代数几何讨论班备用稿

Hodge 理论初级教程

陆　　俊

华东师范大学数学系

二零一一年二月

前　言

本讲义在 [Voi02, Voi03], [CMP03], Mainz 大学讨论班教材《混合 Hodge 结构与奇点》及哥伦比亚大学 Hodge 理论讨论班笔记等文献的基础上进行了整理, 对初学者难以理解的部分内容作细致的解读, 并且增加了一些实例, 帮助读者更好理解. 为方便读者查阅相关概念或结论等, 书后附有索引及参考文献. 此外, 每一章节末尾配有若干习题.

Hodge 理论博大精深, 要掌握好它绝非一朝一夕之事. 事实上, 本讲义目前所包含的内容只不过是整个 Hodge 理论中的冰山一角. 这门课程对读者的微分几何基础有一定的要求. 我们默认读者已具备了一定的微分几何基础. 如果读者需要重新回顾这方面的内容, 可以参考 [BT82] [Che01] [Hir76] [Rha84] 等经典教材.

讲义的安排大致与 [Voi02, Voi03] 主线相当. 我们在第一章节罗列了所需要的大部分基础知识. VHS 的相关课题因为涉及其他章节的知识, 所以出于教学顺序的考虑, 被拆分成两章来处理. MHS 部分此次未能及时整理完成, 只介绍了少量最基本的内容.

由于作者并非 Hodge 理论方面专家, 这本讲义也是在学习的同时写成的, 所以对该理论的认识难免有所偏颇且不够深刻, 不可避免存在诸多错误. 希望读者能够一一指出, 今后将逐步修正. 此外, 因为时间仓促, 有许多重要课题未能及时整理出来, 一些有趣的计算实例也未能全部收入, 文献收集尚欠完整等等, 总之留下诸多遗憾. 希望今后有机会能逐步完善它.

作者在这里首先要感谢左康教授在相关研究中所给予的指导; 其次感谢好友杜荣与作者进行了多次讨论, 使作者对某些概念及结论有了更为准确深刻的理解. 同时作者要感谢好友于飞、张通、叶飞等提供了许多重要的文献资料和有益的观点. 最后, 作者也十分感谢同事瞿振华、谢兵永以及各位师弟对这门课程的支持.

陆俊

2011 年 8 月 18 日于

华东师范大学数学系

目 录

第一章　基础知识

1.1　张量代数与空间结构

在这一节中, 我们回顾向量空间上的张量代数以及度量结构. 这些内容可以自然过渡到对一般流形及向量丛的整体性讨论上.

设 V 是 n 维实向量空间, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是它的一组基. 设 V^* 是其对偶空间, $\{e^{*j}\}_{j=1}^n$ 是相应的对偶基, 即满足 $e^{*j}(e_i)=\delta_i^j$.

$$V_s^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\cdots\otimes V^*}_{s}.$$

中的元素称作 (r,s) 型张量. V_0^r (相应地, V_s^0) 中的元素称为 r 阶反变张量 (相应地, s 阶协变张量). 张量实际上只是向量和矩阵概念的直接推广. 利用张量积, 我们可诱导 V 的张量代数

$$T(V)=\bigoplus_{r\geq 0}V_0^r.$$

在很多情况下–比如处理缩并运算时, 将 V_0^r (相应地, V_s^0) 中的元素视作 V^* (V) 上的 r (s) 重线性函数会很方便. V_0^r 包含两个重要的线性子空间, 它们分别是对称空间

$$S^r(V)=\{x\mid\sigma x=x,\ \forall\sigma\in S_r\}$$

及反对称空间

$$\wedge^r V=\{x\mid\sigma x=sgn(\sigma)\cdot x\ \forall\sigma\in S_r\},$$

这里 S_r 是 $\{1,2,\cdots,r\}$ 上的 r 阶置换群, $sgn(\sigma)$ 是置换 σ 的符号; 如果 $x=v_1\otimes\cdots v_r$, 那么规定 $\sigma x:=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(r)}$.

