 所以 Π 限制在 \tilde{f} 的纤维上的次数也有上界, 这是不可能的. 因此 \mathcal{V}_f 是有限群.

由推论 4.1.3 可知 $q_f = 0$. ■

利用 Harder 滤过方法, 我们可以改进引理 2.6.1 的结论.

命题 2.6.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 非平凡纤维化, 则 $q_f \leq \frac{5g+1}{6}$.

证明 考虑分解 $f_*\omega_{S/C} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus q_f}$. 如果 f 不是局部平凡的, 那么 $\chi_f = \deg \mathcal{F} > 0$. 由于 $\mu(\mathcal{F}) = \frac{\chi_f}{g - q_f}$, 故由引理 2.5.7 立得所需不等式.

如果 f 是局部平凡的, 则 $q_f = g(F/G) \leq \frac{(g+1)}{2} \leq \frac{5g+1}{6}$, 此处 G 是单值同态 $j: \pi_1(C) \rightarrow \text{Aut}(F)$ 的像. ■

对于 \mathbb{P}^1 上的纤维化, q_f 有更精确的估计. 在叙述该结果之前, 我们先介绍一个引理.

引理 2.6.2 ([Xi87c], 定理 2) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 $g \geq 2$ 纤维化, F 是一般纤维, Albanese 映射 $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ 的像是曲面. 那么 $H^0(\omega_S)$ 在 $H^0(\omega_F)$ 中的像的维数至少为 $q(S) - 1$.

命题 2.6.2 ([Xi87c]) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 非平凡纤维化, 则 $q_f \leq \frac{1}{2}(g+1)$.

证明 设 $\alpha: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ 是 Albanese 映射. 如果 $A = \text{Im} \alpha$ 是曲线, 则 A 的亏格为 $q(S)$ (命题 1.4.2), 并且 α 诱导了 F 到 A 的覆盖. 因为 f 非平凡, 故 F 到 A 的覆盖次数至少是 2. 这样 $g \geq 2g(A) - 1 = 2q - 1$, 即 $q \leq (g+1)/2$.

以下假设 $\text{Im} \alpha$ 是曲面, 则由引理 2.6.2, $H^0(\omega_S)$ 在 $H^0(\omega_F)$ 中的像的维数至少为 $q - 1$. 另一方面, $f_*\omega_S = E \oplus \mathcal{O}(-2)^{\oplus q}$. 设 E' 是 $f_*\omega_S$ 中由 $H^0(f_*\omega_S)$ 的整体截面生成的子层. 这样, $\text{rk}(E') \leq \text{rk}(E) = g - q$. 这等价于说, $H^0(\omega_S)$ 在 $H^0(\omega_F)$ 中的像的维数至多是 $g - q$. 结合这些结论, 即得所需不等式. ■

例 2.6.1 设 C_1, C_2 是光滑曲线, $g(C_1) = b, g(C_2) = h > 0, P = C_1 \times C_2$. 设 D_i 是 C_i 上的非零除子, 使得 $|2D_i|$ 非空且无基点, $p_i: C_1 \times C_2 \rightarrow C_i$ 是投影映射 ($i = 1, 2$). 由 Bertini 定理, 存在光滑既约曲线 $R \in |p_1^*2D_1 + p_2^*2D_2|$, 于是我们能构造 P 上以 R 为分歧轨迹的二次覆盖 $\pi: S \rightarrow P$, 从而诱导纤维化 $f: S \rightarrow C_1$, 亏格 $g = 2h - 1 + \deg D_2$. 由二次覆盖计算公式可得, $q(S) = b + h$.

今取 D_2 为挠元, 则得 $q_f = \frac{g+1}{2}$. 如再取 $C_1 \cong \mathbb{P}^1$, 即得满足命题 2.6.2 等号成立的例子. ■

本章习题

习题 2.1 证明引理 2.1.1 (3) 的结论.

习题 2.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, Γ 是 S 上不可约既约曲线, 且满足 $K_{S/C}\Gamma = 0$. 证明: Γ 必是垂直 (-2) 曲线.

习题 2.3 设 \mathcal{F} 是局部自由层 \mathcal{E} 的子层, 证明 \mathcal{F} 的饱和化就是 $(\mathcal{E}^\vee / (\mathcal{E}/\mathcal{F})^\vee)^\vee$.

习题 2.4 证明引理 2.5.1(5) 的结论, 并举例说明 $M = M(\mathcal{E})$ 不能仅由 $\text{rk}(\mathcal{E})$ 和 $\mu(\mathcal{E})$ 决定.

习题 2.5 举例说明稳定局部自由层在基变换下的拉回不一定是稳定的.

习题 2.6 在命题 2.5.3 的记号下, 证明 $\chi_f = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_i - \mu_{i+1})$.

习题 2.7 设 $f: S \rightarrow C$ 是小平纤维化, 证明: $(g-1)(b-1) \geq 3\chi_f \geq 3$.

习题 2.8 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 非平凡纤维化. 证明: 如果 $q_f \geq \frac{3g+1}{4}$, 那么 $K_S^2 \geq 8\chi(\mathcal{O}_S)$.

第三章 局部不变量性质

3.1 纤维模型与局部不变量

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, F 是奇异纤维. 前面我们已经接触到奇异纤维的 F 几种模型. 这里我们先回顾一下.

- (1) F 的极小模型: 收缩 F 所有的 (-1) -曲线得到的纤维.
- (2) F 的极小正规交模型: 对极小模型作适当的爆发, 使得纤维的奇点最多是结点, 且 F 中的任何 (-1) -曲线至少和纤维中其他分支交三个点. 我们也称之为正规极小模型 [AK00], 记作 \bar{F} . 如果我们去掉关于 (-1) -曲线的条件, 那么这样的模型也称为正规交模型.
- (3) F 的 n -次根模型: 以 F 为中心纤维的局部芽作 n -次根基变换的纤维.
- (4) F 的半稳定模型: F 半稳定约化后得到的纤维, 记作 \tilde{F} . 一般来说, 它不唯一.

假设 M_F 是 F 的极小正规交模型 \bar{F} 中所有不可约分支重数的最小公倍数. 显见, 当 $n \equiv 0 \pmod{M_F}$ 时, 其 n -次根模型必定是半稳定模型. 此外, 我们可以定义一种新的模型.

- (5) F 的对偶模型 (Dual model): F 的 d -次根模型, 记作 F^* , 这里 d 是满足 $d \equiv -1 \pmod{M_F}$ 的正整数. 一般来说, F^{**} 不一定是 F .

此外, \bar{F} 对应了所谓的复式对偶图 G_F : 将 \bar{F} 的不可约分支看作图中的顶点, \bar{F} 的结点视作图中的边; 不可约分支 Γ 上有 $p_a(\Gamma) - g(\tilde{\Gamma})$ 个环路, 这里 $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 的正规化.

在第 2.1 我们已经定义了一些拓扑不变量, 这里回顾一下.

- (1) $N_F = g - p_a(F_{red})$, 满足 $0 \leq N_F \leq N_{\bar{F}} \leq g$ (引理 2.1.2(2)).
- (2) $g(\bar{F}) = \sum_{\Gamma} g(\tilde{\Gamma})$, 此处 Γ 跑遍 \bar{F}_{red} 所有的不可约分支, $\tilde{\Gamma}$ 是 Γ 的正规化;
- (3) $l(F)$ 是 F_{red} 的不可约分支个数;
- (4) $\mu_q(F)$ 是奇点 (F, q) 的 Milnor 数, δ_q 是奇点的几何亏格. $\mu_F = \sum_{q \in \text{Sing}(F)} \mu_q$.
- (5) $\alpha(\bar{F})$ 是 G_F 的第一 Betti 数, 满足(见引理 2.1.2(3)(4))

$$\begin{aligned} g &= g(\bar{F}) + N_{\bar{F}} + \alpha(\bar{F}), \\ g(\bar{F}) &= p_a(\bar{F}_{red}) - \alpha(\bar{F}), \\ \mu_{\bar{F}} &= l(\bar{F}) + \alpha(\bar{F}) - 1. \end{aligned}$$

利用曲线奇点的极小嵌入解消, 我们也能定义其他一些局部不变量. 设 $(B, p) \subseteq \mathbb{C}^2$ 是在 $p = (0, 0)$ 的邻域 U_0 内的局部曲线 (不必既约). (B_{red}, p) 是奇点. $(B, p) = (B_0, p_0)$ 的嵌入解消是以下的序列

$$(U_0, B_0) \xleftarrow{\sigma_1} (U_1, B_1) \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\sigma_r} (U_r, B_r)$$

满足以下条件:

- (1) σ_i 是关于奇点 (B_{i-1}, p_{i-1}) 的解消, 要求 $\mu_{p_{i-1}} > 1$.
- (2) $B_{r,red}$ 上的奇点都是通常二重点.

(3) B_i 是 B_{i-1} 的完全原像.

设 m_i 是 $(B_{i,\text{red}}, p_i)$ 的重数, 定义 $\alpha_p = \sum_{i=0}^{r-1} (m_i - 2)^2$. 如果所有 m_i 都不超过 3, 那么就称 (B, p) 为简单奇点 (见 [BPV04, II. Sec. 8, page 78])

设 $q \in B_r$ 是二重点, a_q 和 b_q 分别是过 (B_r, q) 的两条分支的重数, 定义 $\beta_p := \sum_{q \in B_r} [a_q, b_q]$, 其中 $[a, b] := \frac{(a, b)^2}{ab}$.

引理 3.1.1 设 μ_p 和 δ_p 分别是 (B, p) 的 Milnor 数和几何亏格, k_p 是局部分支数.

$$(1) \mu_p = \sum_{i=0}^{r-1} (m_i - 1)(m_i - 2) + k_p - 1.$$

$$(2) \delta_p = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r-1} (m_i - 1)(m_i - 2) + k_p - 1.$$

$$(3) \alpha_p + \beta_p \leq \mu_p.$$

证明 (1)(2) 是引理 2.1.1 的直接推论.

(3) 设 p_1, \dots, p_s 是 p 的第一次爆发例外曲线 E_1 上的无穷接近点. 易知 $\mu_p - (\alpha_p + \beta_p) = (m_0 - 3) + \sum_{i=1}^s (\mu_{p_i} - \alpha_{p_i} - \beta_{p+i})$. 因此我们只需要考虑 $m_0 = 2$ 的情形即可. 此时 (B, p) 的局部方程 $f(x, y) = 0$, 在合适的坐标下有两种情形: $f = x^a(x + y^k)^b$ 或 $f = (x^2 + y^{2k+1})^n$. 直接计算这两种情形下的 α_p, β_p, μ_p 即可得到结论. ■

如果将 B 取为奇异纤维 F , 那么上述 B_r 就是 F 的极小正规交模型 \bar{F} . $\sum_{p \in \text{Sing}(F)} \alpha_p$ 与 $\sum_{p \in \text{Sing}(F)} \beta_p$ 都是 F 的不变量, 不依赖于解消过程的选取.

结合引理 2.1.1, 引理 2.1.2 以及引理 3.1.1, 很容易得到以下结论.

引理 3.1.2 设 σ_F 是 \bar{F} 中所含 (-1) -曲线的个数, 即 $\sigma_F = l(\bar{F}) - l(F)$. 我们有

$$(1) \mu_{\bar{F}} = \mu_F - \sum_{i=0}^{\sigma_F-1} (m_i - 1)(m_i - 2) + \sigma_F.$$

$$(2) N_{\bar{F}} = N_F + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\sigma_F-1} (m_i - 1)(m_i - 2).$$

$$(3) \bar{F}_{\text{red}}^2 = F_{\text{red}}^2 - \sum_{i=0}^{\sigma_F-1} m_i(m_i - 2) - \sigma_F.$$

$$(4) p_a(\bar{F}_{\text{red}}) = p_a(F_{\text{red}}) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\sigma_F-1} (m_i - 1)(m_i - 2).$$

(留给读者自证)

例 3.1.1 设 (B_{red}, p) 是 ADE 型奇点, 它们的局部不变量如下表所列. ■

	A_{2k-1}	A_{2k}	D_{2k+2}	D_{2k+3}	E_6	E_7	E_8
μ_p	$2k - 1$	$2k$	$2k + 2$	$2k + 3$	6	7	8
α_p	$k - 1$	k	k	$k + 1$	3	3	4
β_p	I_k	$\frac{3k}{2k+1}$	II_k	III_k	1	IV	$\frac{4}{5}$
β_p^-	$\geq 1 - \frac{1}{k}$	$\geq \frac{6k-1}{4k+2}$		$\geq \frac{1}{2}$	$\geq \frac{11}{12}$	$\geq \frac{1}{3}$	$\geq \frac{11}{15}$

$$\begin{cases} \text{I}_k = 1 - \frac{1}{k} + [k(n+m), n] + [k(n+m), m]. \\ \text{II}_k = \frac{k(n,m+l)^2}{n(n+k(m+l))} + [n+k(m+l), m] + [n+k(m+l), l]. \\ \text{III}_k = \frac{1}{2} + [m, 2((2k+1)m+n)] + \frac{(2k+1)(n,2m)^2}{2n((2k+1)m+n)}. \\ \text{IV} = \frac{1}{3} + \frac{2(3m,n)^2}{3n(2m+n)} + \frac{(m,3n)^2}{3m(2m+n)}. \end{cases}$$

这里 n (相应地, m 或 l) 是 (F, p) 的局部分支的重数. n 对应其中的光滑分支重数. 由直接计算可知

$$\text{I}_k \leq 1, \quad \text{II}_k \leq 1, \quad \text{III}_k \leq \frac{3(k+1)}{2k+3}, \quad \text{IV} \leq \frac{4}{5}.$$

引理 3.1.1 的结论可以做得更为细致.

引理 3.1.3 设 (B, p) 是奇点.

- (1) $\mu_p \geq \alpha_p + \beta_p$, 等号成立当且仅当 p 是 A_1 或 A_2 型.
- (2) 如果 p 不是 A_k 型 ($k \leq 4$), 那么 $\mu_p \geq \alpha_p + \beta_p + 1$.
- (3) 如果 p 不是 A_k 型 ($k \leq 6$) 或者 D_5 型, 那么 $\mu_p \geq \alpha_p + \beta_p + 2$.
- (4) 如果 $2(\mu_p - \alpha_p - \beta_p) + \alpha_p + 3\beta_p^- < 6$, 那么 p 是 A_1, A_2, A_3 或 D_4 型.
如果 $2(\mu_p - \alpha_p - \beta_p) + \alpha_p + 3\beta_p^- < 5$, 那么 p 是 A_1, A_2 或 A_3 型.
如果 $2(\mu_p - \alpha_p - \beta_p) + \alpha_p + 3\beta_p^- < \frac{7}{2}$, 那么 p 是结点.

证明 如果 p 是 ADE 奇点, 那么我们可以直接由前面的不变量列表验证结论.

如果 p 不是 ADE 奇点, 那么至少有一个 $m_i \geq 4$. 我们将 (B, p) 的极小嵌入解消分为两部分: 首先爆发所有的非 ADE 奇点 $p_0, \dots, p_{r'-1}$, 使得剩下的无穷接近点都是 ADE 奇点. 这样我们有

$$\mu_p - \alpha_p - \beta_p = \sum_{i=1}^{r'} (m_i - 3) + \sum_{p' \in B'} (\mu_{p'} - \alpha_{p'} - \beta_{p'}),$$

这里 B' 是爆发完 $p_0, \dots, p_{r'-1}$ 之后的完全原像. 剩下的工作就是验证上式右边的下界何时满足命题各条件. 我们不再赘述. \blacksquare

推论 3.1.1 如果 p 满足 $\sum_{i=1}^r m_i(m_i - 2) \leq 5$, 那么 p 是 A_1, A_2, A_3 或 D_4 型奇点.

3.2 奇异纤维陈数

在第 2.2 节中, 我们定义了基变换不变量 K_π^2, χ_π, e_π , 并指出了它们的非负性. 事实上, 这些基变换不变量可以通过每条纤维的局部贡献值来计算. 设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 d 次基变换. 我们仍沿用第 1.3 节与第 2.2 节的记号. 不失一般性, 我们假设 π 在 p_1, \dots, p_s 上全分歧, $F_i = f^*(p_i)$; ρ_2 是奇点的嵌入解消. 设 $p \in F_i$, K_p 是例外曲线 $\Pi_2^*(p)$ 对应的有理典范除子. 令

$$\beta_{F_i}^- = \frac{1}{d} (F_i \text{ 在 } S_2 \text{ 中的原像纤维内被 } \tilde{\rho} \text{ 收缩的 } (-1)\text{-曲线条数}),$$

以及

$$L_{F_i} = \sum_{\Gamma \subset F_i} (n_\Gamma - 1 - \frac{n_\Gamma - (d, n_\Gamma)}{d}) \Gamma,$$

这里 Γ 跑遍 F_i 所有的不可约分支, n_Γ 为 Γ 的重数. 当 d 充分可除时, $\beta_{F_i}^-$ 及 $L_{F_i} = F_i - F_{i,red}$ 与 d 的选取无关, 且 F_i 的 d -次根基变换模型显然是半稳定模型.

利用引理 1.3.2 直接计算, 可以得到以下结论(请读者自证).

$$\text{引理 3.2.1} \quad K_{S_2/\tilde{C}} = \Pi_2^*(K_{S/C} - \sum_{i=1}^s L_{F_i}) + \sum_{i=1}^s \sum_{p \in F_i} K_p.$$

$$\text{特别地, 我们有 } K_\pi^2 = \sum_{i=1}^s (2L_{F_i} K_S - L_{F_i}^2) - \sum_{i=1}^s \sum_{p \in F_i} \frac{1}{d} K_p^2 - \sum_{i=1}^s \beta_{F_i}^-.$$

推论 3.2.1 假设 d 是充分可除的, 那么

$$K_\pi^2 = \sum_{i=1}^s (4N_{F_i} + F_{i,red}^2) + \sum_{i=1}^s \sum_{p \in F_i} \alpha_p - \sum_{i=1}^s \beta_{F_i}^-.$$

证明 这里我们用到了循环 Galois 覆盖奇点嵌入解消的性质. 设 $p \in F_i$, K_p 是例外曲线 $\Pi_2^*(p)$ 对应的有理典范除子. 当 d 充分可除时, $\frac{1}{d} K_p^2 = -\alpha_p$. \blacksquare

引理 3.2.2 设 $g \geq 1$, $\pi_1 : C_1 \rightarrow C$, $\pi_2 : \tilde{C} \rightarrow C_1$ 是两个基变换. f_1 是 f 在 π_1 下的拉回, f_2 是 f_1 在 π_2 下的拉回; $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$. 我们有基变换等式

$$\begin{aligned} K_\pi^2 &= K_{\pi_1}^2 + \frac{1}{\deg \pi_1} K_{\pi_2}^2, \\ e_\pi &= e_{\pi_1} + \frac{1}{\deg \pi_1} e_{\pi_2}, \\ \chi_\pi &= \chi_{\pi_1} + \frac{1}{\deg \pi_1} \chi_{\pi_2}. \end{aligned}$$

特别地, 在给定纤维 F_1, \dots, F_s 上的任何半稳定约化 π , 其基变换不变量 K_π^2 , e_π , χ_π 与 π 的选取无关.

证明 引理前半部分来自于直接计算. 我们证明后半部分. 此时设 $\pi_i : C_i \rightarrow C$, $\pi = \pi_1 \times_C \pi_2 : \tilde{C} = C_1 \times C_2 \rightarrow C$, f_i 是 f 在 π_i 下的拉回 ($i = 1, 2$), $p_i : \tilde{C} \rightarrow C_i$. 显见 $\pi = \pi_i \circ p_i$.

由于 π_i 是 F_1, \dots, F_s 上的半稳定约化, 所以易知 p_i 是不变基变换, 从而 $K_{p_i}^2 = 0$. 由引理中的基变换等式可知 $K_\pi^2 = K_{\pi_1}^2 = K_{\pi_2}^2$. 其余情形类似可证. \blacksquare

对每条奇异纤维 F (不一定相对极小), 我们定义

$$\begin{aligned} c_1^2(F) &= 4N_F + F_{red}^2 + \sum_{p \in F} \alpha_p - \beta_F^-, \\ c_2(F) &= 2N_F + \mu_F - \sum_{p \in F} \beta_p + \beta_F^-, \\ \chi_F &= \frac{1}{12} (c_1^2(F) + c_2(F)). \end{aligned}$$

我们称 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$ 和 χ_F 为奇异纤维陈数 (Chern numbers of singular fibers). 有时, 我们也记 $\beta_F = \sum_{p \in F} \beta_p$, $\beta_F^+ = \beta_F - \beta_F^-$.

由引理 3.1.2 及陈数定义立得以下结论.

引理 3.2.3 (爆发公式) 设 F 是奇异纤维, $F' = \sigma^* F$ 是 F 在点 $p \in F$ 处一次爆发后拉回的像纤维, 则

$$c_1^2(F') = c_1^2(F) - 1, \quad c_2(F') = c_2(F) + 1, \quad \chi_{F'} = \chi_F.$$

定理 3.2.1 ([Tan96], Lemma 2.4) 设基变换 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 F_1, \dots, F_s 上的半稳定约化, 那么我们有

$$K_\pi^2 = \sum_{i=1}^s c_1^2(F_i), \quad e_\pi = \sum_{i=1}^s c_2(F_i), \quad \chi_\pi = \sum_{i=1}^s \chi_{F_i}.$$

证明 由引理 3.2.2, 不妨设 d 充分可除. 由推论 3.2.1 立得 $K_\pi^2 = \sum_{i=1}^s c_1^2(F_i)$.

$e_\pi = \sum_{i=1}^s (e_{F_i} - \frac{1}{d}e_{\tilde{F}_i} + \beta_{\tilde{F}_i})$, 这里 \tilde{F}_i 是 F_i 在 S_2 中的原像纤维. 注意到 $d \sum_{p \in F_i} \beta_p = e_{\tilde{F}_i}$ 以及 $e_{F_i} = 2N_{F_i} + \mu_{F_2}$ (引理 2.1.2), 我们得到 $e_\pi = \sum_{i=1}^s c_2(F_i)$.

由基变换不变量的诺特公式 $K_\pi^2 + e_\pi = 12\chi_\pi$, 即得第三个式子. \blacksquare

推论 3.2.2 (陈数的正性) 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 纤维化, F 是奇异纤维. $c_1^2(F)$, $c_2(F)$ 和 χ_F 都是非负有理数. 它们中任何一个等于零, 当且仅当 F 是半稳定纤维.

证明 这是定理 3.2.1, 命题 2.2.1 和命题 2.2.3 的直接推论. \blacksquare

注 3.2.1 对 $g = 1$ 的纤维 F , 恒有 $c_1^2(F) = 0$.

为了讨论一般情形的基变换, 我们规定以下记号. 设 $B = F_1 + \dots + F_s$, 则记 $c_1^2(B) := c_1^2(F_1) + \dots + c_1^2(F_s)$. 类似地可以定义 $c_2(B)$ 及 χ_B . 今设 B_π 是 π 在 C 上的分歧轨迹, $\mathcal{B}_\pi = f^*(B_\pi)$ 则为分歧纤维的轨迹. 设 R_π 是 B_π 在 π 下的原像点集, $\mathcal{R}_\pi = \tilde{f}^*(R_\pi)$ 则为 \mathcal{B}_π 的拉回.

定理 3.2.2 ([Tan96], Theorem A) 设 $f: S \rightarrow C$ 是纤维化, $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 d 次基变换. 那么我们有

$$K_\pi^2 = c_1^2(\mathcal{B}_\pi) - \frac{1}{d}c_1^2(\mathcal{R}_\pi), \quad e_\pi = c_2(\mathcal{B}_\pi) - \frac{1}{d}c_2(\mathcal{R}_\pi), \quad \chi_\pi = \chi_{\mathcal{B}_\pi} - \frac{1}{d}\chi_{\mathcal{R}_\pi}.$$

证明 设 $\hat{\pi}: \hat{C} \rightarrow C$ 是关于 \mathcal{R}_π 的半稳定约化. 因此 $\pi \circ \hat{\pi}$ 也是半稳定约化. 利用引理 3.2.2 和引理 3.2.1, 我们立得结论. \blacksquare

推论 3.2.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是任何基变换. 我们有

(1)

$$K_\pi^2 \leq c_1^2(\mathcal{B}_\pi), \quad e_\pi \leq c_2(\mathcal{B}_\pi), \quad \chi_\pi \leq \chi_{\mathcal{B}_\pi}.$$

当 $g > 1$ 时, 它们中任何一个等号成立当且仅当 π 是分歧轨迹 B_{p_i} 上的半稳定约化.

(2)

$$\sum_F c_1^2(F) \leq K_f^2, \quad \sum_F \chi_F \leq \chi_f, \quad \sum_F c_2(F) \leq e_f.$$

当 $g > 1$ 时, 前两个不等式之一的等号成立当且仅当 f 是 isotrivial, 最后一个不等式等号成立当且仅当 f 的半稳定模型的所有纤维都光滑.

设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是 $f: S \rightarrow C$ 的半稳定约化, $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是相应的半稳定纤维化. 由上讨论可知 $\frac{1}{d}K_\pi^2 = K_f^2 - \sum_F c_1^2(F)$ 不依赖于 π 的选取, 因此是与 f 自身有关的量. 类似地, 还有 $\frac{1}{d}e_\pi$ 和 $\frac{1}{d}\chi_\pi$. 我们将它们重新定义为

$$\kappa(f) := K_f^2 - \sum_F c_1^2(F),$$

$$\delta(f) := e_f^2 - \sum_F c_2(F),$$

$$\lambda(f) := \chi_f - \sum_F \chi_F.$$

它们称作 f 的模不变量 (Modular invariants).

注 3.2.2 f 诱导了从 C 亏格 g 曲线模空间的全纯映射:

$$J: C \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g.$$

这样, $\kappa(f) = \deg J^* \kappa$, $\delta(f) = \deg J^* \delta$, $\lambda(f) = \deg J^* \lambda$, 此处 λ 和 δ 分别是 Hodge 除子类 and 边界除子类, 且 $\kappa = 12\lambda - \delta$. 在椭圆纤维化情形, $\kappa(f) = 0$, $\delta(f) = j$ 是 J 函数的次数.

本节最后, 我们讨论一下 $\beta_{\overline{F}}$ 的计算. 设 \overline{F} 是 F 的极小正规交模型, \overline{F} 的对偶图 G_F 中的一条有理曲线构成的 Hirzebruch-Jung 链分支是指如下的子图

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \bullet \\ \gamma_1 & & \gamma_2 & & & & \gamma_r & & \gamma_{r+1} \\ -e_1 & & -e_2 & & & & -e_r & & \end{array}$$

这里 $\overset{\gamma_i}{\underset{-e_i}{\circ}}$ 记光滑有理曲线 Γ_i (自交数 $-e_i$, 在 \overline{F} 中重数为 γ_i). \bullet 记主分支 (Principal component), 即该曲线要么满足 $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$, 要么是光滑有理曲线且与其他分支至少交三个点. 我们称 Γ_1 为 G_F 的端点.

引理 3.2.4 (Gang Xiao [Xia90]) 假设 $n \equiv 0 \pmod{M_F}$. 设 \overline{F} 是 F 的极小正规交模型. 考虑 \overline{F} 的 n -次根模型. 那么被 $\tilde{\rho}$ 收缩的 (-1) -曲线必定出现在 G_F 的某个 Hirzebruch-Jung 链分支中.

证明 这一结论来自于 [Xia90] 命题 1 的证明. 我们留做习题让读者自己证明. ■

注意到 Hirzebruch-Jung 链分支中这 r 条有理曲线可以收缩成 (n, q) Hirzebruch-Jung 型奇点, 局部方程定义为 $z^n = xy^{n-q}$ ([BPV04, III, §5]), 这里 n 和 q 分别是矩阵 $[e_1, \dots, e_r]$ 和 $[e_2, \dots, e_r]$ 的行列式. n 和 q 也能按照以下方式被确定.

由 Zariski 引理和 $\gamma_0 = 0$, 可知 γ_1 整除 $\gamma_i, \forall i$. 我们采用 [BPV04, III, §5] 的记号, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r, \gamma_i = \mu_i \gamma_1, \forall i$, 故 $1 = \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{r+1}$.

$$n = \mu_{r+1} = \frac{\gamma_{r+1}}{\gamma_1}, \quad q' = \mu_r = \frac{\gamma_r}{\gamma_1}$$

且 q 是以下同余方程唯一的最小非负解

$$qq' \equiv 1 \pmod{n}, \quad 1 \leq q < n.$$

由于 μ_i 和 μ_{i+1} 互素, 所以该链分支对 $\beta_{\overline{F}}$ 的贡献为

$$\beta' = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3} + \dots + \frac{1}{\mu_r \mu_{r+1}}.$$

存在以下关系式 ([BPV04, III, §5, eq(7)])

$$\lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1} \mu_k = n,$$

i.e.,

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} - \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+1}} = n \frac{1}{\mu_k \mu_{k+1}}. \quad (3-1)$$

注意到 $\lambda_1 = q$ 及 $\lambda_{r+1} = 0$. 取 (3-1) 从 $k = 1$ 到 r 的和, 我们有

$$\beta' = \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_{r+1}}{\mu_{r+1}} \right) = \frac{q}{n}.$$

引理 3.2.5 上述 Hirzebruch-Jung 链分支对 $\beta_{\bar{F}}$ 的贡献恰为 $\frac{q}{n}$.

结合引理3.2.4 和引理 3.2.5, 则有

推论 3.2.4 $\beta_{\bar{F}} = \sum \beta'$ 就是 G_F 中所有 Hirzebruch-Jung 链分支的贡献总和.

例 3.2.1 假设 $e_1 = \cdots = e_{r-1} = 2$ 且 $e_r \geq 2$, 那么 $n = r(e_r - 1) + 1$, $q = n - (e_r - 1) = (r - 1)(e_r - 1) + 1$, Hirzebruch-Jung 链分支对 $\beta_{\bar{F}}$ 的贡献是

$$\beta' = \frac{(r-1)(e_r-1)+1}{r(e_r-1)+1} = 1 - \frac{e_r-1}{r(e_r-1)+1}. \quad \blacksquare$$

注意到 $\gamma_2 = e_1 \gamma_1$, 因此 Hirzebruch-Jung 链分支对 $\beta_{\bar{F}}$ 的贡献至少是 $[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{1}{e_1}$. [Tan96, page 666] 的记号中, 也将 $\beta_{\bar{F}}$ 记为 $c_{-1}(F)$. $n\beta_{\bar{F}}$ 就是 F 中被 $\bar{\rho}$ 收缩的 (-1) -曲线个数.

3.3 局部 Arakelov 型不等式

设 $\bar{F} = \sum_{i=1}^k n_i C_i$ 是 F 的正规极小模型, 诸 C_i 是其不可约分支. 设 $n \equiv -1 \pmod{M_F}$, 前面我们定义 F 的对偶模型 F^* 即 n -次根模型. 我们设 \bar{F}' 是 F^* 的正规交模型 (作为 \bar{F} 的 n -次根基变换在 S_2 上的原像纤维).

记 C_i^* 是 C_i 在 \bar{F}' 中的严格原像. 因为每个 n_i 都与 n 互素, 所以 C_i^* 是不可约的. C_i^* 在 \bar{F}' 内的重数仍为 n_i (引理 1.3.1). 由 Hirzebruch-Jung 奇点解消可知, 我们只需要插入有理曲线链即得到 \bar{F}' ,

$$\bar{F}' = \sum_{i=1}^k n_i C_i^* + \sum_p \Gamma_p^*,$$

此处 p 跑遍 \bar{F} 的所有结点, $\Gamma_p^* = \sum_{i=1}^r \gamma_i \Gamma_i$. 设 p 是两个局部分支 C_i 和 C_j 的交点. 于是在 Γ_p^* 附近, \bar{F}' 对偶图结构如下, 这里 $\gamma_0 = n_i$, $\gamma_{r+1} = n_j$.

$$\begin{array}{ccccccc} C_i^* & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{r-1} & \Gamma_r & C_j^* \\ \bullet & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \bullet \\ n_i = \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & & \gamma_{r-1} & \gamma_r & \gamma_{r+1} = n_j \end{array}$$

引理 3.3.1 (1) $\gamma_{i-1} + \gamma_{i+1} \equiv 0 \pmod{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, r$.

(2) $\gamma_1 + \gamma_{r+1} \equiv 0 \pmod{\gamma_0}$, $\gamma_r + \gamma_0 \equiv 0 \pmod{\gamma_{r+1}}$.

证明 p 点处的局部基变换定义为 $z^n = x^{n_i} y^{n_j}$. 注意到 n 分别与 n_i 和 n_j 互素, 所以该奇点方程局部等价于 $z^n = xy^{n-q}$, 这里 q , 满足 $n_j + qn_i \equiv 0 \pmod{n}$, 且 $1 \leq q < n$ (参见

[BPV04, III, §5]). 由定义, n_i 整除 $n+1$, 因此 $q_0 = -(n+1)n_j/n_i = -(n+1)\gamma_{r+1}/\gamma_0$ 是整数, 满足 $q \equiv q_0 \pmod{n}$. p 上的奇点是 Hirzebruch-Jung 型的.

为讨论方便, 我们令 $\Gamma_0 = C_i^*$, $\gamma_0 = n_i$, $\Gamma_{r+1} = C_j^*$ 以及 $\gamma_{r+1} = n_j$. 设 $e_i = -\Gamma_i^2$. 由 Zariski 引理, $\bar{F}' \cdot \Gamma_i = 0$, $i = 1, \dots, r$, 从而有

$$\begin{cases} -\gamma_0 + \gamma_1 e_1 - \gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 + \gamma_2 e_2 - \gamma_3 = 0, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ -\gamma_{r-1} + \gamma_r e_r - \gamma_{r+1} = 0. \end{cases}$$

这就证明了 (1). 对给定的 γ_0 和 γ_{r+1} , 这是关于变量 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ 的线性方程组. 我们令 $A = [e_1, \dots, e_r]$ 是系数矩阵. 由熟知的结果, A 的行列式等于 n , 且子阵 $[e_2, \dots, e_r]$ 的行列式等于 q . 由 Gramer 法则,

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_0 q + \gamma_{r+1}}{n} = \frac{\gamma_0 q_0 + \gamma_{r+1}}{n} + \gamma_0 \frac{q - q_0}{n} = -\gamma_{r+1} + \gamma_0 \frac{q - q_0}{n},$$

故 $\gamma_0 \mid \gamma_1 + \gamma_{r+1}$. 对称地有, $\gamma_{r+1} \mid \gamma_r + \gamma_0$. ■

引理 3.3.2 $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) = p_a(\bar{F}'_{\text{red}})$.

证明 这一结论来自于引理 2.1.2 (4), 即 \bar{F}_{red} 算术亏格等于各分支正规化后的几何亏格加上 \bar{F} 的复式对偶图的第一 Betti 数. 注意到 C_i 和 C_i^* 的几何亏格相同. 又因为插入 Hirzebruch-Jung 链又不影响对偶图的第一 Betti 数, 因此不会改变算术亏格. ■

我们定义记号

$$\chi(p, q) = \frac{1}{12} \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} + \frac{(p, q)^2}{pq} \right) - \frac{1}{4}.$$

由直接计算可知

$$\chi(p, p) = 0, \quad \chi(p, q) = \chi(p, p+q) + \chi(p+q, q).$$

如果 p 和 q 互素, 那么戴德金和 (Dedekind's sum) 定义为

$$s(p, q) = \sum_{i=0}^{q-1} \left(\left(\frac{pi}{q} \right) \right) \left(\left(\frac{i}{q} \right) \right),$$

这里

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

而 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, $((x))$ 是周期为 1 的偶函数.

如果 p 和 q 不互素, 那么我们定义 $s(p, q) := s(p/(p, q), q/(p, q))$. 因此 $s(-p, q) + s(p, q) = 0$, $s(p + kq, q) = s(p, q)$ (对所有整数 k). 特别地, 若 $p + p'$ 被 q 整除, 那么

$$s(p, q) + s(p', q) = 0.$$

以下是熟知的戴德金互反律

引理 3.3.3 (Dedekind's Reciprocity Law) $s(p, q) + s(q, p) = \chi(p, q)$.

回顾 $N_{\bar{F}} = g - p_a(\bar{F}_{\text{red}})$, $\bar{F} = \sum_{i=1}^k n_i C_i$, 我们有

命题 3.3.1

$$\chi_F = \frac{1}{2} N_{\bar{F}} - \sum_{i < j} \chi(n_i, n_j) C_i C_j.$$

证明 由引理 3.2.3, χ_F 是双有理不变量, 故

$$\chi_F = \chi_{\bar{F}} = \frac{1}{2} N_{\bar{F}} + \frac{1}{12} (\mu_{\bar{F}} - \beta_{\bar{F}} + \bar{F}_{\text{red}}^2).$$

由定义知,

$$\mu_{\bar{F}} = \sum_{i < j} C_i C_j, \quad \beta_{\bar{F}} = \sum_{i < j} \frac{(n_i, n_j)^2}{n_i n_j} C_i C_j, \quad \bar{F}_{\text{red}}^2 = \sum_{i < j} 2C_i C_j + \sum_{i=1}^k C_i^2.$$

因为 $C_i \bar{F} = 0$, $C_i^2 = -\sum_{j \neq i} \frac{n_j}{n_i} C_i C_j$, 所以 $\sum_{i=1}^k C_i^2 = -\sum_{i < j} \left(\frac{n_i}{n_j} + \frac{n_j}{n_i} \right) C_i C_j$. 这样

$$\mu_{\bar{F}} - \beta_{\bar{F}} + \bar{F}_{\text{red}}^2 = \sum_{i < j} \left(3 - \frac{(n_i, n_j)^2}{n_i n_j} - \frac{n_j}{n_i} - \frac{n_i}{n_j} \right) C_i C_j = -12 \sum_{i < j} \chi(n_i, n_j) C_i C_j.$$

因此 $\chi_F = \frac{1}{2} N_{\bar{F}} - \sum_{i < j} \chi(n_i, n_j) C_i C_j$. ■

定理 3.3.1 (对偶定理 [LT10]) 设 F^* 是 F 的对偶模型. 那么 $\chi_F + \chi_{F^*} = N_{\bar{F}} = N_{\bar{F}^*}$.

特别地, 我们有 $\chi_F = \chi_{F^{**}}$.

证明 由前讨论, F^* 的正规交模型 \bar{F}' 有以下结构.

$$\bar{F}' = \sum_{i=1}^k n_i C_i^* + \sum_p \Gamma_p^*,$$

这里 p 跑遍 \bar{F} 中所有的二重点, 且 $\Gamma_p^* = \gamma_1 \Gamma_1 + \cdots + \gamma_r \Gamma_r$ 如下,

$$\begin{array}{ccccccc} C_i^* & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{r-1} & \Gamma_r & C_j^* \\ \bullet & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \bullet \\ \gamma_0 = n_i & \gamma_1 & \gamma_2 & & \gamma_{r-1} & \gamma_r & n_j = \gamma_{r+1} \end{array}$$

由引理 3.3.1(1), 若 $i = 1, \dots, r$, 则 γ_i 整除 $\gamma_{i-1} + \gamma_{i+1}$, 故得

$$s(\gamma_{i-1}, \gamma_i) + s(\gamma_{i+1}, \gamma_i) = 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, r.$$

由引理 3.3.1(2), 则有

$$s(\gamma_1, \gamma_0) = -s(\gamma_{r+1}, \gamma_0), \quad s(\gamma_r, \gamma_{r+1}) = -s(\gamma_0, \gamma_{r+1}).$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r+1} \chi(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \Gamma_{i-1} \Gamma_i &= \sum_{i=1}^{r+1} (s(\gamma_{i-1}, \gamma_i) + s(\gamma_i, \gamma_{i-1})) \\ &= s(\gamma_1, \gamma_0) + s(\gamma_r, \gamma_{r+1}) + \sum_{i=1}^r (s(\gamma_{i-1}, \gamma_i) + s(\gamma_{i+1}, \gamma_i)) \end{aligned}$$

$$= -s(\gamma_{r+1}, \gamma_0) - s(\gamma_0, \gamma_{r+1}) = -\chi(n_i, n_j).$$

这样

$$\mu_{\bar{F}^*} - \beta_{\bar{F}^*} + \bar{F}_{\text{red}}^{*2} = -(\mu_{\bar{F}} - \beta_{\bar{F}} + \bar{F}_{\text{red}}^2).$$

由引理 3.3.2, $p_a(\bar{F}_{\text{red}}^*) = p_a(\bar{F}_{\text{red}})$, 故 $N_{\bar{F}^*} = N_{\bar{F}}$. 我们得到 $\chi_F + \chi_{F^*} = N_{\bar{F}}$. \blacksquare

定理 3.3.2 (局部 Arakelov 型不等式) $\frac{1}{6}N_{\bar{F}} \leq \chi_F \leq \frac{5}{6}N_{\bar{F}}$. 若 F 非半稳定, 那么 $\frac{1}{6} \leq \chi_F \leq \frac{5g}{6}$.

证明 我们不妨假设 F 极小. 由相伴公式, $2N_F = K_X(F - F_{\text{red}}) - F_{\text{red}}^2$. 由 F 的奇点解消, 我们有 $p_a(F_{\text{red}}) = p_a(\bar{F}_{\text{red}}) + \sum_i \frac{1}{2}(m_i - 1)(m_i - 2)$, 故 $2N_F = 2N_{\bar{F}} - \sum_i (m_i - 1)(m_i - 2)$, 此处 $m_i \geq 2$ 是出现在 F 在极小嵌入解消中相应的奇点重数. $\alpha_F = \sum_i (m_i - 2)^2$. 由定义,

$$\begin{aligned} 12\chi_F &= 6N_F + F_{\text{red}}^2 + \alpha_F + \mu_F - \beta_F \\ &= 2N_F + (2N_F + F_{\text{red}}^2) + (\mu_F - \alpha_F - \beta_F) + (2N_F + 2\alpha_F) \\ &= 2N_F + (F - F_{\text{red}})K_X + (\mu_F - \alpha_F - \beta_F) + 2N_{\bar{F}} + \sum_i (m_i - 2)(m_i - 3), \end{aligned}$$

因为 F 极小, 所以 $(F - F_{\text{red}})K_X \geq 0$. 由引理 3.1.1 知, $\mu_F - \alpha_F - \beta_F \geq 0$. 因此 $12\chi_F \geq 2N_{\bar{F}}$.

类似地有, $12\chi_{F^*} \geq 2N_{\bar{F}^*} = 2N_{\bar{F}}$. 另一方面, $\chi_F + \chi_{F^*} = N_{\bar{F}}$, 故 $12\chi_F \leq 10N_{\bar{F}}$. \blacksquare

推论 3.3.1 设 F 是极小的, 那么 $\chi_F = \frac{1}{6}N_{\bar{F}}$ (相应地, $\chi_{F^*} = \frac{5}{6}N_{\bar{F}}$) 当且仅当 F (相应地, F^*) 是一条最多只含通常二重点和通常尖点的既约曲线.

证明 这是引理 3.1.1 的直接推论. \blacksquare

推论 3.3.2 设 s 是 $f: S \rightarrow C$ 的奇异纤维个数. 若 f 是 isotrivial 纤维化, 那么 $\chi_f \leq \frac{5gs}{6}$.

3.4 局部典范类不等式

当 $g = 1$ 时, 恒有 $c_1^2(F) = 0$. 以下总假设 $g \geq 2$, 且 F 极小. 我们希望计算 $c_1^2(F)$ 的最佳上界.

定理 3.4.1 (局部典范类不等式 [LT10]) $c_1^2(F) \leq 4g - \frac{24}{5}$. 更精确地, 若 $g \geq 7$ 或者 $g = 5$, 则 $c_1^2(F) \leq 4g - \frac{11}{2}$.

$$c_1^2(F) \leq \begin{cases} \frac{16}{5}, & g = 2 \\ 7, & g = 3 \\ \frac{54}{5}, & g = 4 \\ \frac{130}{7}, & g = 6 \end{cases}$$

推论 3.4.1 ([Tan96]) 设 $g \geq 2$, 那么我们有严格不等式 $c_1^2(F) < 4g - 4$.

推论 3.4.2 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 $g \geq 1$ 的非平凡纤维化, 那么 f 至少有两条奇异纤维.

证明 这里我们利用已知结论 $K_f^2 \geq (4g - 4)$. 如果 f 仅有一条奇异纤维, 那么它必定是 isotrivial 的. 因此 $K_f^2 = c_1^2(F_1) < 4g - 4$, 矛盾!

我们也可以从单值的角度去证明. 围绕 $p_1 = f(F_1)$ 的小环路 γ , 同伦于零环路, 因此诱导的拓扑单值是平凡的, 也就是说 F_1 是光滑的, 矛盾! ■

推论 3.4.3 设 s 是 $f : S \rightarrow C$ 的奇异纤维个数, 且 $g \geq 2$. 若 f 是 isotrivial, 则 $K_f^2 \leq (4g - \frac{24}{5})s$.

推论 3.4.4 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的非平凡纤维化, s 是奇异纤维个数, 则

$$K_{S/C}^2 \leq (2g - 2)(2b - 2 + 3s).$$

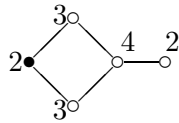
证明 由上面诸结论, 我们不妨设 f 是非 isotrivial. 利用 Kodaira-Parshin 构造, 得到在 s 个临界点上一致分歧的基变换 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, $\deg \pi = de$, 且 π 在每个分歧点处的分歧指数恰为 e (见引理 2.4.2 等). 我们有

$$K_f^2 - (2g - 2)(2b - 2 + 3s) = \frac{1}{de}(K_{\tilde{f}}^2 - (2g - 2)(2\tilde{b} - 2 + \tilde{s})) + \frac{2g - 2}{de}(\tilde{s} - \frac{s}{e}) + \sum_{i=1}^s (c_1^2(F_i) - (4g - 4)).$$

易知右面每一项都是非负的, 故得结论. ■

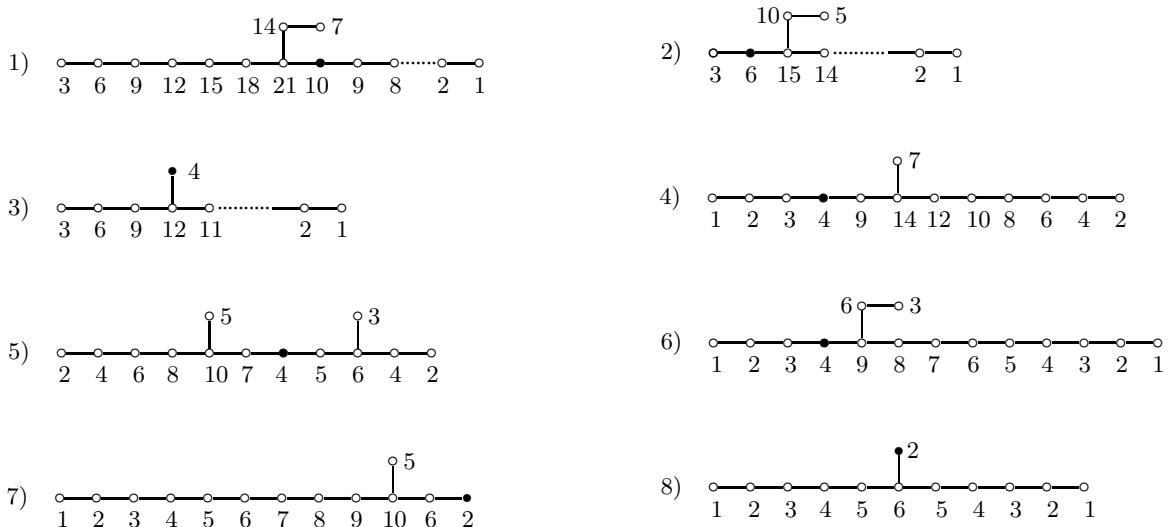
下面的例子表明, 对 $g \geq 2$, 存在数值上的纤维, 其第一陈数达到 $4g - \frac{11}{2}$.

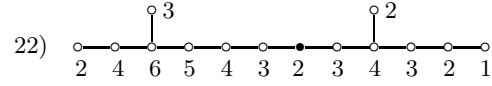
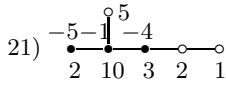
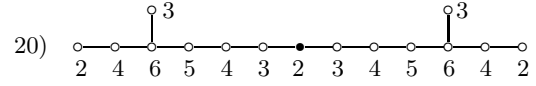
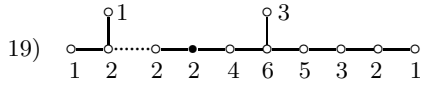
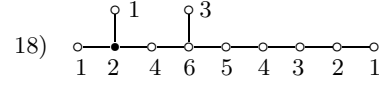
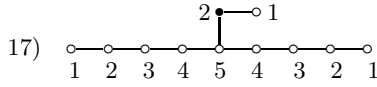
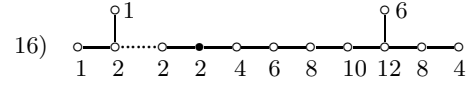
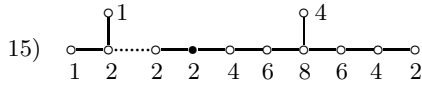
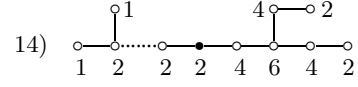
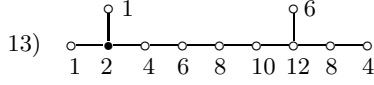
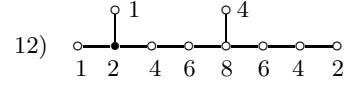
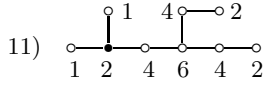
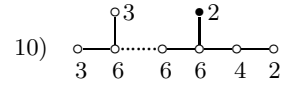
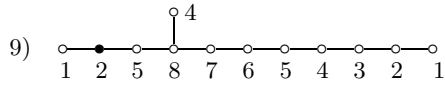
例 3.4.1 $F = (g - 1)F_0$, 此处 F_0 是亏格 2 曲线, 其对偶图如下.



定理 3.4.1 等价于逐一验证所有满足 $c_1^2(F) > 4g - \frac{11}{2}$ 的纤维 F 的可能情形, 即以下命题.

命题 3.4.1 设 $g \geq 2$, F 是极小奇异纤维, 满足 $c_1^2(F) > 4g - \frac{11}{2}$. 那么 $g \leq 6$, 且 F 是以下 22 类纤维之一. 这里 \circ 表示 (-2) -曲线, \bullet 表示 (-3) -曲线.





以下我们只考虑 $c_1^2(F) > 4g - \frac{11}{2}$ 的奇异纤维. 由 $c_1^2(F)$ 的定义, 这一条件等价于

$$4p_a(\bar{F}_{\text{red}}) - F_{\text{red}}^2 + \beta_F^- + \sum_{i=1}^r m_i(m_i - 2) < \frac{11}{2}. \quad (3-2)$$

注意到公式 (3-2) 左边每一项都是非负的.

引理 3.4.1 (1) $m_i \leq 3, \forall i$. 最多只有一个 m_i 能取到 3. 因此 F_{red} 最多允许一个非结点 p . 更精确地, p 最多是以下类型之一: A_2, A_3 或 D_4 .

(2) $\bar{F}_{\text{red}}^2 \leq -1$.

(3) $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) = 0$, 从而 \bar{F} 是光滑有理曲线构成的树.

(4) $p_a(F_{\text{red}}) \leq 1$, 等号成立当且仅当 F_{red} 含有 (1) 中的非结点 p .

证明 (1) 直接来自于 $\sum_{i=1}^r m_i(m_i - 2) < 11/2$, 此时易知 F 上的奇点最多是 ADE 奇点. 由直接验算可知, p 最多是 A_2, A_3 或 D_4 .

2) (3-2) 显然蕴含着 $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) \leq 1$, 即 $K\bar{F}_{\text{red}} + \bar{F}_{\text{red}}^2 \leq 0$. 假如 $\bar{F}_{\text{red}}^2 = 0$, 则由 Zariski 引理, $\bar{F} = n\bar{F}_{\text{red}}$ (n 是某个正整数). 由于 $K\bar{F}_{\text{red}} \leq 0$, 故 $2g - 2 = K\bar{F} = nK\bar{F}_{\text{red}} \leq 0$, 矛盾! 因此 $\bar{F}_{\text{red}}^2 \leq -1$.

3) 注意 $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) \leq 1$. 我们假设 $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) = 1$, 那么 $\sum_{i=1}^r m_i(m_i - 2) \leq 3/2$, 从而 $m_i = 2$. 由此立知 $F_{\text{red}} = \bar{F}_{\text{red}}$ 是只含结点的曲线. 同样地, 也有 $-F_{\text{red}}^2 < 3/2$, 故 $F_{\text{red}}^2 = -1$, $KF_{\text{red}} = 1$, 从而 F 由一条 (-3) -曲线和若干 (-2) -曲线构成. 现在由 (3-2), 我们得到 $\beta_F^- < \frac{1}{2}$.

如果 F 中的某条 (-2) -曲线 E 只和其他分支交一个点, 那么 E 是某个 H-J 链分支的端点, 从而 E 对 β_F^- 的贡献是 $\frac{1}{2}$, 矛盾! 因此任何 (-2) -曲线必定出现在对偶图 G_F 某个回路 (指圈或环路) 里. 由假设条件 $p_a(F_{\text{red}}) = 1$, 对偶图中仅有一个回路. 因此 G_F 实际上就是有这个回路构成. 这样, 显然就有 $F_{\text{red}}\Gamma \leq 0$, 对任何不可约分支 Γ 成立. 结合 $F_{\text{red}}^2 < 0$, 立知 F 是负定曲线, 矛盾!

4) 结合引理 3.1.2 立得. ■

命题 3.4.1 的证明思路就是利用引理 3.4.1 控制各类局部不变量的值, 从而对 F 的结构作出限制. 鉴于证明细节过于繁琐, 我们以下只提供一个概要. 有兴趣的读者可以参看 [LT10].

对 $p_a(F_{\text{red}}) = 1$ 的情形, F 含有非结点 p (可能类型为 A_2, A_3 或 D_4). $p_a(F_{\text{red}}) = 1$, 以及 $-F_{\text{red}}^2 + \beta_F^- < \frac{5}{2}$. 由于 $p_a(\bar{F}_{\text{red}}) = 0$, 所以 \bar{F} 的对偶图是有理曲线构成的树. 我们按照 p 的可能类型逐一验证 A_2, A_3 及 D_4 各情形, 则有以下结论

引理 3.4.2 ([LT10], 命题 5.4) 若 F 含有非结点, 那么 F_{red} 有 A_3 型奇点. F 的正规交模型是命题 3.4.1 中第 21 型纤维.

以下我们不妨假设 $p_a(F_{\text{red}}) = 0$, 即 F_{red} 是光滑有理曲线构成的树. 此时 (3-2) 相当于 $-F_{\text{red}}^2 + \beta_F^- < \frac{11}{2}$, 亦即 $F_{\text{red}}K_X + \beta_F^- < \frac{7}{2}$.

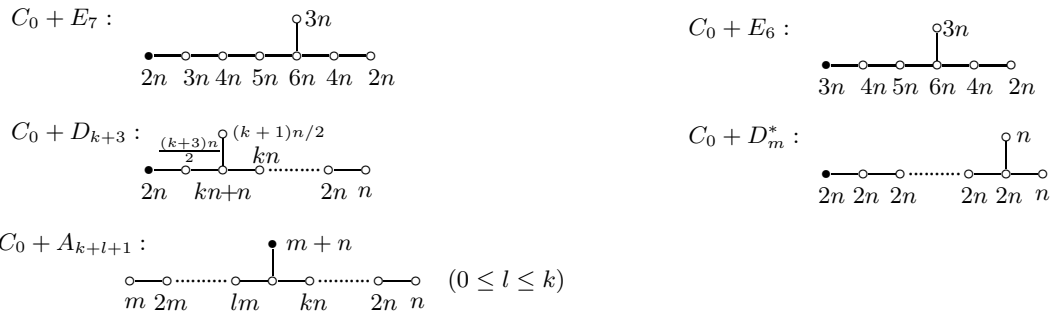
引理 3.4.3 ([LT10], 引理 5.5) 在上述假设条件下, 我们有 $F_{\text{red}}K_X = 1$, 且 $F_{\text{red}}^2 = -3$. 换言之, F_{red} 由一条 (-3) -曲线和若干 (-2) -曲线组成. 因此 $\beta_F^- < \frac{5}{2}$.

由上可知 F 由一条 (-3) -曲线 C_0 和一些连通的 ADE 曲线 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ 构成. 设 Z_i 是 Γ_i 上的基本闭链. 于是 $Z_i^2 = -2$ (Z_i 具体的结构参见 [BPV04, III, §3]).

