

灾变论与奇点

报告人： 陆俊

二〇〇四年十二月

1 什么是灾变论

辩证法：量变到质变



突变现象



系统结构的稳定性



不连续现象

- 连续现象的研究基础——微积分——定量；
- 不连续现象——定性

• 灾变论 (catastrophe theory)
描述和研究不连续现象的数学理论

• 创始人 R.Thom (1972)

• 又称突变论、剧变论

• 灾变现象随处可见：

- 物理学：波的破碎、桥梁的倒塌
- 生物学：细胞分裂、种群的消长
- 社会学：社会动荡、股票的涨跌
- 心理学：习惯形成（变坏容易变好难）

2 灾变论的主要思想及特色

- 要研究的系统往往没有精确的理论模型（如社会科学）
- 不需要了解系统的特殊内在机制如何作用

• 灾变论的思想形成：

灾变现象 \Rightarrow 势函数（如势能） \Rightarrow
临界点分类（如平衡点） \Rightarrow 临界点
的不连续性态（如不稳定平衡）

灾变现象 $\xrightarrow{\text{归结为}}$ 奇点性态（实代数几何）

- R.Thom (1972) 推导了著名的七种初等灾变奇点（换句话说，很多灾变现象可以用这七种奇点来描述）

3 什么是奇点

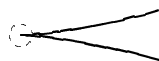
• 曲线上的奇点

设曲线的方程是 $f(x, y) = 0$ ，曲线上的奇点就是满足：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

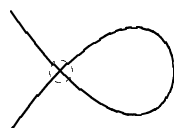
的点。

$$x^3 - y^2 = 0$$



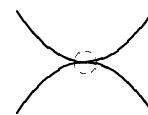
尖点

$$x^2(1-x) - y^2 = 0$$



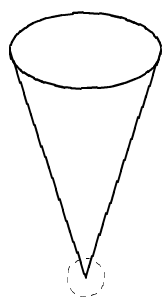
结点

$$x^2 - y^4 = 0$$



切点

• 表面上的奇点（类似）

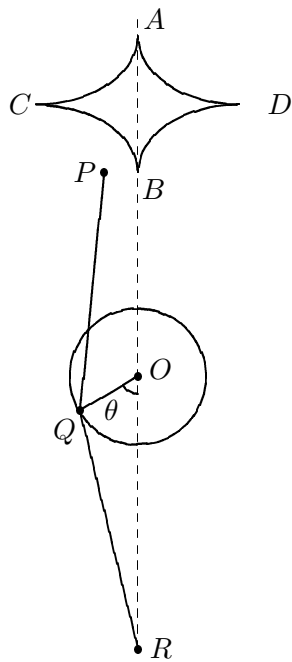


锥点

$$z^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

4 灾变的经典案例剖析

• 齐曼(Zeeman,1972)灾变结构



O : 中心固定圆盘, $OQ = 0.5$

Q : 圆盘上固定点

R : 桌面上固定点 $OR = 2$

P : 自由点

$QR(QP)$: 两条橡皮筋, 原始长度 = 1

\widetilde{ABCD} : 引起跳跃的 P 点轨迹

- 突跳现象: 当 P 穿过轮廓线 \widetilde{ABCD} 时, Q 点发生跳跃。
- 滞后现象: 当 P 垂直于对称轴 (从左到右) 第一次穿过轮廓线时, 没有发生跳跃。
- 发散现象: 当 P 进入轮廓线内时, Q 存在两种可能的稳定位置 (在对称轴左边或右边)
——取决于 P 从哪一边进入。

- 系统势能函数

$$V(\theta) = \frac{1}{2}\mu((r_1 - 1)^2 + (r_2 - 1))^2$$

这里 r_i 是两挑橡皮筋长度， μ 是弹性系数， θ 是 Q 的转角。

适当的坐标变换及泰勒展开（关于 θ 在原点附近）

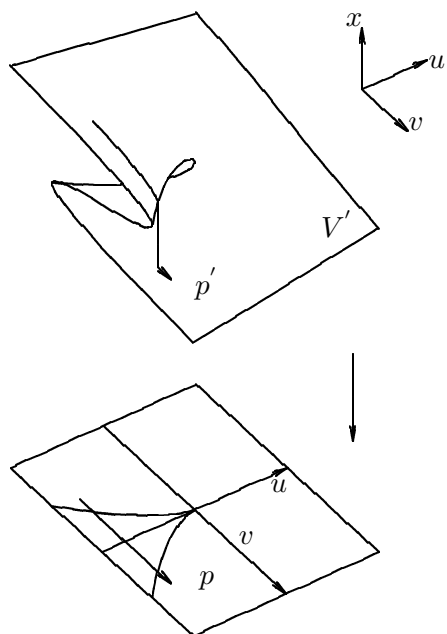
$$V \approx x^4 + ux^2 + vx$$

这里主变量 x 和转角 θ 有关；控制变量 (u, v) 和 P 的位置有关。

- 临界点就是满足

$$\frac{dV}{dx} = 4x^3 + 2ux + v = 0$$

的点。



V' : 平衡面, 即 $\frac{dV}{dx} = 4x^3 + 2ux + v = 0$ 定义的曲面

P' : P 在投影映射下的原像

P (P') 点沿着道路前后移动

曲面大致有三层: 顶叶、中叶、底叶

分歧线: 相邻叶交界处的边缘线(投影到 uv 平面)

- 突跳现象: 当 p' 到达边缘处, 突然下落到底叶
 - 滞后现象: p' 不能按原路返回顶叶(它必须先翻过中叶)
 - 发散现象: 当 P 进入轮廓线内时, p' 或者在顶叶或者在底叶
- 取决于 P 从哪一边进入。

谢 谢