$\wedge^r V$ 中有如下元素

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}:=\sum_{\sigma\in S_r}sgn(\sigma)\cdot\sigma(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}).$$

易知 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\}_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}$ 构成了 $\wedge^r V$ 的一组基. 我们可以诱导双线性映射 (称作外积)

$$\wedge:\wedge^r V\times\wedge^k V\longrightarrow\wedge^{r+k}V,$$

即规定

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r})\wedge(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}):=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\wedge e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k},$$

它满足结合律及以下的反交换律:

$$v\wedge w=(-1)^{rk}w\wedge v,\ \ v\in\wedge^r V,\ w\in\wedge^k V.$$

外积给出了 V 的外代数

$$\wedge(V)=\bigoplus_{r\geq 0}\wedge^r V.$$

如前所述, $\wedge^r V$ 中的元素可以看作 V^* 上的 r 重线性函数. 任取 $v^{*1},\cdots,v^{*r}\in V^*$, 我们有

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(v^{*1},\cdots,v^{*r})=\begin{vmatrix} e_{i_1}(v^{*1}) & \cdots & e_{i_1}(v^{*r}) \\ e_{i_2}(v^{*1}) & \cdots & e_{i_2}(v^{*r}) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{i_r}(v^{*1}) & \cdots & e_{i_r}(v^{*r}) \end{vmatrix}$$

特别地, 我们有

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(e^{*j_1},\cdots,e^{*j_r})=\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r},$$

这里 $\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}$ 是 Kronecker 符号, 它的取值规定如下: 如果 $i_1,\cdots,i_r$ 两两不同, 且 $j_1,\cdots,j_r$ 是前者的偶 (相应地, 奇) 置换, 那么 $\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}=1$ (相应地, -1); 其余情形皆取值 0.

例 1.1.1 在许多情形中, 人们常会遇到 2 阶张量积–比如度量或复结构. 2 阶张量有许多种不同的看法 (物理中称作"张量面面观"), 在处理各种问题时如能灵活运用, 将会使讨论大为简化.

(a) 设 $\xi\in V^0_2$, 写为 $\xi=\xi_{ij}e^{*i}\otimes e^{*j}$ (这里我们采用了指标求和记法, 下同). 显然, ξ 也可以视作矩阵 $X=(\xi_{ij})_{1\le i,j\le n}$. X 是 (反) 对称矩阵当且仅当 $\xi\in S^2V$ $(\wedge^2V)$. 令

$$A=\frac{1}{2}(X+X^t),\quad B=\frac{1}{2}(X-X^t).$$

易知 A (相应地, B) 是对称 (相应地, 反对称) 矩阵, 且 $X=A+B$. 用张量语言来说, ξ 可以分解为对称张量和反对称张量之和 (事实上, 该分解是唯一的).

(b) 任取 $v\in V$, 由缩并运算可给出线性映射

$$\Phi:V\longrightarrow V^*, v\longrightarrow \xi_{ij}e^{*i}(v)\cdot e^{*j}.$$

特别地, $\Phi(e_i)=\xi_{ij}e^{*j}$. 当然, 我们也可以通过对第二个分量缩并得到另一线性映射. 一般这两个映射不相同, 除非 ξ 是对称张量. 反过来, 给定 V 到 V^* 的线性映射, 自然确定了一个 $(0,2)$ 型张量.

如果 X 是可逆矩阵, 设 $X^{-1}=(\xi^{ij})_{1\le i,j\le n}$ (满足 $\xi_{ij}\xi^{jk}=\delta^k_i$), 则可构造 $(2,0)$ 型张量 $\eta=\xi^{ij}e_i\otimes e_j\in V^2_0$. 类似地, 我们有诱导的线性映射

$$\Psi:V^*\longrightarrow V, w^*\longrightarrow \xi^{ij}e_i(w^*)\cdot e_j.$$

特别地, $\Phi(e^{*i})=\xi^{ij}e_j$. 容易验证 $\Phi\circ\Psi=id_{V^*}$, $\Psi\circ\Phi=id_V$. 有时我们称这两个映射为指标升降.

(c) ξ 也可以看成是 V 上的一个配合 (即双线性函数) $\langle,\rangle:V\times V\to\mathbb{R}$, 使得 $\langle e_i,e_j\rangle=\xi_{ij}$ $(1\le i,j\le n)$. 如果 ξ 是正定对称张量积 (即矩阵 X 是正定对称矩阵), 那么 ξ 等价于给出了 V 上的内积. 此时我们显然有指标升降.

(d) 设 $\omega=\omega^i_je_i\otimes e^{*j}\in V^1_1$. 我们类似可定义线性变换 $\phi:V\to V$ 及 $\psi:V^*\to V^*$. 反过来, 这样的线性变换也确定了一个 $(1,1)$ 型张量. ■

引理 1.1.1 *假设 $\xi=\xi_{ij}e^{*i}\otimes e^{*j}\in V^0_2$ 给出了 V 上的内积, 那么它诱导了 V^* 上的内积*

$$\langle e^{*i},e^{*j}\rangle=\xi^{ij},$$

这里 $G=(\xi^{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是矩阵 $X=(\xi_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 的逆.