由于 $(C_0 + Z_i)^2 \leq 0$, 所以 $1 \leq C_0 Z_i \leq 2$. 假若 $C_0 Z_i = 2$, 那么 Z_i 不可能是 A_n 型, 否则 Z_i 既约, 从而 $C_0 Z_i = 2$ 推出 F 不是一棵树, 矛盾! 因此 Z_i 只能是 E_k 或 D_n .

引理 3.4.4 ([LT10], 引理 5.6) 如果 $C_0 Z_i = 2$ 对某个 i 成立, 那么必有 $g = 2$, 且 F 是命题 3.4.1 中第 10 ~ 16 类型.

以下进一步假设 $C_0 Z_i = 1, \forall i$. 因此 C_0 和 Z_i 中某个重数为 1 的分支正常相交. 由 Zariski 引理, 一旦 C_0 重数确定, 我们就可以确定 Z_i 中的各分支在 F 中的重数. 以下是 C_0 和 Z_i 作为对偶图 G_F 子图的所有可能情形.



回顾 $F_{\text{red}} - C_0$ 由 r 个连通分支 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ 组成, 且 $\beta_F^- < \frac{5}{2}$. 利用上述 $C_0 + \Gamma_i$ 的各种可能组合情形, 我们有

引理 3.4.5 ([LT10], 引理 5.7) (1) $r \leq 3$. 进一步, 如果 $r = 3$, 那么 F 是命题 3.4.1 中第 18 型纤维.

(2) 如果 $r = 2$, 且所有 Γ_i 不是 A_n 型, 那么 F 是命题 3.4.1 中第 5, 19, 20, 22 型纤维.

(3) 如果 $r = 2$, 且 Γ_1 是 A_n 型, 那么 F 是命题 3.4.1 中第 1, 2, 4, 6, 9, 17 型纤维.

(4) 如果 $r = 1$, 那么 F 是命题 3.4.1 中第 3, 7, 8 型纤维.

至此, 我们完成了命题 3.4.1 的讨论.

3.5 局部 Miyaoka-Yau 型不等式

设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小纤维化, F 是奇异纤维. 下面的结论可以看作局部的 Miyaoka-Yau 型不等式

定理 3.5.1 (局部典范类不等式 [Tan96]) $c_1^2(F) \leq 2c_2(F)$, 即 $c_1^2(F) \leq 8\chi_F$. 等号成立当且仅当 F_{red} 是结点曲线, 且 $F = nF_{\text{red}}$, 此处 n 是某个正整数.

证明 首先, 我们有

$$2c_2(F) - c_1^2(F) = 3\beta_F^- - F_{\text{red}}^2 + \sum_{p \in F} (2\mu_p - 2\beta_p - \alpha_p).$$

由引理 3.1.1(3), $\mu_p - \beta_p \geq \alpha_p$. 因此

$$2c_2(F) - c_1^2(F) \geq -F_{\text{red}}^2 + \sum_{p \in F} \alpha_p \geq 0.$$

等号成立时 $F_{\text{red}}^2 = \alpha_p = 0, \forall p \in F$. 这推出 F_{red} 是结点曲线, 且 $F = nF_{\text{red}}$. 逆命题是显然的. ■

[Ash10] 定义了局部符号差亏量 (Local signature defect)

$$\mathbf{Lsd}(f, F) = c_1^2(F) - 8\chi_F = \frac{1}{3}(c_1^2(F) - 2c_2(F)).$$

因此上述定理也可以写为 $\mathbf{Lsd}(f, F) \leq 0$. 由定理 3.2.1, 对 d 次半稳定约化 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$, 我们有

$$\text{Sing}(S) - \frac{1}{d}\text{Sing}(\tilde{S}) = \sum_F \mathbf{Lsd}(f, F),$$

这里 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是相应的半稳定纤维化, $\text{Sing}(S) := K_f^2 - 8\chi_f$ 是符号差.

推论 3.5.1 若 $f: S \rightarrow C$ 非半稳定, 且 $\lambda_f > 8$, 则对任何半稳定约化有 $\lambda_{\tilde{f}} > \lambda_f$.

利用引理 3.1.3, 我们可以得到更精细的不等式. 由于证明较为繁琐, 我们不再赘述, 请读者参考 [LT10, §8].

命题 3.5.1 设 $g \geq 2$. 如果 $2c_2(F) - c_1^2(F) < 6$, 则要么 $F = nC$, 对某个光滑曲线 C ; 要么 F_{red} 除了结点之外, 最多有一个奇点 p , 且下面情形之一出现.

I) $F = nF_{\text{red}}$.

- 1) F_{red} 最多带有结点.
- 2) p 是 A_2 型奇点.
- 3) p 是 A_3 型奇点, 且任何 (-2) -曲线不过 p .
- 4) p 是 A_3 型奇点, 且恰有一条 (-2) -曲线过 p .
- 5) p 是 D_4 型.

II) $F = nA + 2nB$, A 和 B 是只带结点的既约曲线, 且无公共分支. $AB = 2$, $A^2 = -4$ 且 $B^2 = -1$. A 最多有两个连通分支 A_1 和 A_2 .

- 6) $A \cap B = \{p, q\}$, 且任何 (-2) -曲线都不是 A 的连通分支.
- 7) A 有两个连通分支, 且其中一个是 (-2) -曲线.
- 8) A 和 B 相切于 p .

这些纤维 F 的不变量如下, 这里 $0 \leq N = g(F) - p_a(F_{\text{red}}) \leq g$.

F	1	2	3	4	5	6	7	8
$2c_2 - c_1^2$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{21}{4}$	5	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$
$c_1^2 - 4N$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$c_2 - 2N$	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\chi - \frac{1}{2}N$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$

注意 $2c_2 - c_1^2 < 6$ 等价于 $8\chi - c_1^2 < 2$. 因此满足 $c_2(F) \leq 3$ 或者 $\chi_F \leq \frac{1}{4}$ 的纤维含在分类列表 (1) ~ (8) 中. 对非半稳定纤维来说, c_1^2 , c_2 和 χ 是正的. 因此我们有

推论 3.5.2 设 F 是非半稳定纤维, 那么

$$c_2(F) \geq \frac{11}{6}, \quad \chi_F \geq \frac{1}{6}.$$

它们中的一个等号成立当且仅当 F 是只含一个尖点和若干结点的既约曲线.

易知, 来自于 (2) 到 (8) 的纤维不可能是 isotrivial 纤维化中的纤维, 因为它们的半稳定模型不光滑. 因此我们有

推论 3.5.3 如果 F 的半稳定模型光滑, 且 F 不是某条光滑曲线的整数倍, 那么 $2c_2(F) - c_1^2(F) \geq 6$.

作为推论 3.5.3 的应用, 我们有

推论 3.5.4 假设 $f : S \rightarrow C$ 是 isotrivial. 设 s 是非光滑曲线整数倍的奇异纤维个数, 则 $K_S^2 \leq 8\chi(\mathcal{O}_S) - 2s$.

这就给了 Polizzi 定理 [Pol08]: $K_S^2 \neq 8\chi(\mathcal{O}_S) - 1$ (这里 $f : S \rightarrow C$ 是 isotrivial) 的一个新证明.

本章习题

习题 3.1 证明: $e_F \geq l(F) - 1$.

习题 3.2 证明: $\sum_{p \in F} \alpha_p \leq 2p_a(F_{red})$.

习题 3.3 证明: 如果 F 中所有重分支都是 (-2) -曲线, 那么 $c_1^2(F) \leq c_2(F)$.

习题 3.4 证明引理 3.1.2 的结论.

习题 3.5 证明引理 3.2.1 的结论.

习题 3.6 设 P 是 d 次循环 Galois 覆盖奇点, (B, p) 是对应的分歧轨迹奇点. K_p 是嵌入解消对应的例外曲线上的有理典范除子. 证明: 当 d 充分可除时, $\frac{1}{d}K_p^2 = -\alpha_p$.

习题 3.7 计算命题 3.4.1 中的 22 类奇异纤维的陈数.

习题 3.8 证明引理 3.2.4 的结论.

习题 3.9 假设 F 在稳定约化后可变为光滑纤维, 证明: $F = F^{**}$.

习题 3.10 试将曲面奇点基本闭链的 Laufer 算法推广到奇异纤维上.

习题 3.11 设 n, m 是互质的正整数, n' 是满足 $nn' \equiv 1 \pmod{m}$ 的最小正整数. 我们定义 $\langle \frac{n}{m} \rangle := \frac{n'}{m}$. 证明互反律

$$\langle \frac{n}{m} \rangle + \langle \frac{m}{n} \rangle = 1 + \frac{1}{nm}.$$

利用该结论重新证明引理 3.2.5.

习题 3.12 设 $(n, q) = 1$, $a = \frac{qq'-1}{n}$, 这里 q' 是满足 $qq' \equiv 1 \pmod{n}$ 的最小正整数. 设

$$\frac{n}{q} = e_1 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{e_r}}, \quad \frac{n}{n-q} = e'_1 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{e'_s}}$$

是 Hirzebruch 连分数表示.

(1) 利用诸 e_i 及 e'_i , 分别求 $\frac{n}{q}$, $\frac{n}{n-q}$, $\frac{q}{a}$, $\frac{q'}{a}$ 和 $\frac{n+q'}{a+q}$ 的连分数表达.

(2) 证明互反律 $\sum_{i=1}^r (e_i - 2) = s - 1$, $\sum_{j=1}^s (e'_j - 2) = r - 1$.

(3) 假设 K 是 Hirzebruch 奇点 $z^n = xy^{n-q}$ 对应的例外曲线上的有理典范除子, 证明:

$$K^2 = \sum_{i=1}^r (2 - e_i) + 2 - \frac{q + q' + 2}{n}.$$

(4) 证明 Holzapfel 公式:

$$s(q, n) = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^r (e_i - 3) + \frac{q + q'}{n} \right).$$

并将该公式解释为 Hirzebruch 奇点 $z^n = xy^{n-q}$ 各不变量之间的关系式, 即推广 Laufer 型公式.

习题 3.13 (1) 用上题重新证明戴德金互反律.

(2) 求 $s(1, n)$, $s(2, n)$.

(3) 试利用戴德金互反律给出 $|s(q, n)|$ 的上界估计.

第四章 纤维化拓扑性质

4.1 基本群与垂直部分

我们首先回顾一些基本群的事实.

引理 4.1.1 设 X 是正规簇, Y 是复流形, $\pi : X \rightarrow Y$ 是 Y 上的覆盖, B 是 Y 上既约除子, $p \in Y \setminus B$.

- (1) 设 $i : Y \setminus B \rightarrow Y$ 是包含映射, 那么存在满同态 $i_* : \pi_1(Y \setminus B, p) \rightarrow \pi_1(Y, p)$.
- (2) 设 Δ_π 是 π 的分歧轨迹, 那么存在 $\pi_1(Y \setminus \Delta_\pi, p)$ 的子群 H_π , 其指标恰为 $\deg \pi$.
- (3) 设 H 是 $\pi_1(Y \setminus B, p)$ 的子群, 那么存在一个无分歧覆盖 $\pi_H : X_0 \rightarrow Y \setminus B$, 使得 $\pi_1(X_0, \hat{p}) \cong H$, $\pi_H(\hat{p}) = p$, 且它可以唯一扩张为 Y 上的覆盖, 仍记为 π_H . 此时 $\deg \pi_H = [\pi_1(Y \setminus B, p) : H]$, 且 π_H 的分歧轨迹 Δ_{π_H} 是 B 中的子集.
- (4) 若 H 是 $\pi_1(Y \setminus B, p)$ 的正规子群, 那么存在 Galois 覆盖 $\pi_H : X \rightarrow Y$, 使得 $\text{Aut}_Y(X) \cong \pi_1(Y \setminus B, p)/H$.

证明 (1) 参考 [Shima, Prop5.6.1, page 19]. (2)-(4) 参考 [Gro71, EXPOSE XIII]. ■

推论 4.1.1 设 X 是 n 维 Kaehler 流形, 且 $h^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, 那么存在 X 上任意次数的平展覆盖 (étale cover).

证明 $h^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ 意味着 $H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ 含有无限循环子群, 从而也含有指标为任意整数 d 的子群. 因此 $\pi_1(X)$ 也含有指标 d 的子群 H . 这样 H 就诱导了一个 d 次平展覆盖.

另一种代数几何的方法, 则是考虑正合列

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow 0.$$

注意到 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ 包含环面 $\mathbb{C}^q(X)/\Lambda$, 因此由后者的可除性知, 存在除子 η , 使得 $d\eta \equiv 0$, 且 d 是满足该条件的最小整数. ■

设 $f : S \rightarrow C$ 是纤维化, F 是一般纤维. 我们有自然态射 $\eta : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(S)$. 记 $\mathcal{V}_f = \text{Im} \eta$, 我们称其为 $\pi_1(S)$ 的垂直部分. 设 p_1, \dots, p_s 是 C 上所有临界点, $F_i = f^*(p_i)$ 是对应的奇异纤维. $C' = C - \{p_1, \dots, p_s\}$, $S' = S - \{F_1, \dots, F_s\}$.

引理 4.1.2 (1) 设 $\eta : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(S)$ 是自然态射, 则有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F) & \xrightarrow{\eta'} & \pi_1(S') \\ & \searrow \eta & \downarrow \iota \\ & & \pi_1(S) \end{array}$$

这里 $\iota : \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(S)$ 是满同态.

(2) 我们有以下群正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{\eta'} \pi_1(S') \xrightarrow{\pi'} \pi_1(C') \longrightarrow 1.$$

这里 $\pi' = f|_{S'}$.

(3) \mathcal{V}_f 是 $\pi_1(S)$ 的正规子群, 从而其定义不依赖于光滑纤维 F 的选取.

证明 (1)(2)是显然的. 下面证明 (3). 由 (2) 知, $\pi_1(F)$ 可以视作 $\pi_1(S')$ 中的正规子群. 又因为 ι 是满的, 所以 \mathcal{V}_f 是 $\pi_1(S)$ 的正规子群. ■

我们记 $\mathcal{H}_f = \pi_1(S)/\mathcal{V}_f$. 于是有正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{V}_f \xrightarrow{i} \pi_1(S) \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}_f \longrightarrow 1.$$

引理 4.1.3 (1) 对 $\forall \rho \in \text{Ker}\eta$, 有 $\eta'(\rho) \in \text{Ker}\iota$, 从而有限制映射

$$\eta'' = \eta'|_{\text{Ker}\eta}: \text{Ker}\eta \rightarrow \text{Ker}\iota.$$

进一步, 它是单射.

(2) 存在同态 $\alpha: \pi_1(C') \rightarrow \mathcal{H}_f$, 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S') & \xrightarrow{\pi'} & \pi_1(C') \\ \downarrow \iota & & \downarrow \alpha \\ \pi_1(S) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_f \end{array}$$

(3) 对 $\forall \gamma \in \text{Ker}\iota$, 有 $\pi'(\gamma) \in \text{Ker}\alpha$, 从而有限制映射

$$\pi'' = \pi'|_{\text{Ker}\iota}: \text{Ker}\iota \rightarrow \text{Ker}\alpha.$$

进一步, 它是满射.

(4) $\text{Im}\eta'' = \text{Ker}\pi''$.

证明 (1) $\rho \in \text{Ker}\eta$ 即 $\rho \in \text{Ker}(\iota\eta')$, 亦即 $\eta'(\rho) \in \text{Ker}\iota$. 注意到 η' 是单射, 故其限制 η'' 也是单的.

(2) 设 $\lambda \in \pi_1(C')$. 由 π' 的满射性, 存在 $\Lambda \in \pi_1(S')$, 使得 $\pi'(\Lambda) = \lambda$. 我们定义 $\alpha(\lambda) = \pi\iota(\Lambda) \in \mathcal{H}_f$. 今证 α 的合理性. 设 $\Lambda' \in \pi_1(S')$, 使得 $\pi'(\Lambda') = \lambda$. 这样 $\Lambda'\Lambda^{-1} \in \text{Ker}\pi'$, 即存在 $\rho \in \pi_1(F)$, 使得 $\Lambda' = \Lambda\eta'(\rho)$. 因此 $\iota(\Lambda') = \iota(\Lambda)\iota(\eta'(\rho)) = \iota(\Lambda)\eta(\rho)$, 从而 $\pi\iota(\Lambda') = \pi\iota(\Lambda)$. α 的满射性来自于 ι, π 的满射性.

(3) 与 (1) 类似证明, 我们留给读者.

(4) 显见 $\text{Im}\eta'' \subseteq \text{Ker}\pi''$. 设 $\gamma \in \text{Ker}\pi''$, 则 $\gamma \in \text{Ker}\pi' = \text{Im}\eta'$, 故存在 $\rho \in \pi_1(F)$, 使得 $\gamma = \eta'(\rho)$. 因此 $\iota(\gamma) = \iota\eta'(\rho) = \eta(\rho)$. 注意到 $\gamma \in \text{Ker}\iota$, 故有 $\rho \in \text{Ker}\eta$. 这就证明了 $\text{Ker}\pi'' \subseteq \text{Im}\eta''$. ■

综上, 我们有以下正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{Ker}\eta & \xrightarrow{\eta''} & \text{Ker}\iota & \xrightarrow{\pi''} & \text{Ker}\alpha \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(F) & \xrightarrow{\eta'} & \pi_1(S') & \xrightarrow{\pi'} & \pi_1(C') \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \iota & & \downarrow \alpha \\
 1 & \longrightarrow & \mathcal{V}_f & \xrightarrow{i} & \pi_1(S) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_f \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

推论 4.1.2 存在自然满同态 $\bar{\alpha} : \mathcal{H}_f \rightarrow \pi_1(C)$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(C') & \xrightarrow{p} & \pi_1(C) \\
 \alpha \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\
 \mathcal{H}_f & &
 \end{array}$$

设 $[\lambda_i]$ 是围绕临界点 p_i 的小环路在 $\pi_1(C')$ 中对应的同伦类, $\alpha[\lambda_i]$ 是其在 \mathcal{H}_f 中对应的像, 那么 $\text{Ker}\bar{\alpha} = \langle \alpha[\lambda_1], \dots, \alpha[\lambda_s] \rangle$.

证明 注意到 \mathcal{V}_f 显然落在同态 $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(C)$ 的核中, 故得到 $\bar{\alpha} : \mathcal{H}_f \rightarrow \pi_1(C)$. 令 $W_0 = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_s \rangle$, $W = \langle \alpha[\lambda_1], \dots, \alpha[\lambda_s] \rangle$. 容易验证以下的交换图成立, 且第一行是正合列

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & \pi_1(C') & \xrightarrow{p} & \pi_1(C) \longrightarrow 1 \\
 & & \alpha|_{W_0} \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \mathcal{H}_f & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \pi_1(C) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

由此导出 $\bar{\alpha}$ 的满射性. 现在证明第二行也是正合的. 显见 $W \subseteq \text{Ker}\bar{\alpha}$. 设 $x \in \text{Ker}\bar{\alpha}$. 由 α 的满射性知, 存在 $y \in \pi_1(C')$, 使得 $\alpha(y) = x$. 于是由 $\bar{\alpha}\alpha(y) = 1$ 知 $y \in \text{Ker}p = W_0$. 这就推出 $\text{Ker}\bar{\alpha} \subseteq W$. ■

设 $\varphi : \tilde{S} \rightarrow S$ 是有限平展覆盖, 则有单同态 $\varphi_* : \pi_1(\tilde{S}) \rightarrow \pi_1(S)$. φ 由 $H = \text{Im}\varphi_*$ 诱导. 如果 $f : S \rightarrow C$ 的一般纤维在 \tilde{S} 中的原像是连通的, 那么我们称覆盖 φ 垂直的. 一般而言, φ 不一定垂直. 因此我们需要做 Stein 分解.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & & \\
 & \nearrow \varphi & \uparrow \sigma & \searrow f & \\
 \tilde{S} & \xrightarrow{\psi} & \hat{S} & \longrightarrow & C \\
 & \searrow \tilde{f} & \downarrow \hat{f} & \nearrow \pi & \\
 & & \tilde{C} & &
 \end{array}$$

这里 $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是纤维连通的, $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 是有限覆盖. $\hat{f} : \hat{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是由基变换 π 诱导的纤维化. 我们设 F (对应地, \hat{F}, \tilde{F}) 是 f (对应地, \hat{f}, \tilde{f}) 的一般纤维. 易知 ψ 限制在纤维上就是 \tilde{F} 到 \hat{F}

的平展覆盖; \widehat{F} 和 F 同构. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(\widetilde{F}) & \xrightarrow{(\psi|_{\widetilde{F}})_*} & \pi_1(\widehat{F}) & \xrightarrow{(\sigma|_{\widehat{F}})_*} & \pi_1(F) \\
 \downarrow \widehat{\eta} & & \downarrow \widehat{\eta} & & \downarrow \eta \\
 \mathcal{V}_{\widetilde{f}} & \xrightarrow{\psi_*|_{\mathcal{V}_{\widetilde{f}}}} & \mathcal{V}_{\widehat{f}} & \xrightarrow{\sigma_*|_{\mathcal{V}_{\widehat{f}}}} & \mathcal{V}_f \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(\widetilde{S}) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi_1(\widehat{S}) & \xrightarrow{\sigma_*} & \pi_1(S) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{H}_{\widetilde{f}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_*} & \mathcal{H}_{\widehat{f}} & \xrightarrow{\bar{\sigma}_*} & \mathcal{H}_f
 \end{array}$$

引理 4.1.4 (1) 上述交换图的所有水平映射都是单同态, 且 $\bar{\psi}_*$ 与 $\sigma_*|_{\mathcal{V}_{\widehat{f}}}$ 都是同构.

(2) $\mathcal{V}_f \subseteq H$ 当且仅当 $\widehat{S} = \widetilde{S}$, 即 \widetilde{S} 是由一个有限基变换 $\pi: \widetilde{C} \rightarrow C$ 拉回得到的曲面. 此时 φ 称为由基变换诱导.

(3) φ 为垂直覆盖当且仅当 $H = \text{Im}\varphi_*$ 到 \mathcal{H}_f 的投影是满射.

证明 (1) 我们先证 $\bar{\psi}_*: \mathcal{H}_{\widetilde{f}} \rightarrow \mathcal{H}_{\widehat{f}}$ 是单同态. 设 $\gamma \in \pi_1(\widetilde{S})$, 使得 $\bar{\gamma} \in \text{Ker}\bar{\psi}_*$, 即 $\psi_*(\gamma) \in \mathcal{V}_{\widehat{f}}$, 故存在 $\rho \in \pi_1(\widehat{F})$, 使得 $\psi_*(\gamma) = \widehat{\eta}(\rho)$. 因此 γ 的某个共轭元落在 $\mathcal{V}_{\widetilde{f}}$ 中. 由于 $\mathcal{V}_{\widetilde{f}}$ 正规, 所以 $\gamma \in \mathcal{V}_{\widetilde{f}}$. 这就证明了 $\bar{\psi}_*$ 的单射性. $\bar{\psi}_*$ 的满射性来自于满同态 $\bar{\alpha}: \pi_1(\widetilde{C}') \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}_{\widetilde{f}})$ 及 $\hat{\alpha}: \pi_1(\widetilde{C}') \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}_{\widehat{f}})$.

由于 $(\sigma|_{\widehat{F}})_*: \pi_1(\widehat{F}) \rightarrow \pi_1(F)$ 是同构, 故 $\sigma_*|_{\mathcal{V}_{\widehat{f}}}$ 也是同构. 其余结论易证.

(2) $H = \varphi_*\pi_1(\widetilde{S})$, $\varphi_*\mathcal{V}_{\widetilde{f}} = \varphi_*\pi_1(\widetilde{S}) \cap \mathcal{V}_f$. 因此

$$\mathcal{V}_f < H \iff \varphi_*\mathcal{V}_{\widetilde{f}} = \mathcal{V}_f \iff \psi_*\mathcal{V}_{\widetilde{f}} = \mathcal{V}_{\widehat{f}} \iff \pi_1(\widetilde{F}) \cong \pi_1(\widehat{F}) \iff \widetilde{S} = \widehat{S}.$$

(3) $H = \text{Im}\varphi_*$ 到 \mathcal{H}_f 的投影是满射, 当且仅当 $\bar{\varphi}: \mathcal{H}_{\widetilde{f}} \rightarrow \mathcal{H}_f$ 是同构, 因此也等价于 $\bar{\sigma}_*: \mathcal{H}_{\widehat{f}} \rightarrow \mathcal{H}_f$ 是同构. 由于 $\mathcal{V}_{\widehat{f}} \cong \mathcal{V}_f$, 故上述条件又等价于 $\pi_1(\widehat{S}) = \pi_1(S)$, 即 $\sigma_* = id$, 亦即 φ 是垂直覆盖. \blacksquare

命题 4.1.1 设 F_1, \dots, F_s 是奇异纤维, m_i 是 F_i 的所有不可约分支重数的最大公因子. $[\lambda_i]$ 是围绕临界点 $p_i = f(F_i)$ 的小环路在 $\pi_1(C')$ 中对应的同伦类. 设 $\alpha: \pi_1(C') \rightarrow \mathcal{H}_f$ 及 $\bar{\alpha}: \mathcal{H}_f \rightarrow \pi_1(C)$ 同推论 4.1.2. 那么 $\text{Ker}\alpha = \langle [\lambda_1]^{m_1}, \dots, [\lambda_s]^{m_s} \rangle$. 进一步, $\text{Ker}\bar{\alpha}$ 由那些满足 $m_i > 1$ 的 λ_i 在 α 下的像元素生成.

证明 由前面的诸映射关系可知, $\text{Ker}\alpha \subseteq \langle [\lambda_1], \dots, [\lambda_s] \rangle$. 因此这是一个局部问题. 为方便讨论, 我们不妨考虑局部纤维化 $f_\Delta: S_\Delta \rightarrow \Delta$, Δ 的中心 p_1 对应唯一的奇异纤维 F_1 . 设 $\pi: \widetilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ 是以 p_1 为分歧点的 m_1 次循环覆盖, 从而诱导基变换纤维化 $\tilde{f}: \widetilde{S}_\Delta \rightarrow \widetilde{\Delta}$. 由于 F_1 是 m_1 重纤维, 所以 $\tilde{\pi}: \widetilde{S}_\Delta \rightarrow S_\Delta$ 是由基变换诱导的平展覆盖. 由引理 4.1.4 知, $\mathcal{V}_f \subseteq H$, 这里 $H \subseteq \pi_1(S)$ 是该覆盖对应的子群.

因为 $H/\mathcal{V}_f \subseteq \mathcal{H}_f$, 所以

$$\mathcal{H}_f/(H/\mathcal{V}_f) \cong \pi_1(S)/H \cong \mathbb{Z}_{m_1}.$$

又因为 $\pi_1(\Delta')/\text{Ker}\alpha \cong \mathcal{H}_f$, 所以存在子群 $W < \pi_1(\Delta')/\text{Ker}\alpha$, 使得 $(\pi_1(\Delta')/\text{Ker}\alpha)/W \cong \mathbb{Z}_{m_1}$. 设 $W' < \pi_1(\Delta')$ 使得 $W = W'/\text{Ker}\alpha$, 则 $\pi_1(\Delta')/W' \cong \mathbb{Z}_{m_1}$. 注意到 $\pi_1(\Delta) = \langle [\lambda_1] \rangle \cong \mathbb{Z}$, 故 $W' = \langle [\lambda_1]^{m_1} \rangle$, 从而 $\text{Ker}\alpha \subseteq \langle [\lambda_1]^{m_1} \rangle$.

另一方面, 设 Γ 是 F_1 的任一不可约分支, 在 F 中重数为 n , $q \in \Gamma$ 是一般点. 构造 S_Δ 的局部曲线 D 使得其正常交 q . 于是有局部覆盖 $\pi : D \rightarrow \Delta$, 在 p_1 分歧. 设 λ_1 在 D 中的原像为 $\Lambda^{(n)}$. 此时 $\Lambda^{(n)}$ 在 \mathcal{H}_f 中的像等于 $\alpha(\lambda_1)^n$. 但由于 D 单连通, 故 $\Lambda^{(n)}$ 同伦于 0, 从而 $\alpha(\lambda_1^n) = 1$, 即 $\langle \lambda_1^n \rangle \subseteq \text{Ker}\alpha$. 因为对于每个不可约分支 Γ 都有上述结论, 从而 $\langle \lambda_1^{m_1} \rangle \subseteq \text{Ker}\alpha$.

命题的后半部结论直接来自于推论 4.1.2. ■

推论 4.1.3 如果 \mathcal{V}_f 是有限群, 则 $q_f = 0$.

证明 由引理 4.1.1 及命题条件易知 $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(C)$ 是满射, 且核中元素都是有限阶的. 因此 $H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z})$ 也是满射, 且核中元素都是有限阶的. 因此 $H_1(S, \mathbb{R}) \cong H_1(C, \mathbb{R})$. 由 Hodge 定理, 立得 $q_f = 0$. ■

引理 4.1.5 设 $f_\Delta : S_\Delta \rightarrow \Delta$ 是局部纤维化, F_0 是中心纤维, 则存在从 S_Δ 到 F_0 的形变收缩. 特别地, $\chi_{top}(S_\Delta) = \chi_{top}(F_0)$, $\pi_1(S_\Delta) = \pi_1(F_0)$.

进一步, 上述形变收缩诱导同态 $\delta : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(F_0)$, 这里 F 是一般纤维. η 通过 δ 分解, 即有以下交换图.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F) & \xrightarrow{\delta} & \pi_1(F_0) \\ & \searrow \eta & \downarrow \eta_0 \\ & & \pi_1(S) \end{array}$$

证明 前半部分结论参见 [Xia92, 引理 2.1.12], 后半部分是显然推论. ■

设 γ 是 F 中的一个环路, $[\gamma]$ 为它在 $\pi_1(F)$ 中的类. 如果 $\delta([\gamma]) = 0$, 那么我们称 γ_0 为奇异纤维 F_0 的零化环路.

推论 4.1.4 设 H 是 F 中所有的零化环路对应的类生成的子群, 则 $\mathcal{V}_f \cong \pi_1(F)/H$.

将上述的讨论过渡到整体上, 我们有

命题 4.1.2 ([Xia91], 引理 3) 设 $f : S \rightarrow C$ 是纤维化, F_0 是 m 重纤维, $\eta_0 : \pi_1(F_0) \rightarrow \pi_1(S)$ 是自然态射.

- (1) $\pi_1(F_0)$ 在 $\pi_1(S)$ 中的像 $\text{Im}\eta_0$ 包含 \mathcal{V}_f .
- (2) $\pi_1(F_0)/\eta_0^{-1}(\mathcal{V}_f) \cong (\text{Im}\eta_0)/\mathcal{V}_f \cong \mathbb{Z}_m$, 可以视为 \mathcal{H}_f 中由 C 中环绕像点 $p_0 = f(F_0)$ 的小环路对应的类生成子群.
- (3) 如果 f 含有单连通纤维, 那么必有 $\mathcal{V}_f = \{1\}$.

证明 这显然是个局部问题, 故不妨考虑局部纤维化 $f_\Delta : S_\Delta \rightarrow \Delta$.

(1) 是引理 4.1.5 的直接推论.

(2) 注意到此时 $\pi_1(S)$ 中的环路都可以收缩成 F_0 中的环路, 故 η_0 是满射. 此外由于此时 Δ 是单连通的, 故由引理 4.1.1 知 $\mathcal{H}_f \cong \mathbb{Z}_m$. 因此我们有

$$\pi_1(F_0)/\eta_0^{-1}(\mathcal{V}_f) \cong \pi_1(S)/\mathcal{V}_f \cong \mathcal{H}_f \cong \mathbb{Z}_m.$$

(3) 如果 F_0 是单连通纤维, 那么 $m = 1$, 且 $\pi_1(F_0) = 0$. 由 (2) 立得结论. ■

由命题 4.1.1 和命题 4.1.2, 立刻得到以下推论.

推论 4.1.5 假设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 最多只有两条多重纤维, 且在恰有两条多重纤维的情形下, 它们的重数互素. 如果 f 含有一条单连通纤维, 那么 S 是单连通曲面.

4.2 映射类群与伪周期映射

一个曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,k}$ 是指带有 k 条边界、亏格为 g 的定向连通紧实二维流形. 当 $k = 0$ 时, 也以 Σ_g 记之. 若强调其复结构, 则亦称之黎曼曲面. $\Sigma_{g,k}$ 之欧拉示性数为 $\chi_{top}(\Sigma_{g,k}) = 2 - 2g - k$. 以下若无特别声明, 总假设 Σ 之欧拉示性数小于等于 0.

Σ 的映射类群 (Mapping class group)

$$\Gamma(\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma) / \simeq,$$

此处 $\text{Homeo}(\Sigma)$ 指 Σ 到自身的同胚映射全体构成集合, \simeq 指映射之同伦等价. $\Gamma(\Sigma)$ 中的元素称为映射类. 设 $\text{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma)$ 是由全体保定向且在边界 $\partial\Sigma$ 上为恒等映射之自同胚全体构成之群, 则相对映射类群 (Relative mapping class group)

$$\Gamma^*(\Sigma) := \text{Homeo}^+(\Sigma, \partial\Sigma) / (\simeq_{\partial\Sigma}),$$

此处 $\simeq_{\partial\Sigma}$ 指相对 $\partial\Sigma$ 之同伦等价.

- 注 4.2.1** (1) 某些文献也将相对映射类群直接定义为映射类群, 记作 $\text{Mod}(\Sigma)$, 如 [FM09].
 (2) 在一般定义中, \simeq (或 $\simeq_{\partial\Sigma}$) 要求是同痕等价 (Isotopy relation). 然而 Baer 定理 [Bae27, Bae28] 表明, 当 $\Sigma \neq \Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}$ 或者映射保定向时, 同痕与同伦一致. 因此本文不再区分.
 (3) 相对映射类群也可以视为 Σ 的拓扑辛群.

例 4.2.1 环面 \mathbb{T}^2 的映射类群 $\Gamma(\mathbb{T}^2) \cong GL_2(\mathbb{Z})$, 相对映射类群 $\Gamma^*(\mathbb{T}^2) \cong SL_2(\mathbb{Z})$. ■

设圆环 $A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 考虑保定向且固定边界的同胚 $T: A \rightarrow A$, $T(r, \theta) = (r, \theta - 2\pi r)$. 设 α 是曲面 Σ 内部的简单闭曲线, N 是其管状邻域. 考虑从 A 到 Σ 的保定向嵌入 $\phi: A \rightarrow \Sigma$, 使得 $\phi(A) = N$. 关于 α 的右手 Dehn 扭转 (Dehn twist) 是如下同胚映射:

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} x & x \in \Sigma \setminus N, \\ \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & x \in N. \end{cases}$$

T_α^{-1} 则称为左手 Dehn 扭转.

取 Σ 内另一曲线 β . 如果相交数 $(\alpha, \beta) = 0$, 则 $T_\alpha(\beta) = \beta$ (在同痕意义下). 如果 $(\alpha, \beta) \neq 0$, 那么 $T_\alpha(\beta)$ 的同痕类 (Isotopy class) 可按如下方法确定: 在 β 穿越 α 的每个交点前, 首先右转, 沿着 α 走一圈, 然后再左转, 按照原先的方向继续前行.

- 注 4.2.2** (1) Dehn 扭转是具有无限阶的非平凡映射类.
 (2) $(\alpha, \beta) = 0 \iff T_\alpha(\beta) = \beta \iff T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$. 这表明 Dehn 扭转在一般情形下不满足交换律.
 (3) 当 $(\alpha, \beta) = 1$ 时, 有辫关系 (Braid relation): $T_\alpha T_\beta T_\alpha = T_\beta T_\alpha T_\beta$.

此外, Dehn 扭转自然诱导了闭曲面 Σ_g 上拓扑同调群 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 的自同构, 因此可表示为一个 $2g$ 阶辛矩阵. 我们有如下的 Picard-Lefschetz 单值公式 (参见 [BPV04, III, § 14]).

命题 4.2.1 给定闭曲面 Σ_g 上通常定向. 设 e_i ($i = 1, \dots, s$) 是其上互不相交的简单闭曲线. 任取 $\gamma \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, 我们有

$$T_{e_1} \cdots T_{e_s}(\gamma) = \gamma - \sum_{i=1}^s (\gamma, e_i) e_i. \quad (4-1)$$

例 4.2.2 取环面 \mathbb{T}^2 的 $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ 中典范基 α, β , 使得 $(\alpha, \beta) = 1$. 由上结论可知

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 4.2.1 (1) (Dehn-Lickorish [Lic64]) Σ 的相对边界映射类群 $\Gamma^*(\Sigma)$ 由 Dehn 扭转生成. 换言之, 任何保定向且固定边界的自同胚都同痕于若干 Dehn 扭转的乘积.

(2) (Humphries) 亏格 g 闭曲面的映射类群可以由 $2g + 1$ 个给定的 Dehn 扭转生成.

设 $\mu : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ 是映射类群中的元素, $[\mu]$ 是其共轭类. 如果 $[\mu]$ 中存在一个元素 $\tilde{\mu}$ 能够写成一些 Dehn 扭转的乘积, 那么就称其为 $[\mu]$ 的 Dehn 扭转表示 (Dehn-twist presentation). 若 $\tilde{\mu} = \mu$, 就直接称为 μ 的表示. 如果乘积中的所有 Dehn 扭转都是右手的, 则称为正表示 (Positive presentation). 正表示中出现的 Dehn 扭转个数如果达到极小, 就称为 $[\mu]$ 的表示长度, 记作 $L([\mu])$.

由前面结论可知, $[\mu]$ 的 Dehn 扭转表示总是存在, 但不唯一. 当我们知道了一个映射的 Dehn 扭转表示, 就能利用 Dehn 扭转公式(4-1), 计算出 μ 在 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 上诱导的 Picard-Lefschetz 单值矩阵 (Monodromy matrix).

给定一点 $p_0 \in \Sigma$. 假设 $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是 Σ 到自身的同胚, γ 是连接 $h(p_0)$ 和 p_0 的道路. 由此我们得到两个同构映射: $h_* : \pi_1(\Sigma, p_0) \rightarrow \pi_1(\Sigma, h(p_0))$ 及 $\theta_\gamma : \pi_1(\Sigma, h(p_0)) \rightarrow \pi_1(\Sigma, p_0)$. 因此 $\theta_\gamma \circ h_* \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma, p_0))$. 对另一连接 $h(p_0)$ 和 p_0 的道路 γ' , $\theta_\gamma \circ h_*$ 与 $\theta_{\gamma'} \circ h_*$ 相差一个内自同构. 由此得到群同态

$$\Psi : \Gamma(\Sigma) = \text{Homeo}(\Sigma) / \simeq \longrightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma, p_0)) = \text{Aut}(\pi_1(\Sigma, p_0)) / \text{Inn}(\pi_1(\Sigma, p_0)).$$

定理 4.2.2 (Dehn-Nielsen [Nie27]) 对亏格 $g \geq 1$ 的闭曲面 Σ_g , 上述同态是同构.

关于映射类群的更多内容可参看 [FM09] 或 [JY10].

设 $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是保定向同胚映射, 且存在正整数 $n \geq 2$, 使得 $f^n = \text{id}_\Sigma$. 那么我们称 f 是周期映射 (Periodic map). 满足上述条件的最小 n 称为 f 的阶 (Order) 或周期 (Period).

注 4.2.3 [Ker83] 证明对每个周期的同胚 $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$, 都存在解析同构 $\bar{f} : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ 同痕于 f , 使得 $\bar{f}^n = \text{id}_{\Sigma_g}$.

设 $P \in \Sigma$, 我们可找到最小正整数 $\alpha(P) \leq n$, 使得 $f^k(P) \neq P$ ($1 \leq k < \alpha(P)$), 且 $f^{\alpha(P)}(P) = P$. 若 $\alpha(P) = n$, 则称 P 是简单点 (Simple point); 否则称为重点 (Multiple point).

假设 C 是 Σ 内的简单定向闭曲线, 我们可找到最小的正整数 m , 使得 $f^m(C) = C$ (同痕意义下), 且 f^m 保持 C 的定向. 易知 $\lambda = \frac{n}{m}$ 是整数.

设 $Q \in C$, 于是存在非负整数 $\sigma < \lambda$, 使得 $(\sigma, \lambda) = 1$, 并且 Q 在 f^m 作用下的轨道元素, 沿着 C 的定向排序恰好为 $(Q, f^{m\sigma}(Q), f^{2m\sigma}(Q), \dots, f^{(\lambda-1)m\sigma}(Q))$. 取非负整数 $\delta < \lambda$ 满足 $\sigma\delta \equiv 1 \pmod{\lambda}$. 若将 C 视为单位圆周, 在合适的坐标下, 我们可视 f^m 的作用为沿着 C 之定向旋转 $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$.

上述 C 对应的四元组 $(m, \lambda, \sigma, \delta)$ 称为 C 关于 f 的价 (Valency). 设 D_P 是重点 P 的圆盘邻域, 边界 ∂D_P 取顺时针定向, P 的价被定义为 ∂D_P 的价. 设 Γ 是 Σ 的边界曲线, 其定向由曲面定向确定, Γ 的价即该定向所确定的价.

引理 4.2.1 ([AI02]) 设 $\partial_1, \dots, \partial_k$ 是曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,k}$ 的 k 条边界曲线, $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是周期映射. 设 $(m_i, \lambda_i, \sigma_i, \delta_i)$ 是 ∂_i 关于 f 的价 ($1 \leq i \leq k$). 那么存在闭曲面 $\tilde{\Sigma}$ 包含 Σ , 以及周期映射 $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$, 满足

- (1) 补集 $\tilde{\Sigma} - \Sigma$ 是 k 个开圆盘 D_i 的并 ($1 \leq i \leq k$);
- (2) $\tilde{f}|_{\Sigma} = f$;
- (3) \tilde{f} 在 $\tilde{\Sigma} - \Sigma$ 上的重点恰为诸圆盘 D_i 的中心 P_i , 且 P_i 的价就是 $(m_i, \lambda_i, \sigma_i, \delta_i)$.

由上述结论, 我们以下不妨假设 Σ 是闭曲面以方便讨论. 周期映射 f 诱导了 n 次循环覆盖 $\pi: \Sigma \rightarrow \Sigma/\langle f \rangle$. 设 M_f 是全体重点构成集合, 于是 $B_f = \pi(M_f)$ 是分歧点集合. 取定一点 $x \in \Sigma/\langle f \rangle - B_f$, 设 \tilde{x} 是 x 原像中的一点, $\gamma \in \pi_1(\Sigma/\langle f \rangle - B_f, x)$. 于是 γ 可唯一提升为从 \tilde{x} 出发到 $f^r(\tilde{x})$ 的道路, 这里 r 是某个不超过 n 的正整数. 由此我们得到以下同态

$$\Omega_f: \pi_1(\Sigma/\langle f \rangle - B_f) \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \Omega_f(\gamma) = r.$$

由于 \mathbb{Z}_n 是交换群, 因此进一步诱导同态

$$\omega_f: H_1(\Sigma/\langle f \rangle - B_f) \rightarrow \mathbb{Z}_n.$$

设 $B_f = \{Q_1, \dots, Q_s\}$, V_i 是含 Q_i 的充分小圆盘邻域, ∂V_{Q_i} 是 V_i 的边界. 设 \tilde{Q}_i 是 Q_i 的原像中一点, 其价为 $(m_i, \lambda_i, \sigma_i, \delta_i)$. 那么我们有

- 引理 4.2.2** (1) m_i 就是 Q_i 的原像点个数, $\lambda_i = \frac{n}{m_i}$.
 (2) $\omega_f(\partial V_{Q_i}) \equiv m_i \sigma_i \pmod{n}$.

由于 Q_i 的原像中每个点的价相同, 因此我们也可以用 \tilde{Q}_i 的价直接定义分歧点 Q_i 的价.

定理 4.2.3 ([Nie37], §11) 设 f 和 f' 皆 Σ_g 上的周期映射. 那么 f 与 f' 在映射类群中共轭当且仅当以下各条件成立:

- (1) f 与 f' 有相同的周期;
- (2) B_f 与 $B_{f'}$ 点数相同;
- (3) 在合适的排序下, $\omega_f(\partial V_{Q_i}) = \omega_{f'}(\partial V_{Q'_i})$.

换言之, 周期映射 f 的共轭类完全由其重点的价确定.

周期映射的价有如下性质.

命题 4.2.2 设 $\pi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma' = \Sigma_g / \langle f \rangle$ 是周期映射诱导的覆盖, Q_i 是分歧点, 价为 $(n/\lambda_i, \lambda_i, \sigma_i, \delta_i)$, $1 \leq i \leq s$. 设 g' 是 Σ' 的亏格. 那么我们有

(1) Hurwitz 公式: $2(g-1)/n = 2(g'-1) + \sum_{i=1}^s (1 - 1/\lambda_i)$;

(2) Nielsen [Nie37]: $\sum_{i=1}^s \sigma_i/\lambda_i$ 是整数;

(3) Wiman [Wim95]: $n \leq 4g + 2$;

(4) Harvey [Hav66]: 设 $g \geq 2$, $M = lcm(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$. 那么

(4.1) $M = lcm(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_s)$, $1 \leq i \leq s$;

(4.2) $n \mid M$; 当 $g' = 0$ 时, $M = n$;

(4.3) $s \neq 1$; 进一步, 当 $g' = 0$ 时, $s \geq 3$;

(4.4) 设 h 是满足 $2^h \mid M$ 的极大次幂. 若 $h \geq 1$, 则诸 λ_i 中能被 2^h 整除的元素个数是偶数.

注 4.2.4 上述结论(1) 相当于 $\sum_{i=1}^s \partial V_{Q_i} \in Ker(\omega_f)$; 结论(4.2) 相当于 ω_f 是满射, 它也对应了某类奇异纤维的 Zariski 引理.

今后为了方便起见, 我们将用 $\sigma_1/\lambda_1 + \dots + \sigma_s/\lambda_s$ 来简记 f 的各重点之价, 称其为整体价 (Total valency).

由上述结论, 我们可以看到, 当 g 给定后, Σ_g 只有有限类周期映射的共轭类. [AI02] 列出了 $1 \leq g \leq 3$ 的所有周期映射共轭类. 后面我们会看到, 这些共轭类一一对应于可稳定约化为光滑曲线的奇异纤维拓扑结构. [Hir10] 对亏格 $g \leq 4$ 的情形, 列出了所有周期映射生成元, 并给出了 Dehn 扭转表示.

例 4.2.3 回顾例子4.2.2. 环面 \mathbb{T}^2 的所有周期映射都能表示成 T_α, T_β 的乘积. 它们在 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 诱导的单值矩阵为

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

按照小平邦彦关于奇异纤维分类 (参看定理 5.2.1), 我们有

Type II: 价为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, 拓扑单值的 Dehn 扭转表示为 $T_\beta T_\alpha$.

Type II*: $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, $(T_\beta T_\alpha)^5$.

Type III: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$, $T_\alpha T_\beta T_\alpha$.

Type III*: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, $(T_\alpha T_\beta T_\alpha)^3$.

Type IV: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $(T_\beta T_\alpha)^2$.

Type IV*: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, $(T_\beta T_\alpha)^4$.

Type I₀*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $(T_\beta T_\alpha)^3 = (T_\alpha T_\beta T_\alpha)^2$. ■

设 $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ 是亏格 g 闭曲面的保定向同胚. 如果 f 同痕于满足以下诸条件的同胚 f' , 那么就称 f 是伪周期映射 (Pseudo-periodic map):

(1) Σ_g 内存在一组互不相交的简单闭曲线的并 $\mathcal{C} = C_1 \cup \dots \cup C_r$, 使得 $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (允许 \mathcal{C} 为空集);

(2) 设 $\mathcal{B} = \Sigma_g - \mathcal{C}$, 于是 $f' |_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ 同痕于一个周期映射.

进一步, 如果 \mathcal{B} 的每个连通分支的欧拉示性数都小于零, 那么上述 \mathcal{C} 就称为允许割线组 (Admissible system of cut curves). 此时存在最小的正整数 N 使得 $(f' |_{\Sigma_g - \mathcal{C}})^N = id_{\Sigma_g - \mathcal{C}}$. 我们称 N 为 f 的伪周期.

- 注 4.2.5 (1) 若 $\chi_{top}(\Sigma) < 0$, 这样的允许割线组在同痕意义下总是存在.
 (2) 非周期的伪周期映射在原始文献 [Nie44] 中也被称为代数有限型曲面变换 (Surface transformation of algebraically finite type).

对于割线分支 C_i , 给定一个定向, 我们可找最小整数 α_i 使得 $f^{\alpha_i}(C_i) = C_i$ 且保持定向. 我们也能找一最小整数 L_i 使得 $f^{L_i}|_{C_i}$ 是 e_i 次 Dehn 扭转 ($e_i < 0$ 当且仅当右手扭转). $s(C_i) := e_i\alpha_i/L_i$ 称为 f 在 C_i 处的环绕数. 若所有 $s(C_i) < 0$ ($1 \leq i \leq r$), 则称 f 是负定型 (Negative type) 的. 若 α_i 是偶数, $f^{\alpha_i/2}(C_i) = C_i$ 且与 C_i 定向相反, 则称 C_i 是双边的 (Amphidrome); 否则称为非双边的.

设 \mathcal{A}_i 是含 C_i 的带状邻域 (即同胚于开圆环), $\partial\mathcal{A}_i = \partial\mathcal{A}_i^{(1)} \cup \partial\mathcal{A}_i^{(2)}$ 是 \mathcal{A}_i 的两条边界分支的并. 令 $\mathcal{A} = \cup\mathcal{A}_i$, $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 $\Sigma_g - \mathcal{A}$ 的闭包. 通过合适的选取, 我们总可以假设 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. $\tilde{\mathcal{B}}$ 的定向自然诱导了 $\partial\mathcal{A}_i^{(j)}$ 的定向. \mathcal{A}_i 的环绕数就是 $s(C_i)$.

引理 4.2.3 设 $(m_i, \lambda_i, \sigma_i, \delta_i)$ 是 $\partial\mathcal{A}_i$ 的价 ($i = 1, 2, \dots, r$).

- (1) C_i 是双边的, 当且仅当 $f^{\alpha_i/2}(\partial\mathcal{A}_i^{(1)}) = \partial\mathcal{A}_i^{(2)}$.
 (2) 如果 C_i 是双边的, 那么 $m_1 = m_2 = \alpha_i/2$, $\sigma_1/\lambda_1 = \sigma_2/\lambda_2$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. 进一步, $K = -s(C_i)/2 - \delta/\lambda$ 是非负整数.
 (3) 如果 C_i 是非双边的, 那么 $m_1 = m_2 = \alpha_i$, $K = -s(C_i) - \delta_1/\lambda_1 - \delta_2/\lambda_2$ 是大于等于 (-1) 的整数.

上述结论来自于 C_i 的扭转定义. 以 (3) 为例, f^{α_i} 在 (\mathcal{A}_i) 上的作用相当于让边界分支 $\partial\mathcal{A}_i^{(j)}$ 沿着自身定向旋转 $2\pi\delta_i/\lambda_i$, 同时环带 \mathcal{A} 本身做 K 次 Dehn 扭转.

例 4.2.4 右手 Dehn 扭转是最简单的负定型伪周期映射. ■

设 $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ 是负定型伪周期映射, $\Sigma_g = \mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{B}}$ 同上. 以下我们将介绍 [MM91, MM94] 所定义的极小广义商映射 $\pi: \Sigma_g \rightarrow S_f$. 这里 S_f 是所谓的数值“香肠”空间 (Numerical chorizo space), 即一个带结点黎曼曲面的底拓扑空间, 其中对每个不可约分支赋予一个正整数权值. 该空间也称为 Matsumoto-Montesinos 商 (以下简称 MM-商). 下面具体介绍广义商映射及 MM-商的构造 (细节可参看 [AI02] [Ash10]).

- (1) $\pi(\tilde{\mathcal{B}}) = \tilde{\mathcal{B}}/\langle f_{\tilde{\mathcal{B}}} \rangle$, 即周期映射 $f_{\tilde{\mathcal{B}}}$ 诱导的循环覆盖商空间. $\pi(\tilde{\mathcal{B}})$ 中的连通分支称为核分支 (Core components). 核分支 Γ 的赋权值定义为映射 $\pi^{-1}(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ 的次.
 (2) 设 P 是 $\tilde{\mathcal{B}}$ 内价为 $(m, \lambda, \sigma, \delta)$ 的重点. $\pi(P) = \sum_{i=1}^l n_i \Gamma_i$ 是由球面 Γ_i 首尾相连成的一条链, 其中 Γ_1 邻接 $\pi(\tilde{\mathcal{B}})$. 这里权值序列 $\{n_i\}_{i=1}^l$ 严格递减, 且由以下关系唯一确定.

$$n_0 = m\lambda, \quad n_1 = m\sigma, \quad n_l = m, \quad n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}.$$

这样的一条链称为尾 (Tail).

- (3) 设 $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ 是允许割线分支 C_i 的带状邻域. 边界 $\partial\mathcal{A}_i^{(j)}$ 的价为 $(m_j, \lambda_j, \sigma_j, \delta_j)$. 假定 \mathcal{A}_i 是非双边的, 此时 $m_1 = m_2 = m$. $\pi(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^l n_i \Gamma_i$ 是由球面 Γ_i 首尾相连成的一条链, 其中 Γ_1, Γ_l 邻接 $\pi(\tilde{\mathcal{B}})$ 中相应的核分支. 这里权值序列 $\{n_i\}_{i=1}^l$ 由以下关系唯一确定.

$$n_0 = m\lambda_1, \quad n_1 = m\sigma_1, \quad n_{l-1} = m\sigma_2, \quad n_l = m\lambda_2, \quad n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i},$$

以及

$$(n_{i-1} + n_{i+1}) \geq 2n_i, \quad \sum_{i=1}^l \frac{m^2}{n_{i-1}n_i} = -s(C_i)$$

这样的一条链称为弧 (Arc).

(4) 假定 \mathcal{A}_i 是双边的, 此时 $\partial\mathcal{A}_i^{(j)}$ 的阶都可写为 $(2m, \lambda, \delta)$. $\pi(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^l n_i\Gamma_i + h_1T_1 + h_2T_2$ 是由球面 Γ_i 和 T_i 相连成一棵树, 其中 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ 首尾连接成一条链, Γ_1 邻接 $\pi(\tilde{\mathcal{B}})$ 中相应的核分支, Γ_l 分别邻接 T_1 和 T_2 . 这里 $h_1 = h_2 = m$, 权值序列 $\{n_i\}_{i=1}^l$ 由以下关系唯一确定.

$$n_0 = 2m\lambda, \quad n_1 = 2m\sigma_1, \quad n_l = 2m, \quad n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i},$$

以及

$$(n_{i-1} + n_{i+1}) \geq 2n_i, \quad \sum_{i=1}^l \frac{8m^2}{n_{i-1}n_i} = -s(C_i)$$

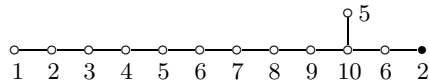
这样的一条链称为半尾 (Quasi-tail).

(5) $\pi(f^h\mathcal{A}_i) = \pi(\mathcal{A}_i)$, $\pi(f^h\tilde{\mathcal{B}}_i) = \pi(\tilde{\mathcal{B}}_i)$, $\pi(f^h(P)) = \pi(P)$, 对任何 $h \geq 1$ 成立. 这里 $\tilde{\mathcal{B}}_i$ 是 $\tilde{\mathcal{B}}$ 的连通分支.

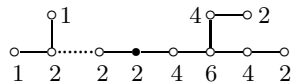
注 4.2.6 上述权值序列的存在及唯一性可以参看 [Ash10]. 此外, [AI02] 对非双边允许割线分支的“香肠”空间结构作了更细致的刻画.

为了方便讨论, 我们不妨将 MM-商 S_f 视为加权 Dynkin 图.

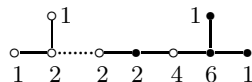
例 4.2.5 (1) 周期映射的 MM-商必为星形图. 比如 Σ_2 上整体价为 $\frac{9}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$ 的周期映射有如下 MM-商.



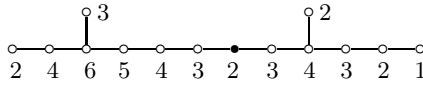
(2) $\Sigma_2 = \tilde{\mathcal{B}} \cup \mathcal{A}_1$, \mathcal{A}_1 是双边的. $\tilde{\mathcal{B}}$ 的整体价均为 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, 其中黑体字表示 \mathcal{A}_1 的边界分支的价. 此例中允许割线 C_1 是可分的.



(3) $\Sigma_3 = \tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \mathcal{A}_1$, \mathcal{A}_1 是双边的. $\tilde{\mathcal{B}}_1$ 的整体价为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + ((\frac{2}{3}))$, 其中双括号表示 \mathcal{A}_1 的双边分支的价. 此例中允许割线 C_1 是不可分的.



(4) $\Sigma_3 = \tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \tilde{\mathcal{B}}_2 \cup \mathcal{A}_1$, \mathcal{A}_1 是非双边的. $\tilde{\mathcal{B}}_1$ 的整体价为 $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$ 的整体价为 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$. 此例中允许割线 C_1 是可分的.



注 4.2.7 这里的割线所谓可分是指沿着割线割开曲面后, 整个曲面分为两个及两个以上的连通分支; 否则称不可分. 如果将割线收缩成结点, 我们也可以定义相应的 (不)可分离点 (Separable point) 的概念.

4.3 拓扑单值与分裂形变

设 $\Sigma_g = \mathcal{C} \cup \mathcal{B}$, \mathcal{C} 是允许割线组, $\mathcal{B} = \Sigma_g - \mathcal{C}$ 是周期部分. 我们首先构造定向图 G_f : 顶点 v 对应 \mathcal{B} 的连通分支 \mathcal{B}_v , 相邻点之间的边对应粘合 \mathcal{B} 相应连通分支的允许割线分支, 并且我们事先取定边的一个定向. 进一步, 顶点 v 赋值 $g(v) + \rho(v)$, 这里 $g(v)$ 是 \mathcal{B}_v 的亏格, $\rho(v)$ 是只和 \mathcal{B}_v 自身相连接的允许割线分支个数. f 在 G_f 上自然诱导了一个循环群作用. 我们将此图简称为关于 f 的分割图 (Partition graph).

定理 4.3.1 (Matsumoto-Montesinos [MM94]-Nielsen[Nie44]) Σ_g 的负定型伪周期映射在映射类群中的共轭类由以下要素完全确定.

- (1) 一组允许割线 $\mathcal{C} = \cup C_i$ 及分支 C_i 的环绕数 $s(C_i)$;
- (2) \mathcal{B} 内重点 P 的价及边界分支的价;
- (3) f 在分割图 G_f 上所诱导的作用.

纤维化研究的一个基本问题, 就是在拓扑等价意义下对极小曲线退化进行分类. 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是亏格 g 曲线极小退化. 选取简单闭路 $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Delta^* = \Delta - \{0\}$, 固定一个同胚映射 $\mu_0^\gamma : \Sigma_g \rightarrow \phi^{-1}(\gamma(0))$. 这样我们就能连续地沿着道路 γ 定义同胚映射 $\mu_\theta^\gamma : \Sigma_g \rightarrow f^{-1}(\gamma(\theta))$. 这样 γ 诱导了保定向同胚 $\mu_f^\gamma = (\mu_0^\gamma)^{-1} \circ \mu_{2\pi}^\gamma$, 称为沿着 γ 的单值同胚 (Monodromy homeomorphism). 如果我们取 $\mu_0^\gamma = id_{f^{-1}(\gamma(0))}$, 那么 μ_f^γ 就是 $f^{-1}(\gamma(0))$ 的同胚. 此时我们称 $f^{-1}(\gamma(0))$ 为参考纤维 (Reference fiber).

这一概念也可以过渡到整体纤维化情形. 道路 γ 的选取不同, 其单值同胚之间只相差一个共轭. 因此单值同胚在映射类群中的共轭类被唯一确定. 我们将此共轭类称为 f 的拓扑单值 (Topological monodromy), 记为 $m(f)$ 或者 $[\mu_f^\gamma]$. 显见, 拓扑等价的曲线退化有相同的拓扑单值. 拓扑单值自然诱导了 $H_1(F_t, \mathbb{Z})$ 上的同构, 称之为该曲线退化的 Picard-Lefschetz 单值, 其对应的矩阵称为单值矩阵 (Monodromy matrix).

定理 4.3.2 (Matsumoto-Montesinos [MM94]) 亏格 g 曲线极小退化 $\phi : S \rightarrow \Delta$ 的拓扑等价类所唯一确定的拓扑单值是映射类群中的某个负定型伪周期映射的共轭类. 反过来, 任何负定型伪周期映射的共轭类必是某个曲线极小退化的拓扑单值.

结合定理 4.2.2, 我们有以下推论.

推论 4.3.1 拓扑单值在基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ 上的作用确定了极小曲线退化的拓扑等价类. 特别地, 如果作用是平凡的, 那么中心纤维是光滑曲线.

注 4.3.1 这一结论对 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 上的作用并不成立. 具体例子可见 [NU73a, NU73b].

例 4.3.1 如果一个纤维化 (局部或整体) 的每个奇异纤维都只含有一个结点, 就称为 Lefschetz 型或 Lefschetz 纤维化. 一个曲线退化是 Lefschetz 型当且仅当它的拓扑单值是右手 Dehn 扭转的共轭类 [Kas80, DK73]. ■

命题 4.3.1 设 \bar{F}_0 是 F_0 的正规极小模型. 那么 μ 对应的 MM-商 S_μ 与纤维 \bar{F}_0 有相同的拓扑结构, 并且 S_μ 中各分支的权值也与 F_0 对应分支的重数一致.

此外对 F_0 作 d 次基变换后得到的新纤维所对应的拓扑单值就是 μ^d 的共轭类.

设 \mathcal{M}_g 是亏格 g 黎曼曲面模空间, $\overline{\mathcal{M}}_g$ 是 \mathcal{M}_g 的 Deligne-Mumford 紧化. 模映射 $\rho: \Delta^* \rightarrow \mathcal{M}_g$ 能唯一扩充成 $\bar{\rho}: \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$. 我们称 $\bar{\rho}(0)$ 为 ϕ 的模点 (Moduli point).

命题 4.3.2 将 Σ_g 的允许割线组 C 中每个分支都收缩为点所得到稳定黎曼曲面 X_f 与模点 $\bar{\rho}(0)$ 有相同的拓扑结构.

推论 4.3.2 中心纤维 F_0 的拓扑结构及其各分支重数确定了以下要素:

- (1) 一组允许割线 $C = \cup C_i$ 及分支 C_i 的环绕数 $s(C_i)$;
- (2) \mathcal{B} 内重点 P 的价及边界分支的价;
- (3) μ 的伪周期.

F_0 不能完全确定 μ 在模点上的群作用, 不过这样的群作用总是有限的, 因此我们可以列出所有可能的拓扑单值.

例 4.3.2 ([MM94]) 设 $\Sigma_6 = \bigcup_{i=1}^5 (\mathcal{B}_i \cup \mathcal{A}_i)$, \mathcal{B}_i 的亏格为 1, \mathcal{A}_i 连接 \mathcal{B}_i 及 \mathcal{B}_{i+1} . 今设 $f_k: \Sigma_6 \rightarrow \Sigma_6$ ($k = 1, 2$) 是伪周期映射, 满足 $f_k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+k}$, $f_k(\mathcal{A}_i) = \mathcal{A}_{i+k}$, $f_k^5|_{\mathcal{B}} = id$, $s(C_i) = -1$ (所有下标均模 5).

f_k 的 MM-商都是 $F_0 = 5C$, 其中 C 是带一个结点的亏格 2 既约曲线. 但是 f_1 和 f_2 不共轭. ■

这些结论实际上反映了奇异纤维与奇异纤维芽 (即曲线退化) 在拓扑结构上的本质差别.

设 $\phi: S \rightarrow \Delta$ 是亏格 g 曲线极小退化, F_0 是中心奇异纤维. \bar{F}_0 是正规极小模型. 从拓扑角度看, \bar{F}_0 中的主分支就是欧拉拓扑示性数小于零的带边黎曼曲面. 从广义商角度看, 它实际上就是 Σ_g 关于负定型映射 μ 的周期部分在 MM-商中对应的核分支.

注 4.3.2 T. Ashikaga 和 M. Ishizaka [AI02] 利用 MM-定理及上述的结论对亏格 3 曲线退化做了完整分类. 后者进一步分类出了超椭圆亏格 3 曲线退化 (参看 [Is04a, Is04b]). 此外, [Is04a, Is04b] 的一个有趣推论指出, 模空间 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 中的超椭圆轨迹 \bar{H}_3 不可能经过某些类型的稳定曲线轨迹. 这一结论也可以通过三次覆盖方法得到, 即 M.Reid 公式 [Rei90] (也可参见定理 5.4.1).

从伪周期映射的角度看, [Xia90] 的主要结果, 就是给出拓扑单值的一个伪周期倍数, 它只和亏格 g 有关. 这就是以下结果.

命题 4.3.3 ([Xia90], 定理 1, 定理 2) 设

$$N_g = \prod_{p \leq 2g+1} p^{l_p},$$

这里 p 跑遍所有不超过 $2g+1$ 的素数, l_p 是满足以下不等式的最大整数,

$$2g \geq p^{l_p} - p^{l_p-1}.$$

对任何亏格 g 相对极小纤维化 $f: S \rightarrow C$, 如果一个次数为 N_g 的基变换 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 在所有非半稳定纤维对应的临界点上全分歧, 那么 π 必是稳定约化, 即诱导的新纤维化是半稳定的.

回顾第 3.2 节定义的奇异纤维 F_0 的陈数 [Tan94]. 我们将用伪周期映射观点给出 β_F^- 及 β_F^+ 的拓扑解释.

命题 4.3.4 设 $\Sigma_g = \mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{B}}$ 是关于伪周期映射 μ 的割线邻域及周期部分; $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s$ 是所有非双边割线分支邻域; $\mathcal{A}_{s+1}, \dots, \mathcal{A}_{s+t}$ 是所有双边割线分支邻域.

(1) 设 β 是 $\tilde{\mathcal{B}}$ 内所有重点的价之和. 那么 $\beta_F^- = \beta + t$.

(2) $\beta_F^+ = -\sum_{i=1}^s s(\mathcal{A}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t s(\mathcal{A}_{s+i})$, 这里 $s(\mathcal{A}_i)$ 是相应环绕数.

在伪周期映射观点下, 我们还可引进一类新的拓扑不变量

$$K(\mathcal{A}_i) = \begin{cases} -s(\mathcal{A}_i) - \frac{\delta(\partial\mathcal{A}_i^{(1)})}{\lambda(\partial\mathcal{A}_i^{(1)})} - \frac{\delta(\partial\mathcal{A}_i^{(2)})}{\lambda(\partial\mathcal{A}_i^{(2)})} & \text{若 } \mathcal{A}_i \text{ 非双边,} \\ -\frac{s(\mathcal{A}_i)}{2} - \frac{\delta(\partial\mathcal{A}_i)}{\lambda(\partial\mathcal{A}_i)} & \text{若 } \mathcal{A}_i \text{ 双边.} \end{cases}$$

由前可知, 这是一个大于等于 (-1) 的整数. 这一不变量在分类亏格 3 超椭圆曲线退化中扮演了重要角色 [Is04b].

处理曲线退化拓扑问题的另一种方法是所谓的分裂形变 (Morsification), 具体细节也可参考 [AK00] 或 [Tak04]. 设 $f: S \rightarrow \Delta$ 是小圆盘 Δ 上的亏格 g 曲线退化, $F_0 = f^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维. 假设存在一个光滑的三维簇 M , 小圆盘 Δ' 以及全纯映射 $\Psi: M \rightarrow \Delta \times \Delta'$, 使得在点 $u \in \Delta'$ 处的限制映射 $\Psi_u: M_u \rightarrow \Delta \times \{u\}$ 满足以下条件:

(1) Ψ_0 和 f 一致;

(2) Ψ_u ($u \neq 0$) 有 l 个奇异纤维 $F_{u,1}, \dots, F_{u,l}$, 这里 l 不依赖于 u 的选取.

我们称 Ψ 是纤维芽 F_0 的分裂族 (Splitting family), 记作

$$F_0 \longrightarrow F_{u,1} + \dots + F_{u,l}.$$

或者简记为 $(\Psi, M, \Delta \times \Delta')$.

如果 $l = 1$, 我们称 Ψ 是纤维芽 F_0 的等奇异性形变 (Equisingular deformation). 如果 $l \geq 2$, 我们称 Ψ 是 F_0 的真分裂族 (Proper splitting family). 如果 F_0 即使在等奇异性形变后也不存在任何真分裂族, 那么我们称纤维芽 F_0 是原子纤维 (Atomic fiber).

设 $\mathcal{S}_F = \{F^{(1)}, \dots, F^{(k)}\}$ 是一组原子纤维芽. 如果纤维芽 F_0 能够通过一系列分裂族的复合最终分解为 \mathcal{S}_F 中的元素, 那么我们就称纤维芽 F_0 分裂形变至 \mathcal{S}_F . 如果 F 只通过一个分裂族即可分裂形变至 \mathcal{S}_F , 我们就说它直接分裂形变至 \mathcal{S}_F . 如果任何亏格 g 纤维芽都能分裂形变至 \mathcal{S}_F 中的子集, 那么我们就称 \mathcal{S}_F 是亏格 g 原子纤维完备组.

定理 4.3.3 ([Tak04], 定理 2.0.2) 设 $f: S \rightarrow \Delta$ 是局部纤维化, $F_0 = f^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维. 如果 F_0 满足以下条件之一, 那么 F_0 是原子纤维,

- (1) F_0 是只带一个结点的既约曲线;
- (2) F_0 是某条光滑曲线的整数倍.

注 4.3.3 肖刚和 M. Reid [Rei90] 有如下猜测.

Morsification conjecture: 定理 4.3.3 的逆命题也成立. 换言之, 任何原子纤维要么是带有一个结点的既约曲线, 要么是一个光滑曲线的整数倍.

注 4.3.4 Moishezon [Moi77] 证明了该猜想在椭圆情形正确. 对 $g = 2$ 情形, Horikawa [Hor88] 和肖刚 [Xia85] 等验证了这一猜想. M.Reid 进一步探讨了 $g = 3$ 非超椭圆情形. 高亏格超椭圆情形也可参考 [AA01, AA04, AI02] 等工作.

纤维芽 F_0 中的一个结点如果满足以下条件, 则称为多重结点 (Multiple node): 要么它是 F_0 中两条带有相同重数的不可约分支的交点; 要么它是某个不可约分支自身的结点. 下面我们陈述 [Tak04, List, page 117] 关于分裂族的若干判则.

命题 4.3.5 ([Tak04]) 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是正规极小的局部纤维化, $F_0 = f^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维.

(1) 如果 F_0 有一个多重结点 (重数至少 2), 那么 f 有分裂族, 将 F_0 分裂成 F_1, F_2 , 其中 F_1 是带一个结点的既约曲线; F_2 则是通过将该多重结点替换为相同重数的环带得到 (即将 F_0 中过该点的所有分支粘合为一条在该点光滑的不可约分支, 其重数不变).

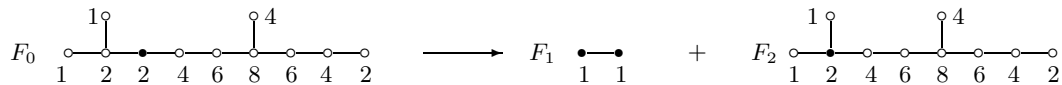
特别地, 如果 F_0 只带一个多重结点 (重数 ≥ 1), 那么它是原子纤维当且仅当它是仅含一个结点的既约曲线.

(2) 如果 F_0 有一个重数为 1 的不可约分支 Γ , 使得 $F_0 - \Gamma$ 不连通, Y_1, \dots, Y_l 是 $F_0 - \Gamma$ 的连通分支, 那么 f 有一个分裂族, 将 F_0 分裂成 F_1, \dots, F_l , 其中 F_i 是通过将所有 $Y_j (j \neq i)$ 和 Γ 一起替换成一个重数为 1 的不可约分支得到 (此替换中 Γ 和 Y_j 的交点变成光滑点, 而和 Y_i 的交点保持不变).

(3) 假设 F_0 有一个重数为 1 的不可约分支 Γ . 设 $U \subseteq S$ 是 $F_0 - \Gamma$ 的管状邻域, $f' : U \rightarrow \Delta$ 是 f 的限制映射, $Y^+ = U \cap F_0$. 如果 f' 有一个分裂族将 Y^+ 分裂成 Y_1^+, \dots, Y_l^+ , 那么 $f : S \rightarrow \Delta$ 也有一个分裂族, 将 F_0 分裂成 F_1, \dots, F_l , 其中 F_i 是通过将 Y_i^+ 与 $\Gamma - (U \cap \Gamma)$ 沿着边界粘合得到.

关于分裂族构造的更多内容, 可以参看 Takamura [Tak02] 的开创性工作.

例 4.3.3 (1) F_0 是亏格 2 纤维, 满足定理 4.3.5(1) 的条件, 分裂成 F_1 和 F_2 .



(2) F_0 是亏格 2 纤维, 满足定理 4.3.5(2) 的条件, 分裂成 F_1 和 F_2 .

■

我们有以下的有趣推论 (证明留给读者).

推论 4.3.3 假设纤维芽 F_0 满足定理 4.3.5 (1) 或 (2) 的条件, 则对应的分裂族保持奇异纤维陈数不变, 即

$$c_1^2(F_0) = \sum_{i=1}^l c_1^2(F_i), \quad c_2(F_0) = \sum_{i=1}^l c_2(F_i), \quad \chi_{F_0} = \sum_{i=1}^l \chi_{F_i}.$$

对于一般的分裂族, 这一结论未必正确. 一个主要的原因是 β_F^- 在分裂下不一定保持不变.

设 $[\phi]$ 是某个曲线退化 $f : S \rightarrow \Delta$ 的拓扑单值. 如果 f 存在一个真分裂族 $(\Psi, M, \Delta \times \Delta')$, 那么我们就说 $[\phi]$ 是可分裂的 (Splittable). 今假设 $[\phi]$ 可分裂, 取定 $u \in \Delta' - \{0\}$, $\Psi_u : M_u \rightarrow \Delta_u = \Delta \times \{u\}$ 是分类族的限制映射. 设 Ψ_u 的临界点为 t_1, \dots, t_l , Q 是 Δ_u 中固定点. 假设 γ_i 是 Δ_u 中以 Q 为基点, 只围绕 t_i 的简单闭路, $\mu_{\Psi_u}^{\gamma_i}$ 是以 $\Psi_u^{-1}(Q)$ 为参考纤维, 沿着 γ_i 的拓扑单值. 设 Q' 是 $\Delta_0 = \Delta \times \{0\}$ 中的点, γ 是一条连接 Q 和 Q' 的道路, 且不经过 Ψ_u 的临界点 ($\forall u \in \Delta'$). 易知道路 $\gamma^{-1} \circ \gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1 \circ \gamma$ 同伦于 Δ_0 中围绕 $\phi_0 = f$ 临界点的简单闭路. 这样就有如下结论.

命题 4.3.6 在上述记号下, 我们有 $[\phi] = [\mu_{\Psi_u}^{\gamma_l} \circ \dots \circ \mu_{\Psi_u}^{\gamma_2} \circ \mu_{\Psi_u}^{\gamma_1}]$.

4.4 超椭圆曲线族的拓扑 (I)

这一节及后一节中, 我们考虑亏格 g 超椭圆纤维化 (整体或局部) 的拓扑性质. 关于超椭圆纤维化的基础知识, 请读者参看第 5.3 节的内容. 如无特别声明, 我们总是默认采用第 5.3 节的诸记号及定义等等.

设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 超椭圆纤维化, $\pi : S_0 \rightarrow P_0$ 是 f 诱导的几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$ 上的二次覆盖, R 是分歧轨迹, (P_0, R) 总假设是规范模型. 设 $\sigma : \tilde{P} \rightarrow P$ 是关于分歧轨迹的典范解消, 使得最终的二次覆盖 $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{P}$ 是光滑的, 其分歧轨迹记为 \tilde{R} . 记 $\tilde{S}' = \tilde{S} - \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{R})$, $\tilde{P}' = \tilde{P} - \tilde{R}$.

取 \tilde{R} 中任何不可约分支 Γ , 设 γ 是 \tilde{P}' 中环绕 Γ 的一个小环路, 且 γ 含在 \tilde{P} 中与 Γ 横截相交的某条局部曲线内. 这样的环路 γ 称为环绕 Γ 的一个横截环路 (Transversal loop). 如果进一步 γ 落在 $\tilde{P} \rightarrow C$ 的某条纤维中, 则称它为垂直横截环路. 显见 γ 可视为 $\pi_1(\tilde{P}')$ 中的类, 且任何两个环绕 Γ 的横截环路的类只相差一个共轭. 由 \tilde{R} 的光滑性可知, \tilde{R} 的每个不可约分支上都有垂直横截环路.

设 F 是 \tilde{S} 的一般纤维, Φ 是它在 \tilde{P} 中的像纤维. \tilde{R} 限制在 Φ 有 $2g + 2$ 个点: p_1, \dots, p_{2g+2} . 记 $\Phi' = \Phi - p_1 - \dots - p_{2g+2}$, $F' = \tilde{\pi}^{-1}(\Phi')$. 设 γ_i 是 Φ' 中围绕 p_i 的垂直横截环路. 在不至混淆的情形下, 我们仍用 γ_i 表示它在 $\pi_1(\Phi')$ 中的类. 通过合适的选择, 我们可以假设 $\gamma_1 \cdots \gamma_{2g+2} = 1$ 是基本群 $\pi_1(\Phi') = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{2g+2} \rangle$ 生成元所满足的唯一关系式.

设 \mathcal{L} 和 \mathcal{W} 分别是 $\pi_1(\tilde{S}')$ 和 $\pi_1(\tilde{P}')$ 在 C 上的垂直部分. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(F) & \longleftarrow & \pi_1(F') & \longrightarrow & \pi_1(\Phi') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_f & \longleftarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\tilde{S}) & \longleftarrow & \pi_1(\tilde{S}') & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{P}') \end{array}$$

引理 4.4.1 设 \mathcal{B} 是 $\gamma_1^2, \dots, \gamma_{2g+2}^2$ 在 \mathcal{W} 中的像生成的正规子群 ($\gamma_1 \cdots \gamma_{2g+2} = 1$), 那么

- (1) \mathcal{L} 是 \mathcal{W} 的指标为 2 的子群, 且有满态射 $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{V}_f$.
- (2) $\pi_1(F')$ 作为 $\pi_1(\Phi')$ 的子群, 由那些可表为偶数个 γ_i (或 γ_i^{-1}) 的乘积的元素构成. 特别地, 有 $\pi_1(F) = \pi_1(F') / \langle \gamma_1^2, \dots, \gamma_{2g+2}^2 \rangle$.
- (3) $\mathcal{V}_f \cong \mathcal{L} / (\mathcal{L} \cap \mathcal{B})$, 从而有单同态 $\mathcal{V}_f \rightarrow \mathcal{W} / \mathcal{B}$.

证明 (1) 注意到 $\tilde{\pi} : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{P}'$ 是无分歧二次覆盖, 故 $\pi_1(\tilde{S}')$ 可以视作 $\pi_1(\tilde{P}')$ 中指标为 2 的子群. 另一方面, 我们有满同态 $\pi_1(\tilde{S}') \rightarrow \pi_1(\tilde{S}) = \pi_1(S)$.

(2) 直接来自于基本群计算. (3) 是 (1)(2) 的推论. ■

对任何群 G , 我们可以找到一个同构于 $\mathbb{Z}_2^{\oplus r}$ 的极大交换商群, 称为 G 的挠 2 商 (2-torsion quotient), n 称为挠 2 商的秩. 我们记 $\tilde{G} = G/[G, G]$ 为 G 的 Abel 化, 其中 $[G, G]$ 是交换化子生成的正规子群. 假设 $N \triangleleft G$ 是正规子群, 使得 G/N 是挠 2 商, 则显然有 $[G, G] < N$, 且 \tilde{G} 与 G 有相同的挠 2 商. 此外, G 的两个共轭元在 \tilde{G} 中显然对应同一元素.

令 $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{W}/\mathcal{B}}$ 是 \mathcal{W}/\mathcal{B} 的 Abel 化. 由同态 $\mathcal{V}_f \rightarrow \mathcal{W}/\mathcal{B}$, 我们得到诱导同态 $\mathcal{V}_f \rightarrow \mathcal{A}$.

推论 4.4.1 \mathcal{V}_f 在 \mathcal{A} 中的像就是 \mathcal{V}_f 的挠 2 商. 特别地, 如果 \mathcal{W} 是交换群, 则 \mathcal{V}_f 本身是挠 2 商.

证明 我们只需要考虑局部情形, 即 $\pi_1(F)$ 在 $\pi_1(F) \rightarrow \tilde{G}$ 中的像 H 恰好是 $\pi_1(F)$ 的挠 2 商, 这里 \tilde{G} 是 $G = \pi_1(\Phi') / \langle \gamma_1^2, \dots, \gamma_{2g+2}^2 \rangle$ 的 Abel 化.

首先注意到 $\gamma_1 \cdots \gamma_{2g+2} = 1$, 因此

$$\tilde{G} \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus 2g+1}.$$

另一方面, H 在 \tilde{G} 的指标为 2, 故 $H \cong \mathbb{Z}_2^{2g}$. 由于 $\pi_1(F)$ 的挠 2 商的秩为 $2g$, 因此 H 就是 $\pi_1(F)$ 的挠 2 商. ■

从上述证明可以看到 \mathcal{V}_f 在 \mathcal{A} 中的像是 H 的商群.

推论 4.4.2 ([Xia91], 引理 5) (1) 如果 \mathcal{W} 是由一个横截环路生成的循环群, 那么 $\mathcal{V}_f = \{1\}$.

(2) 如果 \mathcal{W} 由两个横截环路生成, 则要么 $\mathcal{V}_f = \{1\}$, 要么 $\mathcal{V}_f = \mathbb{Z}_2$.

(3) 如果 \mathcal{W} 由三个横截环路 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 生成, 且存在另一横截环路 γ_4 , 使得 $\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_4 \in \mathcal{B}$, 那么 \mathcal{V}_f 是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的商群.

证明 我们考虑 (3). 此时 $\mathcal{V}_f = \langle \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3 \rangle$. 又因为 (在 \mathcal{V}_f 中)

$$\gamma_1\gamma_2 \cdot \gamma_2\gamma_3 \cdot (\gamma_1\gamma_2)^{-1}(\gamma_2\gamma_3)^{-1} = (\gamma_1\gamma_3\gamma_2)^2 = \gamma_4^2 = 1,$$

所以 \mathcal{V}_f 是交换群. ■

设 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m$ 是 \tilde{R} 所有水平不可约分支, $\tilde{R}_{m+1}, \dots, \tilde{R}_n$ 是 \tilde{R} 所有垂直不可约分支. 设 $\tilde{\gamma}_i$ 是围绕 \tilde{R}_i 的横截环路在 \mathcal{A} 中的像元素. 为方便计算, 我们将 \mathcal{A} 中的运算写成加法形式, 单位元记作 0. 由引理 4.4.1 知, \mathcal{A} 由 $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$ 生成, \mathcal{V}_f 的挠 2 商由 \mathcal{A} 的所有可表为偶数个 $\tilde{\gamma}_i$ 的之和的元素生成.

假设 D 是一条垂直不可约曲线, 且不落在 \tilde{R} 中, p_1, \dots, p_t 是 D 与 \tilde{R} 的交点, r_i 是 D 中绕 p_i 的小环路在 \mathcal{A} 中的像. 我们首先要弄清楚 r_i 和 $\tilde{\gamma}_i$ 之间的关系. 假设某个 \tilde{R}_j 与 D 在 p_i 处的局部相交数为 d . 如果 $d = 1$, 那么这是横截相交, 从而 $r_i = \tilde{\gamma}_j$. 如果 $d > 1$, 则由简单的形变可以看到, $r_i = d\tilde{\gamma}_j$. 另一方面, 由于 $D \cong \mathbb{P}^1$, 故在 \mathcal{A} 中显然有 $\sum_{i=1}^t r_i = 0$, 所以我们得到关系式

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{R}_i D) \tilde{\gamma}_i = 0.$$

将此结果推广至更一般情形, 即得如下结论.

引理 4.4.2 设 $D = D_1 + \dots + D_{2s+1}$ 是 \tilde{P} 中由 $2s + 1$ 条不可约垂直曲线组成的链 ($D_i D_{i+1} = 1, D_i D_j = 0, |i - j| > 1$), 且 D_2, D_4, \dots, D_{2s} 含于 \tilde{R} 中, 则在 \mathcal{A} 中有关系式

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{R}_i D) \tilde{\gamma}_i = 0. \quad (4-2)$$

证明 对 s 施归纳法. $s = 0$ 情形上面已证. 假设对 $< s$ 情形均成立. 设 δ 是围绕 D_{2s} 的横截环路在 \mathcal{A} 中的像. 对 $D' = D_1 + \dots + D_{2s-1}$ 用归纳条件即得

$$\delta + \sum_{i=1}^n (\tilde{R}_i D') \tilde{\gamma}_i = 0.$$

对 D_{2s+1} , 由上面讨论, 也有

$$\delta + \sum_{i=1}^n (\tilde{R}_i D_{2s+1}) \tilde{\gamma}_i = 0.$$

注意到, $\tilde{R}_i D_{2s}$ 要么是零, 要么是负偶数, 故相加上面二式即得所需. ■

- 注 4.4.1** (1) D 的分支在纤维中的重数对式 (4-2) 没有影响.
 (2) 垂直分支 \tilde{R}_j ($j > m$) 对应的横截环路像 $\tilde{\gamma}_j$ 在 \mathcal{A} 中未必为零. 由上面的讨论, 它们一定可以被其他 $\tilde{\gamma}_i$ ($i \leq m$) 表示.
 (3) 由于 \tilde{R} 是偶除子, 所以式 (4-2) 是偶数个 $\tilde{\gamma}_i$ 的和, 故它是 \mathcal{V}_f 的挠 2 商所要满足的条件.

我们将典范解消 $\sigma: (\tilde{P}, \tilde{R}) \rightarrow (P, R)$ 分解为两部分, $\sigma_1: (\tilde{P}, \tilde{R}) \rightarrow (\hat{P}, \hat{R})$ 收缩部分 (-1) -曲线, 使得 \hat{P} 的分歧轨迹 \hat{R} 只含可忽略奇点. $\sigma_2: (\hat{P}, \hat{R}) \rightarrow (P, R)$ 收缩其他 (-1) -曲线, 且每一次收缩得到的奇点都不是可忽略奇点.

引理 4.4.3 设 \tilde{R}_i 和 \tilde{R}_j 是 \tilde{R} 中的两个不可约分支, 它们在 \hat{P} 中的像分支通过可忽略奇点 p , 那么在 \mathcal{A} 中有 $\tilde{\gamma}_i + \tilde{\gamma}_j = 0$.

证明 只需考察每类可忽略奇点的解消图, 并运用引理 4.4.2 即得. 具体证明留给读者. ■

推论 4.4.3 \widehat{R} 的每个非垂直连通分支中任取一不可约分支的横截环路, 即可生成 \mathcal{A} .

设 \widehat{R} 中所有含非垂直部分的连通分支为 $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k$, 仅含垂直部分的连通分支为 $\mathcal{R}_{k+1}, \dots, \mathcal{R}_l$. 记

$$R' = \mathcal{R}_1 + \dots + \mathcal{R}_k, \quad R'' = \mathcal{R}_{k+1} + \dots + \mathcal{R}_l.$$

由上述推论, 可设 $\tilde{\gamma}_i$ 是 \mathcal{R}_i ($i \leq k$) 的横截环路在 \mathcal{A} 中的像. 结合引理 4.4.2, 我们有如下定理.

定理 4.4.1 \mathcal{V}_f 的挠 2 商由那些可表为偶数个 $\tilde{\gamma}_i$ 之和的元素生成, 且仅满足以下这类关系式:

设 $D = D_1 + \dots + D_{2s+1}$ 是 \widehat{P} 中 $2s+1$ 条垂直除子组成的链 ($D_i D_{i+1} = 1, D_i D_j = 0, |i-j| > 1$), 其中 $D_1, D_3, \dots, D_{2s+1}$ 是不含于 \widehat{R} 中的不可约曲线, D_2, D_4, \dots, D_{2s} 含于 R'' 中, 且 D 不与 R'' 其他分支相交, 则

$$\sum_{i=1}^k (\mathcal{R}_i D) \tilde{\gamma}_i = 0. \quad (4-3)$$

证明 由定理条件, D_{2i} 实际上是某个垂直连通分支. 由于 \widehat{R} 是偶除子, 所以要么 $\mathcal{R}_j D = 0$, 要么 $\mathcal{R}_j D = \mathcal{R}_j^2 = \mathcal{R}_j \widehat{R}$ 是负偶数 ($j > k$). 同理, $R' D$ 也是偶数. 这样, (4-3) 左边是偶数个 $\tilde{\gamma}_i$ 的和 ($i \leq k$).

由推论 4.1.4, \mathcal{V}_f 的挠 2 商中的关系式取决于 \widetilde{P} 中所有纤维提供的关系式. 注意到 \widetilde{P} 中的纤维都是有理曲线树, 所以 T 中的关系式都来自于引理 4.4.2 中的关系式. 将引理 4.4.2 过渡到 \widehat{P} 情形, 关系式 (4-3) 中诸 $\tilde{\gamma}_i$ 的系数奇偶性不发生改变 (请读者验证). ■

推论 4.4.4 设 \widehat{R} 有 k 个含非垂直部分的连通分支, 则 \mathcal{V}_f 的挠 2 商的秩不超过 $k-1$. 如果其中一个非垂直连通分支到底曲线 C 的投影是奇数次的, 则该秩不超过 $k-2$.

特别地, 当亏格 $g = 2$ 时, 如果所有连通分支到 C 的投影是偶数次时, 其秩等于 $k-1$; 否则, 秩为 $k-2$ (参见 [Xi87b, 引理 4]).

证明 前半部分是定理 4.4.1 的直接推论.

现证后半部分. 满足关系式 (4-3) 的链除了一般纤维之外, 都由 R 的 $(3 \rightarrow 3)$ 型奇点给出. 直接解消这类奇点, 可以看到这样的链诱导的关系式要么平凡, 要么和一般纤维上诱导的关系一致. 因此 \mathcal{V}_f 的挠 2 商的秩只取决于一般纤维提供的关系式, 由此得证结论. ■

定理 4.4.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 2 纤维化, τ 是 \mathcal{V}_f 的挠 2 商的秩, 那么 $0 \leq \tau \leq 4$. 进一步, 如果 $\tau = 4$, 则 $\lambda_f = 7$; 如果 $\tau < 4$, 则 $\lambda_f \geq \tau + 2$.

证明 分情形讨论.

Case 1. 当 $\tau = 4$ 时, 必有 $k = 6$, $\mathcal{R}_i F = 1$, 从而奇异性指数 $s_2 = 0$, 即 $\lambda_f = 7$.

Case 2. 当 $\tau = 3$ 时, 我们可以将 \widehat{R} 分为两个互不连通的部分 $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2$, 使得 $\widehat{R}_1 F = \widehat{R}_2 F = 3$. 设 R_i 是 \widehat{R}_i 在 P 中的像 ($i = 1, 2$). 由推论 5.1.5, $R_1 R_2 = \frac{3}{10} r(R)$. 又由引理 5.3.2 计算可得 $r(R) = s_2 + 12s_3$, 从而 $R_1 R_2 = \frac{3}{10} s_2 + \frac{18}{5} s_3$.

另一方面, R_1 和 R_2 只能在 R 的不可忽略奇点相交, 所以在这类奇点处的相交数为 4 (请注意, 这里也包括无穷接近奇点). 这样 $4s_3 \geq R_1R_2$, 从而 $4s_3 \geq 3s_2$. 于是

$$\lambda_f = \frac{2s_2 + 14s_3}{s_2 + 2s_3} \geq 5.$$

Case 3. 当 $\tau = 2$ 时, 要么 $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2$, $\widehat{R}_1F = \widehat{R}_2F = 3$; 要么 $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2 + \widehat{R}_3$, $\widehat{R}_iF = 2$, $i = 1, 2, 3$. 前一种情形已证 $\lambda_f \geq 5$, 今讨论后一情形. 不妨设 R_i 同上, $r(R_1) \geq r(R_2) \geq r(R_3)$. 类似地, 我们有

$$R_1R_2 = r(R_1) + r(R_2), \quad \frac{1}{5}r(R) = r(R_1) + r(R_2) + r(R_3),$$

从而 $R_1R_2 \geq \frac{2}{15}r(R) = \frac{2}{15}s_2 + \frac{8}{5}s_3$. 由于在 R 的每个不可忽略奇点处, R_1 和 R_2 的相交数不超过 2, 因此 $2s_3 \geq R_1R_2$, 即 $3s_3 \geq s_2$. 于是

$$\lambda_f = \frac{2s_2 + 14s_3}{s_2 + 2s_3} \geq 4.$$

Case 4. 当 $\tau = 1$ 时, $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2$, $\widehat{R}_1F = 2$, $\widehat{R}_2F = 4$. 设 R_i 同前, 则我们类似地有 $R_1R_2 \geq \frac{1}{5}r(R)$, $s_3 \geq \frac{1}{4}R_1R_2$, 从而 $8s_3 \geq s_2$, 即 $\lambda_f \geq 3$. \blacksquare

定理 4.4.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 超椭圆纤维化, 且斜率满足

$$\lambda_f < 4 - \frac{1}{g-1},$$

那么 \mathcal{V}_f 有平凡的挠 2 商.

证明 证明与定理 4.4.2 类似. 我们假设 \mathcal{V}_f 的挠 2 商非平凡, 则 \widehat{R} 可以拆成互不连通的两部分 $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2$, $\widehat{R}_1F = d_1$, $\widehat{R}_2F = 2g + 2 - d_1$, $d_1 \leq g + 1$ 且为偶数. 不妨假设 \widehat{R}_2 包含所有 \widehat{R} 的孤立垂直分支. 设 R_i 是 \widehat{R}_i 在 P 中的像.

由推论 5.1.5,

$$R_1R_2 = \frac{d_1}{4g+2}r(R) + \frac{g+1-d_1}{d_1-1}r(R_1).$$

我们的目标是估计 $r(R)$ 的上界. 设 p 是 R 上的不可忽略奇点 (包括无穷接近点的情形), ι_p 是 R_1 和 R_2 在 p 的相交数, r_p 为 $r(R_1)$ 在 p 上的部分, 则有

$$R_1R_2 = \sum_p \iota_p, \quad r(R_1) \geq \sum_p r_p.$$

当 p 是 $(2k+1 \rightarrow 2k+1)$ 型奇点时, 设 d 为 R_1 在 p 的重数, 则

$$\iota_p = 2d(2k+1-d), \quad r_p = 2d(d-1).$$

当 p 是 $2k$ 阶偶奇点时, 则有

$$\iota_p = d(2k-d), \quad r_p = d(d-1).$$

通过适当的估计 (验证留给读者完成), 最终我们得到

$$\frac{r(R)}{4g+2} \leq \sum_{i=3}^{g+2} c_i s_i,$$

这里

$$c_i = \begin{cases} i-1, & i \text{ 是奇数,} \\ \frac{1}{3}(i-1), & i \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

另一方面, 由推论 5.3.2 知

$$r(R) = s_2 - 2s_{g+2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} (8k^2 + 4k)s_{2k+1} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} (4k^2 - 2k)s_{2k}. \quad (4-4)$$

由此立得 $\lambda_f \geq 4 - \frac{1}{g-1}$, 等号成立当且仅当 $d_1 = 1, s_k = 0 (k \geq 4)$. \blacksquare

利用相同的方法, [Xia91, 引理 12] 证明了如下结论. 有兴趣的读者不妨试证此结论.

命题 4.4.1 如果 \widehat{R} 可以分解为两个不连通的部分 $\widehat{R} = \widehat{R}_1 + \widehat{R}_2$, 满足 $4 \leq \widehat{R}_1 F \leq \widehat{R}_2 F$, 则 $\lambda_f \geq 4 + \frac{1}{2g-3}$.

推论 4.4.5 如果 $\lambda_f < 4 + \frac{1}{2g-3}$, 那么 \mathcal{V}_f 是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的商群.

注 4.4.2 [Xia91] 还证明了, 当 $\lambda_f < 4$ 时 ($g = 2$ 时, $\lambda_f < 3.4$), $\mathcal{V}_f = \{1\}$ 或 \mathbb{Z}_2 (也可参见 [Xi87a, 定理 1']).

4.5 超椭圆曲线族的拓扑 (II)

一个亏格 g 曲线退化 $f: S \rightarrow \Delta$ 如果满足以下条件, 则称为超椭圆曲线族 (Hyperelliptic family): $F_t = f^{-1}(t)$ 是超椭圆曲线, $\forall t \in \Delta^* = \Delta - \{0\}$. 超椭圆曲线族 (f, S, Δ) 双全纯与某个二次覆盖 $\pi_0: S_0 \rightarrow \Delta \times \mathbb{P}^1$ (见 [Hor75]).

设集合 \mathcal{PH}_g 是由亏格 g 超椭圆曲线族中具有周期映射的拓扑单值所对应的共轭类组成. 由于光滑超椭圆曲线存在自然的对合映射 (Hyperelliptic involution) $I: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g, I^2 = id_{\Sigma_g}$, 故其共轭类 $[I] \in \mathcal{PH}_g$. 设 $[\phi]$ 是某个超椭圆曲线族的拓扑单值, 那么 $[\phi \cdot I] = [I \cdot \phi]$ (留给读者证明).

设 (t, u) 是 $\Delta \times \mathbb{P}^1$ 的局部坐标, \mathcal{E}_g 是由如下各类方程定义的 $\Delta \times \mathbb{P}^1$ 上二次覆盖的集合:

$$(I) \quad z^2 = (u-1) \prod_{i=1}^{\delta} (u^p - \alpha_i t^q), \quad (p\delta = 2g+1),$$

$$(II) \quad z^2 = u(u-1) \prod_{i=1}^{\delta} (u^p - \alpha_i t^q), \quad (p\delta = 2g),$$

$$(III) \quad z^2 = \prod_{i=1}^{\delta} (u^p - \alpha_i t^q), \quad (p\delta = 2g+2),$$

$$(IV) \quad z^2 = t \prod_{i=1}^{\delta} (u^p - \alpha_i t^q), \quad (p\delta = 2g+2),$$

$$(V) \quad z^2 = (u-1) \prod_{i=1}^{2g+1} (u - \alpha_i t),$$

$$(VI) \quad z^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (u - \alpha_i).$$

这里 p, q 是互质的正整数, $p \neq 1$, 且诸 α_i 是两两不同的复数.

定理 4.5.1 ([Is04b], 定理 1.5) 设映射 $\Theta: \mathcal{E}_g \rightarrow \mathcal{PH}_g$ 是将 \mathcal{E}_g 中的二次覆盖对应到它拓扑单值. 那么该映射合理, 且为满射. 换言之, 上述六类二次覆盖对应的曲线退化都是超椭圆曲线族; 反之, 任何超椭圆曲线族必可用其中某类二次覆盖实现.

证明 鉴于证明细节过于繁琐, 我们这里只介绍一个大概的思路, 具体讨论参见 [Is04b].

首先, 注意到周期映射的共轭类由奇异纤维的组合结构唯一确定. 由于周期映射对应的奇异纤维极小正规交模型仅含一个主分支, 因此对相应的二次覆盖分歧轨迹奇点具有很强的限制条件. 等价地, 我们可以考虑典范解消 $\sigma: \tilde{P} \rightarrow \Delta \times \mathbb{P}^1$. 通过细致分析 $\tilde{P} \rightarrow \Delta$ 中心纤维的各分支所需满足的结构关系, 我们最终得到原始二次覆盖所有可能的局部方程. ■

通过类似上述证明的方法, [Is04a] 完整分类了亏格 3 超椭圆曲线族. 本质上就是利用直纹面上二次覆盖典范解消, 将中心纤维 F_0 与直纹面上像纤维 $\Pi(F_0)$ 的某些分支重数作比较, 排除非超椭圆拓扑单值, 并对超椭圆情形列出了所有二次覆盖方程. 这里我们例举周期映射情形具体介绍 [Is04a] 的方法, 它实际上只是定理 4.5.1 的直接推论.

推论 4.5.1 具有周期拓扑单值的亏格 3 曲线退化, 如果在某个基变换后具有以下的价之一, 那么它不可能是超椭圆曲线族:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}.$$

证明 假设 $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ 是超椭圆的, 则可构造直纹面上二次覆盖诱导纤维化, 使得中心纤维 F_0 恰为该映射的 MM-商. 设 $F_0 = 7C_0 + C_1 + 2C_2 + 4C_3 + \cdots$, C_0 是周期部分对应的核分支, 其余诸 C_i 与 C_0 连接. 用 $\Pi(C_i)$ 表示 C_i 在典范解消后二次覆盖下的像; F_0 的像纤维记为 $\Pi(F_0)$.

由于 C_i 在纤维 F_0 中的重数互不相同, 因此 $\Pi(C_i)$ 在 F_0 中也互不相同. 又因为 C_0 与 C_i 相交, 所以 $\Pi(C_0)$ 与 $\Pi(C_i)$ 之间有唯一的道路 $D_{C_0 C_i}$ 连接它们, 并且这些道路互不连通. 注意 $\Pi(F_0)$ 是有理树, 所以必有一条道路, 比如 $D_{C_0 C_1}$, 在 $\Pi(C_0)$ 变为 (-1) -曲线前被完全收缩. 又因为 $\Pi(C_0)$ 在 $\Pi(F_0)$ 中重数是 7, 所以这就迫使 $\Pi(C_1)$ 在 $\Pi(F_0)$ 中重数是 7 的倍数, 矛盾! 因此不存在超椭圆纤维化有以上整体价. 其余两类情形也可类似排除. ■

注 4.5.1 这种方法也能被推广到三次覆盖情形. [CDTY] 应用这一方法构造了每一类有理三重点的局部三次覆盖方程.

通过局部二次覆盖方程的典范解消, 我们可以直接计算出这类超椭圆曲线族的拓扑单值.

例 4.5.1 不失一般性, 我们假设上述六类方程中的 $\alpha_i = e^{2\pi i \sqrt{-1}/\delta}$, $i = 1, \dots, \delta$.

(1) 在 (I) 型方程中取 $p = 2g + 1$, $q = 1$ 得 $z^2 = (u - 1)(u^{2g+1} - t)$. 它对应了周期价为 $\frac{1}{4g+2} + \frac{g}{2g+1} + \frac{1}{2}$ 的超椭圆曲线族, 其拓扑单值记为 $[\phi_1]$.

(2) 在 (II) 型方程中取 $p = 2g$, $q = 1$ 得 $z^2 = u(u - 1)(u^{2g} - t)$. 它对应了周期价为 $\frac{1}{4g} + \frac{2g-1}{4g} + \frac{1}{2}$ 的超椭圆曲线族, 其拓扑单值记为 $[\phi_2]$.

(3) 在 (III) 型方程中取 $p = 2g + 2$, $q = 1$ 得 $z^2 = u^{2g+2} - t$. 它对应了周期价为 $\frac{1}{2g+2} + \frac{1}{2g+2} + \frac{g}{g+1}$ 的超椭圆曲线族, 其拓扑单值记为 $[\phi_3]$.

(4) 在 (IV) 型方程中取 $p = q = 1$ 得 $z^2 = t(u^{2g+2} - t^{2g+2})$. 它对应了周期价为 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$ (共 $2g + 2$ 个) 的超椭圆曲线族, 其拓扑单值恰好是对合映射的共轭类 $[I]$. ■

引理 4.5.1 设 $f_i: S_i \rightarrow \Delta$ ($i = 1, 2$) 是两个超椭圆曲线族, D_i 是 f_i 对应的局部二次覆盖分歧轨迹. 假设 D_1 不含垂直纤维 Γ_0 , 并且 $D_2 = D_1 + \Gamma_0$. 设 ω_i 是 f_i 的拓扑单值中的某个映射类, 那么 $[\omega_2] = [\omega_1 \cdot I]$.

证明 假设 f_i 对应的局部二次覆盖方程分别为 $z^2 = F_i(u, t)$, 其中 $F_2(u, t) = t \cdot F_1(u, t)$, $F_1(u, 0) \neq 0$. 当 $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, 围绕 $t = 0$ 沿着简单环路走一圈时,

$$z(\theta) = \sqrt{F_2} = e^{\sqrt{-1}\theta/2} \cdot \sqrt{F_1(u, e^{\theta\sqrt{-1}})}$$

恰好从一个单值性区域进入了另一个, 从而 $z(2\pi) = -z(0)$. 由此即得结论. ■

命题 4.5.1 ([Ish07], 引理 1.3) 设 $[\phi] \in \mathcal{PH}_g$, 则存在正整数 k 使得 $[\phi]$ 必等于以下某个共轭类:

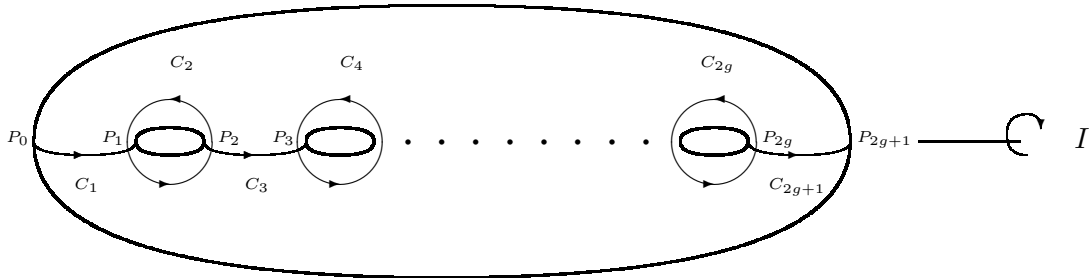
$$(a) [\phi_1^k], \quad (b) [\phi_2^k], \quad (c) [\phi_3^k], \quad (d) [\phi_3^k \cdot I],$$

这里 ϕ_i 定义见例 4.5.1.

证明 不失一般性, 我们假设定理 4.5.1 六类方程中的 $\alpha_i = e^{2\pi i\sqrt{-1}/\delta}$, $i = 1, \dots, \delta$. 设 $f_i: S_i \rightarrow \Delta$ 是 $[\phi_i]$ 对应的超椭圆曲线族.

方程 (I) 等价于 $z^2 = (u-1)(u^{2g+1} - t^{q\delta})$. 构造 f_1 的基变换 $h: \Delta \rightarrow \Delta$, $h(t) = t^{q\delta}$. 显见, 这样诱导纤维化对应的分歧轨迹恰好满足方程 (I). 因此它的拓扑单值 $[\phi] = [\phi_1^k]$, 即命题中的 (a). 同理可知, 方程 (V) 和 (VI) 分别对应命题中的 (b) 和 (c). 由引理 4.5.1, 方程 (IV) 对应 (d). ■

考虑以下的超椭圆曲线 Σ_g , I 是对合映射, 诱导了二次覆盖 $\pi: \Sigma_g \rightarrow \mathbb{P}^1 = \Sigma_g/I$, P_i 是 I 的不动点, $Q_i = \pi(P_i)$. C_i 是一些简单闭环路.



对于超椭圆纤维退化, [BH71] 给出了对合映射 I 的 Dehn 扭转正表示

$$[I] = [T_{C_1}T_{C_2} \cdots T_{C_{2g+1}}T_{C_{2g+1}} \cdots T_{C_2}T_{C_1}],$$

此处 T_{C_i} 是关于 C_i 的右手 Dehn 扭转. 我们将讨论更一般的周期映射共轭类的正表示. 为此需要以下引理.

引理 4.5.2 \mathbb{P}^1 中连接 Q_0Q_i 的线段可以唯一提升为 Σ_g 中过 P_0, P_i 的简单闭路, 记为 d_i , 则

$$T_{d_i} = T_{C_i}^{-1}T_{C_{i-1}}^{-1} \cdots T_{C_2}^{-1}T_{C_1}T_{C_2} \cdots T_{C_{i-1}}T_{C_i}.$$

证明 由直接计算可得以下同痕关系

$$d_i = T_{C_i}^{-1}T_{C_{i-1}}^{-1} \cdots T_{C_2}^{-1}(C_1). \tag{4-5}$$

结合 [Lic64, 引理 1] 即得所需等式. ■

定理 4.5.2 ([Ish06, Ish07]) 设 $[\phi_i]$ 如例 4.5.1, 那么 $[\phi_i]$ 有如下 Dehn 扭转表示

- (1) $[\phi_1] = [TC_1 TC_2 \cdots TC_{2g}]$;
- (2) $[\phi_2] = [TC_1 TC_2 \cdots TC_{2g} TC_{2g}]$;
- (3) $[\phi_3] = [TC_1 TC_2 \cdots TC_{2g} TC_{2g+1}]$.

特别地, 由命题 4.5.1 可知, 超椭圆曲线族的周期拓扑单值都有正表示.

证明 我们以 (3) 为例, 其余情形类似可证. 为方便讨论, 我们不妨设

$$\Delta \times \Delta' = \{(t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |t| < 4(2g+1), |s| < 2\}.$$

设 D 是 $\mathbb{P}^1 \times \Delta \times \Delta'$ 上的偶除子, 其局部方程定义为

$$h(u, t, s) := u^{2g+2} - (2g+2)su + t = 0,$$

此处 u 是 \mathbb{P}^1 的局部坐标. 以 D 为分歧轨迹, 构造二次覆盖 $\Theta: M \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \Delta \times \Delta'$, 局部方程可定义为 $y^2 = h(u, t, s)$. 这就诱导了自然投影 $\Psi: M \rightarrow \Delta \times \Delta'$. 由简单的计算可知 $\Psi^{-1}(t, s)$ 是光滑曲线当且仅当 $t^{2g+1} - (2g+1)^{2g+1} s^{2g+2} \neq 0$. 因而 $\Psi_s: M_s \rightarrow \Delta_s = \Delta \times \{s\}$ 恰有 $2g+1$ 个临界点 ($s \neq 0$):

$$t_j = (2g+1)s \cdot s^{1/(2g+1)} e^{2\pi j \sqrt{-1}/(2g+1)}, \quad j = 0, \dots, 2g,$$

并且每个奇异纤维都只带一个结点. Ψ_0 只有一条奇异纤维, 其拓扑单值对应 $[\phi_3]$.

为讨论方便, 今不妨取 $s = 1$. 我们考察 $\Psi_1 M_1 \rightarrow \Delta - 1$ 的单值同胚. 取 $\Psi_1^{-1}(0)$ 为参考纤维, 它对应的像纤维与分歧轨迹正常交 $2g+2$ 个点 $Q_0 := \{u = 0\}$ 及

$$Q_j := \{u = (2g+2)^{1/(2g+1)} e^{2\pi j \sqrt{-1}/(2g+1)}\},$$

$P_i = \Theta_{(0,1)}^* Q_i$ 恰好是对合映射的不动点. 设 L_i 是 Δ_1 中连接 $t = 0$ 和 $t = t_i$ 的线段, γ_i 是 Δ_1 中以 $t = 0$ 为基点, 只围绕临界点 t_i 的简单闭路.

设 d_i 是线段 $\overline{Q_0 Q_i}$ 提升到 $\Psi_1^{-1}(0)$ 中的简单闭路. 由简单的计算可知, 当 t 沿着 L_i 连续移动时, Q_0 与 Q_i 趋向于同一点, 因而 P_0 与 P_i 趋向于同一点. 换言之, d_i 是零化环路. 由 Kas 定理 [Kas80] (或见例 4.3.1), $\Psi_1^{-1}(0)$ 沿着 L_i 的单值同胚同痕于 T_{d_i} . 现在结合命题 4.3.6 和上述讨论, 我们有

$$[\phi_3] = [D_{d_{2g+1}} D_{d_{2g}} \cdots D_{d_2} D_{d_1}]. \quad (4-6)$$

由引理 4.5.2 及 Dehn 扭转的辫关系 (见注 4.2.2), 可以直接计算得到

$$[\phi_3] = [TC_1 TC_2 \cdots TC_{2g} TC_{2g+1}].$$

至此我们完成了证明. ■

注 4.5.2 这些结果的最直接应用就是计算 Picard-Lefschetz 单值矩阵. 实际上就是利用命题 4.2.1 的 Picard-Lefschetz 公式计算 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 中的典范基在一系列 Dehn 扭转下的像. 前面所举的椭圆纤维化例子 4.2.2 正是按此方法计算出单值.

在定理 4.5.2 的证明中, 我们将奇异纤维的分裂形变被归结为直纹面上二次覆盖分歧轨迹的奇点形变. 这一方法为寻找超椭圆曲线族的原子纤维完备组提供了可行性. 下面我们简要介绍 Arakawa 和 Ashikaga [AA01] [AA04] 在这方面的的工作.