进一步, 它也诱导了 $\wedge^r V^*$ 上的内积

$$\langle e^{*i_1}\wedge\cdots\wedge e^{*i_k}, e^{*j_1}\wedge\cdots\wedge e^{*j_k}\rangle := \det(\xi^{i_t j_s})_{1\le t,s\le k}.$$

特别地, $\langle e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}, e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}\rangle = \det G$.

引理 1.1.2 在引理 1.1.1 的条件下, 令

$$\mathrm{Vol} = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\cdot e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}.$$

那么对任何 $\alpha\in\wedge^r V^*$, 存在唯一的 $\gamma\in\wedge^{n-r}V^*$, 使得对任何 $\beta\in\wedge^r V^*$ 都有

$$\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol} = \beta\wedge\gamma. \tag{1-1}$$

这样的 γ 记为 $*\alpha$. 因此我们有自然同构

$$*:\wedge^r V^*\to\wedge^{n-r}V^*.$$

证明 不失一般性, 我们假设 $\{e^{*i}\}_{i=1}^n$ 是 V^* 在给定内积下的一组标准正交基. 这样 $\mathrm{Vol} = e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}$. 我们定义

$$*(e^{*i_1}\wedge\cdots\wedge e^{*i_r}) := \mathrm{sgn}(i_1\cdots i_r j_1\cdots j_{n-r})\cdot e^{*j_1}\wedge\cdots\wedge e^{*j_{n-r}} \tag{1-2}$$

这里 $i_1<\cdots<i_r$ 及 $j_1<\cdots<j_{n-r}$, 且 $i_t\neq j_s$ $(1\le s\le r,\ 1\le t\le n-r)$. 以下验证这样定义的 $*$ 满足式 (1-1). 不失一般性, 设

$$\alpha = e^{*i_1}\wedge\cdots\wedge e^{*i_r},\ \ \beta = e^{*u_1}\wedge\cdots\wedge e^{*u_r}.$$

于是有

$$\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol} = \begin{cases} e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}, & (i_1\cdots i_r) = (u_1\cdots u_r),\\ 0, & (i_1\cdots i_r)\neq(u_1\cdots u_r)\end{cases}$$

以及

$$\beta\wedge *\alpha = \begin{cases} e^{*1}\wedge\cdots\wedge e^{*n}, & (i_1\cdots i_r) = (u_1\cdots u_r),\\ 0, & (i_1\cdots i_r)\neq(u_1\cdots u_r)\end{cases}$$

最后验证唯一性. 设 γ,γ' 满足式 (1-1), 则 $\beta\wedge(\gamma-\gamma')=0$, 因而由 β 的任意性推知 $\gamma=\gamma'$.■

上述 Vol 称体积元, $*$ 称为 Hodge 算子. 后者是三维向量叉积概念的推广. 它们有以下性质.

推论 1.1.1 设 $\alpha,\beta\in\wedge^r V^*$, 那么

(1) $\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol} = \beta\wedge *\alpha = \alpha\wedge *\beta$,

(2) $*1 = \mathrm{Vol}$,

(3) $\langle *\alpha, *\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$,

(4) $**\alpha = (-1)^{r(n-r)}\alpha$.

证明 前三个结论是式 (1-1) 及式 (1-2) 的直接推论. 下面验证 (4).

$$\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol} = \langle *\alpha, *\beta\rangle\mathrm{Vol} = *\beta\wedge **\alpha = (-1)^{r(n-r)} **\alpha\wedge *\beta.$$

另一方面, $\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol} = \alpha\wedge *\beta$. 因此,

$$\alpha\wedge *\beta = (-1)^{r(n-r)} **\alpha\wedge *\beta.$$

由 β 的任意性立得 (4). ■

如果存在一个线性变换 $J: V \to V$ 使得 $J^2 = -id_V$, 那么我们称 J 是 V 的复结构, 它可以视作 $(1,1)$ 型张量. J 也自然诱导了 V^* 的复结构. 设 A 是 J 在 V 的基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 上对应的矩阵, 则 A^t 恰好是 J 在 V^* 的对偶基底 $\{e^{*i}\}_{i=1}^n$ 上对应的矩阵. 易知 $A^2 = -I$, 其特征值为 $\pm i$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$ 是偶数.