首先我们回顾曲线奇点分裂形变的 A'Campo-Gusein Zade 理论 (参看 [Cam75, GZ74]). 设 $(C, p) \subseteq \mathbb{C}^2$ 是在 p 的邻域 U_0 内局部曲线, (C, p) 是奇点. 考虑 $(C, p) = (C_0, p_0)$ 的一系列爆发

$$(U_0, C_0) \xleftarrow{\sigma_1} (U_1, C_1) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \xleftarrow{\sigma_r} (U_r, C_r),$$

C_r 是 C 的完全原像, \tilde{C}_r 是严格原像. 设 Q 是 C_r 中的某个例外曲线分支 E_{j_0} 上的点, V 是 Q 的局部邻域, 局部坐标为 (x, y) , $Q = (0, 0)$; $y = 0$ 是 E_{j_0} 的局部方程. $\tilde{C}_r^{(1)}, \dots, \tilde{C}_r^{(k)}$ 是 \tilde{C}_r 中经过 Q 的局部不可约分支, 局部方程为 $g^{(j)}(x, y) = 0$ ($j = 1, \dots, k$). 这样 $\sum_{j=1}^k \tilde{C}_r^{(j)}$ 的局部方程可写为

$$g(x, y) := \prod_{j=1}^k g^{(j)}(x, y) = 0.$$

我们先假设 E_{j_0} 外没有其他例外曲线分支经过 Q . 此时我们可以定义 $V \times \Delta$ 中的除子 \mathcal{D} , 由局部方程 $g(x - \varphi(u), y - \psi(u)) = 0$ 定义, 此处 u 是 Δ 的局部坐标, $\varphi(u), \psi(u)$ 是全纯函数, 且满足 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. 假设 \mathcal{D}_u 是 \mathcal{D} 在 $U \times \{u\}$ 上的限制, 则通过合适的选取, 可要求曲线 \mathcal{D}_u 与 E_{j_0} 正常交 $(\tilde{C}_r \cdot E_{j_0})_Q$ 个不同的点, 且含有唯一的奇点 $Q_u = (\varphi(u), \psi(u))$ (不在 E_{j_0} 上). 当我们收缩重新掉所有例外曲线分支, \mathcal{D}_u 变成一条只含两个孤立奇点的曲线 M_u , 其中一个奇点在 p 处, 另一个则与 Q 相同. 用分裂族的语言来说, 我们有以下纤维化 $\pi: M \rightarrow \Delta$, 使得 $M_0 = \pi^{-1}(0)$ 与 C 一致, $M_u = \pi^{-1}(u)$ 同上.

如果存在另一个例外曲线分支 E_{j_1} 经过 Q (方程可设为 $x = 0$), 那么可以选取合适的 φ, ψ , 使得 \mathcal{D}_u 与 E_{j_1} 也正常交 $(\tilde{C}_r \cdot E_{j_1})_Q$ 个不同的点. 这样我们也得到满足上述条件的纤维化 $\pi: M \rightarrow \Delta$. 我们称这样的 π 为 (C, p) 的 A 型裂变 (Fisson), 或者说 (C, p) 通过 Q 附近的扰动裂变成 (M_u, p) 和 (M_u, Q) .

如果 E_{j_1} 经过 Q , 但 $\psi(u) \equiv 0$, 那么我们有另一种裂变. 此时 \mathcal{D}_u 有一个奇点 $Q_u = (\varphi(u), 0)$ 在 E_{j_0} 上, 而 \mathcal{D}_u 与 E_{j_1} 正常交 $(E_{j_1} \cdot \tilde{C}_r)$ 个不同点. 这样我们可以构造 $\pi: M \rightarrow \Delta$, 使得 M_u ($u \neq 0$) 只有一个奇点在 p 处, 但该奇点与原来的 (C, p) 不同. 我们称 π 为 B 型裂变.

例 4.5.2 (1) 曲线奇点 $x^3 + y^n = 0$ ($0 < 3k < n$) 通过扰动第 k 次爆发后的无穷接近奇点裂变成奇点 $x^3 + y^{3k} = 0$ 和 $x^3 + y^{n-3k} = 0$.

(2) 曲线奇点 $x^5 + y^3 = 0$ 通过 B 型裂变为 $(x^4 + y^2)(x + y) = 0$. ■

为了构造超椭圆曲线族的分裂形变, 我们只需要构造直纹面上二次覆盖的分歧轨迹奇点的裂变. 设 $W = \mathbb{P}^1 \times \Delta$ 上有一个局部二次覆盖, 分歧轨迹为 R , Γ_0 是 W 的中心纤维. 为讨论方便, 我们有以下几类特殊的 (W, R) .

类型 0₀: R 不含 Γ_0 且与后者在一点 P 处光滑相切两重, 在其他交点处正常交. 它对应的超椭圆纤维芽是仅带一个不可分离点的稳定曲线.

类型 I: R 不含 Γ_0 且在一点 $P \in \Gamma_0$ 处有通常 $2g' + 2$ 重点 ($1 \leq g' \leq [\frac{g-1}{2}]$), 且切方向与 Γ_0 不同, R 与 Γ 在其他交点处正常交. 它对应的超椭圆纤维芽是带两个不可分离点的稳定曲线, 有两个不可约分支, 亏格分别为 g' 和 $g - g' - 1$.

类型 II: $\Gamma_0 \subseteq R$, 考虑如下一系列爆发

$$(W, R) \xleftarrow{\sigma_1} (W_1, R_1) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \xleftarrow{\sigma_n} (W_n, R_n),$$

使得 R_n 的奇点都是通常奇点. 设 Γ_i 是 Γ_0 在 W_i 中的完全原像. 它要满足以下条件:

- (a) R_n 包含 Γ_i ,
- (b) R_n 的奇点都是偶数重,
- (c) R_i 的偶数重奇点都是通常奇点 ($1 \leq i \leq n$),
- (d) 如果 R_i 与 Γ_0 在点 P 不是 1-相切, 那么在爆发一次 P 后, $R_1 - \Gamma_1$ 与 Γ_1 是 3-相切,
- (e) 如果 R 有一个通常二重点, 那么其水平部分 R_{hor} 与 Γ_0 是 3-相切.

(两条曲线在交点 Q 是 n -相切, 是指它们在 Q 处各包含一个局部不可约分支, 使得这两个分支在 Q 处爆发 n 次后仍然相交).

注 4.5.3 奇异纤维中的可分离点 (Separable point) 是指这样的结点: 挖掉该点后整个纤维不连通. 反之, 则称该结点为不可分离点.

命题 4.5.2 ([AA01]) 任何超椭圆纤维芽必能通过一系列分裂族分裂成一些类型 0_0 或类型 I 或类型 II 对应的奇异纤维芽. 特别地, 如果 Horikawa 数 $H_F = 0$, 那么 F 能分裂成一些类型 0_0 的纤维芽.

推论 4.5.2 ([AA04]) 亏格 3 超椭圆纤维化能分裂成以下几类:

类型 0_0 : 局部方程为 $z^2 = (t + u^2)(u^6 - 1)$, 对应的纤维芽是带一个不可分离点的稳定曲线.

类型 I: 局部方程为 $z^2 = (t^4 + u^4)(u^4 - 1)$, 对应的纤维芽是带两个不可分离点的稳定曲线, 由两条光滑椭圆曲线组成.

类型 II(i): 局部方程为 $z^2 = (u^3 + t^6)(u^5 - 1)$, 对应的纤维芽是带一个可分离点的稳定曲线.

类型 II(ii): 局部方程为 $z^2 = (t^2 + u^4)(t^2 + (u + 1)^4)$, 对应的纤维芽是一条二重纤维, 带两个可分离点, 既约部分由两条光滑椭圆曲线及一条 (-2) 曲线组成.

类型 II(iii): 局部方程为 $z^2 = (t^4 + u^8)$, 对应的纤维芽是一条二重光滑曲线.

特别地, 通过等奇异性形变, 类型 II(ii) 纤维芽可以分裂为类型 I 和类型 II(iii).

注 4.5.4 类型 II 对应的亏格 g 纤维芽是否可以进一步分解成更简单的奇异纤维, 仍是个未解决的问题.

有趣的是, 超椭圆纤维芽的分裂形变能保持 Horikawa 数 H_F 以及 e_F 不变.

命题 4.5.3 ([AA04]) 设超椭圆纤维芽 F 有分裂 $F \rightarrow F_{u,1} + \cdots + F_{u,l}$, 那么

$$H_F = \sum_{i=1}^l H_{F_{u,i}},$$

$$e_F = \sum_{i=1}^l e_{F_{u,i}}.$$

特别地, 超椭圆纤维化的形变不影响其相对不变量.

证明 在超椭圆情形, 拓扑指标 $Sign(S) = K_f^2 - 8\chi_f$ 可以通过纤维的局部贡献值来计算, 即 $Sign(S) = \sum_F \sigma(F)$. [Ter00] 指出 $\sigma(F)$ 是 [End00] 定义的拓扑局部符号差. 这样, $\sigma(F)$ 和 e_F 作为拓扑类型的局部指标, 在分裂形变下保持不变. 注意到

$$H_F = \frac{2g+1}{g}\sigma(F) + \frac{g+1}{g}e_F.$$

因而 H_F 在形变下也保持不变. ■

关于黎曼曲面退化的更多拓扑性质, 读者可以参看 Ashikaga 和 Endo 的综述性文章 [AE06], 或前者与 Konno 的综述文章 [AK00].

本章习题

习题 4.1 证明引理 4.1.3 (3) 中的 π'' 是满射.

习题 4.2 设 $f_\Delta : S_\Delta \rightarrow \Delta$ 是 F_0 的局部纤维芽, 且 F_0 不是重纤维. 证明: $\pi_1(S_\Delta)$ 等于其垂直部分.

习题 4.3 设 $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ 是有限基变换, $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是诱导的纤维化, 证明: $\pi_* |_{\mathcal{V}_{\tilde{f}}} : \mathcal{V}_{\tilde{f}} \rightarrow \mathcal{V}_f$ 是满射, 特别地, 当 π 是不变基变换时, 它是同构. 举例说明一般情形下, 该映射未必是同构.

习题 4.4 设 \mathcal{K} 是垂直部分 \mathcal{V}_f 的具有有限指标的正规子群, 则存在 $\pi_1(S)$ 中的一个具有有限指标的子群 \mathcal{J} 使得 $\mathcal{J} \cap \mathcal{V}_f = \mathcal{K}$.

习题 4.5 试用拓扑方法证明: 单连通纤维不可能是重纤维.

习题 4.6 试计算半稳定亏格 g 奇异纤维的 Picard-Lefschitz 单值矩阵.

习题 4.7 列出所有亏格 2 黎曼曲面的周期映射.

习题 4.8 证明推论 4.3.3.

习题 4.9 请具体证明引理 4.4.3 的结论.

习题 4.10 证明命题 4.4.1.

习题 4.11 设 $f : S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, 且所有奇异纤维都是光滑曲线的整数倍, 证明: $\mathcal{V}_f \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

习题 4.12 试计算例 5.6.4 的垂直部分的挠 2 商.

习题 4.13 设 $\tilde{\mathcal{V}}$ 是 \mathcal{V}_f 的 Abel 化, $\tilde{\mathcal{V}}$ 的无挠部分的秩为 r . 证明: $q_f \leq \frac{r}{2}$.

习题 4.14 设 $f : S \rightarrow \Delta$ 是超椭圆曲线族, 拓扑单值为 $[\phi]$, $I : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ 是对合映射. 证明: $[\phi \cdot I] = [I \cdot \phi]$.

习题 4.15 证明公式(4-5).

第五章 特殊纤维化研究

5.1 几何直纹面

这一节中我们设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 0 相对极小纤维化. 我们这里统称为几何直纹面 (Ruled surface).

引理 5.1.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是几何直纹面, 则

- (1) 小平维数 $\kappa(S) = -\infty$.
- (2) F 在数值等价类群 $Num(S)$ 中不可除.
- (3) Neron-Severi 群 $NS(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$.
- (4) 设 D 是 S 上满足 $DF = 1$ 的除子, 则当 $n \gg 0$ 时, 有 $h^0(D + nF) \geq 2$.

证明 (1) 设 F 是一般纤维, $F \sim \mathbb{P}^1$, $K_S F = -2$. 假设对某个正整数 n , 线性系 $|nK_S|$ 非空. 不妨设 $E \in |nK_S|$, 因此 $EF = -2n$, 这就和 F 的 nef 性矛盾! 故 $\kappa(S) = \infty$.

(2) 假设 F 在数值等价类群中可除, 即 $F \sim nD$, $n > 1$. 于是 $D^2 = 0$, $DK_S = -\frac{2}{n}$. 注意到 DK_S 是偶数, 所以 $n = 1$, 矛盾! 故 F 不可除.

(3) 由正合列 $\rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$ 立得.

(4) 考虑正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(D + (n-1)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(D + nF) \rightarrow \mathcal{O}_F(D + nF) \rightarrow 0.$$

它诱导上同调正合列

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(D + (n-1)F) \rightarrow H^0(D + nF) \xrightarrow{a_n} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \\ &\rightarrow H^1(D + (n-1)F) \xrightarrow{b_n} H^1(D + nF) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 0. \end{aligned}$$

由 b_n 的满射性知, $h^1(D + nF) \leq h^1(D + (n-1)F) \leq \dots \leq h^1(D)$. 因此当 n 充分大后, b_n 是同构, 从而 a_n 是满射. 这样 $h^0(D + nF) \geq h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 2$. \blacksquare

命题 5.1.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是几何直纹面, 则必存在 f 的截面 Γ .

证明 设 F 是一般纤维. 由于 $\{DF \mid D \in Pic(S)\}$ 是 \mathbb{Z} 中的子群, 故必等于 $d\mathbb{Z}$ ($d \geq 1$). 这就诱导了满同态 $NS(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, $D \rightarrow \frac{1}{d}DF$. 注意到 $NS(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$, 由庞加莱对偶定理, 相交型 $\cup: NS(S) \times NS(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ 具有单模性. 因此上述的同态表明, 存在 $D' \in Pic(S)$, 使得 $D'D = \frac{1}{d}DF$, 故 $F \sim dD'$. 由引理 5.1.1 可知 $d = 1$, 从而可取 D 使得 $DF = 1$.

由引理 5.1.1, 对充分大正整数 n , 线性系 $|D + nF|$ 含有有效除子 D' , 则 $D'F = 1$. 因此 D' 中有一个不可约分支 Γ , 满足 $\Gamma F = 1$, 即 Γ 是截面. \blacksquare

推论 5.1.1 设 Γ 是几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 的截面, 那么 $\mathcal{E} = f_*\mathcal{O}_S(\Gamma)$ 是秩 2 的局部自由

层, 且存在同构 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathcal{E})$, 使下图交换

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1(\mathcal{E}) \\ & \searrow f & \downarrow \varphi_0 \\ & & C \end{array}$$

这里 $\varphi_0: \mathbb{P}^1(\mathcal{E}) \rightarrow C$ 是射影丛. 特别地, S 双有理等价于 $C \times \mathbb{P}^1$.

证明 命题的前半部分留给读者; 后半部分是命题 1.2.3 的直接推论. ■

命题 5.1.2 设 Γ 是几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 的截面, 则 $\text{Pic}(S) \cong f^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}[\Gamma]$.

证明 设 $D \in \text{Pic}(S)$, $d = DF$. 记 $D' = D - d\Gamma$, 于是 $D'F = 0$. 如果 $D' \geq 0$, 那么 D' 的所有分支都落在纤维中. 注意到每条纤维都是光滑射影直线, 所以 D' 的每个不可约分支都是同构于 \mathbb{P}^1 纤维, 即 $D' \in f^*\text{Pic}^0(C)$.

如果 D' 不是有效除子, 那么引理 5.1.1, 对充分大正整数 n , 线性系 $|D + nF|$ 含有有效除子 D'' . 类似上述讨论, $D'' \in f^*\text{Pic}(C)$, 从而 $D' \in f^*\text{Pic}(C)$.

剩下的就是证明 $f^*\text{Pic}(C) \cap \mathbb{Z}[\Gamma] = 0$. 假设存在 $B \in \text{Pic}(C)$ 及某整数 n , 使得 $f^*(B) \equiv n\Gamma$. 于是 $0 = n\Gamma F = n$, 故得结论. ■

推论 5.1.2 设 Γ 是几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 的截面, F 是一般纤维. 那么数值等价群 $\text{Num}(S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 由 Γ 和 F 生成. 我们有 $K_S \sim -2\Gamma + (2g(C) - 2 + \Gamma^2)F$. 特别地, $K_f^2 = \chi_f = e_f = 0$.

推论 5.1.3 $q(S) = g(C)$, $p_g(S) = 0$.

推论 5.1.4 几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 最多只有一个截面自交数为负.

证明 设 Γ, Γ' 都是自交数为负的截面, $\Gamma' \sim \Gamma + rF$. 于是 $r = \Gamma'^2 - \Gamma\Gamma' < 0$, 而 $r = \Gamma\Gamma' - \Gamma^2 > 0$, 矛盾! ■

回顾有效除子 D 的相对分歧指数 $r(D) = D^2 + DK_{S/C}$.

推论 5.1.5 设 D 是几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 中任意有效除子, F 是一般纤维, $d = DF$, 则

$$\begin{aligned} r(D) &= (1-d)K_{S/C}D, \\ dr(D) &= (d-1)D^2. \end{aligned}$$

设 D' 是另一有效除子, $d' = D'F$, 那么

$$2(d-1)(d'-1)DD' = d'(d'-1)r(D) + d(d-1)r(D').$$

即

$$2DD' = -d'K_{S/C}D - dK_{S/C}D'.$$

证明 $(D, F, K_{S/C})$ 是由三个除子构成的相交数矩阵. 注意到此时数值等价群仅由两个元生成, 所以该矩阵的行列式为 0. 直接展开该行列式即得前两式. 进一步, 对 $(D + D', F, K_{S/C})$ 类似讨论, 即得第三式. ■

对直纹面上的除子线性系, 我们可以做更精细的分析.

命题 5.1.3 设 Γ 是几何直纹面 $f: S \rightarrow C$ 的截面, $e = -\Gamma^2$, $0 \leq k \leq 2$, $b = g(C)$.

- (1) 当 $n > 2b - 2 + k + \max e$, 0 时, $|nF + \Gamma|$ 必是 k -可分的;
- (2) 当 $e > 0$, $n = 2b + e$ 时, $|nF + \Gamma|$ 在 $U = X \setminus \Gamma$ 上是 2-可分的, 即非常丰富.

证明 (1) 直接来自于推论 1.2.2.

(2) 如果 $|nF + \Gamma|$ 不是 2-可分的, 那么不满足独立性条件的点包含在除子 D 内, D 满足 $DF = 1$, $D \leq 2b + r(D) - D\Gamma$. 假设 $D = \Gamma' + \sum_{i=1}^r F_i$, Γ' 是截面, F_i 是纤维. 这样 $n \leq 2b - r - \Gamma'\Gamma \leq 2b + e$. 若 $n = 2b + e$, 则 $r = 0$, $\Gamma' = \Gamma$, 即 $D = \Gamma$. ■

当底曲线 $C \cong \mathbb{P}^1$ 时, 任何秩 2 局部自由层都分裂为两个线丛直和, 因此其射影丛总可写为 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-e))$, $e \geq 0$. 这样的射影丛定义的直纹面, 称作 Hirzebruch 曲面, 记为 \mathbb{F}_e . 由推论 5.1.1, \mathbb{P}^1 上的直纹面必是 Hirzebruch 曲面, 且上述的 e 是它的不变量.

设 $[t_0 : t_1]$ 是 \mathbb{P}^1 的齐次坐标, $U_i = \{t_i \neq 0\}$ ($i = 0, 1$). 我们记 $t = \frac{t_1}{t_0}$ 及 $s = \frac{t_0}{t_1}$ 分别是 U_0 和 U_1 的局部仿射坐标. 考虑分裂层 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$, 其截面可写为 $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$, $x \rightarrow (s_{i1}(x), s_{i2}(x))$ ($i = 0, 1$), 满足

$$s_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{t_i}{t_j})^e \end{pmatrix} s_j.$$

用 $\bar{s}_i := [s_{i1} : s_{i2}]$ 表示 s_i 在射影化后对应的截面, 我们显然可以构造两个自然的截面:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{\bar{s}_i: U_i \rightarrow \mathbb{P}^1, x \rightarrow [1, 0] \}, \\ \sigma_\infty &= \{\bar{s}_i: U_i \rightarrow \mathbb{P}^1, x \rightarrow [0, 1] \} \end{aligned}$$

分别记 C_0, C_∞ 为 σ_0, σ_∞ 在 \mathbb{F}_e 上对应的除子.

推论 5.1.6 Hirzebruch 曲面 \mathbb{F}_e 上具有截面 C_0, C_∞ , 使得

- (1) $C_0 \equiv C_\infty + eF$, $C_0 C_\infty = 0$, $C_0^2 = -C_\infty^2 = e \geq 0$.
- (2) $|C_0| = |eF + C_\infty|$ 定义了全纯映射

$$\varphi: \mathbb{F}_e \rightarrow \Sigma_e,$$

这里 $\Sigma_e \subseteq \mathbb{P}^{e+1}$ 是 e 次有理锥, $v = \varphi(C_0)$ 是锥点, $\mathbb{F}_e \setminus C_\infty \cong \Sigma_e \setminus \{v\}$.

开曲面 $\mathbb{F}_e \setminus C_\infty$ 是仿射开集 $V_i = U_i \times \mathbb{C}$ 的并, 这里 V_i 的局部坐标分别为 (t, u) 和 (s, v) . 它们之间的坐标变换为 $t = \frac{1}{s}$, $u = \frac{v}{s^e}$.

推论 5.1.7 设 $b \geq ea > 0$, 那么线性系 $|aC_\infty + bF|$ 中的除子在 V_0 中总可以用如下形式的方程表达:

$$\sum_{i=0}^a d_i(t) u^{a-i}, \quad \deg d_i(t) \leq b - ea + ei.$$

特别地, 我们有

$$\begin{aligned} h^0(aC_\infty + bF) &= (a+1)(b+1) - \frac{a(a+1)}{2}e, \\ h^1(aC_\infty + bF) &= 0. \end{aligned}$$

通过坐标变换, 我们也能得到 V_1 的局部表达式.

5.2 椭圆纤维化

这一节中, 我们设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 1 相对极小纤维化. 它称为椭圆纤维化 (Elliptic fibration). 设 F 是奇异纤维. 注意到 $K_{S/C}F = 0$, 所以当 F_{red} 可约时, 由 Zariski 引理可知, 它的每个不可约分支都是 (-2) -曲线. 利用拓扑单值及 MM-定理的讨论, 我们可以得到以下的小平邦彦椭圆纤维分类列表.

定理 5.2.1 (Kodaira 分类定理 [Kod60]) 设 $F = mF_0$ 是奇异纤维, m 是纤维的重数. F 有以下几类情形.

情形 A: F 是单重纤维, 即 $m = 1$.

I_0 型: F 是非奇异椭圆曲线, 其 Picard-Lefschetz 单值.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_1 型: F 是带有一个结点的有理曲线, 其 Picard-Lefschetz 单值.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_b 型 ($b \geq 2$): F 由 b 条 (-2) -曲线首尾相接连成一个圈, 对偶图记为 \tilde{A}_{b-1} , 其 Picard-Lefschetz 单值.

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II 型: F 是带有一个通常尖点的有理曲线, 它的拓扑单值对应价为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

III 型: F 是两条相切的 (-2) -曲线, 它的拓扑单值对应价为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV 型: F 是三条 (-2) -曲线交于同一点, 它的拓扑单值对应价为 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

I_0^* 型: F 是 \tilde{D}_4 型, 它的拓扑单值对应价为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I_b^* 型 ($b \geq 1$): F 的对偶图是 \tilde{D}_{b+4} 型, 它的拓扑单值对应带有双边割线的伪周期映射, 在 2 次基

变换后即变为 I_{2b} 型. 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II^* 型: F 是 II 型纤维的对偶模型, 对偶图记为 \widetilde{E}_8 , 它的拓扑单值对应价为 $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

III^* 型: F 是 III 型纤维的对偶模型, 对偶图记为 \widetilde{E}_7 , 它的拓扑单值对应价为 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV^* 型: F 是 IV 型纤维的对偶模型, 对偶图记为 \widetilde{E}_6 , 它的拓扑单值对应价为 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ 的周期映射, 其 Picard-Lefschetz 单值

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

情形 B : F 是多重纤维, 即 $m > 1$. 此时 F 是 mI_b 型 ($b \geq 0$), 即 F_0 是 I_b 型, 并且两者有相同的 Picard-Lefschetz 单值.

由上面的分类表, 我们显然有以下推论.

推论 5.2.1 椭圆纤维化的单重奇异纤维芽由 Picard-Lefschetz 单值唯一决定. 进一步, 单重奇异纤维是半稳定的当且仅当它不是单连通的.

设 \mathcal{L} 是 C 上的任意可逆层. 利用命题 1.2.3 及射影公式, 我们有典范的相伴映射

$$f^*(f_*\omega_{S/C} \otimes \mathcal{L}) \longrightarrow \omega_{S/C} \otimes f^*\mathcal{L}.$$

注意到 $f_*\omega_{S/C}$ 此时也是线丛, 且上述态射非零, 因此存在 S 上的有效除子 D , 使得

$$\omega_{S/C} \otimes f^*\mathcal{L} = f^*(f_*\omega_{S/C} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_S(D). \quad (5-1)$$

引理 5.2.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, F 是纤维, 那么

- (1) $K_{S/C}^2 = 0$.
- (2) 如果 F 不是重纤维, 那么 $\mathcal{O}_F(\omega_{S/C}) \cong \mathcal{O}_F$.
- (3) 如果 $F = mF_0$ 是 m 重纤维, 则 $\mathcal{O}_{F_0}(\omega_{S/C}) = \mathcal{O}_{F_0}((m-1)F_0)$.

证明 当 \mathcal{L} 充分丰富时, (5-1) 式左边线丛有整体截面, 设它对应的有效除子为 H . 于是 $HF = 0$, 从而 H 的不可约分支都落在纤维中, 故有 $K_{S/C}^2 = H^2 \leq 0$. 又因为 $K_{S/C}^2 \geq 0$, 故 $K_{S/C}^2 = H^2 = 0$. 对于纤维 F , 由 Zariski 引理, $H \sim \gamma F$. 特别地, 若 F 是单重纤维, 则 γ 是整数. 这样就证明了 (1)(2).

上面的讨论也说明 $\mathcal{O}_{F_0}(\omega_{S/C}) = \mathcal{O}_{F_0}(aF_0)$, 对某个整数 a 成立. 由引理 1.1.1, 可设 $0 \leq a \leq m-1$. 利用相伴公式, 我们有 $\mathcal{O}_{F_0}((a+1)F_0) = \mathcal{O}_{F_0}(K_{F_0})$. 注意到 F_0 是 I_b 型 ($b \geq 0$), 由引理 1.1.3 可知, $\mathcal{O}_{F_0}(K_{F_0}) = \mathcal{O}_{F_0}$ 是平凡的, 故引理 1.1.1 推出 $m \mid (a+1)$, 即 $a = m-1$. ■

定理 5.2.2 设 $\{F_i = m_i D_i\}_{i=1}^r$ 是所有多重纤维, 这里 $m_i > 1$ 是 F_i 的重数, 则

$$\omega_{S/C} = f^* f_* \omega_{S/C} \otimes \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_S((m_i - 1)D_i),$$

即

$$\omega_{S/C} = f^* f_* \omega_{S/C} \otimes \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_S\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)F_i.$$

特别地, $K_{S/C} \sim (\chi(\mathcal{O}_S) + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}))F$.

证明 在公式(5-1)中, 取充分丰富线丛 \mathcal{L} , 可使 D 落在所有重纤维中. 类似地讨论可知 $D^2 = 0$, 故 $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$. 将式 (5-1) 分别限制在 D_i 上, 则由引理 5.2.1 立得结论. ■

推论 5.2.2 如果 $f: S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, 那么小平维数 $\kappa(S) \leq 1$. 反过来, 如果一个极小曲面 S 的小平维数 $\kappa(S) = 1$, 则它必有一个椭圆纤维化.

证明 如果 $f: S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, 设 F 是一般纤维. 由前面讨论可知, $\mathcal{O}_F(K_S) = \mathcal{O}_F$, 因此我们有以下正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(nK_S - kF) \longrightarrow \mathcal{O}_S(nK_S - (k-1)F) \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

因此 $h^0(S, nK_S - (k-1)F) \leq h^0(S, nK_S - kF) + 1$. 特别地, 我们有 $h^0(S, nK_S) \leq h^0(S, nK_S - kF) + k$.

取 S 上充分丰富除子 H 以及整数 $a > \frac{K_S H}{F H}$, 于是 $(K_S - aF)H < 0$, 这表明 $h^0(K_S - aF) = 0$. 结合上述讨论, 我们得到 $h^0(S, nK_S) \leq h^0(S, nK_S - naF) + na = na$. 这就推出 $\kappa(S) \leq 1$.

反过来, 设 S 的小平维数等于 1. 我们可以找到整数 n , 使得 $h^0(S, nK_S) \geq 2$, 故可设 $|nK_S| = |M| + Z$, 这里 Z 是固定部分, M 是移动部分. 由于 $K_S^2 = 0$, 且 K_S nef, 故 $M^2 = MZ = K_S M = K_S Z = 0$. 因此 $|M|$ 无基点, 定义了一个全纯态射 $\varphi: S \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{P}^N$. 由于 φ 收缩 $|M|$ 内的任何有效除子, 故 $\dim \Sigma = 1$. 利用 Stein 分解, 我们就得到一个纤维化 $f: S \rightarrow C$. 对 f 的一般纤维 F , 有 $0 \leq K_S F \leq K_S M = 0$, 即 $K_S F = 0$, 从而 f 是椭圆纤维化. ■

对于 $\kappa(S) = 0, -\infty$ 的曲面, 如果它带有椭圆纤维化, 那么我们可以利用定理 5.2.2 给出更为精细的不变量刻画. 读者可以参考 [Xia92, 定理 3.2.4], 此处不再赘述.

定理 5.2.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, 且含有一条非光滑多重纤维的奇异纤维, 则垂直部分 $\mathcal{V}_f = \{1\}$. 特别地, 如果 $f: S \rightarrow C$ 不含重纤维, 那么 $\pi_1(S) = \pi_1(C)$.

证明 假设 $\mathcal{V}_f \neq 0$, 我们欲导出矛盾.

由命题 4.1.2 可知 $f: S \rightarrow C$ 不含有单连通纤维. 因此由分类定理 5.2.1 知所有奇异纤维都是 mI_b 型. 进一步, 由习题 4.3 知, 任何基变换后, 其垂直部分都非零. 通过合适的基变换, 我们不妨假设 $f: S \rightarrow C$ 半稳定, 且有截面, 它在每条光滑纤维上诱导了一个对合映射, 使得它限制在纤维上是不动点. 过渡到整体上即诱导了一个几何直纹面 $\varphi_0: P_0 \rightarrow C$ 上的二次覆盖 $\pi: S_0 \rightarrow P_0$, S 双有理于 S_0 . 通过合适的基变换以及 $\varphi_0: P_0 \rightarrow C$ 上的双有理变换, 我们可以假设分歧轨迹由截面组成, 且所有分歧轨迹奇点都是二重点, 且 $\varphi_0: P_0 \rightarrow C$ 任何一条纤维最多有一个这样的奇点.

由假设, $f: S \rightarrow C$ 的奇异纤维 F' 都是 I_m 型. 设 F_0 是它在 P_0 中的像纤维. 这样 F_0 恰好有一个二重点; 除该点之外, F_0 还与分歧轨迹横截相交两点. 因为分歧轨迹 R 由截面组成, 且 $RF_0 = 4$, 故不妨设 $R = \sum_{i=1}^4 R_i$, R_1, R_2 在 F_0 上交于一点 p . 由直纹面的性质可知, $R_1 + R_2$ 与 $R_3 + R_4$ 至少有一个交点 $q (\neq p)$. 设 F'' 是 S 中的纤维, 其在 P_0 中的像纤维过 q .

由推论 4.1.4, $\mathcal{V}_f = \pi_1(F)/H$, 这里 F 是一般纤维, H 是所有奇异纤维零化环路生成子群. 由上面的讨论, F', F'' 提供了 F 中两个不同伦的零化环路. 因此 $H = \pi_1(F)$, 即 $\mathcal{V}_f = \{1\}$. 这与我们开始的假设矛盾!

命题后半部分直接来自于命题 4.1.1. ■

推论 5.2.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是非 isotrivial 的椭圆纤维化, 且不含多重纤维, 则 Neron-Severi 群 $NS(S)$ 不含挠元.

证明 设 η 是 $Pic(S)$ 的 n 阶挠元. 它诱导了平展覆盖 $\Pi: \tilde{S} \rightarrow S$, 即 $\pi_1(S) = \pi_1(C)$ 中一个指标为 n 的正规子群 H . H 也诱导了 n 阶平展覆盖 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$. 易知 Π 是 π 的拉回, 从而 η 是 $Pic(C)$ 中某个 n 阶挠元 γ 的拉回, 故 $\eta \in Pic^0(C)$. 由交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^1(S, \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\alpha_S} & Pic(S) & \xrightarrow{c_1} & NS(S) \\ \uparrow & & \uparrow f^* & & \uparrow \beta \\ H^1(C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\alpha_C} & Pic(C) & \longrightarrow & H^2(C, \mathbb{Z}) \end{array}$$

即得 $\eta \in Pic^0(S)$. ■

推论 5.2.4 ([Moi77], 定理 10) 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小椭圆纤维化, 则 S 是单连通曲面当且仅当它满足以下各条件:

- (1) $C \cong \mathbb{P}^1$;
- (2) f 含有一条不是光滑多重纤维的奇异纤维;
- (3) f 最多有两条多重纤维, 且若 f 恰有两条多重纤维, 那么它们的重数互素.

证明 如果 (1)(2)(3) 成立, 那么由定理 5.2.3 及命题 4.1.1 可知 $\pi_1(S) = \{1\}$.

反之, 假设 S 单连通, 那么 $\mathcal{V}_f = \mathcal{H}_f = \{1\}$. 于是由命题 4.1.1 及推论 4.1.3 可知, (1)(3) 成立, 且 $q_f = 0$, 从而 (2) 成立. ■

5.3 超椭圆纤维化

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的超椭圆纤维化, 即一般纤维都是亏格 g 的光滑超椭圆曲线. 由命题 1.2.3 (2), 我们有由 $f_*\omega_{S/C}$ 诱导的有理映射 Φ_K , 满足以下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\Phi_K} & \mathbb{P}(f_*\omega_{S/C}) \\ & \searrow f & \swarrow \\ & & C \end{array}$$

注意到一般纤维是超椭圆的, 因此 Φ_K 的像是一个几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$. 因此 Φ_K 实际上诱导了 S 到 P 上的一般二次覆盖. 进一步, 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S_0 & \xleftarrow{\tau} & \tilde{S} \\
 & \nearrow \pi_0 & \uparrow \tau_0 & & \downarrow \rho \\
 P_0 & \xleftarrow{\quad} & \hat{S} & \xrightarrow{\epsilon} & S \\
 & \searrow \hat{\Phi} & \downarrow \hat{\Phi} & \searrow \Phi_K & \downarrow f \\
 & & P_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & C
 \end{array}$$

这里 $\epsilon : \hat{S} \rightarrow S$ 是一系列爆发的复合, 使得 $\hat{\Phi} : \hat{S} \rightarrow P_0$ 成为二次态射, 并且可以假设 \hat{S} 不含垂直的 (-1) -曲线. 对 $\hat{\Phi}$ 作 Stein 分解, 使得 $\pi_0 : S_0 \rightarrow P_0$ 成为二次覆盖. $\tau : \tilde{S} \rightarrow S_0$ 是对 S_0 所有奇点做典范解消所得到的光滑曲面. 由相对极小模型的唯一性, 我们可以通过收缩 \tilde{S} 中的所有垂直 (-1) -曲线得到 S , 即 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$.

这样, 为了研究超椭圆纤维化, 我们只需要讨论几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$ 上的二次覆盖 $\pi_0 : S_0 \rightarrow P_0$. 后面我们会看到, 用组合结构及拓扑单值的方法讨论超椭圆奇异纤维的分类, 没有太大的实际价值; 而用二次覆盖分歧轨迹的性态来刻画超椭圆奇异纤维是更为本质和有效的方法. 同样地, 用二次覆盖计算纤维化的不变量也非常的方便, 并且可以更清晰地看到局部与整体之间的联系. 这种重要的思想方法最早来自于 Horikawa [Hor77] 对于亏格 2 纤维化的研究. Matsusaka [Mat90] 讨论了更为一般的情形. 肖刚 [Xia92] 在 Horikawa 的基础上作了较大改进, 引入了奇异性指数的概念.

考虑二次覆盖 $\pi_0 : S_0 \rightarrow P_0$ 的典范解消.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{S} = S_k & \xrightarrow{\tau_k} & \cdots & \xrightarrow{\tau_2} & S_1 & \xrightarrow{\tau_1} & S_0 \\
 \tilde{\pi} = \pi_k \downarrow & & & \downarrow \pi_2 & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_0 = \pi \\
 \tilde{P} = P_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_2} & P_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0
 \end{array} \tag{5-2}$$

这里 σ_{i+1} 是 P_i 在 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i 处的爆发. S_{i+1} 是 $P_{i+1} \times_{P_i} S_i$ 的正规化. $\tilde{\pi} = \pi_k$ 有光滑的分歧轨迹. 因此 $\tilde{S} = S_k$ 是光滑的. 我们记 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, E_i 是 σ_i 对应的例外曲线, \mathcal{E}_i 是 E_i 在 σ 下的完全原像.

设 m_i 是分歧轨迹奇点 p_i 的重数, $w_i = [\frac{m_i}{2}]$. π_0 和 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹分别记为 R 和 \tilde{R} . 由 Hurwitz 公式可知, $RF = 2g + 2$. 进一步, 由二次覆盖的计算可知,

$$\begin{aligned}
 \tilde{R} &= \sigma^* R - 2 \sum_{i=0}^{k-1} w_i \mathcal{E}_{i+1}, \\
 K_{\tilde{S}}^2 &= 2K_{P_0}^2 + 2K_{P_0}R + \frac{1}{2}R^2 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} (w_i - 1)^2 \\
 \chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) &= 2\chi(\mathcal{O}_{P_0}) + \frac{1}{8}R^2 + \frac{1}{4}K_{P_0}R - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} w_i(w_i - 1).
 \end{aligned} \tag{5-3}$$

引理 5.3.1 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 超椭圆纤维化, $\pi_0 : S_0 \rightarrow P_0$ 是由 f 诱导的二次覆盖,

$\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{P}$ 是典范解消, ε 是通过 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$ 收缩的垂直 (-1) -曲线条数. 那么

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{g-1}{2g+1}r(R) - 2\sum_{i=0}^{k-1}(w_i-1)^2 + \varepsilon, \\ \chi_f &= \frac{g}{4(2g+1)}r(R) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}w_i(w_i-1), \\ e_f &= r(R) - 2\sum_{i=0}^{k-1}(2w_i+1)(w_i-1) - \varepsilon. \end{aligned}$$

这里 $r(R)$ 是分歧轨迹 R 的相对分歧指数.

证明 由推论 5.1.5 及二次覆盖不变量公式 (5-3) 立得. ■

注 5.3.1 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$ 收缩垂直 (-1) -曲线, 并非指仅仅收缩 \tilde{S} 上那些孤立的垂直 (-1) -曲线. 事实上, 有一部分垂直负定曲线原本并非 (-1) -曲线, 但是在收缩了其他曲线之后, 它们也变成了 (-1) -曲线, 所以 ρ 也要收缩它们.

利用相对分歧指数的定义和公式(5-3), 立得以下结论.

引理 5.3.2 设 \tilde{R} 是 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹. 那么

$$r(R) = r(\tilde{R}) + 2\sum_{i=0}^{k-1}w_i(2w_i-1).$$

此外,

$$r(\tilde{R}) = r(\tilde{R}_h) - \sum_{E \subset \tilde{R}_v} 2,$$

这里 \tilde{R}_h (相应地, \tilde{R}_v) 是 \tilde{R} 的水平(相应地, 垂直)部分, E 跑遍所有垂直的分歧轨迹不可约分支.

引理 5.3.1 和引理 5.3.2 说明 f 的相对不变量计算主要取决于分歧轨迹奇点的解消数据 w_i 以及垂直 (-1) -曲线的条数. 因此, 我们需要对分歧轨迹奇点进行数值上的分类, 以便进一步简化上述的不变量计算公式. 首先我们可以利用几何直纹面的双有理变换, 将分歧轨迹 R 规范化.

引理 5.3.3 将 $\pi_0 : S_0 \rightarrow P_0$ 的分歧轨迹 R 的水平和垂直部分分别记为 R_h 和 R_v . 那么通过对几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$ 作合适的双有理变换, 总可以假设 (P_0, R) 相对极小, 且满足以下条件:

- (1) R_h 上每个奇点的重数不超过 $g+1$. 特别地, R 的奇点重数不超过 $g+2$, 如果恰为 $g+2$ 阶, 那么过该奇点的纤维 F 必落在 R_v 中.
- (2) φ_0 的纤维 F 至多包含一个 R_h 上的 $g+1$ 重奇点. 进一步, 如果 g 是偶数, 且 F 通过 R_h 中 $g+1$ 重奇点, 那么 F 不落在 R_v 中.

满足此条件的 (P_0, R) 称为规范模型.

证明 前半部分可参考 [Xia92, 引理 5.1.1], 其余情形请读者自证. ■

以下如无特别声明, 我们总假设 (P_0, R) 是规范模型.

注 5.3.2 我们这里的规范模型比 [Xia92] 稍强一些. 主要目的是为了排除 [Xia92, 引理 5.1.2] 中 g 为偶数的两类特殊情形.

回顾典范解消的交换图 (5-2), $E_{i+1}(\subseteq P_{i+1})$ 是通过爆发分歧轨迹奇点 $p_i(\in P_i)$ 得到的例外曲线, 其在 $\tilde{P} = P_k$ 中的完全原像为 \mathcal{E}_{i+1} . 为方便起见, 在不至混淆的情况下, 我们将 E_{i+1} 在 $\tilde{P} = P_k$ 中的严格原像也记作 E_{i+1} . 由于 p_i 是分歧点, 所以 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}$ 的支集是连通的负定曲线. 我们用 $Z_{1,i}$ 表示该支集上的基本闭链 (Fundamental cycle), 并令 $Z_{2,i} := \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} - Z_{1,i}$. 以下的有趣结论可以帮助我们分类二次覆盖奇点.

命题 5.3.1 上述分解 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_{1,i} + Z_{2,i}$ 满足以下性质:

- (1) $Z_{1,i} > Z_{2,i} \geq 0$. 进一步, 如果 $Z_{2,i} > 0$, 那么它也是自身支集上的基本闭链.
- (2) $Z_{1,i}Z_{2,i} = 0$.
- (3) $w_i = p_a(Z_{1,i}) + p_a(Z_{2,i})$, 这里 $w_i = [\frac{m_i}{2}]$, m_i 是分歧轨迹奇点 p_i 的重数.

我们称 $Z_{s,i}$ 为 p_i 的第 s -基本闭链. 特别地, 以下情形之一必定成立:

- (a) $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_{1,i}$, $Z_{2,i} = 0$. 此时 $Z_{1,i}^2 = -2$, $p_a(Z_{1,i}) = w_i - 1$.
- (b) $Z_{1,i}^2 = Z_{2,i}^2 = -1$, $w_i \geq p_a(Z_{1,i}) \geq p_a(Z_{2,i}) \geq 0$. 此时 E_{i+1} 落在分歧轨迹中. 设 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 2\Gamma$, 则 $\Gamma \leq Z_{2,i} < Z_{1,i}$.

证明 注意 $-2 = (\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1})^2 = Z_{1,i}^2 + Z_{2,i}^2 + 2Z_{1,i}Z_{2,i}$, 右式三项都小于等于零. 若 $Z_{1,i}Z_{2,i} < 0$, 则推出 $Z_{1,i}^2 = 0$, 矛盾! 因此必有 $Z_{1,i}Z_{2,i} = 0$, $Z_{1,i}^2 + Z_{2,i}^2 = -2$. 如果 $Z_{1,i}^2 = -2$, 那么 $Z_{2,i} = 0$.

以下假设 $Z_{1,i}^2 = -1$, 那么 $Z_{2,i}^2 = -1$. 此时由推论 1.1.2 立得 $Z_{1,i} > Z_{2,i}$. 对任何不可约分支 $\Gamma \leq Z_{2,i}$, 因为 $Z_{1,i}Z_{2,i} = 0$, 所以 $\Gamma Z_{1,i} = 0$, 从而 $\Gamma Z_{2,i} = \Gamma \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = \tilde{\pi}_*\Gamma \mathcal{E}_{i+1} \leq 0$, 因此 $Z_{2,i}$ 是自身支集上的闭链. 设 D 是 $Z_{2,i}$ 支集上的基本闭链, 显然有 $Z_{2,i} - D \geq 0$. 再由 $-1 = Z_{2,i}^2 = D^2 + (Z_{2,i} - D)^2 + 2D(Z_{2,i} - D) \leq D^2 \leq -1$ 推出 $Z_{2,i} = D$. 这样我们就证明了 (1)(2). 此时, 我们取不可约分支 $\Gamma \leq Z_{2,i}$, 使得 $\Gamma Z_{2,i} < 0$, 从而 $\Gamma \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} < 0$, 另一方面 $Z_{1,i} > Z_{2,i} \geq \Gamma$, 所以 $2\Gamma = \tilde{\pi}^*E_{i+1}$, 即 E_{i+1} 落在分歧轨迹中.

由 Hurwitz 公式 $K_{\tilde{S}} = \tilde{\pi}^*(K_{\tilde{P}} + \frac{1}{2}\tilde{R})$ 及式 (5-3) 立得 $p_a(\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}) = w_i - 1$, 即得 (3). 命题后半部分是直接推论. ■

注 5.3.3 关于曲面奇点和基本闭链的更多事实, 有兴趣的读者可以参看 [Art62, Art66], [Mil68], [Lau71, La77, Lau77], [Tyr68], [Wag70], [Yau79, Yau80] 等等.

回顾 $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ 收缩所有垂直 (-1) -曲线的.

引理 5.3.4 在典范解消图 (5-2) 的记号下, 假设 Γ 是被 ρ 收缩的垂直不可约分支, $E = \tilde{\pi}(\Gamma)$ 是其在 \tilde{P} 中的像分支. 那么

- (1) E 是落在分歧轨迹中的 (-2) -曲线, 从而 Γ 是 (-1) -曲线.
- (2) 如果 Γ 来自例外曲线, 那么在典范解消中存在某个分歧轨迹奇点 p_i 满足命题 5.3.1 情形 (b), 且有 $E = E_{i+1}$, $Z_{2,i} = \Gamma$.
- (3) 如果 Γ 来自于 P_0 的某条纤维 F_0 的拉回原像, 那么 g 是奇数, F_0 落在垂直分歧轨迹 R_v 中, 且 R_h 与 F_0 只交一个 $g+1$ 重点 p_0 , 局部相交数为 $2g+2$.

证明 通过爆发的过程, 我们可以构造 \tilde{S} 上一个有效除子 $D = \rho^*\rho_*\Gamma$ 满足: $D\Gamma = D^2 = -1$, $p_a(D) = 0$, 且 D 是自身支集上的基本闭链.

我们将 ρ 分为两部分: $\rho_1: \tilde{S} \rightarrow S'$ 先收缩由奇点的典范解消产生的 (-1) -曲线, $\rho_2: S' \rightarrow S$ 收缩剩下的垂直 (-1) -曲线.

Step 1. 首先考虑 Γ 被 ρ_1 收缩的情形. 此时上述 D 的支集完全落在例外曲线中. 我们找最大的下标 i 使得 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1}$ 包含 D 的支集. 由 i 的最大性, $\tilde{\pi}(D)$ 必定包含 E_{i+1} , 从而 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} D < 0$. 因为 $Z_{1,i} \geq D$, 故由基本闭链的性质可知 $Z_{1,i} D = 0$ (见习题 5.7, 或 [Wag70]). 这就迫使 p_i 必须满足命题 5.3.1 情形 (b), 从而 $Z_{2,i} D < 0$. 由推论 1.1.2 知 $D = Z_{2,i}$. 此时 $2\Gamma = \tilde{\pi}^* E_{i+1}$, E_{i+1} 落在分歧轨迹里.

这表明, 被 ρ_1 收缩的例外分支只能来自于分歧轨迹分支的拉回; 换言之, 那些不在分歧轨迹中的分支拉回后不可能贡献被 ρ_1 收缩的曲线. 由于 E_{i+1} 是孤立的分歧轨迹分支, 所以为了保证 Γ 被收缩, 必须要求 $E_{i+1}^2 = -2$, 即 $\Gamma^2 = -1$, 从而由推论 1.1.2 有 $Z_{2,i} = \Gamma$.

Step 2. 其次考虑 Γ 被 ρ_2 收缩的情形, 且 Γ 来自于 P_0 的某条纤维 F_0 的拉回原像. 由 ρ_2 的定义, 它必须先收缩这样的分支. 设 \tilde{F}_0 是 F_0 在 \tilde{P} 内的严格原像. 我们分情形讨论:

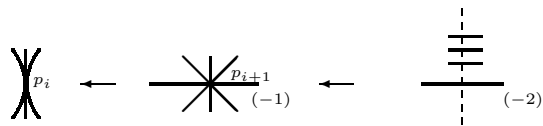
(1) 如果 $\tilde{\pi}^* \tilde{F}_0$ 由两个不可约分支组成 (Γ 是其中一个), 则由第一步可知 \tilde{F}_0 是 (-1) -曲线, 这在规范模型中是不可能的!

(2) 如果 $\tilde{\pi}^* \tilde{F}_0$ 不可约, 且 \tilde{F}_0 不在分歧轨迹中. 因为 Γ 是有理曲线, 所以这时 \tilde{F}_0 与分歧轨迹正常交两点. 结合第一步, 我们可以看到, 被 ρ_1 收缩的曲线中, 最多有两条与 Γ 相交 (因为它们在 \tilde{P} 的像落在分歧轨迹里), 且在收缩它们后 Γ 变为 (-1) -曲线. 这表明 $\Gamma^2 \geq -3$, 从而迫使 $\tilde{F}_0^2 = -1$, 这在规范模型中是不可能的!

(3) 如果 \tilde{F}_0 在分歧轨迹中, 那么由第一步的讨论立知 \tilde{F}_0 只能是孤立的 (-2) 曲线, 从而 Γ 是 (-1) -曲线. 此时, 结合规范模型的要求, 很容易验证: g 是奇数, F_0 落在垂直分歧轨迹 R_v 中, 且 R_h 与 F_0 只交一个 $g+1$ 重点 p_0 , 局部相交数为 $2g+2$. 进一步, 对上述这种特殊的分歧轨迹奇点作典范解消. 类似情形 (2) 的讨论可知, ρ_2 不再收缩其他任何分支. ■

现在我们给出二次覆盖奇点的数值分类. 在典范解消图 (5-2) 的记号下, p_i 必定出现在以下情形之一:

(I_w) 型: ([Xia92] 也称其为 $(2w+1 \rightarrow 2w+1)$ 型奇点) $Z_{1,i}^2 = Z_{2,i}^2 = -1$, $p_a(Z_{2,i}) = 0$, $w_i = w$. 此时 E_{i+1} 落在分歧轨迹中, 设 $\tilde{\pi}^* E_{i+1} = 2\Gamma$, 则 $\Gamma = Z_{2,i}$. 进一步, 爆发一次 p_i 后, E_{i+1} 上仅有唯一的一个无穷接近点 p_{i+1} , 它的解消数据 $w_{i+1} = w+1$; 再次爆发 p_{i+1} , E_{i+1} 成为孤立 (-2) -曲线.



由于这种 p_i 和它的无穷接近点 p_{i+1} 总是成对出现, 所以我们习惯上总是把它们捆绑在一起, 看作一个“奇点”. 这样做的好处是, 在计算相对不变量时能够简化表达式. 当 g 是奇数时, $(I_{\frac{g+1}{2}})$ 型奇点即引理 5.3.4 (3) 所描述的奇点.

(II_w) 型: ([Xia92] 也称其为 $2w$ 阶奇点) p_i 不满足上述类型, 也不是上述类型奇点捆绑的无穷接近点, 且 $w_i = w$.

特别地, (II_1) 型奇点即简单奇点 (见第 3.1 节嵌入解消), [Xia92] 也称其为可忽略奇点, 因为这类奇点对式 (5-3) 中奇点解消部分的贡献值为 0. 进一步, 它对应的二次覆盖曲面奇点就是 ADE 奇点.

此外, 当 $f: S \rightarrow C$ 半稳定时, (II_w) 型奇点等价于满足 $Z_{1,i}^2 = -2$, $Z_{2,i} = 0$, $w_i = w$ 的奇点.

例 5.3.1 设分歧轨迹 R 有奇点 $p = (0, 0)$.

(1) 如果 p 的局部方程为 $x^3 + y^6 = 0$ 的奇点就是 (I_1) 型奇点, 即 $(3 \rightarrow 3)$ 型奇点. 它的例外曲线是落在分歧轨迹, 其拉回提供了一条 (-1) -曲线. 爆发一次 p 后, 例外曲线上有一个通常四重点.

(2) 如果 p 的局部方程为 $x^3 + y^3 = 0$ 的奇点就是 (II_1) 型奇点, 即 2 阶奇点 (尽管重数是 3). 它的例外曲线也落在分歧轨迹中, 但其拉回不提供 (-1) -曲线. 爆发一次 p 后, 例外曲线上有三个通常二重点. ■

设 F 是 $f: S \rightarrow C$ 的纤维, F_0 是 F 在规范模型 (P_0, R) 中对应的像纤维. 我们沿用 [Xia92] 的传统记号, 以 $s_{2w+1}(F)$ 表示分歧轨迹 R 在 F_0 上的 (I_w) 型奇点个数 (出现在典范解消中的这类奇点都应包括在其中, 下同); 以 $s_{2w}(F_0)$ ($w > 1$) 表示 R 在 F_0 上的 (II_w) 型奇点个数. 我们不用 $s_2(F)$ 表示 R 在 F_0 上的简单奇点个数, 它有其他的含义, 具体如下: 设 \tilde{R}_h 是 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹的水平部分. 我们用 $r(R, F)$ 表示 \tilde{R}_h 到 C 的投影在点 $f(F)$ 上的分歧指数; $l(R, F)$ 表示 F 在 \tilde{P} 中的像纤维内所包含的非 (-2) -曲线的不可约分歧轨迹分支的条数. 设 $\nu(R, F)$ 是 F 上所有简单奇点贡献的几何亏格总和. 现在我们定义

$$s_2(F) = 2\nu(R, F) + r(R, F) - 2l(R, F).$$

综上, 所有这些 $s_k(F)$ ($2 \leq k \leq g+2$) 被称为 F 的奇异性指数 (Singularity counts).

由于除了有限个 F 之外, 这些 $s_k(F)$ 都恒为零, 因此我们可以定义 $s_k = \sum_F s_k(F)$, 这里 F 跑遍 $f: S \rightarrow C$ 所有纤维. s_k 不依赖于规范模型的选取 (见 [Xia92, 定理 5.1.4]), 称为 f 的奇异性指数. 请注意, 当 g 是偶 (奇数) 数时, s_k 的下标 k 不超过 $g+1$ ($g+2$). 为统一起见, 对于 g 是偶数情形, 我们规定 $s_{g+2} = 0$.

推论 5.3.1 设 ε 是 $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ 所收缩的垂直 (-1) -曲线条数, 则

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} s_{2k+1} + s_{g+2}.$$

证明 这是引理 5.3.4 的直接推论. 需要注意的是, 当 g 是奇数时, $(I_{\frac{g+1}{2}})$ 型奇点提供了两条 (-1) -曲线, 具体见引理 5.3.4 情形(3). ■

定理 5.3.1 [[Xia92], 定理 5.1.7] 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小的亏格 g 超椭圆纤维化, s_k ($2 \leq k \leq g+2$) 是 f 的奇异性指数. 我们有

$$\begin{aligned} (2g+1)K_f^2 &= (g-1)s_2 + 3s_{g+2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} a_k s_{2k+1} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} b_k s_{2k}. \\ (2g+1)\chi_f &= \frac{g}{4}(s_2 - 2s_{g+2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} k(g-k)s_{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} k(g-k+1)s_{2k}, \\ e_f &= (s_2 - 3s_{g+2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} s_{2k+1} + 2 \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} s_{2k}, \end{aligned}$$

这里

$$a_k = 12k(g-k) - 2g - 1, \quad b_k = 6k(g-k+1) - 4g - 2.$$

证明 综合引理 5.3.1、引理 5.3.2 和推论 5.3.1 立得. ■

设 F 是纤维化 $f: S \rightarrow C$ 的任何纤维. 回顾 $e_F = \chi_{top}(F) - (2 - 2g)$. 由二次覆盖奇点的 Laufer 公式 (见习题 5.9) 可推得

$$e_F = (s_2(F) - 3s_{g+2}(F)) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} s_{2k+1}(F) + 2 \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} s_{2k}(F). \quad (5-4)$$

它看作上述定理中整体不变量 e_f 的一个局部化情形.

我们定义纤维 F 的 Horikawa 数.

$$H_F := s_{g+2}(F) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} \left(\frac{4k(g-k)}{g} - 1 \right) s_{2k+1}(F) + 2 \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} \left(\frac{k(g-k+1)}{g} - 1 \right) s_{2k}(F).$$

对亏格 2 纤维化而言, Horikawa 数 H_F 也可如下定义 (见习题 5.12)

$$H_F := \text{length coker} (S^2 f_* \omega_{S/C} \hookrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes 2}))_p, \quad p = f(F) \quad (5-5)$$

推论 5.3.2 设 F 是纤维化 $f: S \rightarrow C$ 的纤维.

- (1) $H_F \geq 0$, 等号成立当且仅当分歧轨迹在 F 对应的像纤维上的奇点至多是可忽略奇点.
- (2) $K_f^2 - \frac{4(g-1)}{g} \chi_f = \sum_F H_F \geq 0$, 这里 F 跑遍所有纤维.
- (3) 整体不变量 K_f^2 , χ_f 和 e_f 可以通过纤维芽的局部贡献值来计算, 即

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{3g}{2g+1} \sum_F H_F + \frac{(g-1)}{2g+1} \sum_F e_F, \\ \chi_f &= \frac{g}{8g+4} \sum_F H_F + \frac{g}{8g+4} \sum_F e_F, \\ e_f &= \sum_F e_F. \end{aligned}$$

推论 5.3.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 2 超椭圆纤维化, 则

- (1) $H_F = s_3(F)$, $e_F = s_2(F) + s_3(F)$. 特别地, $s_2(F) \geq 0$.
- (2)

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{1}{5} s_2 + \frac{7}{5} s_3, \\ \chi_f &= \frac{1}{10} s_2 + \frac{1}{5} s_3, \\ e_f &= s_2 + s_3. \end{aligned}$$

- (3) $2 \leq \lambda_f \leq 7$. 进一步, $\lambda_f = 2$ 当且仅当 $s_3 = 0$; $\lambda_f = 7$ 当且仅当 $s_2 = 0$.
- (4) 当 f 半稳定时, $s_2(F)$ 是 F 的不可分离点个数, $s_3(F)$ 是非半稳定个数.
- (5) 设 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ 是 f 的稳定约化, 其基变换次数为 d . 设 F 是 f 的纤维, \tilde{F} 是对应的稳定约化纤维, 那么

$$\begin{aligned} s_2(F) &= \frac{s_2(\tilde{F})}{d} + 14\chi_F - c_1^2(F), \\ s_3(F) &= \frac{s_3(\tilde{F})}{d} + c_1^2(F) - 2\chi_F. \end{aligned}$$

证明 由于 $e_F \geq l(F) - 1$ (习题 8.1) 及 $l(F) - 1 \geq s_3(F)$, 故 $e_F \geq s_3(F)$, 即 $s_2(F) \geq 0$. 其余结论显然. ■

推论 5.3.4 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 g 超椭圆纤维化, 且非局部平凡. 那么 f 的斜率估计有如下不等式:

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda_f \leq 12 - \frac{4g+2}{[g^2/2]}$$

证明 我们只需要证明斜率上界不等式. 设 $\lambda_0 = 12 - \frac{4g+2}{[g^2/2]}$.

$g = 2$ 情形直接来自于上述推论. 今设 $g \geq 3$. 此时不妨假设 $f: S \rightarrow C$ 的斜率大于 8 (否则结论自然成立). 由推论 3.5.1, 不失一般性, 我们可以假设 f 是半稳定的. 此时 $s_{g+2} = 0$, $s_2 \geq 0$ (因为 \tilde{R} 不含垂直的非 (-2) -曲线分支). 将定理 5.3.1 诸式代入到 $\lambda_0 \chi_f - K_f^2$, 逐一验证各奇异性指数 s_k 前的系数非负即可. ■

注 5.3.4 令人遗憾的是, 我们目前无法确知, 在一般情形下是否有 $s_2 \geq 0$, 或者更确切地, $s_2(F) \geq 0$. 在 $g = 2$ 或者 f 半稳定时, 上面已证明. [Xia92] 并没有直接验证此事, 但似乎默认它是正确的.

命题 5.3.2 设 $f: S \rightarrow C$ 是相对极小亏格 2 纤维化, 且 S 不是极小曲面. 那么 $C \cong \mathbb{P}^1$, $K_f^2 \leq 8$, $\chi_f \leq 4$. 进一步, 如果 S 是一般型曲面, 则 $K_f^2 = 8$, $\chi_f = 4$, $q_f = 0$, 并且 f 有一个截面恰好是 (-1) -曲线.

证明 设 E 是 S 的水平 (-1) -曲线. 由 Hurwitz 公式可知 $C \cong \mathbb{P}^1$. 设 $d = EF$, 则 $K_{S/C}E = 2d - 1$. 由于 $(dK_{S/C} - 2E)F = 0$, 而 F 非数值等价于 0, 故由 Hodge 指标定理得 $(dK_{S/C} - 2E)^2 \leq 0$, 从而

$$K_f^2 \leq 8 - \frac{4}{d} + \frac{4}{d^2} \leq 8,$$

等号成立当且仅当 $d = 1$. 因此 $\chi_f \leq \frac{1}{2}K_f^2 \leq 4$.

进一步设 S 是一般型的, S' 是其极小模型, F' 是 F 的像. 由于 $1 \leq K_{S'}F' \leq K_{S/C}F - d$, 故 $d = 1$, $K_{S'}F' = 1$. 由 Hodge 指标定理进一步推出 $K_{S'}^2 = F'^2 = 1$. 因此 $K_{S/C}^2 = 8$, 且 E 是 S 上唯一的 (-1) -曲线. 从而 E 在 S 的超椭圆对合作用下不变, 即 $E|_F$ 是 F 上的 weierstrass 点, $\omega_F \equiv 2E|_F$. 这表明 $K_{S/C} - 2E$ 线性等价于 S 某个垂直除子. 注意到 $(K_{S/C} - 2E)^2 = 0$, 故由 Zariski 引理, $K_{S/C} - 2E = nF$. 再由 $K_{S/C}E = 1$ 即得 $n = 3$.

这样, $p_g(S') = H^0(K_{S/C} - 2F) \geq 2$. 又由 Noether 不等式, $K_{S'}^2 \geq 2p_g(S') - 4$ 推知 $p_g(S') = 2$. 注意到 $K_{S'}^2 < 2p_g(S')$, 故有 $q_f = q(S') = 0$ (见 [Bom73]). ■

二次覆盖的方法也被用于其他类型的纤维化上, 比如 [BZ01] 和 [CS08] 考虑了 (g, γ) 型二次覆盖纤维化 (即某在亏格 γ 纤维化上构造二次覆盖诱导出的亏格 g 纤维化). 他们证明了, 当 $g \geq 4\gamma + 2$ 时, 有

$$\lambda_f \geq \frac{4(g-1)}{g-\gamma}.$$

如果取 $\gamma = 0$, 就是超椭圆纤维化情形.

5.4 亏格 3 非超椭圆纤维化

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 3 非超椭圆纤维化. 此时我们有正合列

$$0 \rightarrow S^2 f_* \omega_{S/C} \rightarrow f_* \omega_{S/C}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0,$$

这里 \mathcal{N} 支集是零维的. 设 F 为 $f: S \rightarrow C$ 的任一纤维, $p = f(F)$. 我们可以定义 F 的 Horikawa 数:

$$H_F := \text{length coker}(S^2 f_* \omega_{S/C} \hookrightarrow f_* (\omega_{S/C}^{\otimes 2}))_p, \quad p = f(F) \quad (5-6)$$

命题 5.4.1 ([Kon91], [Rei90], [Hor90], [Hor91]...) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 3 非超椭圆纤维化, 则有

$$K_f^2 - 3\chi_f = \sum_F H_F,$$

这里 F 跑遍所有纤维. 特别地, $\lambda_f \geq 3$.

进一步, 假设 $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ 是稳定约化, \tilde{F} 是 F 对应的半稳定模型, 那么

$$H_F = \frac{H_{\tilde{F}}}{\deg \pi} + c_1^2(F) - 3\chi_F.$$

证明 结合命题 1.2.2 和推论 1.2.1, 我们有

$$\chi(f_* \omega_{S/C}^{\otimes 2}) = 6\chi(\mathcal{O}_C) + K_f^2 + \chi_f,$$

$$\chi(S^2 f_* \omega_{S/C}) = 6\chi(\mathcal{O}_C) + 4\chi_f,$$

注意到 $\chi(\mathcal{N}) = \chi(f_* \omega_{S/C}^{\otimes 2}) - \chi(S^2 f_* \omega_{S/C})$, 故由上面的式子得证所需. 剩余的结论直接来自于 [Tan96, 定理 4.8, Page 672]. \blacksquare

推论 5.4.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 3 非超椭圆纤维化, 则其整体不变量可以归结为纤维芽的局部贡献值, 即

$$K_f^2 = \sum_F \left(\frac{4}{3} H_F + \frac{1}{3} e_F \right),$$

$$\chi_f = \sum_F \left(\frac{1}{9} H_F + \frac{1}{9} e_F \right),$$

$$e_f = \sum_F e_F.$$

由习题 1.2, 我们可以通过基变换, 使得新纤维化半稳定且具有截面. 由前面的讨论知道, f 的整体不变量可以通过基变换不变量及新纤维化的不变量来计算. 因此不失一般性, 我们以下不妨假设 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定的, 且带有截面 Γ .

由 $f_* \omega_{S/C}(-\Gamma)$ 诱导的有理三次映射 Φ_K , 满足以下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad \Phi_K \quad} & \mathbb{P}(f_* \omega_{S/C}(-\Gamma)) \\ & \searrow f & \swarrow \\ & & C \end{array}$$

这里 $\mathbb{P}(f_*\omega_{S/C}(-\Gamma))$ 双有理等价于几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$. 类似于超椭圆情形, 我们可以构造几何直纹面 $\varphi_0 : P_0 \rightarrow C$ 上的三次覆盖 $\pi : S_0 \rightarrow P_0$, 以及典范解消图

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{S} = S_k & \xrightarrow{\tau_k} & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{\tau_2} & S_1 & \xrightarrow{\tau_1} & S_0 \\ \tilde{\pi} = \pi_k \downarrow & & & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_0 = \pi \\ \tilde{P} = P_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & P_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0 \end{array}$$

这里 σ_{i+1} 是 P_i 在 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i 处的爆发. S_{i+1} 是 $P_{i+1} \times_{P_i} S_i$ 的正规化. $\tilde{\pi} = \pi_k$ 有光滑的分歧轨迹. 因此 $\tilde{S} = S_k$ 是光滑的. 我们记 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, E_i 是 σ_i 对应的例外曲线, \mathcal{E}_i 是 E_i 在 σ 下的完全原像. 我们用 $D_{1,i}, D_{2,i}$ 分别表示 π_i 的一般分歧和全分歧轨迹. 为方便起见, 记 $D_j = D_{j,0}, \tilde{D}_j = D_{j,k} (j = 1, 2)$.

我们记

$$m_i = \lfloor \frac{m_{p_i}(D_{1,i})}{2} \rfloor$$

及

$$n_i = \begin{cases} m_{p_i}(D_{2,i}) & \text{若 } E_{i+1} \text{ 不落在全分歧轨迹中} \\ m_{p_i}(D_{2,i}) - 1 & \text{若 } E_{i+1} \text{ 落在全分歧轨迹中} \end{cases}$$

这里 $m_{p_i}(\cdot)$ 表示曲线在点 p_i 处的重数. 此外, 我们记

$$w_i = m_i + n_i.$$

此时有

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \sigma^* D_1 - 2 \sum_{i=0}^{k-1} m_i \mathcal{E}_{i+1}, \\ \tilde{D}_2 &= \sigma^* D_1 - \sum_{i=0}^{k-1} n_i \mathcal{E}_{i+1}, \end{aligned}$$

类似上一节的讨论, 我们有

引理 5.4.1

$$\begin{aligned} r(D_1) &= \sum_{i=0}^{k-1} 2m_i(2m_i - 1) + r(\tilde{D}_1), \\ r(D_2) &= \sum_{i=0}^{k-1} n_i(n_i - 1) + r(\tilde{D}_2). \end{aligned}$$

设 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$ 收缩 \tilde{S} 中的垂直 (-1) -曲线. 设 F 是 $f : S \rightarrow C$ 的纤维, 我们用 ε_F 表示 ρ 在 F 对应的原像纤维中收缩的垂直 (-1) -曲线条数. 记 $\varepsilon = \sum_F \varepsilon_F$, 这里 F 跑遍所有纤维. 由引理 5.4.1 及三次覆盖的不变量计算, 我们有

引理 5.4.2

$$K_f^2 = \frac{1}{3}r(\tilde{D}_1) + \frac{2}{3}r(\tilde{D}_2) - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2}{3}w_i^2 - \frac{10}{3}w_i + 3 \right) + \varepsilon,$$

$$\chi_f = \frac{1}{9}r(\tilde{D}_1) + \frac{2}{9}r(\tilde{D}_2) - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{18}w_i^2 - \frac{5}{18}w_i \right),$$

$$e_f = r(\tilde{D}_1) + 2r(\tilde{D}_2) + 3 \sum_{i=0}^{k-1} 1 - \varepsilon.$$

设 F_0 是直纹面上纤维, 记 $a_j = D_j F$ ($j = 1, 2$). 由于 D_1 等价于偶除子, 故 α_1 是偶数. 又由 Hurwitz 公式可知 $2g + 4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$. 由推论 5.1.5, 我们还能得到一个新的关系式:

$$D_1 D_2 = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1 - 2} r(D_1) + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2 - 2} r(D_2), \quad \alpha_2 \neq 1.$$

注 5.4.1 关于三次覆盖的更多事实, 可以参看 [Mir85], [Tan91, Tan01, Tan02], [Tok92], [AK91], [Ash92] 等等.

为了进一步简化不变量计算, 我们同样需要讨论奇点的数值分类.

命题 5.4.2 在以上典范解消图的记号下, 设 p_i 是三次覆盖 π_i 的分歧轨迹奇点, 我们有

$$\tilde{\pi}\mathcal{E}_{i+1} = Z_{1,i} + Z_{2,i} + Z_{3,i}, \quad Z_{j,i} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

- (1) $Z_{j,i}$ 要么等于 0, 要么是其自身支集上的基本闭链;
- (2) $Z_{1,i}Z_{2,i} = Z_{1,i}Z_{3,i} = Z_{2,i}Z_{3,i} = 0$. 特别地, 我们有 $-3 = Z_{1,i}^2 + Z_{2,i}^2 + Z_{3,i}^2$;
- (3) $Z_{1,i} \geq Z_{2,i}$. 进一步, 如果 p_i 全分歧, 那么还有 $Z_{2,i} \geq Z_{3,i}$; 如果 p_i 一般分歧, 那么 $Z_{1,i}$ 和 $Z_{3,i}$ 没有公共分支.
- (4) $w_i = p_a(Z_{1,i}) + p_a(Z_{2,i}) + p_a(Z_{3,i})$.

我们称这样的 $Z_{j,i}$ 为奇点 p_i 的第 j -基本闭链.

证明 类似于命题 5.3.1 的证明. 读者也可参考 [CLT07, CLT10] ■

对于 π 的分歧轨迹奇点 p , [CT06] 引入了奇点 p 的 Horikawa 数:

$$H_p = \frac{1}{2} \sum_{p_i \in p} (3 - w_i)(w_i - 2) + \varepsilon_p,$$

这里 p_i 跑遍 p 的无穷接近奇点, w_i 是相应的典范解消数据; ε_p 是由 p 典范解消所产生的 (-1) -曲线条数. 下面的结论提供了纤维的 Horikawa 数的局部计算方法.

引理 5.4.3 设 F 是亏格 3 非超椭圆纤维化 $f: S \rightarrow C$ 的纤维, $\pi: S_0 \rightarrow P_0$ 是诱导的直纹面 $\varphi_0: P_0 \rightarrow C$ 上的三次覆盖, F_0 是 F 在 P_0 中对应的像纤维. 那么

$$H_F = \sum_{p \in F_0} H_p + \varepsilon_F,$$

这里 ε_F 是额外收缩的 (-1) -曲线条数, 即除了来自于典范解消产生的 (-1) 曲线之外的那些垂直 (-1) 曲线.

类似超椭圆情形讨论, 我们可以提供直纹面上分歧轨迹的一个规范模型.

引理 5.4.4 \tilde{P} 能够被收缩成相对极小模型 P , 此处 $\varphi: P \rightarrow C$ 是满足以下性质的直纹面.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & P \\ & \searrow \tilde{\varphi} & \swarrow \varphi \\ & & C \end{array}$$

(1) 设 $\tilde{R} = \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2$ 是 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹, 此处 \tilde{D}_1 (相应的, \tilde{D}_2) 是一般分歧(相应的, 全分歧) 轨迹. 设 $R = D_1 + 2D_2$ 是 \tilde{R} 在 P 中的像. 那么 $\tilde{\psi}: \tilde{P} \rightarrow P$ 是 R 的典范解消.

(2) 设 R_h (相应的, $D_{1,h}, D_{2,h}$) 是 R (相应的, D_1, D_2) 的水平部分. 设 $\alpha = D_2 F_0$.

如果 $\alpha \geq 2$, 那么 $D_{2,h}$ 的奇点阶数不超过 $\alpha/2$.

如果 $\alpha \leq 1$, 那么 R_h 的奇点阶数不超过 $g + 2$.

(3) 设 p 是 D_2 和纤维 F_0 的交点. 如果 $\alpha = 2$ 并且 R_h 的每个不可约分支都是截面, 那么 $D_{1,h}$ 在 p 处的重数不超过 g .

这样一个几何直纹面 $\varphi: P \rightarrow C$ 连同分歧轨迹 R 被称为规范模型.

证明 关于 (1) 和 (2) 的类似证明可以参看 [CT06, Lemma 5.2]. 我们只证明 (3). 此时, $\alpha = 2$ 且 $D_{1,h} F_0 = 2g$.

设 R 满足 (1) 和 (2). 由假设, D_2 由两个互不相交的截面组成, 记为 $\Gamma_1 + \Gamma_2$. 设 p_i 是 Γ_i 和 F_0 的交点. 由 (2) 可推出 $p_1 \neq p_2$.

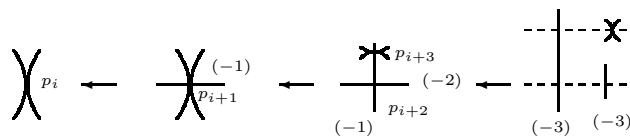
如果 $D_{1,h}$ 在 p_1 处的重数大于 g , 那么 $D_{1,h}$ 在 p_2 处的重数小于 g . 我们爆发 p_1 , 于是 F_0 的严格原像是一条 (-1) -曲线. 当我们收缩掉这条 (-1) -曲线后, 得到一条新的相对极小纤维, 记作 F_1 . 类似地, 我们重复这一过程直到 R_h 的奇点满足条件 (3) 为止. 这个操作过程不可能一直持续下去, 因为每次爆发都会使奇点的几何亏格严格减小. ■

我们前面假设 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定的, 因此作任意多次基变换后, 不变量总是成倍增长. 这样, 不失一般性, 我们可以不妨假设诱导的三次覆盖 π 的分歧轨迹都由截面构成.

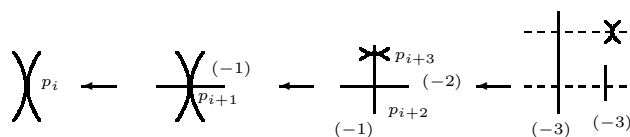
下面的奇点数值分类结果类似于二次覆盖情形, 鉴于细节过于繁琐, 不再详细讨论. 有兴趣的读者可以参考 [CLT10] 中的相关细节.

引理 5.4.5 在上述假设条件下, 典范解消中每个分歧轨迹奇点 p_i 只能是以下类型之一 (图中粗直线表示全分歧轨迹, 细直线表示一般分歧轨迹):

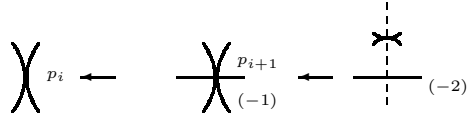
(I_0): p_i 是 good cusp, 亦即, $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = Z_{1,i} + Z_{2,i} + Z_{3,i}$, $Z_{j,i}^2 = -1$ 且 $p_a(Z_{j,i}) = 0$ ($j = 1, 2, 3$). 此外 p_i 是全分歧的. 此时, 全分歧轨迹不过 p_i , 而一般分歧轨迹在点 $p_i = (0, 0)$ 的局部方程可写为 $x^2 + y^3 = 0$. 它总是包含无穷接近点 p_{i+1} , p_{i+2} 和 p_{i+3} , 解消数据满足 $w_{i+1} = 1$, $w_{i+2} = 2$, $w_{i+3} = 2$. 我们总是把 p_i 连同它的这些无穷接近奇点 p_{i+1} , p_{i+2} , p_{i+3} 捆绑在一起视为一个“奇点”, 仍然用 p_i 表示之. 此时 p_i 贡献了 4 条由奇点引入的 (-1) -曲线.



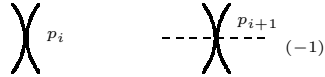
(I_w): p_i 全分歧并且 $(Z_{1,i})^2 = -1$, 满足 $w_i = w$, $Z_{j,i}^2 = -1$ 以及 $p_a(Z_{j,i}) = 0$ ($j = 2, 3$), 且 $p_a(Z_{1,i}) \neq 0$. 它总是包含无穷接近点 p_{i+1} , p_{i+2} 和 p_{i+3} , 解消数据满足 $w_{i+1} = w + 1$, $w_{i+2} = 2$, $w_{i+3} = w + 2$. 我们总是把 p_i 连同它的这些无穷接近奇点 p_{i+1} , p_{i+2} , p_{i+3} 捆绑在一起视为一个“奇点”, 仍然用 p_i 表示之. 此时 p_i 贡献了 3 条由奇点引入的 (-1) -曲线.



(II_w): p_i 全分歧并且 $Z_{1,i}^2 = -2$, 满足 $w_i = w$, $Z_{2,i}^2 = -1$, 且 $p_a(Z_{2,i}) = 0$. 此外, E_{i+1} 落在一般分歧轨迹里, 上面有唯一的奇点 p_{i+1} . 解消数据满足 $w_{i+1} = w + 1$. 我们总是把 p_i 连同它的无穷接近奇点 p_{i+1} 捆绑在一起视为一个奇点, 仍然用 p_i 表示之. 此时 p_i 只贡献了 1 条由奇点引入的 (-1)-曲线.



(III_w): p_i 是全分歧的, 并且 $w_i = w, (Z_{1,i})^2 = -3$. p_i 不提供任何由奇点引入的 (-1)-曲线.



(I_w^{*}): p_i 是一般分歧的, 并且 $(Z_{1,i})^2 = -1$, 满足 $w_i = w$, $Z_{j,i}^2 = -1$ 以及 $p_a(Z_{j,i}) = 0$ ($j = 2, 3$), 且 $p_a(Z_{1,i}) \neq 0$. 此外, $Z_{1,i}$ 和 $Z_{3,i}$ 没有公共分支(图略). 解消数据满足 $w_{i+1} = w + 1$. 我们总是把 p_i 连同它的无穷接近奇点 p_{i+1} 捆绑在一起视为一个奇点, 仍然用 p_i 表示之. 于是 p_i 贡献了 3 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

(II_w^{*}): p 是一般分歧的, 并且 $Z_{1,i}^2 = -2$, 满足 $w_i = w$, $Z_{2,i} = 0$, 以及 $(Z_{3,i})^2 = -1$, $p_a(Z_{3,i}) = 0$ (图略). 此外, $Z_{1,i}$ 和 $Z_{3,i}$ 没有公共分支. p_i 只贡献了 1 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

在二次覆盖情形 [Xia92], (I_w^{*}) 奇点恰恰对应 $(2w + 1 \rightarrow 2w + 1)$ 奇点; (II_w^{*}) 对应 $2w$ 阶奇点.

设 F 是 $f : S \rightarrow C$ 的纤维, F_0 是 F 在 P_0 中对应的像纤维. 出现在 F_0 中的 (I_w) (相应地, II_w 等等) 型奇点的个数记为 $\nu(I_w, F)$ (相应地, $\nu(II_w)$ 等等). 设 $\nu(I_w, F) = \nu'(I_w, F) + \nu''(I_w, F)$, 其中 $\nu(I_w, F)''$ 表示参与额外收缩的 (I_w) 型奇点的个数, 剩余的那些奇点个数记为 $\nu'(I_w, F)$ (其余情形类似). 这些 $\nu(\cdot, F)$ 被称为 F 的奇异性指数.

我们回顾收缩映射 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$. 将 ρ 分为两部分: $\rho' : \tilde{S} \rightarrow S'$ 收缩由典范解消产生的垂直 (-1)-曲线; $\rho'' : S' \rightarrow S$ 收缩剩余的 (-1)-曲线 (即额外收缩). 我们分别用 ε_P 和 ε_F 来表示纤维 F 在 \tilde{S} 上对应的原像纤维中, 由 ρ' 和 ρ'' 收缩的 (-1)-曲线条数.

引理 5.4.6 在前面的假设条件下, 我们有

(1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_P = & 4\nu(I_0, F) + 3 \sum_w \nu(I_w, F) + \sum_w \nu(II_w, F) \\ & + 3 \sum_w \nu(I_w^*, F) + \sum_w \nu(II_w^*, F). \end{aligned}$$

(2) 如果 $\alpha_2 = D_2 F_0 \geq 2$, 那么 $\varepsilon_F = 0$, 也就是说额外收缩不出现.

如果 $\alpha_2 \leq 1$, 那么

$$\varepsilon_F = \nu''(II_2, F) + 3\nu''(II_1, F) + \nu''(III_2, F) + \nu''(II_2^*, F) + 2\nu''(II_1^*, F).$$

其中最末两项只在 $\alpha = 0$ 时出现.

证明 鉴于证明过于繁琐, 我们不再详细讨论, 请读者参考 [CLT10]. ■

结合以上各结论, 我们可以证明 M. Reid 在半稳定亏格 3 非超椭圆纤维化情形的猜想公式 [Rei90].

定理 5.4.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定亏格 3 非超椭圆纤维化, 那么

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{1}{3}s_0 + \frac{4}{3}s_1 + 3s_2, \\ \chi_f &= \frac{1}{9}s_0 + \frac{1}{9}s_1 + \frac{1}{3}s_2, \\ e_f &= s_0 + s_2, \end{aligned}$$

这里 s_0 是纤维中不可分离点的个数; s_2 是可分离点的个数; s_1 是超椭圆纤维的个数.

证明 在前面的各假设条件下, 我们记 $\nu'(\cdot) = \sum_F \nu'(\cdot, F)$ (相应地, $\nu''(\cdot)$ 等). 令

$$\begin{aligned} s_0 &= 3(\nu'(II_1) + \nu'(II_2) + \nu'(III_2) + \nu(III_3)) + 2(\nu'(II_1^*) + \nu'(II_2^*) + \nu(II_3^*) + \nu''(III_2)), \\ s_1 &= \nu'(II_2) + \nu(I_2^*) + \nu'(II_2^*) + \nu(II_3^*) + \nu''(III_2) + 3\nu''(II_1) + \nu''(II_2) + 2\nu''(II_1^*), \\ s_2 &= \nu(I_1) + \nu(I_2) + \nu(I_1^*) + \nu(I_2^*) + \nu''(II_2) + \nu''(II_2^*). \end{aligned}$$

然后检验 s_k 的几何意义即可. 具体细节这里不再赘述, 请参看 [CLT10]. ■

注 5.4.2 从模空间 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 的角度看, 我们很容易得到上述公式. 定理 5.4.1 的意义在于, 提供了纤维芽对于整体不变量的局部贡献值—比如 Horikawa 数—的具体计算方法.

推论 5.4.2 设 $\alpha_2 = D_2F$, 那么

- (1) 如果 $\alpha_2 \geq 3$, 那么 $\lambda_f \leq 9$.
- (2) 如果 $\alpha_2 = 2$, 那么 $\lambda_f \leq \frac{39}{4}$.

证明 由前面的讨论, 当 $\alpha \geq 2$ 时成立, 额外收缩不出现, 即 $\varepsilon_F = 0$. 进一步, 如果 $\alpha \geq 3$, 那么 $s_5(2) = 0$. 此时由直接计算可知 $2s_0 \geq s_1$. 于是

$$9\chi_f - K_f^2 = \frac{1}{3}(2s_0 - s_1) \geq 0.$$

如果 $\alpha = 2$, 那么由于 $s_0 + s_2 \geq s_1$, 因此我们有

$$\frac{39}{4}\chi_f - K_f^2 = \frac{1}{4}(3s_0 + s_2 - s_1) \geq 0. \quad \blacksquare$$

注 5.4.3 当 $\alpha_2 \leq 1$ 时, 存在亏格 3 的小平纤维化, 即 $\lambda_f = 12$ 的纤维化. 读者可以参考 [Zaa95].

类似的方法可以应用于三点式纤维化 (Trigonal fibration). [CLT07] 估计了三点式纤维化的斜率上界 (一般纤维投影到有理直线 \mathbb{P}^1 上的全分歧点个数给定).

5.5 \mathbb{P}^1 上的纤维化

设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 g 相对极小非平凡纤维化. 如无特别声明, 总假设 $g \geq 2$. 此时显然有 $K_{S/C} = K_S + 2F$, $q_f = q(S)$.

由 Ramanujia 消失定理及 Riemann-Roch 定理, 我们有

引理 5.5.1 $h^0(-F) = h^1(-F) = 0$, 从而有 $h^0(K_S + F) = \chi_f > 0$.

命题 5.5.1 令 $A = K_S + F = K_{S/C} - F$.

- (1) 当 $g \geq 3$ 时, $|2A|$ 无基点;
- (2) 当 $g = 2$ 时, $|3A|$ 无基点.

特别地, 我们有 $A^2 = K_f^2 - 4(g-1) \geq 0$, 等号成立当且仅当存在光滑曲线 C 以及二次覆盖 $\pi: Z \rightarrow \mathbb{P}^1 \times C$, 使得以下交换图成立.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tau} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{pr_1} & \mathbb{P}^1 \times C \xrightarrow{pr_2} C \end{array}$$

这里 pr_i 是投影映射, τ 是极小解消, π 的分歧轨迹数值等价于 $2F_1 + (2g + 2 - 4g(C))F_2$, F_i 是 pr_i 对应的一般纤维.

证明 由于 $h^0(A) = \chi_f > 0$, 故可取 $A \geq 0$. 因 $AF = 2g - 2 > 0$, 所以 A 含水平分支 Γ , 从而 $F\Gamma > 0$ 且 $K_{S/C}\Gamma > 0$ (见习题 2.2).

先考虑 $g \geq 3$ 的情形. 注意到

$$K_{S/C}^2 = (A + F)K_{S/C} \geq \Gamma K_{S/C} + 2g - 2 \geq 2g - 1 \geq 5.$$

因此由 Reider 方法可知, 如果 $|2A| = |K_S + K_{S/C}|$ 有基点 p , 则存在有效除子 D 通过 p , 使得要么 $DK_{S/C} = 0, D^2 = -1$, 要么 $DK_{S/C} = 1, D^2 = 0$. 这推出 $D^2 + DK_{S/C}$ 是奇数, 矛盾! 因此 $|2A|$ 无基点.

现在考虑 $g = 2$ 情形. 先证 A 是 nef 的, 从而 $A^2 \geq 0$. 若不然, 可找不可约曲线 Γ' , 使得 $A\Gamma' \leq -1$. 于是 Γ' 不可能是垂直 (-2) -曲线, 从而 $F\Gamma' = K_{S/C}\Gamma' - A\Gamma' \geq 2$, Γ' 是水平的. 由于 $A\Gamma' < 0, h^0(A) > 0$, 所以 Γ' 是 $|A|$ 的固定部分. 设 $A = E + \Gamma'$. 因为 $2 = AF \geq F\Gamma' \geq 2$, 故 $F\Gamma' = 2, EF = 0$, 从而 E 含在纤维中. 注意到 $\Gamma'^2 = A\Gamma' - E\Gamma' \leq -1, K_S\Gamma' = A\Gamma' - F\Gamma' \leq -3$, 故有 $p_a(\Gamma') < 0$, 矛盾! 这就证明了 A 是 nef 的.

设 $L = 2A + F$, 则 $|3A| = |K_S + L|, L^2 = 4A^2 + 4AF \geq 8$. 由 Reider 方法, 如果 $|3A|$ 有基点 p , 则存在有效除子 D 通过 p , 使得要么 $LD = 0, D^2 = -1$; 要么 $LD = 1, D^2 = 0$. 如果 $LD = 0$, 那么由 A, F 的 nef 性, $AD = FD = 0$, 从而 $K_S D = 0$, 这就与 $D^2 = -1$ 的奇偶性矛盾! 同理, 若 $LD = 1$, 则 $AD = 0, FD = 1$, 从而 $K_S D = -1$, 这与 $D^2 = 0$ 矛盾! 这样就证明了 $|3A|$ 无基点.

综上所述, $|6A|$ 是无基点的. 如果 $A^2 = 0$, 则由 Stein 分解诱导纤维化 $\varphi: S \rightarrow C$.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{|6A|} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \varphi & \uparrow \\ & & C \end{array}$$

设 F' 为 φ 的一般纤维, 则 $AF' = 0$. 由于 $AF = 2g - 2 \geq 2$, 故 F' 不是 f 的一般纤维, 从而 $FF' \geq 1$. 这样, $K_S F' = AF' - FF' \leq -1$. 又因 $F'^2 = 0$, 所以 $K_S F' = -2, FF' = 2$, 故 $F' \cong \mathbb{P}^1$. 我们可以诱导一般二次覆盖 $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times C$. 一般纤维 F_1 的拉回 $\pi^* F_1$ 是亏格 g 曲线, F_2 拉回是 \mathbb{P}^1 , 因此由 Hurwitz 公式可知分歧轨迹数值等价于 $2F_1 + (2g + 2 - 4g(C))F_2$.

反过来, 如果有一个满足命题条件的二次覆盖, 那么分歧轨迹奇点最多是可忽略奇点, 因此典范解消也是极小解消, 从而诱导的纤维化是相对极小的. 由二次覆盖计算可知 $K_{S/C}^2 = 4g - 4$, 即 $A^2 = 0$. ■

利用上述结论可以证明 Beauville 猜想 [Bea81].

推论 5.5.1 ([Tan95], 定理 1) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是半稳定的相对极小亏格 $g \geq 2$ 纤维化, 则 f 至少有 5 条奇异纤维.

证明 由定理 2.4.1, 我们有严格的典范类不等式

$$K_{S/C}^2 < (2g - 2)(s - 2).$$

又因 $K_{S/C}^2 \geq 4(g - 1)$, 由此立得 $s \geq 5$. ■

由 Arakelov 不等式, 我们曾经还证明了以下结论.

命题 5.5.2 (定理 2.3.4) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是半稳定的, s_1 是雅克比奇异纤维个数, 那么

$$p_g \leq \frac{(g - q_f)}{2}(s_1 - 4).$$

进一步, $s_1 = 4$ 当且仅当 $f: S \rightarrow C$ 满足以下条件,

- (1) $p_g(S) = 0$;
- (2) $h^{1,1}(S) = 2 + \sum_{i=1}^s (l_i - 1)$;
- (3) $g(\overline{F}_i) = q_f, i = 1, \dots, s_1$;
- (4) $q(S) \leq 1$.

如果不要求半稳定条件, [Bea81] 证明 \mathbb{P}^1 上的非 isotrivial 纤维化至少有 3 条奇异纤维. 我们有以下更细致的结论.

命题 5.5.3 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 至少有两奇异纤维. 如果仅有两条奇异纤维 F_1, F_2 , 那么 f 必是 isotrivial 的, 且两条奇异纤维互为对偶模型, 即 $\overline{F}_1^* = \overline{F}_2$, 从而拓扑单值有相同周期. 此时 $p_g(S) = 0, q(S) = g(\overline{F}_1) = g(\overline{F}_2)$, 且有

$$h^{1,1}(S) = l(F_1) + l(F_2).$$

这里 $l(F)$ 是 F 的不可约分支数.

证明 推论 3.4.2 说明至少有两奇异纤维. 今假设 f 仅有两条奇异纤维 F_1, F_2 . 构造稳定约化 $\pi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, 使其仅在这两个临界点上全分歧, 则得到的半稳定纤维化 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ 最多只有两条奇异纤维. 由推论 5.5.1 立知 \tilde{f} 是平凡的纤维化, 从而 f 是 isotrivial 的.

取围绕 $p_i = f(F_i)$ 的小环路 γ_i . 在基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^1 - p_1 - p_2)$ 中, 显然有 $\gamma_1 \gamma_2 = 1$. 因此我们可以在 F_i 的拓扑单值中取合适的代表元 μ^{γ_i} , 使得 $\mu^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2} = 1$. 由于此时 F_i 的拓扑单值都是周期的, 所以 \overline{F}_1 与 \overline{F}_2 对偶.

剩余的结论直接来自于定理 2.3.2. ■

注 5.5.1 [Be82b] 给出了 \mathbb{P}^1 上恰有 4 条奇异纤维的半稳定椭圆纤维化的细致分类. [Szp81] 在特征 p 情形证明了 \mathbb{P}^1 上的半稳定亏格 $g \geq 2$ 纤维化至少有 3 条奇异纤维; 如果该曲面是一般型的, 则至少有 4 条奇异纤维.

引理 5.5.2 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 非平凡纤维化, 且小平维数 $\kappa(S) \geq 0$. 那么 $K_{S/C}^2 \geq 6(g-1)$, 等号成立当且仅当 $\kappa(S) = 0$, f 由 S 的极小模型 Σ 上的线束 $\Lambda \subseteq |C|$ 诱导, 这里 $C^2 = 2g-2$, 且 $|C|$ 只有 $2g-2$ 简单基点 (包括无穷接近基点).

证明 由极小模型唯一性, 我们有唯一的收缩映射 $\sigma: S \rightarrow \Sigma$. 设 $C = \sigma(F)$, $\Lambda = \{\sigma(F) \mid F \text{ 是 } f \text{ 的纤维}\}$. 设 p_1, \dots, p_s 是 Λ 的基点, $C \in \Lambda$ 是一般曲线, n_i 是 C 在 p_i 的重数 (请注意, 这里包括无穷接近点情形). 显然有 $C^2 = \sum_{i=1}^s n_i^2$.

因为 $\kappa(S) \geq 0$, 所以 K_Σ 是 nef 的, 于是

$$0 \leq K_\Sigma C = K_S F - \sum_{i=1}^s n_i = 2g-2 - \sum_{i=1}^s n_i,$$

从而

$$m \leq \sum_{i=1}^s n_i \leq 2g-2 - K_\Sigma C.$$

这样, 我们有

$$K_{S/C}^2 = K_S^2 + 8(g-1) = K_\Sigma^2 - m + 8(g-1) \geq K_\Sigma^2 + K_\Sigma C + 6(g-1) \geq 6(g-1).$$

$K_{S/C}^2 = 6(g-1)$ 等价于 $K_\Sigma^2 = K_\Sigma C = 0$, $n_i = 1$ ($i = 1, \dots, m$), $C^2 = m = 2g-2$. 这些条件蕴含着 $K_\Sigma \sim 0$, 从而 $\kappa(S) = 0$. ■

注 5.5.2 线性系 Λ 的基点 p 如果满足以下条件就称简单基点 (Simple base point): 过 p 的一般元在 p 处光滑.

通过类似的讨论, 我们有如下结果.

命题 5.5.4 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 非平凡纤维化, 且小平维数 $\kappa(S) \geq 1$. 那么 $K_{S/C}^2 \geq 6g-5$, 等号成立当且仅当 $\kappa(S) = 1$, f 由 S 的极小模型 Σ 上的线束 $\Lambda \subseteq |C|$ 诱导, 这里 $C^2 = 2g-3$, 且 $|C|$ 只有 $2g-3$ 个简单基点 (包括无穷接近基点).

命题 5.5.5 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是相对极小亏格 $g \geq 2$ 非平凡纤维化, 且小平维数 $\kappa(S) = 2$. 设 Σ 是 S 的极小模型, 那么

$$K_{S/C}^2 \geq 6(g-1) + \frac{1}{2} \left(K_\Sigma^2 + \sqrt{K_\Sigma^2 \sqrt{K_\Sigma^2 + 8(g-1)}} \right),$$

等号成立当且仅当 f 由 Σ 上的线束 $\Lambda \subseteq |C|$ 诱导, 这里 $C \sim \gamma K_\Sigma$, $\gamma \in \mathbb{Q}^+$, Λ 只有简单基点.

证明 设 $\sigma: S \rightarrow \Sigma$ 是收缩映射, F 是一般纤维, $C = \sigma(F)$. 因为 $K_\Sigma C + C^2 \geq 2g-2$, 及 $(K_\Sigma C)^2 \geq K_\Sigma^2 C^2$, 可得

$$K_\Sigma C \geq \frac{1}{2} \left(-K_\Sigma^2 + \sqrt{K_\Sigma^2 \sqrt{K_\Sigma^2 + 8(g-1)}} \right).$$

另一方面, 前面已证

$$K_{S/C}^2 \geq K_\Sigma^2 + K_\Sigma C + 6(g-1).$$

结合这两式, 即得所需不等式. 其余结论请读者验证. ■

推论 5.5.2 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是相对极小亏格 g 非平凡纤维化, 且小平维数 $\kappa(S) = 2$.

- (1) 如果 $g = 2$, 那么 $K_{S/C}^2 \geq 8$, 等号成立当且仅当 $K_\Sigma^2 = 1$, $C \sim K_\Sigma$.
 (2) 如果 $g = 3$, 那么 $K_{S/C}^2 \geq 15$.

推论 5.5.3 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 g 相对极小半稳定非平凡纤维化. 如果临界点个数 $s = 5$, 那么 S 双有理于 \mathbb{P}^2 或几何直纹面. 换言之, 如果 $\kappa(S) \geq 1$, 那么 $s \geq 6$.

注 5.5.3 [TTZ05] 证明了 $2 \leq g \leq 4$ 时, 如果 S 是一般型曲面, 那么 $s \geq 7$. 当 $g = 5$, $s = 6$ 时, 如果 S 不是一般型曲面, 那么 $K_\Sigma^2 = 1$, $p_g(\Sigma) = 2$, $q(\Sigma) = 0$, 且 f 由 Σ 上带有 5 个简单基点的线束诱导. 遗憾的是, 这种例子没有找到. 一个猜测是: $\kappa(S) = 2$ 时必有 $s \geq 7$.

引理 5.5.3 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 g 相对极小非平凡纤维化, 如果 $K_{S/C}^2 > 4g - 4$, 那么 $K_{S/C}^2 \geq 5g - 5 - \chi(\mathcal{O}_S)$.

特别地, 如果 $\kappa(S) = -\infty$, 则 $K_{S/C}^2 \geq 5g - 6 + q(S)$.

证明 此时 $A = K_S + F$ 是 nef 且 big 的, 由 Mumford 消失定理及 Riemann-Roch 定理, 我们有

$$0 \leq h^0(K_S + A) = \chi(-A) = \chi(\mathcal{O}_S) + K_f^2 - 5(g - 1).$$

由此即得结论. ■

在定理 2.4.1 的证明中, 我们利用 Kodaira-Parshin 构造得到下面的不等式 (各记号的具体含义请参见第 2.4 节).

$$K_{S/C}^2 - (2g - 2)(2b - 2 + s) \leq -\frac{(2g - 2)s}{e} + \frac{3}{e^2} \sum_q \frac{1}{\mu_q + 1}. \quad (5-7)$$

以及

$$e_f = \sum_q (\mu_q + 1) \geq \sum_q \frac{1}{\mu_q + 1}. \quad (5-8)$$

结合两式即得

$$(e^2 + 3)K_{S/C}^2 \leq e(2g - 2)(e(2b - 2 + s) - s) + 36\chi_f. \quad (5-9)$$

请注意, 在这一节中, $b = 0$, e 是奇数.

推论 5.5.4 ([Yu08]) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是亏格 g 相对极小半稳定非平凡纤维化, 且 $K_{S/C}^2 > 4g - 4$. 如果 $g \geq 18$ 或者 $q(S) > 0$, 那么临界点个数 $s \geq 6$.

证明 如果 $s = 5$, 那么 $\kappa(S) = -\infty$. 此时 $\chi_f = g - q(S)$. 我们取 $e = 5$, 代入式 (5-9) 即得 $g \leq 17$, $q = 0$. ■

注 5.5.4 于飞等人已经证明, 当 $g > 51$ 且 $\kappa(S) = 2$ 时, $s \geq 7$.

5.6 一些例子

在这一节中, 我们收集一些纤维化的例子, 供读者参考.

设 \mathbb{F}_e 是 Hurzibruch 曲面, 无穷远截面 C_∞ 自交数为 $(-e)$, F 是一般纤维. \mathbb{F}_e 上的有效除子的数值类 $aC_\infty + bF$ 简记为 (a, b) 型. 开曲面 $\mathbb{F}_e \setminus C_\infty$ 是仿射开集 $V_i = U_i \times \mathbb{C}$ 的并, 这里 V_i 的局部坐标分别为 (t, u) 和 (s, v) . 它们之间的坐标变换为 $t = \frac{1}{s}$, $u = \frac{v}{s^e}$. 在无穷远截面附近的坐标变换 $u' = \frac{1}{u}$ (相应地, $v' = \frac{1}{v}$). 我们记 F_t 为底曲线参数 t 对应的纤维 (允许 $t = \infty$).

下面的例子表明存在仅含一条奇异纤维的亏格 2 半稳定非平凡纤维化, 且斜率达到最大.

例 5.6.1 (刘小雷) 设 R 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的 $(6, 4)$ 型曲线, $R = R_1 + F_\infty$, 其中 R_1 是不可约曲线, 局部方程为

$$x^6 + 15tx^4 + 40tx^3 - 45t^2x^2 - 24t^2x + 5t^3 = 0.$$

以 R 为分歧轨迹的二次覆盖 $\pi : S_0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, 诱导亏格 2 纤维化 $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$. 它的临界点为 $t = -1, 0, \infty$, 其中 F_{-1} 的拓扑单值是价为 $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ 的周期映射, F_∞ 的拓扑单值是价为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 的周期映射 (主分支是光滑椭圆曲线). 奇异性指数 $s_2 = 18$, $s_3 = 1$, 故 $K_f^2 = 5$, $\chi_f = 2$, $e_f = 19$. 它的垂直部分 $\mathcal{V}_f = \{1\}$.

构造 60 次基变换 $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ 使其在所有临界点上全分歧. 我们得到一个半稳定纤维化 $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow C$, 它仅含一条奇异纤维, 其模点是带一个可分离点的可约曲线. $K_{\tilde{f}}^2 = 7$, $\chi_{\tilde{f}} = 1$, $e_{\tilde{f}} = 5$, 斜率 $\lambda_{\tilde{f}} = 7$ 达到最大. 它的垂直部分 $\mathcal{V}_{\tilde{f}} = \mathbb{Z}^{\oplus 4}$, 故其挠 2 商的秩为 4. ■

以下例子构造了 Miyaoka-Yau 不等式等号成立的曲面.

例 5.6.2 (彭帆-谈胜利) 设 $\pi : S_0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上是 5 次 Galois 循环覆盖, 由如下局部方程定义

$$y^5 = u(u-1)(u-t).$$

它诱导了 \mathbb{P}^1 上的亏格 4 纤维化 $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$. f 的临界点为 $t = 0, 1, \infty$, 其中 F_0, F_1 有相同的拓扑单值. $K_f^2 = 14$, $\chi_f = 4$, $e_f = 34$.

构造 5 次基变换 $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ 使其恰好仅在临界点上全分歧. 我们得到一个半稳定纤维化 $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow C$, 临界点个数为 3, $g(C) = 2$. $K_{\tilde{f}}^2 = 21$, $\chi_{\tilde{f}} = 2$, $e_{\tilde{f}} = 3$. 因此 $c_1^2(\tilde{S}) = 45$, $c_2(\tilde{S}) = 15$, $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 5$.

f 也可以看成 \mathbb{P}^2 上平面曲线族诱导的纤维化, 即在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5)$ 中选取两个截面 $s_1 = Y^5 - X^2(XZ^2 - Z^3)$, $s_2 = Y^5 - Z^3X(X - Z)$, 诱导有理映射

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \quad [X, Y, Z] \dashrightarrow [s_1, s_2].$$

爆发基点即得 $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$. 由此立得 $\chi_f = 4$. ■

Horikawa (见 [Ino81] 或 [Xia92, §6.4]) 也曾利用 5 次循环覆盖构造了满足 Miyaoka-Yau 不等式等号成立的曲面纤维化, 纤维亏格为 16.

利用平面曲线束还可以诱导以下关于亏格 3 非超椭圆的著名例子, 此例中 $s_1 = s = 5$, 即所有奇异纤维都是奇异雅克比的.

例 5.6.3 考虑平面曲线束

$$C_t : X^4 + Y^4 + Z^4 + t(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2), t \in \mathbb{P}^1.$$

我们可以定义有理映射

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \quad [X, Y, Z] \dashrightarrow [X^4 + Y^4 + Z^4, X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2].$$

通过爆发基点的亏格 3 非超椭圆纤维化 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$. 它的临界点为 $t = -2, -1, 2, \infty$. 不变量为 $K_f^2 = 9, \chi_f = 3, e_f = 27$. 斜率 $\lambda_f = 3$ 达到最小. 这四条奇异纤维如下:

- (1) $F_{-2} = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i$ 是稳定纤维, 这里 Γ_i 是 (-3) -曲线, $\Gamma_i \Gamma_j = 1$ ($i > j$).
- (2) $F_{-1} = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 是稳定纤维, 这里 Γ_i 是 (-4) -曲线, $\Gamma_1 \Gamma_2 = 4$.
- (3) $F_2 = 2\Gamma_0 + \sum_{i=1}^8 \Gamma_i$ 只含结点, Γ_0 是 (-4) -曲线, 其余 Γ_i 是 (-2) -曲线, 且满足 $\Gamma_0 \Gamma_i = 1, \Gamma_i \Gamma_j = 0$ ($i > j$).
- (4) F_∞ 是带有 3 个不可分离点的稳定纤维.

构造 2 次基变换 $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, 它仅在 $t = \pm 2$ 处全分歧. 此时 F_2 稳定约化为光滑超椭圆曲线. 设 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是相应的稳定约化. 我们有 $K_{\tilde{f}}^2 = 10, \chi_{\tilde{f}} = 3, e_{\tilde{f}} = 26$.

\tilde{f} 恰有 5 条奇异纤维, 且同时也是雅克比奇异的. 此时 $\kappa(\tilde{S}) = -\infty$. ■

- 注 5.6.1 (1) [Tan95] 利用 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的二次覆盖构造了 $g = 2, s = 5$ 的例子.
- (2) [TTZ05] 构造 $g = 3, s = 6$ 且 S 双有理于 $K3$ 曲面; 另外构造了 $g = 4, s = 7$ 且 S 双有理于一般型曲面.
- (3) [Tuy07] 构造了 $s = 6, \kappa(S) = 0$ 且亏格 g 可以充分大的例子.

谈胜利构造了有理直线上恰有 4 条奇异雅克比纤维的纤维化.

例 5.6.4 (谈胜利) 设 $pr_i: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 是到第 i 个分量的投影映射. 取 $(2, 1)$ 型不可约光滑曲线 B_0 . 此时必存在 pr_2 的两条纤维 Γ_1^0, Γ_2^0 分别与 B_0 相切. 再任取 pr_2 的其他两条一般纤维 Γ_3^0, Γ_4^0 . 我们构造 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的二次覆盖, 以 $B_{\pi_0} = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i^0$ 为分歧轨迹.

令 $B_\pi = \pi_0^* B_0, \pi_0^* \Gamma_i^0 = 2\Gamma_i$. E 是 pr_1 的一般纤维拉回 (亏格为 1). 注意到 $B_\pi \equiv 2L$ 是偶除子 ($L = F_1 + \Gamma_3$), 我们可以以 B_π 为分歧轨迹作二次覆盖 $\pi: S_0 \rightarrow E \times \mathbb{P}^1$. 由此诱导了 \mathbb{P}^1 上亏格 2 半稳定纤维化 $f: S \rightarrow C$, 有 6 条奇异纤维, 其中恰有四条是雅克比奇异的. 具体的验证如下.

设 E_1, E_2 是 pr_1 的两条纤维, 它们在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的像纤维恰好分别经过 B_0 与 Γ_1^0, Γ_2^0 的切点. 设 E_3, \dots, E_6 是 pr_1 的另外四条纤维, 它们的像纤维分别经过 B_0 与 Γ_3^0, Γ_4^0 的各交点. 设 $B_\pi|_{E_i} = 2p_i, q_i = L|_{E_i}$, 显然有 $2p_i \equiv 2q_i$.

(1) 因为 $p_1 \neq q_1$, 所以 $\pi^{-1}E_1$ 不可约. 因此它诱导的 f 的纤维 $\tilde{F}_1 = C_1 + C_2, C_1 C_2 = 2, C_1$ 是光滑椭圆曲线, C_2 是 (-2) -曲线. 同理, E_2 诱导相同的奇异纤维.

(2) $p_3 = q_3$ 推出 $\pi^{-1}E_3$ 不可约, 因此它诱导的 f 的纤维 \tilde{F}_3 是带一个可分离点的半稳定纤维. E_4 也是如此.

(3) 同样地, 可知 E_5, E_6 诱导的奇异纤维都是带一个不可分离点的半稳定纤维.

进一步, 我们有 $K_f^2 = 4, \chi_f = 1, e_f = 8, p_g(S) = 0, q(S) = 1$. ■

例 5.6.5 (肖刚 [Xia86]) 这里我们构造斜率大于 8 的超椭圆纤维化. 设 G 为 \mathbb{P}^1 的非循环有限自同构群. 考虑 $P' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的除子

$$\Gamma = \{(p, \gamma(p)) \mid p \in \mathbb{P}^1, \gamma \in G\}.$$

设 $n = |G|$, 则 Γ 由 n 条 $(1, 1)$ 型曲线组成. 设 $p \in \mathbb{P}^1$ 是 G 的不动点, 那么对任何 $\gamma \in G$, 点 $(p, \gamma(p))$ 是通常 k 重点, 此处 k 是 p 稳定子群 $Stab(p)$ 的阶.

设 $p_i : P' \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是到第 i 个分量的投影. 设 D 为 \mathbb{P}^1 中所有稳定子群为偶数的不动点在 p_2 下的原像, 则 $R' = \Gamma + D$ 是偶除子, 它的奇点都是奇数阶的.

由于 G 在 \mathbb{P}^1 上的作用的不动点有偶数个, 我们可以以其为分歧轨迹构造 p_1 的二次基变换 $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. 设 $\varphi : P \rightarrow C$ 是对应的新纤维化, R 是 R' 的拉回. 易知, R 是既约偶除子, P 是 C 上的几何直纹面, R 的奇点都是 $(2k+1 \rightarrow 2k+1)$ 型. 构造以 R 为分歧轨迹的二次覆盖, 从而诱导超椭圆纤维化 $f : S \rightarrow C$, 其斜率 $\lambda_f \geq 9$. ■

注 5.6.2 [Che87] 利用类似方法得到 \mathbb{P}^1 上斜率大于 8 的纤维化, 且曲面 S 是单连通的.

本章习题

习题 5.1 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 0 纤维化, 但不是相对极小的.

- (1) 证明: 必存在奇异纤维 F_1 .
- (2) 设 Γ 是 F_1 中的任一不可约分支, 证明: 必存在 f 的相对极小模型 $f' : S' \rightarrow C$ 使得 Γ 的像恰为 f' 的纤维.

习题 5.2 设 $f : S \rightarrow C$ 是几何直纹面, D 是 S 上的有效除子, F 是一般纤维, $d = DF$. 证明: $f_*\mathcal{O}_S(D)$ 是秩 $d+1$ 的局部自由层. 特别地, $f_*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_C$.

习题 5.3 设 $f : S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, F 是单重奇异纤维. 请利用 ADE 曲线的结构重新确定出 F 对偶图的所有可能分类.

习题 5.4 试构造椭圆纤维化 $f : S \rightarrow C$ 使得它含有两条 n 重纤维.

习题 5.5 设 $f : S \rightarrow C$ 是椭圆纤维化, 且 $\kappa(S) = 0$ 或 $-\infty$. 请对这类曲面 S 进行分类.

习题 5.6 证明引理 5.3.3 的结论.

习题 5.7 设 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ 是曲面 S 上的负定曲线, Z 是 C 上的基本闭链. 设 $\rho : \tilde{S} \rightarrow S$ 是一系列爆发的复合, C' 是完全原像 ρ^*C 的支集. 证明: $Z' = \rho^*Z$ 是 C' 上的基本闭链. 特别地, 假设 Γ 是来自于 ρ 的例外曲线分支, 则 $\Gamma Z' = 0$.

习题 5.8 利用命题 5.3.1 重新证明: 二次覆盖奇点是有理二重点当且仅当对应的分歧轨迹奇点是简单奇点. 进一步, 结合引理 5.3.4 重新给出简单奇点的分歧轨迹方程分类(在拓扑等价意义下).

习题 5.9 设 $\pi : (X, Q) \rightarrow (Y, q)$ 是光滑曲面 Y 上的二次覆盖, $q = \pi(Q)$ 是分歧轨迹奇点, R 是分歧轨迹. 设 E 是典范解消 Q 得到的例外曲线, K_E 是 E 对应的有理典范除子, $p_g(Q)$ 是 Q 的几何亏格.

- (1) 试用二次覆盖典范解消数据 w_i (参看 (5-3)) 来计算 K_E^2 和 $p_g(Q)$.
- (2) 请结合 Milnor 公式以及上述结果, 重新证明 Laufer 公式:

$$\mu_q(R) = \chi_{top}(E) - 1 + K_E^2 + 12p_g(Q),$$

这里 $\mu_q(R)$ 指 R 在 q 处的 Milnor 数, $\chi_{top}(E)$ 是 E 的欧拉示性数.

习题 5.10 利用习题 5.9 的结论, 证明等式 (5-4).

习题 5.11 证明: 超椭圆纤维化的多重纤维必定是二重的. 特别地, 当亏格 g 是偶数时, 超椭圆纤维化没有重纤维.

习题 5.12 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 2 纤维化,

(1) 证明: $S^2 f_* \omega_{S/C} \hookrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes 2})$ 是单态射, 且限制在一般的点上的茎映射是同构.

(2) 利用 Riemann-Roch 定理证明:

$$K_f^2 = 2\chi_f + \text{length coker}\{S^2 f_* \omega_{S/C} \hookrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes 2})\}.$$

习题 5.13 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 2 纤维化, $b = g(C)$, 且 $q_f = 0$. 证明:

$$K_f^2 \leq 6\chi_f + 2b - 2.$$

习题 5.14 试给出例 5.6.3 诱导的到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的三次覆盖.

习题 5.15 设 $\pi: X \rightarrow Y$ 是三次覆盖, p 是分歧轨迹奇点, H_p 是 p 的 Horikawa 数.

(1) 假设 p 的所有无穷接近点 p_i 的典范解消数据 $w_i \leq 3$, 证明:

$$H_p = \sum_{w_i \leq 2} p_a(Z_{1,i}) + \sum_{w_i = 3} (p_a(Z_{1,i}) - 1),$$

这里 $Z_{1,i}$ 是 p_i 的第 1-基本闭链. 第一(相应地, 第二)个求和号表示对所有满足 $w_i \leq 2$ (相应地, $w_i = 3$) 的无穷接近点 p_i 对应项求和.

(2) 证明: 原像 $\pi^{-1}(p)$ 中的奇点是有理奇点当且仅当 $H_p = 0$ 且 $w_i \leq 3, \forall i$.

(3) 设 $D_1 + 2D_2$ 是 π 的分歧轨迹, E'_p 是 p 对应的曲面奇点极小解消的例外曲线支集. 证明推广的 Laufer 型公式:

$$\mu_p(D_1) + 2\mu_p(D_2) = \chi(E'_p) + H_p + 9\tau_p + \frac{1}{2}(D_1 D_2)_p,$$

这里 $\mu_p(\cdot)$ 是 Milnor 数, $(D_1 D_2)_p$ 是局部相交数, $\chi(E'_p)$ 是欧拉示性数,

$$\tau_p := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} m_i(m_i - 1) + \frac{1}{18} \sum_{i=0}^{k-1} n_i(5n_i - 9),$$

m_i, n_i 都是解消数据.

第六章 相对典范代数

6.1 除子上的可逆层

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, $\mathcal{R}_\nu = f_*(\omega_{S/C}^{\otimes \nu})$ 是相对 ν -典范层. 我们定义 f 的相对典范代数 (Relative canonical algebra)

$$\mathcal{R}(f) = \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathcal{R}_\nu.$$

它是 \mathcal{O}_C -代数. 此外,

$$\mathcal{R}_\nu \otimes \mathcal{O}_C / \mathcal{I}_p \cong H^0(F, \nu K_F),$$

这里 $F = f^*(p)$ 是纤维. 我们也可以定义纤维 F 上的 \mathbb{C} -典范代数

$$R(F, K_F) = \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(F, \nu K_F).$$

由 Nakayama 引理, 关于 $R(F, K_F)$ 生成元的诸性质都可以过渡到 $\mathcal{R}(f)$ 上. 我们的兴趣之一就是研究 $R(F, K_F)$ 上生成元性质.

这一节简要回顾除子上的可逆层的一些基本事实和研究技巧, 为后面的讨论做一些准备工作. 这些技巧在处理其他代数曲面问题时也非常有用. [Men88] 在这方面作了一个很好的梳理. 更多的内容也可参看 [Men96], [Cat82], [Rei75] 及 [KM99, KM08] 等.

设 D 是曲面 S 上的有效除子. 由于 ω_D 是 Gorenstein 的, 所以 D 上的对偶层 ω_D 是可逆的. 我们有相伴公式 $\omega_D = \omega_S \otimes \mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_D$. 为方便讨论, ω_D 也常被记作 K_D . 如果 $\deg K_D|_\Gamma \geq 0$ (相应地, > 0), $\forall \Gamma < D$ 成立, 我们就称 K_D 是 nef 的 (相应地, ample).

设 L 是 D 上的可逆层, 并将 $L^{\otimes \nu}$ 简记为 νL . 我们可以考察更一般的分次环

$$R(D, L) = \bigoplus_{\nu \geq 0} H^0(D, \nu L).$$

这个环的乘法来自于态射 $L^{\otimes \nu} \otimes L^{\otimes \mu} \rightarrow L^{\otimes (\nu + \mu)}$.

光滑曲线上的一些结论过渡到有效除子 D 上仍然成立.

命题 6.1.1 设 \mathcal{F} 是有效除子 D 上秩为 r 的局部自由层.

(1) (Serre 对偶定理)

$$\begin{aligned} H^0(D, \mathcal{F}) &\cong H^1(D, K_D \otimes \mathcal{F}^\vee)^\vee, \\ H^1(D, \mathcal{F}) &\cong H^0(D, K_D \otimes \mathcal{F}^\vee)^\vee. \end{aligned}$$

(2) (Riemann-Roch 定理)

$$\chi(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + r\chi(\mathcal{O}_D).$$

(3) (算术亏格)

$$p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 + DK_S).$$

(4) (分解序列) 设 $D = A + B$, $A, B > 0$, 我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A(-B) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_B \longrightarrow 0$$

(5) (Castelnuovo 引理 [Mum70]) 设可逆层 \mathcal{L} 由整体断面生成, \mathcal{F} 是凝聚层且 $H^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$, 则以下态射是满射

$$H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}).$$

(6) (Bombieri [Bom73]-Francia) 令 $\alpha(D) = \dim \text{Ker}(H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D))$, 则

$$\alpha(D) = h^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) - h^0(D, \mathcal{O}_D) + 1.$$

进一步, 设 $\sigma: S \rightarrow S'$ 是光滑曲面之间的双有理映射, 则 $\alpha(\sigma_*D) = \alpha(D)$.

有效除子 D 如果满足以下条件, 则称为 m -连通除子: 对任何分解 $D = D_1 + D_2$ (此处 $D_1, D_2 > 0$), 都有 $D_1D_2 \geq m$.

引理 6.1.1 设 D 是曲面 S 上的有效除子, $n \geq 0$. 设 $H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + nD)) > 0$, 且 $K_S + nD$ 是 nef, big, 那么

- (1) $\forall A \in |K_S + nD|$ 是 1-连通除子;
- (2) 如果 n 是偶数, 则 A 是 2-连通除子.

证明 不妨设 $A = D_1 + D_2$, $D_1, D_2 > 0$. 因为 $K_S + nD$ 是 nef 的, 所以

$$D_1^2 + D_1D_2 \geq 0, \quad D_2^2 + D_1D_2 \geq 0.$$

注意到 $(K_S + D)^2 > 0$, 因此上面的不等式之一是严格的. 不失一般性, 设 $D_1^2 + D_1D_2 > 0$.

由 Hodge 指标定理得 $D_1^2D_2^2 \leq (D_1D_2)^2$, 等号成立当且仅当 $D_1 \sim \gamma D_2$, $\gamma \in \mathbb{Q}$. 假若 $D_1D_2 < 0$, 那么 $D_1^2 > -D_1D_2 > 0$, $D_2^2 \geq -D_1D_2 > 0$. 两式相乘则与 Hodge 指标定理矛盾! 如果 $D_1D_2 = 0$, 同样地可得 $D_2^2 = 0$, $D_1^2D_2^2 = (D_1D_2)^2$, 从而 $D_1 \sim \gamma D_2$, $D_1^2 = 0$. 这就推出 $(K_S + nD)^2 = 0$, 矛盾! 因此 $D_1D_2 \geq 1$.

注意 $D_1D_2 = D_1^2 - D_1K_S - nDD_1$. 如果 n 是偶数, 那么 D_1D_2 也是偶数, 故 $D_1D_2 \geq 2$. ■

引理 6.1.2 ([BC78], [CFM97]) 设 L 是 D 上可逆层, $s \in H^0(D, L)$ 且 $s \neq 0$, 则以下情形之一成立:

- (i) s 限制在 D 的任何不可约分支上都不恒为零, 且 $\deg_{D'} L \geq 0$, $\forall D' \leq D$, 从而 $\deg_D L \geq 0$.
- (ii) D 是可约的, 设 $D_1 < D$ 是满足 $s|_{D_1} \equiv 0$ 的最大除子, 从而 $\deg_\Gamma(L - D_1) \geq 0$, 对任何 $\Gamma < D - D_1$ 成立. 特别地, $D_1(D - D_1) \leq \deg_{D-D_1} L$.

证明 假设 D_1 是满足 (ii) 的最大除子. 那么 $D - D_1$ 和 $s \in H^0(\mathcal{O}_{D-D_1}(L - D_1))$ 满足 (i), 因而 $\deg_\Gamma(L - D_1) \geq 0$, $\forall \Gamma < D - D_1$. ■

设 $s \in H^0(D, L)$, $s \neq 0$, 且 s 在 D 的某个分支上恒为零. 设 $Z_s \leq D$ 使得 $s|_{Z_s} \equiv 0$ 的最大除子. 如果不存在其他截面 t , 使得 $Z_s < Z_t$, 那么就称 s 是 0-极大截面.

推论 6.1.1 设 D 是 1-连通的, L 是 D 上的可逆层, 使得 $\deg_\Gamma L \leq 0$, $\forall \Gamma \leq D$, 则要么 $h^0(D, L) = 0$, 要么 $h^0(D, L) = 1$ 且 $L \cong \mathcal{O}_D$. 如果 $\deg_D L < 0$, 那么必有 $H^0(D, L) = 0$.

注 6.1.1 引理 1.1.2 和引理 1.1.3 实际上都是推论 6.1.1 的特例.

推论 6.1.2 设 D 是 1-连通除子, $p \in D$ 是光滑点, 且 $h^0(D, \mathcal{O}_D(p)) > 1$, 那么

- (1) D 中过 p 的分支 $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$.
- (2) 如果 D 可约, 则存在 D' , 使得 $\Gamma < D' < D$, $D'(D - D') = 1$.
- (3) 若 $q \in \Gamma$ 是另一个 D 中的光滑点, 那么也有 $h^0(D, \mathcal{O}_D(q)) > 1$.

命题 6.1.2 ([Men96], 定理 4.1) 设 D 是 0-连通除子, 使得 $h^0(D, \mathcal{O}_D) = n \geq 2$ (从而非 1-连通), 那么存在分解 $D = \sum_{i=1}^n D_i$, $D_i \geq 0$, 满足以下条件 ($1 \leq i \leq n-1$):

- (1) $h^0(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 1$,
- (2) $\mathcal{O}_{D_i}(D_{i+1} + \cdots + D_n) = \mathcal{O}_{D_i}$,
- (3) 要么 $D_i \cap (D_{i+1} + \cdots + D_n) = \emptyset$ 要么 $D_i \subseteq (D_{i+1} + \cdots + D_n)$.

证明 因为 $h^0(D, \mathcal{O}_D) \geq 2$, 所以存在非零截面 $s \in H^0(D, \mathcal{O}_D)$, 它在 D 的某个分支上恒为零. 不妨设 s 是 0-极大截面, $D_1 = D - Z_s$. s 也可看成是 $\mathcal{O}_{D_1}(-Z_s)$ 的截面, 它满足引理 6.1.2(i) 的条件, 结合 D 的 0-连通性, 我们得到 $D_1 Z_s = 0$, $\mathcal{O}_{D_1}(-Z_s) = \mathcal{O}_{D_1}$. 今证 $h^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = 1$. 若不然, 可找到整体截面

$$t \in H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}(-Z_s)) \subseteq H^0(D, \mathcal{O}_D),$$

使得其在 D_1 的某个分支上恒取零, 从而它作为 \mathcal{O}_D 的截面而言, 其取零的分支 $Z_t > Z_s$, 与 Z_s 的极大性矛盾!

如果 $D_1 \cap Z_s = \emptyset$, 那么结论成立. 今设 $D_1 \cap Z_s \neq \emptyset$. 令 $A = D_1 - D_1 \wedge Z_s$, $B = Z_s - D_1 \wedge Z_s$. 假若 $A \neq 0$, 则由 $D_1 Z_s = 0$ 知 $0 = (D_1 \cap Z_s)(D - D_1 \cap Z_s) + AB \geq AB \geq 0$, 故 $AB = 0$, 即 A, B 不相交. 因而由 $\mathcal{O}_A(-Z_s) = \mathcal{O}_A$ 推得 $\mathcal{O}_A(-D_1 \wedge Z_s) = \mathcal{O}_A$, 从而可构造 $H^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1})$ 中的非零截面, 使得其在 $D_1 \wedge Z_s$ 上取零, 这与 $h^0(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = 1$ 矛盾! 故必有 $A = 0$, 即 $D_1 \leq Z_s$.

由上讨论, 限制映射 $r : H^0(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(Z_s, \mathcal{O}_{Z_s})$ 的核 $\text{Ker} r$ 是 1 维的, 像 $\text{Im} r$ 是 $n-1$ 维, 故 $h^0(Z_s, \mathcal{O}_{Z_s}) \geq n-1$. 由 $D_1 Z_s = 0$ 知, Z_s 仍是 0-连通的 (习题 6.1). 由归纳法即得结论. ■

设 $p \in D$. 如果 D 中经过 p 的分支都是 1 重的, 则称 p 为既约点 (Reduced point). 如果 p 是 D 的奇点或者非既约点, 那么就称 p 是 D 的重点.

命题 6.1.3 ([Fra91], [Men96]) 设 D 是 S 上的有效除子, p 是 D 中的重点, 那么 p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当以下映射

$$H^0(\mathcal{O}_{\sigma^* D - E}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\sigma^* D - 2E})$$

不是满射.

证明 p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当 (习题 6.7)

$$h^1(\tilde{S}, \sigma^*(K_S + D) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E)) > h^1(\tilde{S}, \sigma^*(K_S + D)).$$

由 Serre 对偶定理, 我们有

$$\begin{aligned} h^1(-(\sigma^* D - 2E)) &= h^1(\tilde{S}, \sigma^*(K_S + D) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E)), \\ h^1(-(\sigma^* D - E)) &= h^1(\tilde{S}, \sigma^*(K_S + D)). \end{aligned}$$

另外, p 是 D 重点意味着 $\sigma^*D - E \geq \sigma^*D - 2E \geq 0$. 由命题 6.1.1 (6),

$$\alpha(\sigma^*D - E) = \alpha(\sigma^*D - 2E) = \alpha(D),$$

因而再次由命题 6.1.1 (6) 可知

$$h^1(-(\sigma^*D - 2E)) > h^1(-(\sigma^*D - E)) \iff h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) > h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-E}).$$

至此, 我们完成了证明. ■

推论 6.1.3 在命题 6.1.3 的条件下, 假设 D 是 1-连通的, 那么 p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当 D 存在分解 $D = D_1 + D_2$, 使得 $p \in D_1 \cap D_2$, $D_1D_2 = 1$, 且有

$$h^0(\sigma^*D_1 - E, \mathcal{O}(-(\sigma^*D_2 - E))) > 0.$$

特别地, 如果 D 是既约的, 那么 p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当 p 是 D 的可分离结点.

证明 因为 D 是 1-连通的, 所以由推论 6.1.1 知 $h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) = 1$. 由命题 6.1.3 知, p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当 $h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) \geq 2$.

如果 $h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) \geq 2$, 那么推论 6.1.1 推出 $\sigma^*D - 2E$ 不是 1-连通, 从而 D 有分解 $D = D_1 + D_2$ 满足 $p \in D_1 \cap D_2$, $D_1D_2 = 1$ (习题 6.7). 进一步, D_1, D_2 都是 1-连通的 (习题 6.1). 这样可以推出 $\sigma^*D_2 - E$ 是 1-连通的, 所以 $h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D_2-E}) = 1$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D_1-E}(-(\sigma^*D_2 - E))) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D_2-E}) \cong \mathbb{C}$$

由于 $h^0(\mathcal{O}_{\sigma^*D-2E}) > 1$, 所以 $h^0(\sigma^*D_1 - E, \mathcal{O}(-(\sigma^*D_2 - E))) > 0$. ■

注 6.1.2 结合命题 6.1.2, 我们可以将推论 6.1.3 中的充要条件略作修改, 即重点 p 是 $|K_S + D|$ 的基点当且仅当有分解 $D = D_1 + D_2$, $D_1, D_2 \geq 0$, $D_1D_2 = 1$, 且 p 是 D_1 的光滑点, 满足 $\mathcal{O}_{D_1}(p) \cong \mathcal{O}_{D_1}(D_2)$. 进一步, 当上述条件成立时, 要么 $D_1 \cap D_2 = \{p\}$, 要么 $D_1 \leq D_2$. 具体细节可参看 [Men96, 定理 3.1].

推论 6.1.4 如果 D 是 2-连通除子, p 是 D 的重点, 那么 p 不可能是 $|K_S + D|$ 的基点.

采用和命题 6.1.3 完全相同的方法, 我们有以下结论 (请读者自证).

命题 6.1.4 设 D 是 S 上的有效除子, p, q 是 D 上重点, 且 $p \neq q$. 设 $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ 是在 p, q 处的爆发, $E_1 = \sigma^{-1}(p)$, $E_2 = \sigma^{-1}(q)$. 设 $D' = \sigma^*D - 2E_1 - E_2$, $D'' = \sigma^*D - 2E_1 - 2E_2$, 则 p, q 不能由 $|K_S + D|$ 区分当且仅当以下映射

$$H^0(D', \mathcal{O}_{D''}) \longrightarrow H^0(D'', \mathcal{O}_{D''})$$

不是满射.

注 6.1.3 结合命题 6.1.2, 当 D 是 2-连通时, 我们也可以将命题 6.1.4 中的充要条件重做修改, 即重点 p, q 能用 $|K_S + D|$ 区分当且仅当有分解 $D = D_1 + D_2$, $D_1, D_2 \geq 0$, $D_1D_2 = 2$, 且 p, q 是 D_1 的光滑点, 满足 $\mathcal{O}_{D_1}(p+q) \cong \mathcal{O}_{D_1}(D_2)$. 进一步, 当上述条件成立时, 要么 $D_1 \cap D_2 = \{p, q\}$, 要么 $D_1 \leq D_2$. 具体细节可参看 [Men96, 定理 3.2].

引理 6.1.3 设 D 是曲面 S 中的 1-连通除子, p 是 D 中的光滑点, 那么 p 是 K_D 的所有整体截面的公共零点集当且仅当 $H^0(D, \mathcal{O}_D(p)) \geq 2$.

进一步, 假设 $p_a(D) \geq 1$, 那么如果 p 是 K_D 的所有整体截面的公共零点集, 则 D 不是 2-连通, D 中过 p 的分支 $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$, 且 $\forall s \in H^0(D, K_D)$, 有 $s|_{\Gamma} \equiv 0$.

证明 易知 p 是 K_D 的所有整体截面的公共零点集当且仅当 $H^1(D, \mathcal{I}_p \otimes K_D) \rightarrow H^1(D, K_D)$ 不是单射, 亦即 $H^0(D, \mathcal{O}_D) \hookrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(p))$ 不是满射, 此处 \mathcal{I}_p 指 p 处的理想层. 注意到 D 是 1-连通的, 因此 $h^0(D, \mathcal{O}_D) = 1$. 这就证明了结论前半部.

结论后半部直接来自于推论 6.1.2. ■

推论 6.1.5 如果 D 是 2-连通除子, 则要么 $D \cong \mathbb{P}^1$, 要么 K_D 有整体截面生成. 进一步, 如果 $p_a(D) = 1$, 那么 $K_D \cong \mathcal{O}_D$.

证明 命题前半部分来自于推论 6.1.4 和引理 6.1.3. 命题后半部分来自于推论 6.1.1. ■

命题 6.1.5 设 D 是 1-连通除子, 且 K_D 不是 nef 的, 则以下情形之一成立:

- (1) D 是不可约的, 且 $D \cong \mathbb{P}^1$.
- (2) D 是既约的, 且有一个不可约分支 $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ 使得 $\Gamma(D - \Gamma) = 1$.

特别地, 如果 D 是 2-连通除子, 则要么 $D \cong \mathbb{P}^1$, 要么 K_D 是 nef 的.

证明 如果 D 是不可约的, 则立得情形 (1) (习题 6.2). 今设 D 可约. 由相伴公式得

$$\deg K_D|_C = \deg K_C + C(D - C), \quad \forall C \leq D. \quad (6-1)$$

利用 D 的 1-连通性即得所需. ■

命题 6.1.6 设 D 是 1-连通除子, 且 $p_a(D) \geq 2$. 如果 D 满足以下条件之一, 那么 K_D 是 ample 的:

- (1) D 不可约;
- (2) D 可约, 且对 D 中任何有理分支 $C \cong \mathbb{P}^1$, 都有 $C(D - C) \geq 3$.

证明 不妨设 D 可约. 由 ample 定义及公式 (6-1) 立得所需结论. ■

引理 6.1.4 设 D 是 1-连通除子, $p_a(D) \geq 2$ 且 K_D 是 nef 的, 那么 $h^1(D, nK_D) = 0, n \geq 2$. 进一步, 设 $0 < D_1 < D$, 则必有 $h^1(D_1, nK_D) = 0 (n \geq 1)$.

证明 由对偶公式,

$$\begin{aligned} h^1(D, nK_D) &= h^0(D, (1-n)K_D), \\ h^1(D_1, nK_D) &= h^0(D_1, K_{D_1} - nK_D). \end{aligned}$$

因 $p_a(D) \geq 2$, 故 $\deg_D \mathcal{O}_D((1-n)K_D) < 0, \forall n \geq 2$. 由于 K_D 是 nef 的, 所以 $\deg_{\Gamma} \mathcal{O}_D((1-n)K_D) \leq 0, \forall \Gamma < D$. 由推论 6.1.1 即得 $h^1(D, nK_D) = 0$.

由 D 的 1-连通性及 K_D 的 nef 性,

$$\deg_{D_1}(K_{D_1} - nK_D) = -D_1(D - D_1) - (n-1)\deg_{D_1} K_D < 0$$

另一方面, 对任何 $0 < D' < D_1$, 由直接验算可知

$$D'(D_1 - D') > \deg_{D_1 - D'}(K_{D_1} - nK_D).$$

现在由引理 6.1.2 即得结论. ■

引理 6.1.5 设 D 是 1-连通除子, K_D 是 nef 的. 设 $0 < D_1 (< D)$ 也是 1-连通的. 那么

(1) 如果 $\deg_{D_1} K_D > 0$, 则

$$h^1(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D - (D - D_1))) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \geq 2. \end{cases}$$

(2) 如果 $\deg_{D_1} K_D = 0$, 那么 $p_a(D_1) = 0$, $D_1(D - D_1) = 2$, 且有

$$h^1(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D - (D - D_1))) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

证明 $n = 1$ 情形可以从对偶公式及 D_1 的连通性得到. 今设 $n \geq 2$. 如果 $\deg_{D_1} K_D > 0$, 则由 K_D 的 nef 性可验证 $L = -(n-1)K_D$ 满足推论 6.1.1 诸条件, 从而由对偶公式得到所需等式.

如果 $\deg_{D_1} K_D = 0$, 则 $\deg_C K_D = 0, \forall C < D$. 由习题 6.4 知, $K_D|_{D_1} \cong \mathcal{O}_{D_1}$, 由此得到其余等式. ■

定理 6.1.1 设 D 是 1-连通除子, K_D 是 nef 的. 设 $0 < D_1 < D$, 使得 $D - D_1$ 是 1-连通的. 考虑限制映射

$$r_n : H^0(\mathcal{O}_D(nK_D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D)),$$

则以下情形之一成立:

(1) $\deg_{D-D_1} K_D > 0$ 且 r_n 是满射 ($\forall n \geq 1$).

(2) $\deg_{D-D_1} K_D = 0$, r_1 是满射, $\text{Im} r_n (n \geq 2)$ 在 $H^0(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D))$ 中余维数为 1.

证明 考虑由 $D = D_1 + (D - D_1)$ 的分解序列 (命题 6.1.1(4)) 诱导的上同调正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{D-D_1}(nK_D - D_1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_D(nK_D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D-D_1}(nK_D - D_1)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_D(nK_D)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{D_1}(nK_D)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

由引理 6.1.4 和引理 6.1.5 立得结论. ■

作为以上讨论的一个有趣应用, 我们有如下结论.

命题 6.1.7 设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, F 是任一纤维, 则 $2K_F$ 由整体截面生成.

证明 注意到 $\mathcal{O}_F(F) \cong \mathcal{O}_F$, 所以我们只需要证明 $|2K_S + nF|$ 在 F 上无基点 (n 是充分大的数). 由习题 1.10, 我们可以去充分大的偶数 n , 使得 $(K_S + nF)$ 是 nef, big 的, 且 $h^0(K_S + nF) > 0$. 我们还可以假设存在 $A \in |K_S + nF|$, 使得 A 在 F 上每个点处重数不小于 2 (必要时用 $A + 2F$ 替代 A , $n + 2$ 替代 n).

今取 $p \in F$, $\sigma: \tilde{S} \rightarrow S$ 是 P 的爆发, $E = \sigma^{-1}(p)$. 由命题 6.1.1, A 是 2-连通的. 由假设知 $\sigma^*A - 2E$ 是有效除子. 因而 $\sigma^*A - 2E$ 是 1-连通的 (习题 6.4). 结合命题 6.1.1 (6) 即得

$$h^1(\tilde{S}, -(\sigma^*A - 2E)) = h^1(\tilde{S}, -(\sigma^*A - E)).$$

由对偶公式, 上式等价于

$$h^1(\tilde{S}, \sigma^*(2K_S + nF) - E) = h^1(\tilde{S}, \sigma^*(2K_S + nF)).$$

因此 p 不是 $|2K_S + nF|$ 的基点 (习题 6.7). ■

引理 6.1.6 ([CF96], [Lau83]) 设 D 是 1-连通的, $p_a(D) \geq 1$, L 是 D 上的线丛, $L - K_D$ 是 nef 的. 设 p 是 $|L|$ 的基点, 则存在有效除子 $\Delta \leq D$, 满足以下性质之一:

- (1) p 是 Δ 的光滑点, $L|_{\Delta} = \mathcal{O}_{\Delta}(K_{\Delta} + p)$.
- (2) $\Delta = D$, p 是 Δ 的光滑点, 且存在 D 上另一个光滑点 q , 使得 $L = \mathcal{O}_D(K_D + p - q)$, $L \neq K_D$.
- (3) $\Delta = D$, p 是 Δ 的二重点, $\mathcal{O}_{\tilde{D}}(\sigma^*(L - K_D)) = \mathcal{O}_{\tilde{D}}$, $L \neq K_D$, 此处 σ 是在 p 处的爆发, \tilde{D} 是 D 的严格原像.

6.2 除子上的典范代数

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 相对极小纤维化. 我们在这一节中讨论典范代数 $R(F, K_F)$ 的生成元次数. 我们首先考察更一般的分次环 $R(D, K_D)$, 此处 D 是有效除子.

如果 D 不可约且有一个 g_2^1 , 即存在可逆层 \mathcal{L} 使得 $\deg \mathcal{L} = 2$ 及 $h^0(D, \mathcal{L}) \geq 2$, 则称 D 在一般意义上是超椭圆的. 当 $p_a(D) \geq 2$ 且 D 在一般意义上超椭圆时, 它有唯一的 g_2^1 .

我们有以下熟知的结果.

命题 6.2.1 ([Sai73], [Re90b], [Cat82], [Kon01]) 设 D 是不可约曲线, 且 $p_a(D) \geq 2$, 那么

- (1) 如果 $p_a(D) = 2$, 则 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 3 的元生成.
- (1) 如果 $p_a(D) \geq 3$ 且 D 是超椭圆的, 则 $R(D, K_D)$ 由次数为 1 和 2 的元生成.
- (2) 如果 $p_a(D) \geq 3$ 且 D 是非超椭圆的, 则 $R(D, K_D)$ 由次数为 1 的元生成.

我们先考察 2-连通亏格 1 除子的某些特殊分次环结构. 这一情形相对比较简单, 对我们后面的研究有一定的参考作用.

引理 6.2.1 ([Rei75]) 设 D 是 2-连通除子, 且 $p_a(D) = 1$, L 是 D 上可逆层, 满足 $\deg_D L > 0$, $\deg_C L \geq 0$, $\forall C \leq D$.

- (1) 如果 $\deg_D L \geq 2$, 那么 L 有整体截面生成.
- (2) 如果 $\deg_D L = 1$, 那么 $L = \mathcal{O}_D(p)$ (p 是 D 上的光滑点), 且 $H^0(L)$ 由一个在 p 处取零的截面生成.

证明 容易验证, D 不可约时结论成立. 今设 D 可约. 由推论 6.1.5 知 $K_D \cong \mathcal{O}_D$, 从而 $\deg_C K_D = 0$, $\forall C \leq D$. 再结合连通性即得 $C(D - C) = 2$, $C \cong \mathbb{P}^1$, $p_a(D - C) = 0$, 且 $D - C$ 是 1-连通除子 (习题 6.1).

考虑 $D = C + (D - C)$ 的分解序列诱导的上同调正合列

$$H^0(D, L) \xrightarrow{r} H^0(C, L) \longrightarrow H^1(D - C, L - C|_{D-C}).$$

由对偶公式

$$h^1(D - C, L - C |_{D-C}) = h^0(D - C, K_D - L |_{D-C})$$

若 $\deg L_{D-C} > 0$, 则上式等于零, 从而 r 是满射, 这就推出 C 上的点不可能是 $|L|$ 的基点 (因 $C \cong \mathbb{P}^1$).

若 $\deg L_{D-C} = 0$, 则 C 是唯一使得 $\deg_C L \neq 0$ 的分支, 且 $D - C$ 不含 C . 这一情形下, 如果 $p \in C$ 是 $|L|$ 的基点, 则必是 D 中的光滑点. 若不然存在另一分支 C' 过 p , 使得 $\deg_{C'} L = 0$. 于是由上述讨论可知 C' 上无基点, 矛盾!

易知 p 是 L 的基点当且仅当 $H^0(\mathcal{O}_D(-L + p)) > 0$, 从而 $\deg L|_C = 1$. 由此得所需结论. ■

为书写方便, 我们用 $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, Y_1, \dots, Z_1]$ 表示加权多项式环, 其中 X_i 均指权为 1 的变量, Y_j 均指权为 2 的变量; Z_k 均指权为 3 的变量; 其余依次类推.

定理 6.2.1 在引理 6.2.1 的条件下, 我们有

(1) 如果 $\deg L = 1$, 那么

$$R(D, L) \cong \mathbb{C}[X, Y, Z]/(f_6),$$

这里 f_6 在合适的坐标选取下是形如 $Z^2 - Y^3 - aYX^4 - bX^4$ 的加权齐次多项式.

(2) 如果 $\deg L = 2$, 那么

$$R(D, L) \cong \mathbb{C}[X_1, X_2, Y]/(f_4),$$

这里 f_4 在合适的坐标选取下是形如 $Y^2 - \sum_{i=0}^4 a_i X_1^i X_2^{4-i}$ 的加权齐次多项式.

证明 由推论 6.1.1 及对偶公式即得 $h^1(nL) = 0$ ($n \geq 1$), 再由 Riemann-Roch 定理得 $h^0(nL) = n \deg L$.

(1) 由引理 6.2.1, $2L$ 由整体截面生成, 从而由命题 6.1.1(5) 可知

$$\varphi_{2,n} : H^0(2L) \otimes H^0(nL) \longrightarrow H^0((n+2)L)$$

是满射 ($n \geq 3$); 而 $\text{Im} \varphi_{2,1}$ 在 $H^0(3L)$ 中的余维数为 1. 这样, 我们只要讨论 $H^0(kL)$ ($k \leq 4$) 中的生成元即可.

由引理 6.2.1, $H^0(L)$ 由一个元 x 生成, 且 x 在某点 $p \in D$ 处取零. 因而 $x^2 \in H^0(2L)$ 是非零截面. 取截面 $y \in H^0(2L)$, 使得 x^2, y 构成其一组基. 由于 $2L$ 由整体截面生成, 所以 $y(p) \neq 0$. 类似地, 我们可以取 $z \in H^0(3L)$, 使得 (x^3, x^2y, z) 构成其一组基, 且 $z(p) \neq 0$.

今考虑

$$\varphi_{1,3} : H^0(L) \otimes H^0(3L) \longrightarrow H^0(4L).$$

注意到 $x(p) = 0$, 故 $\text{Im} \varphi_{1,3}$ 在 $H^0(4L)$ 中的余维数为 1. 因为 $y^2(p) \neq 0$, 故 $y^2 \notin \text{Im} \varphi_{1,3}$. 这推出 $H^0(4L) = \text{Im} \varphi_{1,3} + \text{Im} \varphi_{2,2}$. 因此 $R(D, L)$ 由 x, y, z 生成. 考虑映射

$$h : \mathbb{C}[X, Y, Z] \longrightarrow R(D, L), \quad X \rightarrow x, Y \rightarrow y, Z \rightarrow z.$$

上面的讨论说明这是满射. 由直接计算可知 $\dim(\text{Ker} h)_n = 0$ ($n \leq 5$), $\dim(\text{Ker} h)_6 = 1$. 因此存在 $f \in (\text{Ker} h)_6$. 注意到 $\text{Im} \varphi = H^0(6L)$, 等式左边只出现 x, y , 因此 f 中出现 Z^2 项. 又因为 z^2, y^3 是仅有的不在 $p \in D$ 处取零的截面, 因此 Y^3 出现在 f 中.

直接验算 $R(D, L)$ 和 $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(f)$ 在每个齐次部分的维数相同, 即证得结论. (2) 的讨论类似, 留给读者练习. ■

现在我们回到典范代数上.

定理 6.2.2 设 D 是有效除子, $p_a(D) \geq 2$, 且 $h^1(nK_D) = 0$ ($n \geq 2$). 那么

- (1) 如果 $2K_D$ 由整体截面生成, 则 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 5 的元生成.
 (2) 如果 D 是 2-连通, 则 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 3 的元生成. 这一情形中, 如果进一步假设 $p_a(D) = 2$, 则

$$R(D, K_D) \cong \mathbb{C}[X_1, X_2, Z]/(f_6),$$

这里 f_6 在合适的坐标选取下是形如 $Z^2 - p_6(X_1, X_2)$ 的加权齐次多项式.

证明 证明与定理 6.2.1 类似, 这里不再赘述. ■

设 D 是可约除子, $D = A + B$ 是一个分解, L, M 是 D 上的可逆层. 我们记 $N_m^n := mL + nM$. 首先考虑以下交换图 ($0 \leq k \leq m, 0 \leq q \leq n$):

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k,p} H^0(A, N_{m-k}^{n-p} - B) \otimes H^0(D, N_k^p) & \longrightarrow & \bigoplus_{k,p} H^0(D, N_{m-k}^{n-p}) \otimes H^0(D, N_k^p) & \longrightarrow & \bigoplus_{k,p} H^0(B, N_{m-k}^{n-p}) \otimes H^0(D, N_k^p) \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma_1 \\
 & & \bigoplus_{k,p} H^0(A, N_{m-k}^{n-p} - B) \otimes H^0(A, N_k^p) & & & & \bigoplus_{k,p} H^0(B, N_{m-k}^{n-p}) \otimes H^0(B, N_k^p) \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & & & \downarrow \gamma_2 \\
 0 & \longrightarrow & H^0(A, N_m^n - B) & \longrightarrow & H^0(D, N_m^n) & \longrightarrow & H^0(B, N_m^n)
 \end{array}$$

这里下标 k, p 不一定跑遍全部可能值.

引理 6.2.2 假设上述图中诸映射 $H^0(D, N_{m-k}^{n-p}) \rightarrow H^0(B, N_{m-k}^{n-p})$ 以及 $\alpha_1\alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ 都是满射, 那么 β 也是满射.

引理 6.2.3 假设 D 是 1-连通除子, $p_a(D) \geq 2$, $2K_D$ 由整体截面生成, 且 $h^1(nK_D) = 0$ ($n \geq 2$). 如果 D 是既约的或者是 nef 的, 那么 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 4 的元生成.

证明 因为 $2K_D$ 是由整体截面生成, 所以由引理 6.2.2, 我们只需要证明

$$H^0(2K_D) \otimes H^0(3K_D) + H^0(K_D) \otimes H^0(4K_D) \longrightarrow H^0(5K_D)$$

是满射, 并且可以假设 D 不是 2-连通的, 即有分解 $D = D_1 + D_2$, $D_1 D_2 = 1$. 不妨假设 D_1 是满足 $D_1(D - D_1) = 1$ 的极小除子. 这样, D_1 是 2-连通的, D_2 是 1-连通的, 且要么 $D_1 \leq D_2$, 要么 D_1, D_2 无公共分支 (习题 6.1).

同样地, 因为 $2K_D$ 由整体截面生成, 所以由引理 6.1.2 知 K_D 是 nef 的. 注意到 $\deg_{D_i} K_D = \deg K_{D_i} + 1 \geq 0$, 所以 $p_a(D_i) > 0$, 因而 $\deg_{D_i} K_D > 0$. 现在我们利用定理 6.1.1 推知限制映射

$$\varphi_{n,i} : H^0(D, nK_D) \longrightarrow H^0(D_i, nK_D)$$

是满射. 结合引理 6.2.2, 为了证明结论, 我们只需要证明以下两个映射是满射

$$H^0(D_2, 2K_D) \otimes H^0(D_2, 3K_D) \rightarrow H^0(D_2, 5K_D)$$

$$H^0(D_1, K_{D_1}) \otimes H^0(D_1, 4K_D) \rightarrow H^0(D_1, 4K_D + K_{D_1}).$$

因 $p_a(D) \geq 2$, 且 $2K_D$, 故由引理 6.1.4 和命题 6.1.1(5) 可知, 上述第一个映射是满的.

由推论 6.1.5 和命题 6.1.1(5), 为证第二个映射是满的, 我们只需要证明 $h^1(D_1, 4K_D - K_{D_1}) = 0$ 即可, 也就是 $h^0(D_1, 2K_{D_1} - 4K_D) = 0$. 由习题 6.5 知, $h^0(D_1, 2K_{D_1} - 2K_D) = 0$. 因而以下映射

$$H^0(D_1, 2K_{D_1} - 4K_D) \otimes H^0(D_1, 2K_D)$$

是零映射. 因 $2K_D$ 由整体截面生成, 故 $h^0(D_1, 2K_D) > 0$. 这就迫使 $h^0(D_1, 2K_{D_1} - 4K_D) = 0$. ■

注 6.2.1 [Kon01, 命题 1.3.3] 证明, 如果 D 是 1-连通的, K_D 是 nef 的并且由整体截面生成, 那么当 $p_a(D) \geq 3$ 时, $R(D, K_D)$ 由次数不超过 2 的元生成; 当 $p_a(D) = 2$ 时, 那么 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 3 的元生成.

引理 6.2.4 设 D 是 2-连通除子, $p_a(D) \geq 3$, 如果分解 $D = D_1 + D_2$ 满足以下情形之一, 则 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 2 的元生成:

- (1) D_1 是 2-连通除子, D_2 是 1-连通, $\deg_{D_i} K_D > 0$ ($i = 1, 2$), 且 $h^1(D_1, 2K_D - K_{D_1}) = 0$;
- (2) $D_1 \cong \mathbb{P}^1$, D_2 是 1-连通, 且 $D_1 D_2 \geq 4$.

证明 类似引理 6.2.3 的讨论, 我们只需要证明以下映射是满的.

$$H^0(D_2, K_D) \otimes H^0(D_2, 2K_D) \rightarrow H^0(D_2, 3K_D)$$

$$H^0(D_1, K_{D_1}) \otimes H^0(D_1, 2K_D) + H^0(D_1, K_D) \otimes H^0(D_1, K_D + K_{D_1}) \rightarrow H^0(D_1, 2K_D + K_{D_1}).$$

因为 K_D 由整体断面生成, $h^1(D_2, K_D) = 0$, 故由命题 6.1.1(5) 可知, 上述第一个映射是满的. 如果 D 满足情形 (1), 则由命题 6.1.1(5) 可知, 上述第二个映射也满. 今假设 D 满足情形 (2). 因 $D_1 \cong \mathbb{P}^1$, 故 $\mathcal{O}_{D_1}(K + D + K_{D_1}) = \mathcal{O}_{D_1}(m - 4)$, $\mathcal{O}_{D_1}(K_D) = \mathcal{O}_{D_1}(m - 2)$, 此处 $m = D_1 D_2 \geq 2$. 因此

$$H^0(D_1, K_D + K_{D_1}) \otimes H^0(D_1, K_D) \longrightarrow H^0(D_1, 2K_D + K_{D_1})$$

是满射. 至此我们完成了引理的证明. ■

下面是我们这一节的主要定理.

定理 6.2.3 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, F 是 1 连通纤维, 那么

- (1) $R(F, K_F)$ 由次数不超过 4 的元生成.
- (2) 如果 F 是 4-连通的, 且 $g \geq 3$, 则 $R(F, K_F)$ 由次数不超过 2 的元生成.
- (3) 如果 F 是 2-连通的, 且 $g = 3$, 则 $R(F, K_F)$ 由次数不超过 2 的元生成.

证明 由于 F 是相对极小的, 因此 F 和 K_F 是 nef 的. 由引理 6.1.4 可知 $h^1(nK_F) = 0$ ($n \geq 2$). 由命题 6.1.7 知, $2K_F$ 由整体截面生成. 现在由引理 6.2.3 立得 (1).

(2) 直接来自于引理 6.2.4.

现在讨论 (3), 即 $g = 3$ 且 F 是 2-连通. 假如 F 是 4-连通, 则由 (2) 立得. 如果 F 是 3-连通, 则可构造分解 $F = D_1 + D_2$, $D_1 D_2 = 3$ 满足引理 6.2.4(1) 的条件, 因而我们可以假设 F 不是 3-连通. 此外, 因为 F 是 2-连通, 所以 F 中任何满足 $0 < D < F$ 的除子 D 的自交数都不超过 (-2) .

我们找 F 中的不可约分支 Γ , 使得 $K_S\Gamma > 0$. 如果 $K_S\Gamma = 1$, 那么 $\Gamma^2 = -3$. 我们取 $D_1 = \Gamma$, $D_2 = F - \Gamma$. 此时 D_2 是 1-连通的. 若不然, 有分解 $D_2 = A + B$, $AB \leq 0$, 因而 $\Gamma^2 = D_2^2 \leq A^2 + B^2 \leq -4$, 矛盾! 这样, $D = D_1 + D_2$ 满足引理 6.2.4(1) 的条件. 如果 $K_S\Gamma = 3$, 则存在另一分支 Γ' 使得 $K_S\Gamma' = 1$, 从而转化为前一情形.

$K_S\Gamma = 2, 4$ 情形留给读者证明. ■

6.3 小亏格纤维的典范代数

设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, F 是一条纤维. 这一节中, 我们将介绍亏格 $g = 2, 3$ 的纤维典范代数 $R(F, K_F)$ 结构. 我们需要做一些准备工作.

如果一个有效除子 $E \leq F$ 且满足 $E^2 = -1$, $K_SE = 1$, 我们就称 A 为椭圆闭链 (Elliptic cycle). 如果该椭圆闭链是极小的 (即 E 不包含任何其他椭圆闭链), 我们就称它为椭圆尾 (Elliptic tail). 显见, 含有椭圆闭链的纤维亏格 $g \geq 2$. 如果 $F = mF_0$ 是重纤维, 那么椭圆闭链 A 不可能包含 F_0 .

引理 6.3.1 设 $A \leq F$ 是椭圆闭链, $E \leq A$ 是椭圆尾, 那么

- (1) A 是 1-连通的; A 是 2-连通除子当且仅当 A 是椭圆尾 (即 $A = E$).
- (2) E 是 A 中唯一的椭圆尾;
- (3) 如果 $A \neq E$, 那么以下情形之一成立:
 - (3a) $AE = 1$, $F = (g - 1)(A + E)$.
 - (3b) $AE = 0$, $(A - E)^2 = -2$.
- (4) 如果 E 是可约的, 那么 E 中存在不可约分支 Γ 使得 $\Gamma K_S = 1$, $\Gamma^2 = -3$, $\Gamma E = -1$. 进一步 $E - \Gamma$ 由 (-2) -曲线组成, 且它是自身支集上的基本闭链, $\theta E = 0$, $\forall \theta \leq E - \Gamma$.

证明 考虑分解 $A = A_1 + A_2$, 由 $-1 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \leq 2A_1A_2 - 2$ 立得 A 的 1-连通性. 如果 $A = E$, 那么 $A_1A_2 \geq 2$, 若不然 A_1, A_2 中有一个椭圆闭链, 与 E 定义矛盾! 因此 E 是 2-连通的.

$(A + E)^2 \leq 0$ 推出, $AE \leq 1$, 即 $E(A - E) \leq 2$. 如果 A 是 2-连通, 则要么 $A = E$, 要么 $E(A - E) = 2$. 假若 $A \neq E$, 那么 $A - E$ 是 1-连通除子, 从而 $p_a(A - E) \geq 0$. 由于 $K_S(A - E) = 0$, 故 $(A - E)^2 = -2$. 这就推出 $A^2 = E^2 + 2E(A - E) + (A - E)^2 > 0$, 矛盾! 故此时必有 $A = E$.

以下假设 $A \neq E$. 如果 $(A + E)^2 = 0$, 则由 Zariski 引理立得 $F = (g - 1)(A + E)$, 从而 $AE = 1$. 如果 $(A + E)^2 < 0$, 那么 $AE \leq 0$. 由于 $E(A - E) \geq 1$, 所以 $AE = 0$, $(A - E)^2 = -2$.

假若 E' 是 A 的另一个椭圆尾, 则由 $K_SA = K_SE_1 = K_SE_2 = 1$ 可找到唯一分支 $\Gamma \leq E_i$ ($i = 1, 2$) 使得 $K_S\Gamma = 1$. 令 $B_i = E_i - E_1 \wedge E_2$ (\wedge 定义见推论 1.1.2), $D = A - B_1 - B_2 - E_1 \wedge E_2$. 易知 D 由 (-2) -曲线组成. 由 E_i 的 2-连通性推知 $ED \geq 0$.

假设 $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$. 由 E_1, E_2 的 2-连通性, 所以 $B_1E_2 \geq 2$, $B_2E_1 \geq 2$, 从而 $E_2A = E_2^2 + E_2(B_1 + D) \geq 1$. 这样, $F = (g - 1)(A + E_1) = (g - 1)(A + E_2)$, 这就推出 $B_1 = B_2$, 矛盾! 故 $B_1 = B_2 = 0$, 即 $E_1 = E_2$.

如果 E 可约, 那么 E 的极小性保证了其各分支都是有理曲线. 由 $K_SE = 1$ 可知存在 $\Gamma \leq E$ 使得 $K_S\Gamma = 1$, $\Gamma^2 = -3$, 且 $E - \Gamma$ 由 (-2) -曲线组成. 由 E 的 2-连通性, $\Gamma E \geq -1$, $\theta E \geq 0$, $\forall \theta \leq E - \Gamma$. 再由 $E^2 = -1$ 推知 $\Gamma E = -1$, $\theta E = 0$, 从而 $(E - \Gamma)^2 = -2$, $\theta(E - \Gamma) \leq 0$. ■

推论 6.3.1 设 F 是亏格 $g \geq 3$ 的 1-连通纤维, A, D 是 F 中的椭圆闭链, 那么

- (1) $AD \leq 0$, A, D 要么不相交, 要么存在包含关系. 特别地, 如果 A, D 都是椭圆尾, 且 $A \neq D$, 那么 A, D 不相交.
- (2) 假设 $D < A$, 那么 $DA = 0$ 且 $A - D$ 是 A_n 型 (-2) -曲线链, $\theta A \leq 0, \forall \theta \leq A - D$.
- (3) 如果 D 是 A 的椭圆尾且 $D \wedge (A - D) \neq 0$, 那么 $A - D = \theta_0 + B$, 这里 $B \leq D$, 分支 θ_0 在 A 中重数为 1, $\theta_0 B = \theta_0 D = 1$.

证明 (1) $(A + D)^2 \leq 0$ 推出 $AD \leq 1$. 如果等号成立, 则 $A + D = (g - 1)F$. 由 F 的 1-连通性及 $g \geq 2$, 可知这是不可能的. 因此 $AD \leq 0$. 假设 A, D 相交, 但互不包含, 则推论 1.1.2 (2) 中情形(b)(c)(d) 之一成立, 这将推出 F 是重纤维, 与 F 的 1-连通性矛盾! 因此此时必定存在包含关系.

(2) 以下假设 $D < A$. 则由 A 的 1-连通性, $AD = 0$. 考虑包含 A 的极大椭圆闭链 A' , 以及 A 的椭圆尾 E (从而 $E \leq D$). 设 $\theta \leq A'$ 是 (-2) -曲线. 由 $(\theta + A')^2 \leq 0$ 得 $\theta A' \leq 1$. 假若 $\theta A' = 1$, 那么 $\theta(F - A') = -1$, 从而 $\theta \leq F - A'$. 这样 $\theta + A'$ 是更大的椭圆闭链, 矛盾! 故必有 $\theta A' \leq 0$. 此外, 由前面的结论知, $\theta E \geq 0, (A' - E)E = 1$, 因而存在 A' 中唯一的 (-2) -曲线 θ_0 , 使得 $\theta_0 E = 1$, 其余的 (-2) -曲线与 E 相交均为零. 这样, $(A' - E)\theta \leq 0$, 特别地, $(A' - E)\theta \leq -1$. 由 $(A' - E)^2 = -2$ 推知, $A' - E$ 是自身支集上基本闭链. 注意到 θ_0 在 A' 中重数为 1, 因此 $A' - E$ 必定是 A_n 型链. 由于 $A - D \leq A' - E$, 且 $(A - D)^2 = -2$, 所以 $A - D$ 也是 A_n 型链.

今取 $\theta \in A - D$. 由 $(\theta + A)^2 \leq 0$ 知, $A\theta \leq 1$, 同理 $D\theta \leq 1$. 如果 $\theta A = 1$, 则由 $(A - D)\theta \leq 0$ 推出 $\theta D = 1, \theta(A - D) = 0$. 这样, $D_1 := D + \theta \leq A$ 也是椭圆闭链, 且 $D_1 A = 1$, 与 (1) 矛盾! 故 $\theta A \leq 0, \forall \theta \leq A - D$.

(3) 今设 D 是椭圆尾, 由前面讨论, $A - D$ 是 A_n 型链, 且存在 (-2) -曲线 θ_0 , 使得 $\theta_0 D = 1$, θ_0 在 A 中重数为 1. 我们写 $A - D = \theta_0 + B_1 + B_2$, 这里 $0 < B_2 \leq D, B_1 \wedge B_2 = 0$. 由于 $B_1 D = 0$, 故 B_1 与 D 不相交, 从而与 B_2 也不相交.

由 $\theta_0 A \leq 0$ 可知 $\theta_0(\theta_0 + B_1 + B_2) = \theta_0 A - \theta_0 D \leq -1$, 即 $\theta_0(B_1 + B_2) \leq 1$. 若 $B_1 \neq 0$, 那么由 $A - D$ 的 1-连通性有 $\theta_0(B_1 + B_2) = 1, B_1(\theta_0 + B_2) = B_1\theta_0 = 1$ 及 $B_2\theta_0 = 1$, 矛盾! 故 $B_1 = 0$, 即得所需结论. ■

由类似地讨论, 我们有如下结论 (留给读者证明)

命题 6.3.1 设 F 是亏格 2 纤维, E 是其椭圆尾, 则 F 可以分解为以下两种类型之一:

类型 I. $F = E + E' + A$, 这里 E, E' 是两个无公共分支的椭圆尾; $A = 0$ 且 $EE' = 1$, 要么 E, E' 不相交且 A 是连接 E, E' 的 (-2) -链.

类型 II. $F = 2E + B + \theta_0$, 此处 θ_0 是一条 (-2) -曲线, B 也由 (-2) -链组成且为自身支集上的基本闭链; $BE = \theta_0 E = 1, \theta_0 B = 0$.

注意到亏格 2 纤维没有重纤维, 因此必定是 1-连通的. 如果它不是 2-连通的, 则必有椭圆尾.

引理 6.3.2 在命题 6.3.1 的条件下, 令

$$\Gamma = \begin{cases} E + A, & F \text{ 为类型 I,} \\ E + \theta_0, & F \text{ 为类型 II.} \end{cases}$$

考虑如下限制映射

$$\begin{aligned} f_n &: H^0(F, nK_F) \rightarrow H^0(F - E, nK_F), \\ g_n &: H^0(F, nK_F) \rightarrow H^0(F - \Gamma, nK_F). \end{aligned}$$

那么 f_n, g_n 都是满射, 且 $\text{Ker} f_n = \text{Ker} g_n$ ($n \geq 1$). 进一步, $\text{Ker} g_1$ 由一个元 x_0 生成, $x_0|_{F-E} = 0$, 且诱导满映射 ($n \geq 1$)

$$\text{Ker} g_1 \otimes H^0(F, nK_F) \longrightarrow \text{Ker} g_{n+1}.$$

证明 注意到 $\Gamma^2 = E^2 = -1$, $K_S \Gamma = K_S E = 1$, 所以 Γ, E 都是 1-连通的, 且满足定理 6.1.1 的诸条件, 由此立知 $f_n g_n$ 是满射.

由分解序列诱导的上同调正合列可知

$$\begin{aligned} \text{Ker} f_n &= H^0(E, nK_F - (F - E)), \\ \text{Ker} g_n &= H^0(\Gamma, nK_F - (F - \Gamma)). \end{aligned}$$

不妨假设 $\Gamma \neq E$. 我们有正合列

$$0 \longrightarrow H^0(E, nK_F - (F - E)) \longrightarrow H^0(\Gamma, nK_F - (F - \Gamma)) \longrightarrow H^0(\Gamma - E, nK_F - (F - \Gamma)).$$

注意 $\Gamma - E$ 是 1-连通的, $\deg_{\Gamma-E}(nK_F - (F - \Gamma)) = -1$, $\deg_{\theta}(nK_F - (F - \Gamma)) \leq 0$, 这里 θ 是 $\Gamma - E$ 中任意 (-2) 曲线. 这样, 由引理 6.1.2 即得 $\text{Ker} f_n = \text{Ker} g_n$.

$\text{Ker} g_1 = \text{Ker} f_1 = H^0(E, \mathcal{O}_E)$, 故 $\text{Ker} g_1$ 由一个元 x_0 生成, $x_0|_{F-E} = 0$. 由 $\text{Ker} f_n = \text{Ker} g_n$, 我们只需要证 $\text{Ker} f_n$ 有满映射

$$\text{Ker} g_1 \otimes H^0(F, nK_F) \longrightarrow \text{Ker} g_{n+1}.$$

利用 E 的 2-连通性和推论 6.1.5 得 $\text{Ker} f_{n+1} = H^0(E, nK_F)$. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker} f_1 \otimes H^0(F, nK_F) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Ker} f_1 \otimes H^0(E, nK_F) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Ker} f_{n+1} \end{array}$$

由定理 6.1.1 立知上述各映射都是满射. ■

引理 6.3.3 设纤维 F 满足命题 6.3.1 的类型 II, $\Gamma = E + \theta_0$, 则如下限制映射是同构 ($n \geq 1$),

$$\beta_n : H^0(B + E, nK_F) \longrightarrow H^0(E, nK_F).$$

特别地, 如下分次环之间的诱导映射是同构,

$$R(B + E, nK_F) \longrightarrow R(E, nK_F).$$

证明 $\text{Ker} \beta_n = H^0(B, nK_F - E)$. 由引理 6.1.2 即得结论. ■

引理 6.3.4 在引理 6.3.2 条件下, 设 E' 是 $F - \Gamma$ 里的椭圆尾, $h : R(F, K_F) \rightarrow R(E', K_F)$ 是由限制映射诱导的态射, 那么 h 是满射, $\text{Ker} h$ 是 $R(F, K_F)$ 的主理想, 由某个一次元 x_0 生成, $x_0|_{F-E} = 0$. 进一步, 满态射 $R(F, K_F) \rightarrow R(E, K_F)$ 的核

$$J = \{x \in R(F, K_F) \mid x_0 x = 0\},$$

它由不超过 5 次的齐次元生成.

证明 由引理 6.3.2 即得 h 的满性. 再结合引理 6.3.3, 我们有

$$\text{Ker}h \cap H^0(F, nK_F) = \text{Ker}f_n,$$

这里 f_n 同引理 6.3.2. 因而 $\text{Ker}h$ 由一次元 x_0 生成, $x_0|_{F-E}=0$.

理想 J 是如下态射的核, $R(F, K_F) \rightarrow R(F, K_F)$, $x \rightarrow x_0x$, 因此它是齐次理想, 设 J_n 是次数 n 的齐次部分. 我们有

$$J_n = \text{Ker}(H^0(F, nK_F) \rightarrow H^0(E, nK_F)) = H^0(F - E, nK_F - E).$$

我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} J_n \otimes H^0(F, 2K_F) & \xrightarrow{\text{res}} & J_n \otimes H^0(F - E, 2K_F) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & J_{n+2} \end{array}$$

注意 $H^0(F, 2K_F) \rightarrow H^0(F - E, 2K_F)$ 是满态射 (定理 6.1.1), $2K_F$ 由整体截面生成, 因此由命题 6.1.1(5), 当 $n \geq 4$ 时, 上图诸映射皆为满射. 这就推出 J 的生成元次数不超过 5. \blacksquare

下面是本节的一个主要定理.

定理 6.3.1 ([Men88], 定理 3.1) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 2 纤维化, F 是纤维, 则

$$\mathbb{C}[X_0, X_1, Y, Z]/(Q_2, Q_6),$$

这里 Q_i 是以下的齐次加权多项式 (诸记号的定义见定理 6.2.1)

$$Q_2 = \lambda Y - F_2(X_0, X_1)$$

$$Q_3 = Z^2 - Y^3 - F_6(X_0, X_1, Y).$$

进一步, $\lambda \neq 0$ 当且仅当 F 是 2-连通除子. 如果 $\lambda = 0$, 那么 F_2 可写为 $X_0^2 - \alpha X_0 X_1$. 此时, 如果 F 含有两个不同的椭圆尾, 则 $\alpha \neq 0$; 如果 F 含有一个二重的椭圆尾, 则 $\alpha = 0$.

证明 如果 F 是 2-连通的, 则该结果就是定理 6.2.2 (2) 的直接推论. 因此不妨假设 F 不是 1-连通, 即存在椭圆尾. 我们仍采用引理 6.3.4 的诸记号. 注意到 E, E' 都是 2-连通除子, $\deg_E K_F = \deg_{E'} K_F = 1$, 所以 $R(E, K_F)$, $R(E', K_F)$ 有定理 6.2.1(1) 的环结构 $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(F_6)$. 这里 F_6 在合适的坐标选取下是形如 $Z^2 - Y^3 - aYX^4 - bX^4$ 的加权齐次多项式.

我们记 $R = R(F, K_F)$, $S = R(E', K_F)$, $I = (F_6)$. R_n 等表示次数为 n 的齐次部分. 现在 $S = \mathbb{C}[X_1, Y, Z]/I$. 由于 $h: R \rightarrow S$ 是满射, 其核是由 $x_0 \in R_1$ 生成的主理想, $x_0|_{F-E}$. 由分次环的提升, 我们有 $R = \mathbb{C}[X_0, X_1, Y_1, Z]/\tilde{I}$. 因而 $R(E, K_F)$ 由 y, z 以及某个线性组合 $\alpha x_0 + \beta x_1$ 生成. 换言之, J 由某一次元 x 生成, $x|_E = 0$.

如果 $E = E'$, 则 $x_0|_E = 0$, 从而 $H^0(E, K_F) = \langle x_1|_{E'} \rangle$, J 由 x_0 生成.

如果 $E \neq E'$, 由 $x_0|_{F-E} = 0$ 可知, $x_0|_E \neq 0$, 因而 $x_1|_E = \alpha x_0|_E$, J 由 $x_1 - \alpha x_0$ 生成. 我们可假设 $\alpha \neq 0$, 也可以将生成元写为 $x_0 - \lambda x_1$, $\lambda \neq 0$.

$(x_0) \subseteq R$ 作为向量空间同构于 $X_0(\mathbb{C}[X_1, Y] + Z\mathbb{C}[X_1, Y])$. 因此由分次环的性质, $\tilde{I} = (X_0^2 - \lambda X_0 X_1, \tilde{F}_6)$, 这里 $\tilde{F}_6 = F_6 - X_0 P_5(X_1, Y, Z)$, 此外 $\lambda \neq 0$ 当且仅当 $E \neq E'$.

由合适的坐标变换, \tilde{F}_6 可写为

$$Z^2 - Y^3 - \alpha_0 X_1^4 Y - \alpha_1 X_1^6 - \beta_0 X_0 X_1^3 Y - \beta_1 X_0 X_1^5.$$

由引理 6.3.4, 还可知 $\tilde{F}_6|_E \equiv 0$, 即 \tilde{F}_6 是 E 的方程. 至此, 我们完成了证明. \blacksquare

在亏格 2 纤维典范代数研究基础上, [Men88] 采用类似的方法完整分类了亏格 3 纤维化的典范代数结构, 但此时的情况将变得更为复杂. 我们这里做一个简单的介绍, 不再详细证明这些结果. 有兴趣的读者可以直接参考原文献.

命题 6.3.2 ([Men88], 定理 4.2) 设 F 是 1-连通亏格 3 纤维, 则存在分解 $F = \sum_{i=1}^l A_i + D$ ($0 \leq l \leq 3$), A_i 是椭圆闭链, D 是 2-连通除子. 该分解满足以下各条件:

- (1) $A_i A_j = 0, i \neq j$.
- (2) 假设 $i < j$, 则要么 A_i, A_j 不相交, 要么 $A_j \leq A_i$.
- (3) 设 $k \leq j$, θ 是 A_j 中任一 (-2) -曲线, 则 $\theta(\sum_{i=1}^k A_i) \leq 0$.
- (4) 设 E_j 是 A_j 的椭圆尾, $1 \leq i < j \leq l$, θ 是 $A_j - E_j$ 中任一 (-2) -曲线, 则 $\theta A_i = 0$.
- (5) 若 $A_j - E_j \neq 0$, 则 $E_j(\sum_{k>j} A_k + D) = 0$.
- (6) 若 $l = 3$, 则 $D \cong \mathbb{P}^1$, D 不落在 $\sum_{i=1}^3 A_i$ 的支集中.

满足上述定理的分解称为 F 的标准数值分解 (Standard numerical decomposition). 关于这种分解的更多性质, 请参看 [Men88, Ch.2, Sec.4]

命题 6.3.3 ([Men88], 命题 5.4) 设 F 是 1-连通亏格 3 纤维, 有标准数值分解 $F = \sum_{i=1}^l A_i + D$, E_i 是 A_i 的椭圆尾. 考虑限制映射 ($1 \leq k \leq l$)

$$\varphi_{n,k} : H^0(F, nK_F) \longrightarrow H^0(F - \sum_{i=1}^k A_i, nK_F).$$

那么我们有

- (1) $\varphi_{n,k}$ 是满射 ($k \geq 1, n \geq 2$).
- (2) $\varphi_{1,1}$ 是满射.
- (3) $\text{Im} \varphi_{1,2}$ 的余维数等于 $h^0(E_2, \mathcal{O}_{E_2}(A_1))$.
- (4) $\text{Im} \varphi_{1,3}$ 的余维数等于 $h^0(E_2, \mathcal{O}_{E_2}(A_1)) + h^0(E_3, \mathcal{O}_{E_3}(A_1 + A_2))$.

命题 6.3.4 ([Men88], 命题 6.3) 设 $F = 2F_0$ 是亏格 3 多重纤维. 考虑限制映射

$$\varphi_n : H^0(F, nK_F) \longrightarrow H^0(F_0, nK_F).$$

那么我们有

- (1) φ_n 是满射 ($n \geq 1$).
- (2) $\text{Ker} \varphi_n = H^0(F_0, K_{F_0} + (n-1)K_F)$, $n \geq 1$.
- (3) $h_n : \text{Im} \varphi_2 \otimes \text{Im} \varphi_n \rightarrow \text{Im} \varphi_{n+2}$ 是满射 ($n \geq 3$).
- (4) 如果 F_0 是 2-连通, 那么以下映射是满射 ($n \geq 3$),

$$f_n : \text{Ker} \varphi_1 \otimes H^0(F_0, nK_F) \longrightarrow \text{Ker} \varphi_{n+1}.$$

$\text{Im} f_1$ 有余维数 2, $\text{Im} f_2$ 有余维数 1.

由上述关键命题 6.3.3 和命题 6.3.4, 我们得到以下结论.

定理 6.3.2 设 F 是亏格 3 纤维, 则典范代数 $R(F, K_F)$ 由次数不超过 3 的元生成.

设 F 是 1-连通, 但非 2-连通纤维. [Men88] 利用标准数值分解, 将这种 F 重新分为三种所谓的解析类型 I, II, III (Analytically of type I, II, III).

解析类型 I: 如果 F 存在标准数值分解 $F = \sum_{i=1}^l A_i + D$, 使得 $F - A_1$ 不含任何满足以下条件的椭圆尾 E , $\mathcal{O}_E(A_1) \cong \mathcal{O}_E$.

解析类型 II: 如果 F 存在标准数值分解 $F = \sum_{i=1}^l A_i + D$ ($l \geq 2$), 使得 $\mathcal{O}_{E_2}(A_1) \cong \mathcal{O}_{E_2}$, $F - A_1 - A_2$ 不含任何满足以下条件的椭圆尾 E' , $\mathcal{O}_{E'}(A_1 + A_2) \cong \mathcal{O}_{E'}$ (此处, E_i 是 A_i 的椭圆尾, 下同).

解析类型 III: 如果 F 存在标准数值分解 $F = \sum_{i=1}^3 A_i + D$, 使得 $\mathcal{O}_{E_2}(A_1) \cong \mathcal{O}_{E_2}$, $\mathcal{O}_{E_3}(A_1 + A_2) \cong \mathcal{O}_{E_3}$.

定理 6.3.3 ([Men88], 定理 1.18) 设 F 是 1-连通, 但非 2-连通的亏格 3 纤维. 那么 F 必是上述解析类型中的一种, 其典范代数有如下结构.

(1) 若 F 是解析类型 I, 那么

$$R(F, K_F) = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Z]/I,$$

这里 $\mathbb{C}[X_0, \dots]$ 是加权多项式, $\deg X_i = 1$, $\deg Y_j = 2$, $\deg Z_k = 3$, 以下相同.

(2) 若 F 是解析类型 II, 那么

$$R(F, K_F) = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2]/I.$$

(3) 若 F 是解析类型 III, 那么

$$R(F, K_F) = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]/I.$$

定理 6.3.4 ([Men88], 定理 5.1) 设 $F = 2F_0$ 是亏格 3 重纤维, 则其典范代数有如下结构:

$$R(F, K_F) = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2]/I.$$

上述各结论中的理想 I 可以被精确求出. 读者可以直接参看该文献第三章的生成元关系列表.

对 2-连通纤维, 结合定理 6.2.3, 我们有

定理 6.3.5 ([Men88], 定理 6.1) 设 F 是 2-连通的亏格 3 纤维, 则其典范代数有如下结构:

$$R(F, K_F) = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, Y_1]/(F_2, F_4),$$

这里加权齐次多项式 F_2, F_4 定义如下:

$$F_2 = X_2^2 - \lambda Y_1 - P_2(X_0, X_1) - X_2 P_1(X_0, X_1).$$

$$F_4 = Y_1^2 - Q_4(X_0, X_1) - X_2 Q_3(X_0, X_1) - X_2^2 Q_2(X_0, X_1) - X_2^3 Q_1(X_0, X_1).$$

$\lambda \neq 0$ 当且仅当 F 是非超椭圆的.

[Rei90] 详细分析了四类亏格 3 原子纤维的典范代数结构, 有兴趣的读者可以参考一下.

6.4 1-2-3 猜想与 Green 猜想

设 D 是曲面 S 上的有效除子, L 是 D 上的可逆层. 前面几节中, 我们对分次环 $R(D, L)$ 生成元做了初步研究, 给出了典范代数 $R(D, K_D)$ 的一些刻画, 并具体计算出了亏格 $g = 2, 3$ 纤维的典范代数结构. 这些例子都表明典范代数的生成元次数不超过 3. 对更一般情形, Miles Reid 曾提出如下的猜测.

1-2-3 Conjecture [Rei90]: 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, 那么相对典范代数

$$\mathcal{R}(f) = \bigoplus_{\nu \geq 0} f_* \omega_{S/C}^{\otimes \nu}$$

由次数不超过 3 的元生成.

这一猜想可以归结到局部情形, 即纤维 F 的典范代数 $R(F, K_F)$ 生成元次数不超过 3. 遗憾的是, 对于重纤维来说, 该猜想并不正确 (参见 [KM99]).

- 注 6.4.1 (1) [Lau87] 证明正规曲面奇点的典范代数生成元次数不超过 3.
 (2) [Cil83] 的例子表明一般型曲面的典范环生成元次数可能超过 3.

Konno 证明了如下的主要结果.

定理 6.4.1 ([Kon01], 定理 III) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化, F 是纤维. 如果以下例外情形不出现, 那么 $R(F, K_F)$ 由次数不超过 3 的元生成: F 是多重纤维, 且包含一个椭圆闭链 E 使得 E 落在 $|K_F|$ 的固定部分中.

如果例外情形出现, 那么 $R(F, K_F)$ 还需要次数为 4 的生成元.

限于篇幅, 我们不再具体证明这一结果, 有兴趣的读者可以直接阅读该文献.

- 注 6.4.2 (1) [Kon01] 实际上证明了更一般的结论: 对于 1-连通除子 D , 如果 $p_a(D) \geq 2$ 且 K_D 是 nef 的, 那么 $R(D, K_D)$ 由次数不超过 3 的元生成.
 (2) [Men96] 的结果实际上可以推出, 对 1-连通纤维 F , K_F 的固定部分不可能包含任何椭圆尾.

下面我们来构造一个多重纤维的例子, 说明定理 6.4.1 中的例外情形可以出现. 为此, 我们需要构造一个椭圆闭链 E 落在 $|K_F|$ 的固定部分中. 下面的引理给出了椭圆闭链落在固定部分中的一个充分性判则.

引理 6.4.1 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 的相对极小纤维化, $F = mD$ 是 m 重纤维, $E < F$ 是椭圆闭链, $A = D - E \geq 0$. 假设 $\mathcal{O}_A((m-1)D) = \mathcal{O}_A$, 那么 E 落在 $|K_F|$ 的固定部分中.

证明 考虑 $D = A + E$ 的分解序列诱导的上同调正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(A, \mathcal{O}_A(K_F - E)) \longrightarrow H^0(D, K_F) \longrightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(K_F)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(A, \mathcal{O}_A(K_F - E)) \longrightarrow H^1(D, K_F) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

由 Riemann-Roch 定理及 Serre 对偶定理, 易知

$$h^1(D, K_F) = 0,$$

$$h^1(A, \mathcal{O}_A(K_F - E)) = h^0(A, \mathcal{O}_A((1 - m)D)),$$

$$h^0(E, \mathcal{O}_E(K_F)) = 1.$$

又由假设, $\mathcal{O}_A((m - 1)D) = \mathcal{O}_A$, 这就推出 $H^0(D, K_F) \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(K_F))$ 是 0-映射. 由下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} H^0(F, K_F) & \longrightarrow & H^0(D, K_F) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H^0(E, \mathcal{O}_E(K_F)) \end{array}$$

立得所需结论. ■

例 6.4.1 ([KM99]) 设 Γ 是亏格 h 的光滑曲线, $P \in \Gamma$ 使得 $|3P|$ 无基点. 设 $W = \Gamma \times \mathbb{P}^1$, $\Delta = \{P\} \times \mathbb{P}^1$, $\Gamma_0 = \Gamma \times \{[0 : 1]\}$, $P_0 = \Delta \cap \Gamma$. 取充分光滑曲线 $C_n \in |3\Delta + (3n - 1)\Gamma_0|$ ($n \gg 0$), 使得 C_n 与 Γ_0 在 P_0 处相切 3 重. 令 $C = \Gamma_0 + C_n$.

我们可以构造 W 上以 C 为分歧轨迹的循环三次覆盖 $\pi : S_0 \rightarrow W$, 从而诱导了 \mathbb{P}^1 上的亏格 $g = 3h + 1$ 纤维化 $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$. $[0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ 处对应的纤维 $F = 3(A + E)$, 这里 A 是亏格 h 光滑曲线, E 是光滑椭圆曲线, $AE = K_S E = 1$, $E^2 = -1$. 可以验证, E 满足引理 6.4.1 的条件, 从而落在 $|K_F|$ 的固定部分中. 因此我们得到定理 6.4.1 的例外情形. 此时 $R(F, K_F)$ 至少需要一个次数为 4 的生成元. ■

典范代数生成元的讨论引出了一个有趣的问题, 即 $|K_F|$ 的固定部分具有何种结构? 在肖刚不等式的证明中, 我们实际上也涉及到这一问题. 下面的结论给出了部分的回答.

定理 6.4.2 ([KM08], 定理 A) 设 D 是 1-连通除子, 有效除子 $Z \leq D$ 落在 K_D 的固定部分中, 那么

- (1) Z 的每个分支都是光滑有理曲线.
- (2) 设 $0 < Z' \leq Z$, 则 $p_a(Z') \leq 0$, 且 $h^1(Z', \mathcal{O}_{Z'}) = 0$.
- (3) $p_a(Z) = 0$ 当且仅当 Z 是 1-连通的.
- (4) $h^0(D - Z, \mathcal{O}_{D-Z}) = Z(D - Z) + p_a(Z)$.
- (5) 如果 $p_a(Z) = 0$, 且 $Z(D - Z) = m$, 则有分解 $D - Z = \sum_{i=1}^m B_i$, 满足以下性质
 - (5a) $\mathcal{O}_{B_i}(-(B_{i+1} + \cdots + B_m)) = \mathcal{O}_{B_i}$, $i = 1, \cdots, m - 1$.
 - (5b) $B_i Z = 1$, B_i 是 1-连通的, $i = 1, \cdots, m$.
 - (5c) 要么 $B_i \leq B_{i+1} + \cdots + B_m$, 要么 $B_i \cap (B_{i+1} + \cdots + B_m) = \emptyset$.

1-2-3 定理的证明用到了 Koszul 上同调群的结果, 后者与 Clifford 指标及著名的 Green 猜想有关. 我们这里做一个简单的介绍.

设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小纤维化. 设 F 是一条光滑纤维. 当 $g \geq 4$ 时, F 的 Clifford 指标 (Clifford Index) 定义为

$$\text{Cliff}(F) = \min\{\deg L - 2h^0(L) + 2 \mid L \in \text{Pic}(F), h^0(L) > 1, h^1(L) > 1\}.$$

当 $g = 3$ 时, 若 F 是超椭圆的 (相应地, 非超椭圆的), 则定义 $\text{Cliff}(F) = 0$ (相应地, $\text{Cliff}(F) = 1$). 当 $g = 2$ 时, 定义 $\text{Cliff}(F) = 0$.

f 的 Clifford 指标定义为

$$\text{Cliff}(f) = \max\{\text{Cliff}(F) \mid F \text{ 是 } f \text{ 的光滑纤维.}\}$$

由 Brill-Noether 理论, $\text{Cliff}(F) \leq [\frac{g-1}{2}]$. 如果 F 对应模空间中的一般点, 那么该不等式的等号成立. F 的 gonality 定义为 F 上有理函数的最小次数, 即它到 \mathbb{P}^1 的最小覆盖次数, 记作 $\text{gon}(F)$. 由 [CM91] 的结果, $\text{gon}(F) - \text{Cliff}(F) = 2, 3$. 如果 F 是一般的 k -gonality 曲线, 那么其 Clifford 指标就等于 $k - 2$ (见 [Bal86]). 这表明 Clifford 指标是曲线模空间上的下半连续函数.

曲线的 Clifford 指标和 Koszul 上调群群的 Green 猜想有关. 为此, 我们先介绍一下 Koszul 上调群群. 设 V 是向量空间, $S(V)$ 是对称代数, $B = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} B_q$ 是分次 $S(V)$ -模. 取单位元 $\iota \in V^* \otimes V \cong \text{Hom}(V, V)$, 我们有由 ι 诱导的缩并映射 $\lrcorner \iota : \wedge^p V \rightarrow \wedge^{p-1} V \otimes V$, 其对偶映射即通常外积映射 $\wedge^{p-1} V^* \otimes V^* \rightarrow \wedge^p V^*$. 举例来说, 设 $e_1, e_2, e_3 \in V$, 则 $\lrcorner \iota(e_1 \wedge e_2) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$, 以及 $\lrcorner \iota(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = (e_2 \wedge e_3) \otimes e_1 - (e_1 \wedge e_3) \otimes e_2 + (e_1 \wedge e_2) \otimes e_3$.

设 $m_q : V \otimes B_q \rightarrow B_{q+1}$ 是乘法映射, 我们可以从以下交换图定义映射 $d_{p,q}$.

$$\begin{array}{ccc} \wedge^p V \otimes B_q & \xrightarrow{\lrcorner \iota \otimes \text{id}} & \wedge^{p-1} V \otimes V \otimes B_q \\ & \searrow d_{p,q} & \downarrow \text{id} \otimes m_q \\ & & \wedge^{p-1} V \otimes B_{q+1} \end{array}$$

容易验证, $(\lrcorner \iota) \circ (\lrcorner \iota) : \wedge^p V \rightarrow \wedge^{p-2} V \otimes S^2 V$ 是零映射, 从而 $d_{p-1,q+1} d_{p,q} = 0$. 这样, 我们诱导了 Koszul 复形.

$$\cdots \longrightarrow \wedge^{p+1} V \otimes B_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \wedge^p V \otimes V \otimes B_q \xrightarrow{d_{p,q}} \wedge^{p-1} V \otimes B_{q+1} \xrightarrow{d_{p-1,q+1}} \cdots$$

B 的 Koszul 上调群群定义为

$$\mathcal{K}_{p,q} = \frac{\text{Ker} d_{p,q}}{\text{Im} d_{p+1,q-1}}.$$

对任何 m , 我们有以下维数等式

$$\sum_{p+q=m} (-1)^p \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_{p,q}(B, V) = \sum_{p+q=m} (-1)^p \binom{\dim V}{p} \dim_{\mathbb{C}} B_q.$$

设 \mathcal{L} 是 n 维紧复流形 X 上的解析线丛, \mathcal{F} 是 X 上的解析凝聚层, $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ 是子空间. 令

$$B = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes q}).$$

这样, 我们就得到 X 上的 Koszul 上调群群 $\mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{F}, \mathcal{L}, V)$. 如果取 $\mathcal{F} = \omega_X$, 那么上述 B 称为 X, L 的 Arbarello-Sernesi 模 (见 [AS78]), 它是 $S(H^0(X, L))$ -模. Arbarello-Sernesi 模的性质可以参看 [?, 定理 4.b.2],

我们有以下的对偶定理.

定理 6.4.3 ([Gr84a], 定理 2.c.6) 设 L 是 n 维紧复流形 X 上的线丛, E 是 X 上的向量丛,

设子空间 $V \subseteq H^0(X, L)$ 无基点, $\dim V = r + 1$, 且满足 $(i = 1, \dots, n - 1)$

$$\begin{aligned} H^i(X, E \otimes (q - i)L) &= 0, \\ H^i(X, E \otimes (q - i - 1)L) &= 0. \end{aligned}$$

那么我们有

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, E, L, V)^\vee \cong \mathcal{K}_{r-n-p, n+1-q}(X, K_X \otimes E^\vee, L, V).$$

利用上面的对偶定理及 Mumford 消失定理, 即得如下结论.

推论 6.4.1 设 X 是 n 维紧 Kähler 流形, L 是 X 上的解析线丛, $V \subseteq H^0(X, L)$ 无基点, $\dim V = r + 1$. 设 $\dim \varphi_{|mL|}(X) = n$, 对某个 $m > 0$ 成立. 那么当 $q \geq n + 1$ 时有

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, K_X, L, V)^\vee \cong \mathcal{K}_{r-n-p, n+1-q}(X, K_X \otimes E^\vee, L, V).$$

如果 $n = 1$ 或者 $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$, 那么上式对 $q = n$ 也成立.

为书写方便, 我们记 $\mathcal{K}_{p,q}(X, K_X) := \mathcal{K}_{p,q}(X, \mathcal{O}_X, K_X, H^0(X, K_X))$.

定理 6.4.4 ([Gr84a], 定理 4.c.1) 设 X 是 n 维一般型光滑流形, $|K_X|$ 无基点. 那么

(1) 如果 $q \geq n + 2$ 或者 $q = n + 1$ 且 $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$, 则

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, K_X)^\vee \cong \mathcal{K}_{r,s}(X, K_X),$$

这里

$$\begin{aligned} r &= h^0(X, K_X) - (n + 1 + p), \\ s &= n + 2 - q. \end{aligned}$$

(2) 如果 $q \geq n + 3$, 则

$$\mathcal{K}_{p,q}(X, K_X) = 0.$$

(3)

$$\mathcal{K}_{p, n+2}(X, K_X) = \begin{cases} \mathbb{C}, & p = h^0(X, K_X) - (n + 1), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(4) 若 $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$, 且 $\dim \varphi_{K_X}(X) \geq n - 1$, 则

$$\mathcal{K}_{0, n+1}(X, K_X) = \begin{cases} \mathbb{C}^{h^0(X, K_X) - n - 1}, & \varphi_{K_X}(X) \text{ 是 } n \text{ 维极小次数的流形,} \\ 0, & \varphi_{K_X}(X) \text{ 不是 } n \text{ 维极小次数的流形.} \end{cases}$$

(5) 若 $\dim \varphi_{K_X}(X) = n$, $H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $\varphi_{K_X}(X)$ 不落在具有极小次数的 $(n + 1)$ 维流形中, 且 $\deg \varphi_{K_X}(X) \neq h^0(X, K_X) - n$ 或 $h^0(X, K_X) - n + 1$, 则 $\mathcal{K}_{1, n+1}(X, K_X) = 0$.

回到曲面纤维化的情形, 取 $X = F$ 是一条一般纤维. 当 $q \geq 4$, 或者 $q = 3$ 且 $p \neq g - 2$, 那么 $\mathcal{K}_{p,q}(F, K_F) = 0$. 设 $c \leq \text{cliff}(F)$, 那么这一结论等价于以下 Koszul 序列在中间项正合 ($0 \leq i \leq c - 2$),

$$\wedge^{i+1} H^0(K_F) \otimes H^0((c-i)K_F) \longrightarrow \wedge^i H^0(K_F) \otimes H^0((c-i+1)K_F) \longrightarrow \wedge^{i-1} H^0(K_F) \otimes H^0((c-i+2)K_F).$$

由此产生一个自然的问题, 就是 $\mathcal{K}_{c-1,2}(F, K_F)$ 是否为零? 这就引出著名的 Green 猜想.

Green's Conjecture: Koszul 序列

$$\wedge^c H^0(K_F) \longrightarrow \wedge^{c-1} H^0(K_F) \otimes H^0(2K_F) \longrightarrow \wedge^{c-2} H^0(K_F) \otimes H^0(3K_F)$$

在中间项正合当且仅当 $c \leq \text{cliff}(F)$. 这一猜想被很多人研究过, 读者可以参看 [Kon99] 关于这方面进展的一个简短评述, 此处不再赘述.

纤维上的 Koszul 复形可以过渡到整体上. 回顾 $\mathcal{R}_\nu = f_* \omega_{S/C}^{\otimes \nu}$, 以下取 $c = \text{Cliff}(f)$, 我们构造 Koszul 复形

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \wedge^{c+1} \mathcal{R}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \wedge^i \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_{c+1-i} \xrightarrow{d_{i,c+1-i}} \wedge^{i-1} \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_{c+2-i} \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_c \longrightarrow \mathcal{R}_{c+1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

令 $\mathcal{K}_{i,j} = \text{Ker} d_{i,j} / \text{Im} d_{i+1,j-1}$. 易知 $\mathcal{K}_{i,c+1-i}$ 是自由部分秩为 0 的挠层 ($0 \leq i \leq c-2$),

$$\mathcal{K}_{c,1} \cong \text{Ker} \left(\frac{\wedge^c \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_1}{\wedge^{c+1} \mathcal{R}_1} \xrightarrow{d_{c,1}} \wedge^{c-1} \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \right)$$

则是局部自由层. 我们有

$$\sum_{i=0}^{c+1} (-1)^i \deg(\wedge^{c+1-i} \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_i) = \sum_{i=0}^{c+1} (-1)^i \deg \mathcal{K}_{c+1-i,i}. \quad (6-2)$$

由前面的讨论知,

$$rk \mathcal{R}_\nu := \begin{cases} 1 & \nu = 0, \\ g & \nu = 1, \\ (2\nu - 1)(g - 1) & \nu \geq 2. \end{cases}$$

以及

$$\deg \mathcal{R}_\nu := \begin{cases} 0 & \nu = 0, \\ \chi_f & \nu = 1, \\ \frac{\nu(\nu-1)}{2} K_f^2 + \chi_f & \nu \geq 2. \end{cases}$$

于是我们有

$$K_{S/C}^2 - \frac{(g-1)(g+2-2c)}{g-c} \chi_f = \binom{g-3}{c-1}^{-1} \sum_{i=0}^{c+1} (-1)^i \deg \mathcal{K}_{c+1-i,i}. \quad (6-3)$$

以及

$$\binom{g-3}{c-1} \frac{(g-1-c)(g-1-2c)}{c+1} = rk(\mathcal{K}_{c,1}) - rk(\mathcal{K}_{c-1,2}). \quad (6-4)$$

(证明留给读者)

设 $F = f^{-1}(p)$ 是一条纤维. 如果 $\mathcal{K}_{c-1,2}$ 是自由部分秩为零的挠层, 那么我们可以定义 F 的 Horikawa 指标:

$$\text{Ind}(F) := \binom{g-3}{c-1}^{-1} \sum_{i=2}^{c+1} (-1)^i \text{length}(\mathcal{K}_{c+1-i,i})_p.$$

此时 $\text{Ind}(F) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $|K_F|$ 由整体截面生成, 且 $\mathcal{K}_{c-1,2}(F, K_F) = 0$; 最多只

有有限条纤维具有非零的 Horikawa 指标 (参见 [Kon99, Page 216]). 因而这时有

$$K_{S/B}^2 - \frac{(g-1)(g+2-2c)}{g-c} \chi_f = - \binom{g-3}{c-1}^{-1} \deg \mathcal{K}_{c,1} + \sum_F \text{Ind}(F).$$

如果 g 是奇数, $\text{Cliff}(f) = c = \frac{g-1}{2}$, 则由 [HR98, TIB98] 可知 Green 猜想成立 (也可参见 [AK00, Page 18]), 从而 $\mathcal{K}_{c-1,2}$ 是自由部分秩为零的挠层. 此时由直接计算可知 $\mathcal{K}_{c,1} = 0$. 因此我们有

定理 6.4.5 ([Kon99], 定理 4.1) 如果 g 是奇数, $\text{Cliff}(f) = c = \frac{g-1}{2}$, 那么

$$K_f^2 = \frac{6(g-1)}{g+1} \chi_f + \sum_F \text{Ind}(F).$$

特别地, $\lambda_f \geq \frac{6(g-1)}{g+1}$.

注 6.4.3 当 $f: S \rightarrow C$ 是超椭圆纤维化, 即 $\text{Cliff}(f) = 0$ 时, $\text{Ind}(F)$ 就是式 (5-5) 定义的 Horikawa 数. 当 f 是亏格 3 非超椭圆纤维化时, $\text{Cliff}(f) = 1$, 两者定义也是一致的 (见式 (5-6) 的定义).

一个有趣的问题是: 是否可以找到一种条件 (*), 使得 f 的一般纤维都满足该条件; 找到一个映射 $\text{Ind}: \mathcal{C}(\ast) \rightarrow \mathbb{Q}$, 使得 $\text{Ind}(F) \geq 0$, 且当 F 满足条件 (*) 时该值为零; 找到一个正数 $\lambda \in [4 - 4/g, 12]$, 使得

$$K_f^2 - \lambda \chi_f = \sum_F \text{Ind}(F), \quad (6-5)$$

这里 $\mathcal{C}(\ast)$ 指所有这样的纤维芽构成的集合: 它周围的一般纤维满足条件 (*). 等式 (6-5) 称为斜率等式.

注 6.4.4 假设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 4 非超椭圆纤维化, 并且一般纤维允许有两个 g_3^1 . Konno 证明此时有斜率等式

$$K_f^2 - \frac{7}{2} \chi_f = \sum_F \text{Ind}(F).$$

本章习题

习题 6.1 设 $D = D_1 + D_2$ 是 m -连通除子, $D_1, D_2 > 0$, $D_1 D_2 = m$, 证明:

- (1) D_1 和 D_2 都是 $[\frac{m+1}{2}]$ -连通的.
- (2) 如果 D_1 是满足 $D_1(D - D_1) = m$ 的极小除子, 则 D_1 是 $[\frac{m+3}{2}]$ -连通.
- (3) 若 D 不是 $(m+1)$ -连通, 且 D_1 满足 (2) 的条件, 则要么 $D_1 \subseteq D_2$, 要么 D_1, D_2 无公共分支.

习题 6.2 设 D 是 1-连通除子.

- (1) 证明: $p_a(D) \geq 0$.
- (2) 证明: 如果 D 是 2-连通除子, 那么 $p_a(D) = 0$ 当且仅当 $D \cong \mathbb{P}^1$.
- (3) 如果 D 是 m -连通除子, 你能得到什么结论?

习题 6.3 设 D 是 1-连通除子, $0 \leq D_i \leq D$, $D_i(D - D_i) = 1$ ($i = 1, 2$). 证明:

- (1) 如果 $D_1 \wedge D_2 = 0$, 即 D_1, D_2 没有公共分支, 则要么 D_1, D_2 不相交, 要么 $D = D_1 + D_2$,

$D_1 D_2 = 1$.

(2) 如果 $D_1 \wedge D_2 \neq 0$, 且 D_1 是满足 $D_1(D - D_1) = 1$ 的极小者, 那么 $D_1 \leq D_2$.

习题 6.4 设 D 是 1-连通除子, $p_a(D) = 0$. 设 L 是 D 上的可逆层, 满足 $\deg_{\Gamma} L \leq 0$, $\forall \Gamma \leq D$, 且 $\deg L = 0$. 证明: $L \cong \mathcal{O}_D$.

习题 6.5 设 D 是曲面 S 上的 m -连通除子, 且 D 是 nef 或者既约的. 设 D_1 是使得 $D_1(D - D_1) = m$ 的极小除子, 证明: $h^0(D_1, 2K_{D_1} - 2K_D) = 0$. (提示: 利用习题 6.1 和引理 6.1.2)

习题 6.6 设 D 是有效除子, L 是 D 上的可逆层. 设 $s_0, s_1 \in H^0(D, L)$, s_0 和 s_1 没有公共零点, 且 s_0 在 D 的任何分支上都不恒为零. 设 M 是 D 上可逆层,

$$\varphi: H^0(M) \oplus H^0(M) \longrightarrow H^0(M \otimes L), \quad (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha s_0 + \beta s_1.$$

证明: $\text{Ker} \varphi \cong H^0(M \otimes L^{-1})$.

习题 6.7 设 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(L)$ 是曲面 S 上的可逆层, $\sigma: (\tilde{S}, E) \rightarrow (S, p)$ 是 $p \in S$ 处的爆发, $E = \sigma^{-1}(p)$.

(1) 证明: p 是 $|L|$ 的基点当且仅当 $h^1(\tilde{S}, \sigma^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E)) > h^1(\tilde{S}, \sigma^* \mathcal{L})$.

(2) 假设 L 是 1-连通除子, p 是 L 的重点, 证明: $\sigma^* L - 2E$ 是 0-连通的. 进一步, 如果

$$\sigma^* L - 2E = L'_1 + L'_2, \quad L'_1, L'_2 > 0, \quad L'_1 L'_2 = 0,$$

那么存在 S 上非零除子 L_1, L_2 使得 $L'_i = \sigma^* L_i - E$ ($i = 1, 2$), $L = L_1 + L_2$, $L_1 L_2 = 1$, $p \in L_1 \cap L_2$.

习题 6.8 证明命题 6.1.4 的结论.

习题 6.9 请验证定理 6.2.1 (2) 的情形以及定理 6.2.2.

习题 6.10 证明引理 6.2.2 的结论.

习题 6.11 试列出所有可约椭圆尾的对偶图.

习题 6.12 设 F 是 1-连通纤维, E 是其可约的椭圆尾, m 是使得 $F - mE \geq 0$ 的最大整数. 设 $\Gamma \leq E$ 是使得 $K_S \Gamma = 1$ 的不可约分支, 证明: Γ 不落在 $F - mE$ 中.

习题 6.13 证明命题 6.3.1 的结论.

习题 6.14 证明公式 (6-2), (6-3) 及 (6-4).

第七章 Mordell-Weil 格

7.1 格的预备知识

一个格 (Lattice) L 是指一个有限秩的 \mathbb{Z} -模, 它带有一个非退化对称双线性配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

如果上述配对取 \mathbb{Z} -值, 则称 L 是整格 (Integral lattice). 以下我们总考虑整格的情形. 如果 $\langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}, \forall x \in L$, 则称 L 是偶的.

设 $\{x_1, \dots, x_r\}$ 是 L 的 \mathbb{Z} -基.

$$I = (\langle x_i, x_j \rangle)$$

是相应的格拉姆矩阵. 我们定义 L 的行列式

$$\det L := |\det I|.$$

行列式 $\det L = 1$ 的格称为幺模的 (Unimodular). 如果 I 是正定的 (相应地, 负定的), 那么就称 L 是正定格 (相应地, 负定格). 类似地, 我们还能定义 L 的符号差. 显然, 上述这些概念不依赖于 \mathbb{Z} -基的选取.

例 7.1.1 如果将 L 上的配对替换成 $-\langle \cdot, \cdot \rangle$, 我们就得到反格 (Opposite lattice) L^- . ■

例 7.1.2 L 的对偶格 (Dual lattice) 定义为

$$L^* = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in L\}.$$

容易验证, $\det L^* = (\det L)^{-1}$. ■

L 中的具有非退化双线性配对的子模称作子格 (Sublattice). 利用主理想整环上有限秩自由模的子模不变量定理, 我们有如下结论.

命题 7.1.1 设 L 是秩 r 的格, L' 是秩 r' 的子格. 那么存在 L 的一组 \mathbb{Z} -基 x_1, \dots, x_r , 使得 $d_1 x_1, \dots, d_{r'} x_{r'}$ 构成 L' 的一组基, 并且

$$d_i \mid d_{i+1}, \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, r' - 1,$$

$d_1, \dots, d_{r'}$ 由 L' 唯一决定 (称作 L' 的不变量). 特别地,

$$L/L' \cong \mathbb{Z}^{r-r'} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_{r'}}.$$

由命题 7.1.1 立得如下重要推论.

推论 7.1.1 (指标-行列式公式) 设 L' 是 L 的子格, 并且具有有限指标 $[L : L']$, 则

$$\det L' = \det L \cdot [L : L']^2.$$

特别地, 设 L^* 是 L 的对偶格, 则 $\det L = [L^* : L]$. 进一步, 如果 L 是幺模的, 则 $L^* = L$.

例 7.1.3 设 T 是 L 的子格, 我们定义

$$T^\perp = \{x \in L \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in T\}$$

为 T 的正交补. 我们有直和 $T + T^\perp$, 它在 L 中具有有限指标. 因此

$$\det T \cdot \det T^\perp = \det L \cdot [L : T + T^\perp]^2.$$

例 7.1.4 设 T 是 L 的子格. 如果 L/T 是无挠的, 则称 T 是本原的 (Primitive).

对一般的子格 T , 我们定义

$$T' = \{x \in L \mid nx \in T \text{ 对某个正整数 } n\}.$$

为 T 的本原闭包 (Primitive closure). ■

命题 7.1.2 设 L 是幺模, T 是本原子格, T^\perp 是 T 的正交补, 则

$$\det T = \det T^\perp = [L : T \oplus T^\perp].$$

7.2 基础性质

设 C 是亏格 b 代数曲线, $K = k(C)$ 是 C 的函数域. 考虑 K 上的亏格 g 光滑射影曲线 Γ/K , 并假设 $O \in \Gamma(K)$ 是 K -有理点. 设 J/K 是 Γ/K 的 Jacobi 簇. Γ/K 对应一个相对极小纤维化 $f: S \rightarrow C$, 它以 Γ 为一般纤维.

定义 7.2.1 设 A 是 K 上的阿贝尔簇, A 的 K/k -迹是指一个二元组 (τ, B) , 其中 B 是 k 上的阿贝尔簇, $\tau: B \rightarrow A$ 是 K 上的同态, 满足泛性质: 如果 (τ', B') 是另一二元组, 则存在唯一的同态 $\psi: B' \rightarrow B$ 使得 $\tau' = \tau \circ \psi$.

这样的 K/k -迹总是存在的. 今取上述 $A = J(K)$, 则

$$M = J(K)/\tau B(k)$$

称为 J/K (或 Γ/K) 的 Mordell-Weil 群, 它是有限生成的交换群.

定理 7.2.1 设 T 是 $NS(S)$ 中由截面 O , 纤维 F 以及所有垂直的不可约分支生成的子群. $J(C)$ 是 C 的雅克比簇, $Pic^0(S)$ 是 S 的 Picard 簇, 那么

- (1) ([Shi99]) $J(K)/\tau B(k) \cong NS(S)/T$.
- (2) ([Ray70]) 存在阿贝尔簇的正合列

$$0 \longrightarrow J(C) \longrightarrow Pic^0(S) \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

推论 7.2.1 以下条件彼此等价:

- (1) $B = 0$,
- (2) $f^*: J(C) \rightarrow Pic^0(S)$ 是同构,
- (3) $q_f = 0$.

条件成立时, $J(K) \cong NS(S)/T$, 从而

$$\text{rank} J(K) = \rho(S) - 2 - \sum_{i=1}^s (\ell(F_i) - 1),$$

这里 F_1, \dots, F_s 是所有奇异纤维, $\ell(F_i)$ 是 F_i 的不可约分支个数.

推论 7.2.2 假设 $C \cong \mathbb{P}^1$, $q(S) = 0$, 那么 Γ/K 的 K/k -迹是平凡的, 因而推论 7.2.1 中的结论都成立.

以下设 $L = T^\perp$ 为本格子格.

命题 7.2.1 存在唯一的映射 $\varphi: M \rightarrow NS(S) \otimes \mathbb{Q}$ 满足

(1) 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow \varphi & \searrow \bar{\varphi} & \\ NS(S) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & NS(S)/T \otimes \mathbb{Q} \end{array} \quad (7-1)$$

这里 $\bar{\varphi}$ 是由同构 $M \cong NS(S)/T$ 诱导.

(2) $\text{Im}\varphi \subseteq L^*$.

(3) φ 是群同态, 且 $\text{Ker}\varphi = M_{\text{tor}}$.

证明 对任何 $x \in M$, 取 $D \in NS(S)$, 使得 $\bar{\varphi}(x) = D \pmod{T}$. 进一步, 可假设 $DF = 0$ (可以 $D - (DF)O$ 替代 D). 设 V 是所有不与截面 O 相交的垂直分支的并集. 由于 V 是负定的, 所以存在支集在 V 上的 \mathbb{Q} -除子 Z , 使得

$$(D - (DO)F - Z)\Gamma = 0$$

对 V 中的任一不可约分支 Γ 成立. 现在我们定义 $\varphi(x) = D - (DO)F - Z$. 注意到 $\varphi(x)O = 0$, 所以 $\varphi(x) \in L^*$. 由定义, φ 显然满足交换图 (7-1).

现在我们说明, 满足 (1)(2) 的映射是唯一的. 假设存在另一映射 $\varphi': M \rightarrow NS(S) \otimes \mathbb{Q}$ 也满足这两个条件. 任取 $x \in M$, 令 $t = \varphi(x) - \varphi'(x)$. 由条件 (1), $t \in T$, 又由条件 (2) 知 $t \perp T$. 这就迫使 $t = 0$. 因此 $\varphi(x) = \varphi'(x)$. 由 x 的任意性即得 φ 的唯一性.

再证 φ 是群同态. 任取 $x, y \in M$. 因为 $\bar{\varphi}$ 是群同态, 故

$$\bar{\varphi}(x+y) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y) = \varphi(x) + \varphi(y) \pmod{T \otimes \mathbb{Q}}.$$

注意 $\varphi(x) + \varphi(y) \in L \otimes \mathbb{Q}$, 故由 φ 的唯一性即得 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

设 $x \in \text{Ker}\varphi$, 则 $\bar{\varphi}(x) = 0 \in (NS(S)/T) \otimes \mathbb{Q}$, 即 $\bar{\varphi}(x) \in (NS(S)/T)_{\text{tor}}$. 由此得 $\text{Ker}\varphi = M_{\text{tor}}$. ■

对任何 $P, Q \in J(K)$, 我们记 \bar{P}, \bar{Q} 为 P, Q 在 M 中的像. 今定义对称双线性型

$$\langle \bar{P}, \bar{Q} \rangle = -(\varphi(P), \varphi(Q)).$$

它给出了 M/M_{tor} 上的正定格, 称为 Mordell-Weil 格. 该双线性型称为高度配对 (Height pairing).

以下均假设 $NS(S)$ 是无挠的.

推论 7.2.3 $M_{\text{tor}} \cong V'/V$, 因而 $|M_{\text{tor}}| = [V' : V]$, 这里 $V = T^\perp$ 是 T 的反格, V' 是 V 的本原闭包.

由推论 7.1.1, 命题 7.1.2 和推论 7.2.3, 我们有如下结论.

推论 7.2.4 假设 $NS(S)$ 是么模的, 则

$$[L^* : L] = \det L = \det V' = \frac{\det V}{|M_{\text{tor}}|^2}.$$

定义 7.2.2 设 $\tau = 0$, 子群 $J(K)^0 \subseteq J(K)$ 是 L 在同构 $J(K) \cong NS(S)/T$ 下的原像. 它称为狭义 Mordell-Weil 格 (Narrow Mordell-Weil lattice).

设 $f : S \rightarrow C$ 是亏格 g 纤维化, 有截面 O 及 s 条奇异纤维 F_1, \dots, F_s . 设

$$F_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} n_j^{(i)} \Gamma_j^{(i)}, \quad i = 1, \dots, s,$$

这里 $\Gamma_j^{(i)}$ 是 F_i 的不可约分支, 并且满足 $O\Gamma_{\ell_i}^{(i)} = 1$. 我们仍采用前几节的记号.

设 $G^{(i)}$ 是 $F_i - \Gamma_{\ell_i}^{(i)}$ 的支集上的相交矩阵, 利用其负定性和 Zariski 引理, 我们可以构造该支集上的一组 \mathbb{Q} -闭链 $A_j^{(i)} \geq 0$ ($j = 1, \dots, \ell_i - 1$) 满足

$$A_j^{(i)} \Gamma_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \ell_i, \\ -1, & j = i, \\ n_j^{(i)}, & j = \ell_i \end{cases}$$

进一步可得

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^{(i)} \\ \vdots \\ \Gamma_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix} = -G^{(i)} \cdot \begin{pmatrix} A_1^{(i)} \\ \vdots \\ A_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix}$$

特别地, 相交数行列式 $\det(A_j^{(i)} A_k^{(i)}) = G^{(i)}$.

命题 7.2.2 (1) O, F 及诸 $A_j^{(i)}$ 构成了对偶格 T^* 的一组基.
(2) 对任何除子 D , 我们定义

$$Z_D = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\ell_i-1} (\Gamma_j^{(i)} D) A_j^{(i)},$$

则

$$\varphi(\overline{D}) = D - (FD)O - (DO - (DF)O^2)F + Z_D,$$

这里 φ 定义同命题 7.2.1, \overline{D} 是 D 在 Mordell-Weil 群中的像.

由上述结论, Mordell-Weil 格上的高度配对为

$$\langle \overline{D}_1, \overline{D}_2 \rangle = (D_1 O)(D_2 F) + (D_2 O)(D_1 F) - D_1 D_2 - (D_1 F)(D_2 F)O^2 + Z_{D_1} Z_{D_2},$$

此处

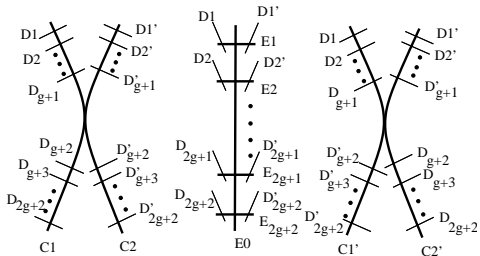
$$Z_{D_1} Z_{D_2} = -D_1 Z_{D_2} = -D_2 Z_{D_1}.$$

设 $K_{\ell_i}^{(i)}$ 是 $F_i - \Gamma_{\ell_i}^{(i)}$ 的支集上的有理典范除子. 由上讨论, 我们有

$$-K_{\ell_i}^{(i)} = \sum_{k=1}^{\ell_i-1} (K_S \Gamma_k^{(i)}) A_k^{(i)}.$$

7.3 具体例子

例 7.3.1 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是由 $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$ 上的二次覆盖 $y^2 = (t-1)(t+x^{2g+2})$ 得到. 它有三条奇异纤维 $F_0 = C_1 + C_2$, $F_1 = 2E_0 + \sum_{i=1}^{2g+2} E_i$, $F_\infty = C'_1 + C'_2$, 截面 D_i, D'_i ($i = 1, 2, \dots, 2g+2$) 如下图,



这里 D_i, D'_i 都是 (-1) -曲线, E_i 是 (-2) -曲线 ($i > 0$), $C_1, C_2, C'_1, C'_2, E_0$ 都是 $(-g-1)$ -曲线.

$\text{NS}(S)$ 有一组基

$$E_0, E_1, \dots, E_{2g+2}, D_1, \dots, D_{2g+2}, D'_1.$$

在 $\text{NS}(S)$ 中,

$$C_1 = E_0 + (1+g)(D_1 + D'_1 + E_1) - \sum_{i=1}^{2g+2} D_i,$$

$$C'_1 = E_0 + \sum_{i=g+2}^{2g+2} E_i - \sum_{i=1}^{g+1} D_i + \sum_{i=g+2}^{2g+2} D_i.$$

今取

$$T = \{D_1, E_0, E_1, \dots, E_{2g+2}, C_1, C_2, C'_1, C'_2\},$$

则 Mordell-Weil 群 $\text{MW}(f) := \text{NS}(S)/T$ 有生成元 $\overline{D}_2, \dots, \overline{D}_{2g+2}, \overline{D}'_1$, 它们满足关系式

$$\begin{cases} (1+g)\overline{D}'_1 = \sum_{i=2}^{2g+2} \overline{D}_i, \\ \sum_{i=2}^{g+1} \overline{D}_i = \sum_{i=g+2}^{2g+2} \overline{D}_i. \end{cases}$$

令

$$\overline{V} = \sum_{i=2}^{g+1} \overline{D}_i - \left[\frac{g+1}{2} \right] \overline{D}'_1.$$

则 Mordell-Weil 群也由

$$\overline{D}_3, \dots, \overline{D}_{2g+1}, \overline{D}'_1, \overline{V}$$

生成, 并且它们仅满足如下唯一的关式

$$2\overline{V} = \begin{cases} \overline{D}'_1, & 2 \mid g, \\ 0, & 2 \nmid g. \end{cases}$$

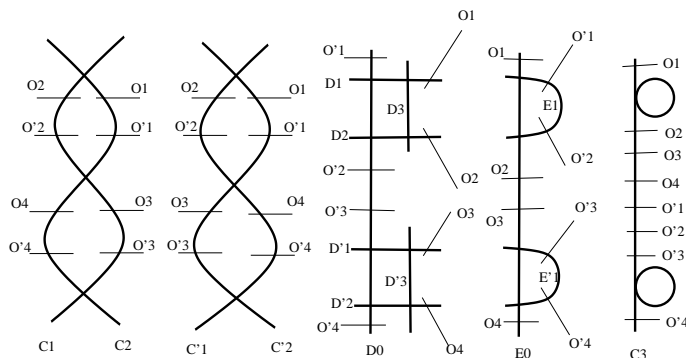
这就推出 Mordell-Weil 群

$$\text{MW}(f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\oplus 2g}, & 2 \mid g, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2g}, & 2 \nmid g. \end{cases}$$

例 7.3.2 ([Tan95]) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是由 $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$ 上的二次覆盖

$$y^2 = (x^4 - tx^2 + a^2)((t + 2a)x^2 - (t - 2a))$$

得到, 这里 $a = \frac{-11+\sqrt{5}}{2}$. 它恰有 5 条半稳定的奇异纤维 (下图粗线). 另有 8 条截面 (下图细线), 它们都是 (-1) -曲线.



$\text{NS}(S)$ 有一组基

$$C_1, D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3, E_1, E'_1, O_1, O_2, O_3, O'_1, O'_3.$$

在 $\text{NS}(S)$ 中, 我们有关系式

$$C_2 = C_1 + 2(O_2 - O_1 + O_3 - O_4) + (O'_2 + O'_3 - O'_1 - O'_4) + (D_2 - D_1 + D'_1 - D'_2),$$

$$C'_1 = C_1 + 2(O_3 - O_4) + (O'_3 - O'_4) + D'_1 - D'_2,$$

$$O_4 = O_1 + O_2 - O_3 + D_1 + D_2 + D_3 - D'_1 - D'_2 - D'_3,$$

$$O'_2 = O_1 + O_2 + D_1 + D_2 + D_3 - O'_1 - E_1,$$

$$O'_4 = O_1 + O_2 + D_1 + D_2 + D_3 - O'_3 - E'_1.$$

今取

$$T = \{O_1, C_1, C_2, C'_1, D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3, E_1, E'_1\},$$

则 Mordell-Weil 群 $\text{MW}(f) = \text{NS}(S)/T$ 有生成元 $\overline{O}_2, \overline{O}_3, \overline{O}'_1, \overline{O}'_3$, 满足关系式

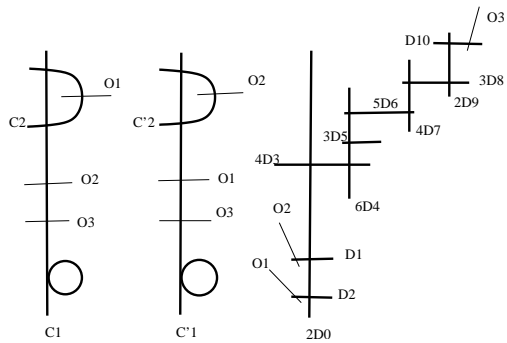
$$\overline{O}_2 = -2\overline{O}'_2, \quad 2(2\overline{O}_3 + \overline{O}'_3 + 3\overline{O}'_2) = 0.$$

这就推出 Mordell-Weil 群同构于 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2}$.

例 7.3.3 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是由 $\mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^1$ 上的如下二次覆盖得到

$$y^2 = (x^3 - 3x^2 + t)(x^2 - 4).$$

它在 $t = \pm 2, \infty$ 恰有三条奇异纤维 (下图粗线), $x = \pm 2, \infty$ 对应了三个截面 (下图细线), 且都是 (-1) -曲线.



NS(S) 有一组基

$$D_0, D_1, \dots, D_{10}, O_1, O_2, O_3.$$

此时 Mordell-Weil 群 是有限群, 满足仅有的关系式

$$2\overline{O}_2 = 2\overline{O}_3 = 0.$$

因此 $MW(f) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ■

本章习题

习题 7.1

第八章 其他专题选讲

还有其他一些课题与纤维化的研究相关, 它们将在别的课程中具体展开. 我们这里只挑选目前感兴趣的一部分内容简要介绍一下.

8.1 高维纤维化

曲面纤维化的研究很自然地可以推广到高维情形. 然而和前者相比, 高维情形更为复杂, 仍有许多有趣的问题有待解决. 这一节, 我们主要考虑 m 维射影流形 Y 上半稳定的 n 维射影流形族 $f: X \rightarrow Y$.

设 \mathcal{L} 是 X 上的线丛, \mathcal{L} 的体积定义为

$$v(\mathcal{L}) = \limsup \frac{\dim(X)! \cdot \dim(H^0(X, \mathcal{L}^\nu))}{\nu^{\dim(X)}}.$$

若 \mathcal{L} 是 nef 的, 那么由 [Vie82, 引理 3.1] 可知

$$\dim(H^i(X, \mathcal{L}^\nu)) \leq a_i \cdot \nu^{\dim(X)-i}$$

因而由 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理推出

$$v(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L})^{\dim(X)}.$$

我们感兴趣的一个问题是: 曲面纤维化的各种不等式是否可以有效推广至高维情形? 下面的各结果给出了部分回答.

Kawamata 给出了 $v(\omega_X)$ 的一个下界.

定理 8.1.1 ([Zha07], 定理 7.1)

$$v(\omega_X) \geq (n+1) \cdot v(\omega_Y) \cdot v(\omega_F). \quad (8-1)$$

这一不等式等价于 $v(K_{X/Y}) \geq 0$. 在曲面纤维化情形, 此即指 K_f^2 的非负性.

当 Y 是曲线时, Viehweg 和左康得到了关于相对典范层 $\mu(f_*\omega_{X/C}^{\otimes \nu})$ 的 Arakelov 型不等式.

定理 8.1.2 ([VZ01], [VZ06]) 设 Y 是光滑的亏格 b 曲线, $f: X \rightarrow Y$ 是 Y 上半稳定的 n 维射影流形族, s 是 f 的奇异纤维个数, 那么

$$\mu(f_*\omega_{X/C}^{\otimes \nu}) \leq \frac{n\nu}{2}(2b-2+s), \quad (8-2)$$

此处 $\mu(f_*\omega_{X/C}^{\otimes \nu})$ 是 $f_*\omega_{X/C}^{\otimes \nu}$ 的斜率.

在曲面纤维化情形, 我们可以看到, 定理 2.3.2 实际上比上述结果更为精细. 一个未解决的有趣问题是, 上述不等式是否是严格的?

利用 Arakelov 型不等式, 我们可以得到高维情形的典范类不等式.

定理 8.1.3 ([LTZ10], 定理 1.1) 设 Y 是亏格 b 曲线, $f: X \rightarrow Y$ 是 Y 上非 isotrivial 的半稳定极小 n 维流形族, 亦即 f 所有的光滑纤维 F_y 的典范线丛 ω_{F_y} 都是 semiample 的. 设 $S \subset Y$

是 f 的临界点集合, $s = \#S$ 即 f 的奇异纤维个数. 那么

$$v(\omega_{X/Y}) \leq \frac{(n+1)n}{2} \cdot v(\omega_F) \cdot \deg \Omega_Y^1(\log S). \quad (8-3)$$

特别地, 若 $b \geq 1$, 那么我们有

$$v(\omega_X) \leq v(\omega_F) \cdot \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} v(\omega_Y) + \frac{n(n+1)s}{2} \right). \quad (8-4)$$

当 $f: X \rightarrow Y$ 是曲面纤维化时, 定理 8.1.3 等价于 Vojta 不等式 [Voj88] (见定理 2.4.1), 后者又等价于对数开曲面上的 Miyaoka-Yau 不等式. 有趣的是, 在曲面纤维化情形, Arakelov 不等式实际上由 Vojta 不等式和肖刚斜率不等式直接组合得到. 定理 8.1.3 证明的关键点是将不等式 (8-3) 看作 Viehweg-Zuo 不等式在 ν 趋向于无穷时的极限情形.

上面的两个结果也可以进一步推广到底流形是高维的情形, 不过不等式变得较为粗糙. 首先我们设 Y 是射影 m 维流形, Y_0 是 Y 中某个正规交除子 S 的补集, 使得 $\omega_Y(S)$ 是 semi-ample 的, 且在 Y_0 上是 ample 的. Y 上的凝聚层 \mathcal{K} 的斜率 $\mu(\mathcal{K})$ 定义为 $c_1(\mathcal{K}) \cdot c_1(\omega_Y(S))^{m-1} / rk(\mathcal{K})$. 由丘成桐解决 Calabi-猜想 [Yau93] 中的一个基本定理可知, $\Omega_Y^1(\log S)$ 带有 Kähler-Einstein 度量. 因此, $S^m(\Omega_Y^1(\log S))$ 是 μ -polystable 的 ($\forall m$). 在这些注解下, 我们有以下结果 (主要取决于 E. Viehweg 和左康的工作)

定理 8.1.4 ([LTZ10], 命题 2.1) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 n 维流形族, X 是射影的, 纤维 $F_y = f^{-1}(y)$ 是极小的 ($\forall y \in Y_0$), 即 ω_{F_y} 是 semiample 的. 进一步假设 X 上某个可逆层 \mathcal{L} , 使得 $\mathcal{L}|_{F_y}$ 是 ample 的, 且有 Hilbert 多项式 h 使得态射 $\varphi: Y_0 \rightarrow M_h$ 是一般有限的. 进一步还假设 $f: X \rightarrow Y$ 在余维数 1 上是半稳定的.

在这些条件下, 则存在常数 $\rho = \rho(Y, S) \leq 1$ 满足以下性质: 设 \mathcal{K}_ν 是 $(f_*\omega_{X/Y}^\nu)^{\vee\vee}$ 的饱和子层, 对某个 $\nu \geq 2$. 那么

$$\mu(\mathcal{K}_\nu) \leq \nu \cdot n \cdot \rho \cdot \mu(\Omega_Y^1(\log S)).$$

结合定理 8.1.3, 通过对底流形维数的归纳证明, 我们可以得到一般情形的典范类不等式.

定理 8.1.5 ([LTZ10], 定理 1.2) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 m 维射影流形 Y 上的 n 维流形族, 满足定理 8.1.3 诸条件. 设 l_0 是使得 $|l_0\omega_Y(S)|$ 能定义双有理映射的最小整数, 那么我们有

$$v(\omega_{X/Y}) \leq c \cdot v(\omega_F) \cdot v(\omega_Y(S)), \quad (8-5)$$

此处 c 是仅依赖于 n, m 和 l_0 的常数.

在曲面情形, 我们已经看到了典范类不等式和陈类不等式之间的深刻关系. 但在高维情形, 人们对这种关系的了解还所知甚少. 以下是利用高维典范类不等式给出某些特殊 3 维流形上的陈类不等式.

推论 8.1.1 ([LTZ10], 推论 3.3) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是亏格 b 曲线 Y 上的一般型极小曲面的非 isotrivial 光滑族. 那么我们有

$$c_1^3(X) < 18c_3(X).$$

证明 由典范类不等式可知

$$c_1^3(X) \leq 6c_1^2(F)c_1(Y) = 12(b-1)c_1^2(F),$$

此处 F 是纤维. 由 F 的 Miyaoka-Yau 不等式, $c_1^2(F) \leq 3c_2(F)$. 这样就得到

$$c_1^3(X) \leq 18c_2(F)c_1(Y).$$

考虑 $f: X \rightarrow Y$ 的正合列,

$$0 \rightarrow f^*\Omega_Y^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow 0,$$

由陈类计算得到 $c_3(X) = c_2(F)c_1(Y) = 2(b-1)c_2(F)$. 这样就得到 $c_1^3(X) \leq 18c_3(X)$.

今假设 $c_1^3(X) = 18c_3(X)$, 则 F 满足 $c_1^2(F) = 3c_2(F)$, 即 F 是球商曲面. 这样, 由球商的刚性定理推出 f 是 isotrivial 的, 与假设矛盾! 因此我们有严格不等式 $c_1^3(X) < 18c_3(X)$. ■

曲面纤维化的肖刚不等式在高维情形也有部分推广.

定理 8.1.6 ([Ohn92], 主定理 1) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是亏格 b 曲线 Y 上的一般型极小曲面族, F 是 f 的一般纤维.

(1) 若 $p_g(F) \geq 3$, 且 $|K_F|$ 不能由线束分解, 那么

$$K_X^2 \geq \frac{4(p_g(F) - 2)}{p_g(F)} \left\{ \frac{(3K_F^2 - 2\chi(\mathcal{O}_F))p_g(F) + 4\chi(\mathcal{O}_F)}{2(p_g(F) - 2)}(b-1) - \chi(\mathcal{O}_X) \right\}.$$

(2) 若 $|K_F|$ 能由线束分解, 且 F 不是满足以下条件的曲面: $K_F^2 = 1, p_g(F) = 2, q(F) = 0$, 那么

$$K_X^2 \geq \frac{4(p_g(F) - 1)}{p_g(F)} \left\{ \frac{(3K_F^2 - 2\chi(\mathcal{O}_F))p_g(F) + 2\chi(\mathcal{O}_F)}{2(p_g(F) - 1)}(b-1) - \chi(\mathcal{O}_X) \right\}.$$

(3) 若 $K_F^2 = 1, p_g(F) = 2, q(F) = 0$, 那么

$$K_X^2 \geq 3(b-1) - \chi(\mathcal{O}_X).$$

(4) 若 $p_g(F) = 1$, 那么

$$K_X^2 \geq K_F^2 \{(6 - \chi(\mathcal{O}_F))(b-1) - \chi(\mathcal{O}_X)\}.$$

(5) 若 $p_g(F) = 0$, 那么

$$K_X^2 \geq \begin{cases} 6K_F^2(b-1) + \frac{2}{3}l(2), & K_F^2 \geq 2, \\ 6(b-1) + \frac{6}{13}l(2), & K_F^2 = 1. \end{cases}$$

这里 $l(2)$ 是 X 的 Reid-Fletcher 多重亏格公式中的修正项 (见 [Fle87, 定义 2.6]).

进一步, 上述五类情形中的任意一个等号成立当且仅当 f 是 isotrivial 的.

8.2 特征 p 纤维化

设 k 是特征 p 的闭域, $f: S \rightarrow C$ 是域 k 上亏格 g 相对极小半稳定纤维化 (这些概念与复数域情形相同). 如果 f 不是 isotrivial 的并且不能由某个纤维化的 Frobenius 基变换得到, 那么我们就称它具有非平凡的 Kodaira-Spencer 映射.

注 8.2.1 在复数域情形, Kodaira-Spencer 映射非平凡等价于 f 是 isotrivial 的.

和复数域情形类似, 我们也可以定义相对典范层、相对不变量等. 由假设, f 是半稳定的, 因此 e_f 是所有纤维中的结点个数, 因而是非负值. Szpiro 证明了其余的两个相对不变量的非负性. 该证明与复数域情形完全不同, 用到了 Frobenius 映射.

命题 8.2.1 ([Szp78], 命题 1, 2, 3) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小半稳定纤维化, 则

$$12 \deg f_* \omega_{S/C} \geq e_f,$$

即 $(\omega_{S/C} \cdot \omega_{S/C}) \geq 0$, 等号成立当且仅当 f 是 isotrivial 的. 特别地, 若 f 不是 isotrivial 的, 则显然有 $\deg f_* \omega_{S/C} > 0$.

证明 不失一般性, 可以假设 $b = g(C) \geq 2$ (必要时可以选择好的基变换). 我们有

$$c_1^2(S) = 12 \deg f_* \omega_{S/C} + 8(g-1)(b-1).$$

考虑 n 次幂的 Frobenius 基变换 $F_C^n: C \rightarrow C$, 这就诱导新的纤维化 $f_n: S^{(p^n)} \rightarrow C$, 且有

$$c_1^2(S^{(p^n)}) = p^n(12 \deg f_* \omega_{S/C} - e_f) + 8(g-1)(b-1).$$

如果 $12 \deg f_* \omega_{S/C} - e_f < 0$, 那么对充分大的 n , 有 $c_1^2(S^{(p^n)}) < 0$. 由 [Mum69] 的曲面分类结果, 这就意味着 $S^{(p^n)}$ 包含无穷条有理曲线. 由假设 $b \geq 2$, 这无穷条有理曲线都是垂直的. 另一方面, 奇异纤维的个数有限, 从而导出矛盾! 因此得到不等式. 剩余的结论请直接参看该文献. ■

注 8.2.2 上述证明实际上也指出, Miyaoka-Yau 不等式在特征 p 情形并不成立. 不仅如此, 著名的 Ramanujam 消失定理在特征 p 情形也不成立 ([Szp78]).

类似地, [Szp78, 定理 1] 证明, 如果 f 不是 isotrivial 的, 那么 $\omega_{S/C}$ 是 nef 的, 且所有满足 $(\omega_{S/C} \cdot \Gamma) = 0$ 的不可约垂直都是 (-2) -曲线. 此外, 复数域情形的典范类不等式也有类似推广.

命题 8.2.2 ([Szp78], 命题 4.2) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小半稳定纤维化, 且具有非平凡 Kodaira-Spencer 映射, s 是奇异纤维个数, $b = g(C)$, 那么

$$(\omega_{S/C} \cdot \omega_{S/C}) < 4g(g-1)(2b-2+s).$$

由此可以看到, 在特征 p 情形, \mathbb{P}^1 上的半稳定亏格 $g \geq 2$ 纤维化至少有 3 条奇异纤维. 如果该曲面是一般型的, 则至少有 4 条奇异纤维 (见 [Szp81]).

与肖刚不等式的证明类似, 我们利用 Harder 滤过以及上述的 Szpiro 典范类不等式, 可以得到如下的 Arakelov 型不等式.

命题 8.2.3 ([LSZ09], 定理 1.2) 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 2$ 相对极小半稳定纤维化, 且具有非平凡 Kodaira-Spencer 映射, s 是奇异纤维个数, $b = g(C)$, 设 \mathcal{E} 是 $f_* \omega_{X/C}^\nu$ 中的凝聚子层, $\nu \geq 1$. 我们有以下严格不等式,

$$\mu(\mathcal{E}) < 2\nu g(2b-2+s).$$

考虑向量丛 \mathcal{E} 的 Harder 滤过,

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n = \mathcal{E},$$

我们记 $\mu_{\max}(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}_1)$, $\mu_{\min}(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})$ (即最后斜率).

定理 8.2.1 ([Sun99], 定理 3.1) 设 C 是域 k 上亏格 $b \geq 2$ 的光滑射影曲线, \mathcal{E} 是 C 上秩为 r 的半稳定向量丛. 设 $F_C: C \rightarrow C$ 是 Frobenius 映射, 那么我们有以下不等式,

$$\mu_{\max}(F_C^* \mathcal{E}) - \mu_{\min}(F_C^* \mathcal{E}) \leq 2(r-1)(b-1).$$

8.3 曲线模空间

设 \mathcal{M}_g 是所有亏格 g 光滑曲线的同构类组成的集合, 我们称为亏格 g 曲线模空间. 曲线模空间的簇结构可以通过多种方式得到, 比如作为 Teichüller 空间的商, 或者作为 Siegel 半平面的商 (即 g 维主极化阿贝尔簇的模空间 \mathcal{A}_g) 的子簇来实现等等.

一个自然的问题是如何将 \mathcal{M}_g 紧致化. 我们有两种常见的紧致化方式:

(1) 佐武紧化: 设 $\overline{\mathcal{A}}_g$ 是 \mathcal{A}_g 的 Satake 紧致化, 通过将代数曲线对应其雅可比簇, 就得到 \mathcal{M}_g 到 $\overline{\mathcal{A}}_g$ 的态射. 由 Torelli 定理, 该态射是嵌入. 设 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 为 \mathcal{M}_g 的像在 $\overline{\mathcal{A}}_g$ 中的闭包, 它称为 \mathcal{M}_g 的佐武紧化.

(2) Mumford 紧化: $\overline{\mathcal{M}}_g = \mathcal{M}_g \cup \Delta$ 是射影簇, 其中边界除子 Δ 由一些不可约除子的并得到: $\Delta = \sum_{i=0}^{[g/2]} \Delta_i$, 这里 Δ_0 是带有一个结点的不可约曲线构成的轨迹的闭包; Δ_i ($1 \leq i \leq [g/2]$) 是带有一个结点的可约曲线 (由一条亏格 i 和一条亏格 $g-i$ 的光滑曲线分支构成) 组成的轨迹的闭包.

Mumford 紧化到佐武紧化有一个典范的双有理态射, 它将所有具有相同雅可比簇的曲线对应的点映到同一点.

Harer [Hae83] 首先得到以下关于模空间同调群的结果

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}) &= 0, g \geq 3, \\ H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, g \geq 5, \\ H_k(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}) &= 0, k > 4g - 3. \end{aligned}$$

以及稳定性定理 [Hae85]

$$H^k(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}) = H^k(\mathcal{M}_{g+1}, \mathbb{Z}), \quad g \geq 3k + 1$$

特别地, 我们有 $\text{Pic}(\mathcal{M}_g) = \mathbb{Z}$. 由 [AC87] 的结果, 我们可以取其上的 Hodge 丛的第一陈类 λ 作为其生成元, 简称为 Hodge 类 (Hodge class). 过渡到 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上, 设 δ_i ($i \neq 1$) 是 Δ_i 对应的类; δ_1 是 $\Delta_1/2$ 对应的类, 那么 $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)$ 的生成元就是诸 δ_i 及 Hodge 类 λ , 它的 Picard 群恰为 $\mathbb{Z}^{[g/2]+2}$. 我们记 $\delta = \delta_0 + \cdots + \delta_{[g/2]}$, $\kappa = 12\lambda - \delta$.

在 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 中有一种除子类受到人们关注: $a\lambda - b\delta$. 比如模函子上的典范类 $K_{\overline{\mathcal{M}}_g} = 13\lambda - 2\delta$, 又比如符号差除子 (Signature divisor) $D \equiv 4\lambda - \delta$.

$\overline{\mathcal{M}}_g$ 上存在 ample 的除子类, 且若 $a > 11.2b > 0$, 那么 $a\lambda - b\delta$ 是 ample 的 (参看 [Knu83], [Mum77]). 如果对充分可除的 n , $n(a\lambda - b\delta)$ 是有效的, 那么就称 $a\lambda - b\delta$ 是有效的. 模空间的斜率定义为

$$s_g = \inf \left\{ \frac{a}{b} \mid a\lambda - b\delta \text{ 是有效的}, a, b > 0 \right\}.$$

[HM90] 提出如下猜想,

Slope conjecture:

$$s_g \geq 6 + \frac{12}{g+1},$$

等号成立当且仅当 $g+1$ 是合数或者 $g=1, 2$.

我们有如下一些结果:

- (1) [EH87] 证明, 如果 $g+1$ 是合数, 则 $s_g \leq 6 + 12/(g+1)$.
- (2) [HMu82] 及 [EH87] 证明, 若 $g \geq 23$, 则 $s_g \leq 13/2$. 事实上, \mathcal{M}_g 的 Kodaira 维数非负当且仅当 $s_g \leq 13/2$.
- (3) [HM90] 及 [CR91] 给出小亏格情形 s_g 的值:

$$s_1 = 12, s_2 = 10, s_3 = 9, s_4 = 17/2, s_5 = 8, s_6 = 47/6.$$

- (4) [Tan98] 证明 $3 \leq g \leq 9$ 或 $g = 11$ 时, $s_g \geq 6 + 12/(g+1)$, 等号成立当且仅当 $g+1$ 是合数.
- (5) [FP02] 证明 $g = 10$ 时, 猜想不成立, $s_{10} = 7$.

设 $f: S \rightarrow \Delta$ 是亏格 g 局部纤维化, 中心纤维 F_0 是奇异的. 将 $\Delta^* = \Delta - \{0\}$ 上每个点对应的光滑纤维自然对应至 \mathcal{M}_g 中的点, 我们得到态射 $\Delta^* \rightarrow \mathcal{M}_g$, 紧致化之后即得到一个扩张的态射 $\mu_f: \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$. $\mu_f(0)$ 称为 f 的模点 (Moduli point). 假设 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \Delta$ 是以 Δ 中心全分歧的稳定约化. 收缩 \tilde{S} 中的垂直 (-2) -曲线, 这样得到的稳定中心纤维恰好是模点对应的曲线.

上面的讨论可以过渡到整体情形. 设 $f: S \rightarrow C$ 是亏格 $g \geq 1$ 相对极小纤维化, 则有自然的诱导映射

$$\mu_f: C \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g.$$

一种特殊的情况是, $\text{Im} \mu_f^*$ 是一个点, 这样的 f 称为常模的, 也就是 isotrivial 的. 下面我们总假设 f 不是常模的.

设 $f: S \rightarrow C$ 是半稳定的, 那么

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \deg_C \mu_f^* \kappa, \\ \chi_f &= \deg_C \mu_f^* \lambda, \\ e_f &= \deg_C \mu_f^* \delta. \end{aligned}$$

易知符号差 $\text{Sign}(S) = \deg_C \mu_f^* D$.

对一般的纤维化 f , 我们曾经定义了所谓的模不变量,

$$\begin{aligned} \kappa(f) &= \deg_C \mu_f^* \kappa, \\ \lambda(f) &= \deg_C \mu_f^* \lambda, \\ \delta(f) &= \deg_C \mu_f^* \delta. \end{aligned}$$

这三个量不依赖于基变换的选取.

模空间中的肖刚-Cornalba-Harris 斜率不等式等价于

$$\deg_C \mu_f^* \delta \leq \left(8 + \frac{4}{g}\right) \deg_C \mu_f^* \lambda.$$

当 g 是奇数时, 我们能定义 \mathcal{M}_g 中的一条轨迹

$$\mathcal{D}_{HM} = \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid \text{gon}(C) \leq (g+1)/2\},$$

此处, $\text{gon}(C)$ 是 C 的 gonality. 设 $\overline{\mathcal{D}}_{HM}$ 是其在 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 中的闭包, 它是 Weil 除子, 称为 Harris-Mumford 除子. 由 [HMu82, 定理 5, page 62], $\overline{\mathcal{D}}_{HM} \cap \mathcal{M}_g = \mathcal{D}_{HM}$.

定理 8.3.1 ([HMu82]) 设 $g = 2k - 1$, 则在 $\text{Pic}(\overline{M}_g) \otimes \mathbb{Q}$ 中有以下等式

$$\overline{D}_{HM} = \frac{(2k-4)!}{k!(k-2)!} \left\{ 6(k+1)\lambda - k\delta_0 - \sum_{i=1}^{k-1} 3i(2k-1-i)\delta_i \right\}.$$

特别地, 以下 \mathbb{Q} -除子是 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 的符号差除子,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{signHM}} := & \frac{2 \cdot k!(k-2)!}{3(k+1)(2k-4)!} \overline{D}_{HM} - \frac{k+3}{3(k+1)} \delta_0 \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2i(2k-1-i) - (k+1)}{k+1} \delta_i. \end{aligned}$$

类似地, 我们也能定义 Clifford 轨迹

$$\mathcal{D}_{\text{cliff}} := \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid \text{Cliff}(C) < \frac{g-1}{2}\} \subseteq \mathcal{M}_g.$$

由 $\text{gon}(C) \geq \text{Cliff}(C) + 2$ 可知, 此时 $\mathcal{D}_{HM} \subset \mathcal{D}_{\text{cliff}}$.

当 $g = 2(k-1) \geq 4$ 时, 设 E_k^1 是所有满足以下条件的亏格 g 曲线 $[C]$ 在模空间中构成的轨迹: C 具有某个线束 V (来自于次数为 k 的完全线性系 L), 使得 $V \otimes H^0(K_C \otimes L^{-1}) \rightarrow H^0(C, K_C)$ 不是单射. 设 \overline{E}_k^1 是其在 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 中的闭包, 它是 Weil 除子, 称为 Eisenbud-Harris 除子.

定理 8.3.2 ([EH87], 定理 2) 设 $g = 2k - 2$, 则在 $\text{Pic}(\overline{M}_g) \otimes \mathbb{Q}$ 中有以下等式

$$\overline{E}_k^1 = \frac{2 \cdot (2k-4)!}{k!(k-2)!} \left\{ (6k^2 + k - 6)\lambda - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \delta_i \right\}.$$

这里

$$a_0 = k(k-1), \quad a_1 = (2k-3)(3k-2), \quad a_2 = 3(k-2)(4k-3).$$

特别地, 以下 \mathbb{Q} -除子是 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 的符号差除子,

$$\mathcal{D}_{\text{signEH}} := \frac{2 \cdot k!(k-2)!}{(2k-4)!(6k^2+k-6)} \overline{E}_k^1 + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{4a_i}{6k^2+k-6} - 1 \right) \delta_i.$$

请注意, Eisenbud-Harris 也精确求出了上述公式中的其他系数 a_i .

曲线模空间还有许多重要的性质, 我们这里不再具体展开了. 有兴趣的读者可以参看 [Has87, Has98]. 关于符号差的研究也可以参看 [AY09].

本章习题

习题 8.1 设 C 是亏格 $b \geq 2$ 光滑射影曲线, $F_n : C \rightarrow C$ 是 n 次幂的 Frobenius 复合映射 ($n \geq 1$). 设 \mathcal{E} 是 C 上秩 r 向量丛. 试用定理 8.2.1 证明:

$$\mu_{\max}(F_n^* \mathcal{E}) - \mu_{\min}(F_n^* \mathcal{E}) \leq p^n (\mu_{\max}(\mathcal{E}) - \mu_{\min}(\mathcal{E})) + 4(r-1)(b-1) \frac{p^n - 1}{p-1}.$$

习题 8.2 试用定理 8.3.1 直接证明: 亏格 3 非超椭圆稳定纤维化的整体不变量满足 Miles Reid 猜想公式 (见定理 5.4.1).

参考文献

- [AA01] T. Arakawa, T. Ashikaga: Local splitting families of hyperelliptic pencils, I, *Tohoku Math. J.*, **53**(2001), 369–394.
- [AA04] T. Arakawa, T. Ashikaga: Local splitting families of hyperelliptic pencils, II, *Nagoya Math. J.*, **175**(2004), 103–124.
- [Ara71] S. Ju. Arakelov: Families of algebraic curves with fixed degeneracy, *Math. USSR Izv.*, **5**(1971), 1277–1302.
- [AC87] E. Arbarello and M. Cornalba: The Picard groups of the moduli spaces of curves, *Topology*, **26**(1987), 153–171.
- [AS78] E. Arbarello, E. Sernesi: Petri’s approach to the study of the ideal associated to a special divisor, *Invent. Math.*, **49**(1978), 99–119.
- [Art62] M. Artin: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, *Amer. J. Math.*, **84**(1962), 485–496.
- [Art66] M. Artin: On Isolated Rational Singularities of Surfaces, *Amer. J. Math.*, **88**(1966), 129–136.
- [AW71] M. Artin, G. Winters: Degenerate fibres and stable reduction of curves, *Topology*, **10**(1971), 373–383.
- [Ash92] T. Ashikaga: Normal two-dimensional hypersurface triple points and Horikawa type resolution, *Tohoku Math. J.*, **44**(1992), 177–200.
- [Ash10] T. Ashikaga: Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction, *Comment. Math. Helv.*, **85**(2010), to publish.
- [AE06] T. Ashikaga, H. Endo: Various aspects of degenerate families of Riemann surfaces, *Sugaku Expositions*, **19**(2006), 171–196.
- [AI02] T. Ashikaga, M. Ishizaka: Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos’ theorem, *Tohoku Math. J. (2)*, **54**, Number 2 (2002), 195–226.
- [AK91] T. Ashikaga and K. Konno: Examples of degenerations of Castelnuovo surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **43**, No. 2(1991), 229–246.
- [AK00] T. Ashikaga, K. Konno: Global and local properties of pencils of algebraic curves, *Algebraic Geometry 2000, Azumino, Advanced Studies in Pure Mathematics*, **36**(2000), 1–49.

- [AY09] T. Ashikaga, Ken-Ichi Yoshikawa: A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces (with an appendix by Kazuhiro Konno), *Adv. Stud. in Pure Math.*, **56**(2009), Singularities-Niigata-Toyama 2007, 1–34.
- [Bae27] R. Baer: Kurventypen auf Flächen, *J. reine angew. Math.*, **156**(1927), 231–246.
- [Bae28] R. Baer: Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen. *J. reine angew. Math.*, **159**(1928), 101–111.
- [Bal86] E. Ballico: On the clifford index of algebraic curves, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**(1986), 217–218.
- [Bar01] M. A. Barja: On the slope of bielliptic fibrations, *Proc. AMS*, **129**(2001), 1899–1906.
- [BZ00] M. A. Barja, F. Zucconi: A note on a conjecture of Xiao, *J. Math. Soc. Japan*, **52**, no. 3 (2000), 633–635.
- [BZ01] M. A. Barja, F. Zucconi: On the slope of fibred surfaces, *Nagoya Math. J.*, **164**(2001), 103–131.
- [BPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Bea81] A. Beauville: Le nombre minimum de fibres singulières d’une courbe stable sur \mathbb{P}^1 , *Séminaire sur les pincesaux de courbes de genre au moins deux* (L. Szpiro, ed.), *Astérisque* **86**(1981), 97–108.
- [Be82a] A. Beauville: L’inégalité pour les surfaces de type générale, Appendix to: O. Debarre, *Inégalités numériques pour les surfaces de type general*, *Bull. Soc. Math. de France*, **110**(1982), 319–346.
- [Be82b] A. Beauville: Les familles stables de courbes elliptiques sur \mathbb{P}^1 admettant quatre fibres singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **294**(1982), 657–660.
- [BH71] J.S. Birman, H.M. Hilden: On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (Stony Brook, N. Y., 1969), *Ann. of Math. Studies*, **66**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, pp. 81–115.
- [Bom73] E. Bombieri: Canonical models of surfaces of general type, *Publ. IHES* **42**(1973), 171–219.
- [BC78] E. Bombieri, F. Catanese: The tricanonical map of a surface with $K_S^2 = 2$, $p_g = 0$, in C.P. Ramanujam, a tribute, Springer-Verlag (1978) 279–290.

- [BK86] E. Brieskorn, H. Knörrer: Plane algebraic curves, Birkhäuser Verlag, Basel.Boston.Stuttgart, 1986.
- [Cam75] N. A'Campo: Le group de monodromie du déploiement des singularité isolées de courbes planes I, *Math. Ann.*, **213**(1975), 1–32.
- [Cat82] F. Catanese: Pluricanonical Gorenstein curves, *Enumerative geometry and classical algebra geometry (Nice, 1981)*, *Progr. Math.* **24**, Birkhauser(1982), 51–95.
- [CF96] F. Catanese, M. Franciosi: Divisors of small genus on algebraic surfaces and projective embeddings, *Proceedings of the 1993 Hirzebruch 65 Conference on Algebra and Geometry*, *Isr. Math. Conf. Proc.* **9**(1996), 109–140.
- [Che87] Z. Chen: On the geography of surfaces, Simply connected minimal surfaces with positive index, *Math. Ann.*, **277**(1987), 141–164.
- [Che93] Z. Chen: On the lower bound of the slope of a non-hyperelliptic fibration of genus 4, *Intern. J. of Math.*, **4**(1993), 367–378.
- [CDTY] Z. -J. Chen, R. Du, S. -L. Tan, F. Yu: Cubic equations of rational triple points of dimension two, *Proceedings of the International Conference on Complex Geometry and Related Fields*, 63–76, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007
- [CT06] Z. Chen, S.-L. Tan: Upper bounds on the slope of a genus 3 fibration, in *Recent Progress on Some Problems in Several Complex Variables and Partial Differential Equations*, *Contemporary Math.*, **400**(2006), 65–88.
- [CLT07] Z. Chen, J. Lu, S.-L. Tan: On the upper bound of the slope of a trigonal fibration, preprint (2007)
- [CLT10] Z. Chen, J. Lu, S.-L. Tan: On the modular invariants of a family of non-hyperelliptic curves of genus 3, preprint (2010)
- [Cil83] C. Ciliberto: Sul grado dei generatori dell'anello canonico di una superficie di tipo generale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **41**, 3(1983), 83–111.
- [CFM97] C.Ciliberto, P.Francia, M.Mendes Lopes: Remarks on the bicanonical map for surfaces of general type, *Math. Zeit.*, **224**(1997), 137-166
- [CM91] M. Coppens, G. Martens: Secant space and Clifford's theorem, *Comp. Math.*, **78**(1991), 193–212.
- [CH88] M. Cornalba, J. Harris: Divisor classes associated to families of stable varieties, with application to the moduli space of curves, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21**(1988), 455–475.

- [CR91] M.-C. Chang and Z. Ran: On the slope and Kodaira dimension of $\overline{\mathcal{M}}_g$ for small g , *J. Diff. Geom.*, **34**(1991), 267–274.
- [CS08] M. Cornalba, L. Stoppino: A sharp bound for the slope of double cover fibrations, *Michigan Math. J.*, **56**, Issue **3**(2008), 551–561.
- [DK73] P. Deligne, N. Katz: *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math Sci., **340**(1973), Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [DM69] P. Deligne, D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. IHES*, **36**(1969), 75–109.
- [EH87] D. Eisenbud, J. Harris: The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus $g \geq 23$, *Invent. Math.*, **90**(1987), 359–388.
- [End00] H. Endo: Meyer’s signature cocycle and hyperelliptic fibrations, *Math. Ann.*, **316**(2000), 237–257.
- [EV90] H. Esnault, E. Viehweg: Effective bounds for semipositive sheaves and the height of points on curves over complex function fields, *Compositio Mathematica* **76**(1990), 69–85.
- [EV92] H. Esnault, E. Viehweg: *Lectures on Vanishing Theorems*, DMV-Seminar **20**, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (1992).
- [Fle87] A. R. Fletcher: Contributions to Riemann-Roch on projective 3-folds with only canonical singularities and applications, *Algebraic Geometry Bowdoin, 1985*, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Amer. Math. Soc. (1987), pp. 221 – 231.
- [FM09] B. Farb, D. Margalit: A primer on mapping class groups, preprint (2009).
- [FP02] G. Farkas, M. Popa: Effective divisors on \mathcal{M}_g and a counterexample to the Slope Conjecture, preprint (2002), Arxiv preprint math/0209171.
- [Fra91] P. Francia: On the base points of the bicanonical system, *Problems in the theory of surfaces and their classification*, Symposia Math. (1991), 141–150.
- [Fuj84] T. Fujita: On Kaehler fiber spaces over curves, *J. Math. Soc. Japan.* 30/4(1984), 779–794.
- [Gra62] H. Grauert: Ueber modifikationen und exzaptionelle analytischen mengen, *Math. Ann.* **146**(1962), 331–368.
- [Gra65] H. Grauert: Modell’s Vermutung uber rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Functionenkörper, *Publ. Math. IHES*, (1965).
- [Gr84a] M. Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, *J. Differential Geom.*, **19**(1984), 125–171.

- [Gr84b] M. Green: Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, II J. Differential Geom., **20**(1984), 279–289.
- [Gro71] A. Grothendieck: Revêtements étales et groupe fondamental. L.N.M **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [GZ74] S. M. Gusein-Zade: Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables. Funktsional Anal. i Prilozhen, **8**(1974), 11–15.
- [Hae83] J. Harer: The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. Math., **72** (1983), 221–239.
- [Hae85] J. Harer: Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces, Ann. Math., **121** (1985), 215–249 .
- [Has87] J. Harris: Curves and their moduli, Algebraic Geometry, Bowdoin, Proc. of Symposia in Pure Math. **49**(1987), 99–143.
- [HM90] J. Harris, I. Morrison: Slopes of effective divisors on the moduli space of stable curves, Invent. Math., **99** (1990), 321–355.
- [HMu82] J. Harris, D. Mumford: On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, Invent. Math., **67** (1982), 23–86.
- [Has98] J. Harris: Moduli of curves, Graduate Texts in Math **187**, Springer-Verlag (1998).
- [Hat77] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math **52**, Springer-Verlag, (1977).
- [Hav66] J. Harvey: Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann surfaces, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **17** (1966), 86–97.
- [Hir10] S. Hirose: Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4, Osaka J. Math., **47**, Number 2 (2010), 385–421.
- [HR98] A. Hirschowitz, S. Ramanan: New evidence for Green’s conjecture on syzygies of canonical curves, Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure, **31**, Number 2 (1998), 145–152.
- [Hir86] F. Hirzebruch: Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers, The Lefschetz Centennial Conference, Part I (Mexico City), Contemp. Math., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1986), 141–155.
- [Hor75] E. Horikawa: On deformations of quintic surfaces, Inv. Math., **31**(1975), 43–85.
- [Hor77] E. Horikawa: On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. Kodaira, 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge Univ. Press (1977).

- [Hor88] E. Horikawa: Local deformation of pencils of curves of genus two, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **64** (1988), 241–244.
- [Hor90] E. Horikawa: Certain degenerate fibres in pencils of curves of genus three. (Preprint 1990)
- [Hor91] E. Horikawa: Notes on canonical surfaces, Tohoku Math. J., **43**(1991), 141–148.
- [Ino81] M. Inoue: Some surfaces of general type with positive index, preprint (1981).
- [Is04a] M. Ishizaka: Monodromies of hyperelliptic families of genus three curves, Tohoku Math. J. (2), **56**, Number 1 (2004), 1–26.
- [Is04b] M. Ishizaka: Classification of the periodic monodromies of hyperelliptic families, Nagoya Math. J. , **174** (2004), 187–199.
- [Ish06] M. Ishizaka: One parameter families of Riemann surfaces and presentations of elements of mapping class group by Dehn twist, J. math. Soc. Japan, **58**, No. 2, 2006.
- [Ish07] M. Ishizaka: Presentation of Hyperelliptic Periodic Monodromies and Splitting families, Revista matemática complutense, **20** (2007) , No. 2, 483–495.
- [JY10] Lizhen Ji, S.-T. Yau: Transformation groups and moduli spaces of curves, Advanced Lectures in Mathematics **16**, Higher Education Press, Beijing, 2010.
- [Kas80] A. Kas: The Nielsen realization problem, Ann. of Math., **117**(1983), 235–265.
- [Ker83] S. P. Kerchhoff: On The Handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, Pacific J. Math., **89**(1980), No. 1, 89–104.
- [Knu83] F. Knudsen: The projectivity of the moduli spaces of stable curves, Math. Scand., **52** (1983), 161–199.
- [Kob85] R. Kobayashi: Einstein-Kaehler metrics on open algebraic surfaces of general type, Tohoku Math. Journ. , **37**(1985), 43–77.
- [Kod60] K. Kodaira: On complex analytic surfaces I: Ann. of Math., **71**(1960), 111–152; II: Ann. of Math., **77**(1963), 563–626; III: Ann. of Math., **78**(1963), 1–40.
- [Kod64] K. Kodaira: On the structure of compact complex analytic surfaces I: Amer. J. Math., **86**(1964), 751–798; II: Amer. J. Math., **88**(1966), 682–721; III: Amer. J. Math., **90**(1969), 55–83; IV: ibid, 1048–1066.
- [Kod67] K. Kodaira: A certain type of irregular algebraic surfaces, J. Anal. Math., **19** (1967) 207–215.
- [Kol97] J. Kollàr: Complex algebraic geometry, IAS/Park City Mathematics Series, **3** (1997).

- [Kon91] K. Konno: A note on surface with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 3, *Osaka J. Math.*, **28** (1991), 737–745.
- [Kon93] K. Konno: Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV*, **20** (1993), 575–595.
- [Kon96] K. Konno: A lower bound of the slope of trigonal fibrations, *Intern. J. Math.*, **7** (1996), 19–27.
- [Kon99] K. Konno: Clifford index and the slope of fibered surfaces, *J. Alg. Geom.*, **8** (1999), 207–220.
- [Kon00] K. Konno: Certain algebraic surfaces with non-reduce moduli space, *Portugal. J. Math.*, Vol. **57**, Fasc.2 (2000), 169–178.
- [Kon01] K. Konno: 1-2-3 theorem for curves on algebraic surface, *J. Reine. Angew. Math.*, **533**, Fasc.2 (2001), 171–205.
- [KM99] K. Konno, M. Mendes Lopes: On a question of Miles Reid, *Manuscripta Math.*, **100** (1999), 81–86.
- [KM08] K. Konno, M. Mendes Lopes: The base components of the dualizing sheaf of a curve on a surface, *Archiv der Mathematik*, **90** (2008), 395–400.
- [Lau71] H. B. Laufer: Normal two-dimensional singularities, *Ann. Math. Studies*, no. **71**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., (1971)
- [La77] H. B. Laufer: On μ for surface singularities, *Several Complex Variables, Part I* (Wells, R. O., eds.), *Proc. of Symposia in Pure Math.*, **30**, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., (1977), 45–49.
- [Lau77] H. B. Laufer: On minimally elliptic singularities, *Amer. J. Math.*, **99** (1977), 1257–1295.
- [Lau83] H. B. Laufer: Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, **40**, 2(1983), 1–29.
- [Lau87] H. B. Laufer: Generation of 4-pluricanonical forms for surface singularities, *Amer. J. Math.*, **109** (1987), 571–589.
- [Lic64] W. B. R. Lickorish: A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **60** (1964), 769–778.
- [Liu96] K. F. Liu: Geometric height inequalities, *Math. Research Letters*, **3** (1996), 637–702.
- [LT10] J. Lu, S. -L. Tan: Inequalities between the Chern numbers of a singular fiber in a family of algebraic curves. (Preprint 2010)

- [LTZ10] J. Lu, S. -L. Tan, K. Zuo: Canonical Class Inequality for Fibred Spaces. (Preprint 2010)
- [LSZ09] J. Lu, M. Sheng, K. Zuo: An Arakelov inequality in characteristic p and upper bound of p -rank zero locus. *Journal of Number Theory*, **129**, 12 (2009), 3029-3045.
- [Man66] Ju. I. Manin: Canonical Rational points of algebraic curves over function fields. *Amer. Math. Soc. translations*, **2/50**(1966), 189–234.
- [MM91] Y. Matsumoto, J. M. Montesinos-Amilibia: Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces I, II. Preprint, Univ. of Tokyo and Univ. Complutense de Madrid, 1991/1992.
- [MM94] Y. Matsumoto, J. M. Montesinos-Amilibia: Pseudo-periodic homeomorphisms and degeneration of Riemann surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **30** (1994), 70–75.
- [Mat90] S. Matsusaka: Some numerical invariants of hyperelliptic fibrations, *J. Math. Kyoto Univ.*, **30**(1990), 33–57.
- [Men88] M. Mendes Lopes: The Relative canonical algebra for genus 3 fibration, Thesis of P.h.D., Univ. of Warwick, 1988
- [Men96] M. Mendes Lopes: Adjoint systems on surfaces, *Bollettino. U.M.I.*, (7) **10-A** (1996), 169–179.
- [Mil68] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. Math. Studies*, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1968)
- [Mir85] R. Miranda: Triple covers in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, **107**(1985), 1123–1158.
- [Miy84] Y. Miyaoka: The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants, *Math. Ann.*, **268**(1984), 159–171.
- [Moi77] B. Moishezon: Complex surfaces and connected sums of complex projective planes, *Lecture Notes in Math.* **603**, Springer-Verlag, 1977.
- [Mum69] D. Mumford: Enriques' classification of surfaces in char p , I, *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, (1969), 325–339.
- [Mum70] D. Mumford: Varieties defined by quadratic equations, (CIME, Varenna, 1969), Edizione Cremonese, Roma (1970), 29–100.
- [Mum77] D. Mumford: Stability of projective varieties, *Enseign. Math.* (2), **23** (1977), 39–110.
- [Nie27] J. Nielsen: Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen Fl'achen, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358. English translation: Investigations in the topology

- of closed orientable surfaces, I (Translation by J. Stilwell) in *Collected Math. Papers*, Birkh'auuser (1986).
- [Nie37] J. Nielsen: Die Strukturperiodischer Transformationen von Fl'achen, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **15** (1937). English translation: in *Collected Papers 2*, Birkh'aser, 1986.
- [Nie44] J. Nielsen: Surface transformation classes of algebraically finite type, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **21** (1944). English translation: in *Collected Papers 2*, Birkh'aser, 1986.
- [NU73a] Y. Namikawa, K. Ueno: On fibers in families of curves of genus two I. Singular fibers of elliptic type, in: *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in Honor of Y. Akizuki Kinokuniya, Tokoy, (1973), 292–371.
- [NU73b] Y. Namikawa, K. Ueno: The complete classification of fibers in pencils of curves of genus 2, *Manuscripta Math.*, **9**(1973), 143–186.
- [Ogg66] A. P. Ogg: On pencils of curves of genus 2, *Topology*, **5**(1966), 355–362.
- [Ohn92] K. Ohno: Some inequalities for minimal fibrations of surfaces of general type over curves, *J. Math. Soc. Japan*, **44**, no. 4(1992), 643–666.
- [Par68] A. N. Parsion: Algebraic curves over function fields I, *Math. USSR Izv.*, **2**(1968), 1145–1170.
- [Per81] U. Persson: Chern invariants of surfaces of general type, *Compositio Math.*, **43**(1981), 3–58.
- [Per87] U. Persson: An introduction to the geography of surfaces of general type, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **46**(1987), 195–218.
- [Pol08] F. Polizzi: Numerical properties of isotrivial fibrations, *Geometriae Dedicata*, **147**, Number 1, 323–355.
- [Ray70] M. Raynaud: Sp'ecialisation du foncteur de Picard, *uPubl. Math. IHES* **38** (1970), 27–76.
- [Rei75] M. Reid: Elliptic Gorenstein singularities of surfaces, unpublished manuscript (1975).
- [Rei90] M. Reid: Problems on pencils of small genus, preprint (1990)
- [Re90b] M. Reid: Infinitesimal view of extending a hyperplane section, - deformation theory and computer algebra *Lecture Notes in Math.* **1417** (1990), 214–286
- [Sai73] B. Saint-Donat: On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, *Mathematische Annalen*, **206**, No. 2 (1973), 157–175.

- [Sak80] F. Sakai: Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps, *Math. Ann.*, **254**(1980), no. **2**, 89–120.
- [SF00] Z. Stankova-Frenkel: Moduli of trigonal curves, *J. Algebraic Geom.*, **9**(2000), no. **4**, 607–662.
- [Shima] I. Shimada: Lectures on Zariski Van-Kampen theorem, preprint.
- [Shi99] T. Shioda: Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve in: *New Trends in Algebraic Geometry*, Cambridge Univ. Press, (1999), 359–373.
- [Sun99] X. Sun: Remarks on the semistability of G-bundles in positive characteristics, *Compositio Math.*, **119** (1999), 41–52
- [Szp78] L. Szpiro: Sur le théorème de rigidité de parsin et Arakelove, *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Vol. II, *Astérisque*, **64**(1979), 196–202.
- [Szp81] L. Szpiro: Propriété numériques de faisceau dualisant relatif, *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux (L. Szpiro, ed.)*, *Astérisque* **86** (1981), 44–78.
- [Tak04] S. Takamura: Towards the classification of atoms of degenerations, I, Splitting criteria via configurations of singular fibers. *J. Math. Soc. Japan*, **56**, No. 1 (2004), 115–145.
- [Tak02] S. Takamura: Towards the classification of atoms of degenerations, II, III, IV, preprint.
- [Tan91] S.-L. Tan: Galois triple covers of surfaces, *Science in China, Ser. A.*, **34** (1991), 935–942.
- [Tan94] S.-L. Tan: On the base changes of pencils of curves, I, *Manuscripta Math.*, **84**(1994), 225–244.
- [Tan95] S.-L. Tan: The minimal number of singular fibers of a semistable curve over \mathbb{P}^1 , *J. Algebraic Geometry*, **4**(1995), 591–596.
- [Tan96] S.-L. Tan: On the base changes of pencils of curves, II, *Math. Z.*, **222**(1996), 655–676.
- [Tan98] S.-L. Tan: On the slopes of the moduli spaces of curves, *Intern. J. of Math.*, **9** (1998), 119–127.
- [Tan01] S.-L. Tan: Integral closure of a cubic extension and applications, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **129**(2001), 2553–2562.
- [Tan02] S.-L. Tan: Triple covers on smooth algebraic varieties, *Geometry and Nonlinear Partial Differential Equations*, *AMS/IP Studies in Adv. Math.*, **29**, Amer. Math. Soc. and Intern. Press, 2002, 143–164.

- [Tan03] S.-L. Tan: Effective behavior of multiple linear systems, *Asian J. Math.*, **8**(2003), No. 2., 287–303.
- [Ter00] T. Terasoma: An appendix to Endo’s paper, *Math. Ann.*, **316**(2000), 255–257.
- [TIB98] M. Teixidor-I-Bigas: Green’s Conjecture for the generic canonical curve, preprint (1998), Arxiv preprint math/9806017.
- [Tok92] H. Tokunaga: Two remarks on non-Galois triple coverings, *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, **13**(1992), 19–33.
- [TTZ05] S.-L. Tan, Y.-P. Tu, and A.-G. Zamora: On complex surfaces with 5 or 6 semistable singular fibers over \mathbb{P}^1 , *Math. Zeit.*, **249** (2005), 427–438.
- [Tuy07] Y. Tu: Surfaces of Kodaira dimension zero with six semistable singular fibers over \mathbb{P}^1 , *Mathematische Zeitschrift*, **257**(2007), 1–5.
- [Tyr68] G. N. Tyrina: Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points, *Func. Anal. Appl.*, **2**(1968), 324–332.
- [Uem99] K. Uematsu: Numerical classification of singular fibers in genus 3 pencils, *J. Math. Kyoto Univ.*, **39-4** (1999), 763–782.
- [Vie77] E. Viehweg: Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven, *J. Reine. Angew. Math.*, **293/294**(1977), 284–308.
- [Vie82] E. Viehweg: Vanishing theorems, *Journ. reine angew. Math.*, **335** (1982), 1–8.
- [VZ01] E. Viehweg, K. Zuo: On the isotriviality of families of projective manifolds over curves, *J. Alg. Geom.*, **10** (2001) 781–799.
- [VZ06] E. Viehweg, K. Zuo: Numerical bounds for semi-stable families of curves or of certain higher dimensional manifolds, *J. Alg. Geom.*, **15** (2006) 771–791.
- [Voj88] P. Vojta: Diophantine inequalities and Arakelov theory. In: Lang, S., *Introduction to Arakelov theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg -New York, 1988, pp. 155–178.
- [Wag70] P. Wagreich: Elliptic singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, **92**(1970), 419–454.
- [Wim95] A. Wiman: Ueber die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlechte=3, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen, *Bihang. Kengle. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, Stockholm, 1895–1896.
- [Win74] G. B. Winters: On the existence of certain families of curves, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 215–228.
- [Xia85] G. Xiao: Surfaces fibrées en courbes de genre deux, *Lect. Notes in Math.*, **1137** (1985) Springer-Verlag.

- [Xia86] G. Xiao: An example of hyperelliptic surfaces with positive index, 东北数学, **2**(3) (1986) 255–257.
- [Xi87a] G. Xiao: Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann., **276** (1987) 449–466.
- [Xi87b] G. Xiao: Hyperelliptic surfaces of general type with $K^2 < 4\chi$, Manuscripta. Math., **57** (1987) 125–148.
- [Xi87c] G. Xiao: Irregularity of surfaces with a linear pencil, Duke Math. Journal, **55**/3 (1987) 597–602.
- [Xia90] G. Xiao: On the stable reduction of pencils of curves, Math. Z., **203** (1990), 379–389.
- [Xia91] G. Xiao: π_1 for elliptic and hyperelliptic surfaces, Intern. I. Math., **2** (1991), 599–615.
- [Xia92] 肖刚: 代数曲面的纤维化, 上海科学技术出版社, (1992)
- [Yau79] S. S.-T. Yau: Normal two-dimensional elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., **254**(1979), 117–134.
- [Yau80] S. S.-T. Yau: On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., **257**(1980), 269–329.
- [Yau93] S. T. Yau: A splitting theorem and an algebraic geometric characterization of locally Hermitian symmetric spaces, Comm. Anal. Geom., **1** (1993), no. 3-4, 473–486.
- [Yu08] Fei Yu: The minimal number of singular fibers of a semistable pencil, Thesis of P.h.D, ECNU, 2008.
- [Zaa95] C. Zaal: Explicit complete curves in the moduli space of curves of genus three, Geometriae Dedicata, **56** (1995), 185–196.
- [Zha07] D.-Q. Zhang: Small bound for birational automorphism groups of algebraic varieties, (English summary) with an appendix by Yujiro Kawamata, Math. Ann., **339** (2007), no. 4, 957–975.

索引

- 0-极大截面, 110
 Σ -基变换, 10
 π -不变纤维, 21
 k -可分, 9
 m -连通除子, 110
 m -重对数典范映射, 28
 n -次根模型, 38
 n -次根纤维化, 11
 n -相切, 79
 1-2-3 猜想, 124

 Albanese 簇, 13
 Albanese 映射, 13
 Arakelov 不等式, 23
 Arbarello-Sernesi 模, 127

 Castelnuovo 引理, 110
 Clifford 指标, 126

 Dehn 扭转表示, 60, 62
 Deligne-Mumford 紧化, 66

 Gonality, 126
 Green 猜想, 128

 Harder-Narasimhan 滤过, 30
 Hirzebruch-Jung 链分支, 43
 Hirzebruch 曲面, 83
 Horikawa 数, 93, 95, 97
 Horikawa 指标, 129

 Isotrivial 纤维化, 13

 Kodaira-Parshin 构造, 12, 28, 48
 Koszul 复形, 127
 Koszul 上同调群, 127

 Lefschetz 纤维化, 66
 Leray 谱序列, 8

 Matsumoto-Montesinos 商, 63
 Miyaoka-Yau 不等式, 27
 Mordell-Weil 格, 134

 Mordell-Weil 群, 133
 Neron-Severi 群, 2, 81, 87
 Picard-Lefschetz 单值, 60, 65

 Vojta 不等式, 28

 Weierstrass 除子, 19

 Zariski 引理, 3

 半尾, 64
 半稳定层, 29
 半稳定模型, 38
 半稳定纤维, 11
 半稳定纤维化, 11
 半稳定约化, 11

 饱和化, 30
 饱和子层, 29
 本原闭包, 133
 本原子格, 133
 辫关系, 59
 标准数值分解, 123

 不变基变换, 21
 参考纤维, 65

 常模映射, 13
 超椭圆曲线族, 74
 超椭圆纤维化, 2, 87

 垂直部分, 36, 54
 垂直覆盖, 56
 垂直横截环路, 69
 戴德金和, 45
 戴德金互反律, 45, 53

 单值矩阵, 60, 65
 单值同胚, 65
 等奇异性形变, 67
 典范类不等式, 28

- 独立性条件, 9
 对合映射, 74
 对偶定理, 46
 对偶格, 132
 对偶模型, 38
 对数 Miyaoka-Yau 不等式, 28
 对数曲面, 28
 对数小平维数, 28
 多重结点, 68
 多重纤维, 3

 反格, 132
 分割图, 65
 分解序列, 110
 分裂形变, 67
 分裂族, 67
 符号差, 7

 复式对偶图, 19, 38
 负定, 30
 负定格, 132
 负定型, 63
 高度配对, 134
 格, 132

 规范模型, 89, 98

 核分支, 63, 66
 横截环路, 69

 弧, 64
 环绕数, 63
 基本闭链, 90, 97
 基变换, 10
 基变换不变量, 21

 极小模型, 38
 极小嵌入解消, 38
 极小正规交模型, 11, 38
 几何直纹面, 2, 81
 既约点, 111
 价, 61
 简单点, 60
 简单基点, 103

 简单奇点, 39, 91

 阶, 60
 截面, 1, 81
 解析类型, 123

 局部符号盈亏量, 51
 局部平凡纤维化, 13
 局部纤维化, 10

 可分离点, 65, 79
 可分裂, 69
 可忽略奇点, 71, 91

 裂变, 78
 零化环路, 58

 模不变量, 43
 模点, 66
 挠 2 商, 70

 平展覆盖, 54, 56
 奇异纤维, 1
 奇异纤维陈数, 41
 奇异纤维芽, 66
 奇异性指数, 92, 99

 曲线退化, 10, 65

 三点式纤维化, 2, 34, 100

 数值等价类群, 2, 81

 双边割线, 63, 67

 同痕等价, 59
 同痕类, 59
 椭圆闭链, 119
 椭圆尾, 119
 椭圆纤维化, 2, 84
 拓扑单值, 48, 65
 拓扑等价, 10
 拓扑指标, 7

 伪周期, 62
 伪周期映射, 62

- 稳定模型, 27
 稳定纤维, 11
 狭义格, 135
 纤维, 1
 纤维化, 1
 纤维芽, 10
 相对 ν -典范层, 6, 109
 相对不变量, 7
 相对典范层, 6
 相对典范除子, 6
 相对典范代数, 109
 相对典范映射, 9
 相对对偶层, 6
 相对对偶公式, 8
 相对分歧指数, 9, 82, 89
 相对极小模型, 4
 相对极小纤维化, 4
 相对相伴公式, 9
 相对映射类群, 59
 小平纤维化, 21, 100
 斜率, 21, 27, 29, 33
 斜率不等式, 33
 斜率等式, 130
 雅可比奇异纤维, 24
 映射类, 59
 映射类群, 59
 原子纤维, 67
 原子纤维完备组, 67
 允许割线组, 62
 真分裂族, 67
 整格, 132
 整体价, 62
 正表示, 60
 正定, 30
 正定格, 132
 正规交模型, 38, 66
 直接分裂形变, 67
 指标-行列式公式, 132
 重点, 60
 周期, 60
 周期映射, 60
 主分支, 43, 66
 子格, 132
 最后斜率, 30
 幺模, 132