注 1.1.1 如果 W 是复 m 维向量空间, 则它作为实 $2m$ 维向量空间有自然的复结构, 即 $Jw := iw$, $w \in W$. 反过来, 一个带有复结构 J 的实 $2m$ 维向量空间 V, 通过定义 $i \cdot v := Jv$, $v \in V$, 即成为复 m 维向量空间. ■

考虑 V^* 的复化空间 $V^* \otimes \mathbb{C}$, 那么 J 可以延拓到 $V^* \otimes \mathbb{C}$ 上, 即对任意复值泛函 $\lambda = \alpha + i\beta \in V^* \otimes \mathbb{C}$, 规定 $J\lambda := J\alpha + iJ\beta$. 设 $V_{\mathbb{C}}$ (相应地, $\overline{V}_{\mathbb{C}}$) 是 $V^* \otimes \mathbb{C}$ 中对应特征值 i (相应地, $-i$) 的复特征子空间, 它们都是复 m 维空间, 这里 $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$.

引理 1.1.3 *设 V 有复结构 J, 那么 $V^* \otimes \mathbb{C} = V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{V}_{\mathbb{C}}$, 且 $V_{\mathbb{C}}$ 与 $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ 中的元素在复共轭下一一对应. 反之, 如果 V 是偶数维实空间, 且 $V^* \otimes \mathbb{C}$ 有满足以上条件的直和分解, 那么它必有唯一与此相容的复结构.*

今取 $V_{\mathbb{C}}^*$ 中的基底 $\lambda^j := e^{*j} + ie^{*m+j}$ $(j = 1, \cdots m)$, 这里 $\dim_{\mathbb{R}} V^* = 2m$. 由引理 1.1.3 知 $\{\lambda^j, \bar{\lambda}^j\}_{j=1}^m$ 构成 $V^* \otimes \mathbb{C}$ 的基. 因 $J\lambda^j = i \cdot \lambda^j$, 故得

$$Je^{*j} = -e^{*m+j}, \;\; Je^{*m+j} = e^{*j}.$$

对偶到 V 的基底上, 则有

$$Je_j = e_{m+j}, \;\; Je_{m+j} = -e_j.$$

推论 1.1.2 *设 J 是 V 的复结构, 那么在上述记号下, V 有基底 $\{e_j, Je_j\}_{j=1}^m$, 这里 $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$. 进一步, 我们有*

$$\bigwedge_{1 \le j \le m} (e^{*j} \wedge Je^{*j}) = \left(-\frac{i}{2}\right)^m \bigwedge_{1 \le j \le m} (\lambda^j \wedge \bar{\lambda}^j).$$

上述的基在适当排序下, 我们可以将 $J: V \to V$ 对应的矩阵写为

$$A = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

引理 1.1.3 的直和分解也能推广到 $\wedge^r(V^* \otimes \mathbb{C})$ 上, 即

$$\wedge^r(V^* \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} (\wedge^p V_{\mathbb{C}}) \wedge (\wedge^q \overline{V}_{\mathbb{C}}).$$

有时我们简记 $V_{\mathbb{C}}^{p,q} := (\wedge^p V_{\mathbb{C}}) \wedge (\wedge^q \overline{V}_{\mathbb{C}})$. $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ 中的元素称为 (p,q) *次外形式*.

设 V 有复结构 J, V 上的 Hermite 结构 H 是满足以下条件的二元复值函数 $H: V \times V \to \mathbb{C}$:
(1) $H(\alpha u + \beta v, w) = \alpha H(u,w) + \beta H(v,w)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$,
(2) $H(u,v) = \overline{H(v,u)}$,

(3) $H(Ju,v)=iH(u,v)$.
如果 H 还满足以下条件则称为正定的,
(4) $H(u,u)>0$, $u\neq 0$.

我们写 $H=G-iK$. 由性质 (2), 有

$$G(u,v)=G(v,u),\quad K(u,v)=-K(v,u).$$

由性质 (3), 有

$$G(u,v)=-K(Ju,v),\quad K(u,v)=G(Ju,v)$$

以及 J 不变性

$$G(u,v)=G(Ju,Jv),\quad K(u,v)=K(Ju,Jv).$$

G (K) 是 (反) 对称实值双线性函数, 即对应 V 上 $(0,2)$ 型 (反) 对称张量. 结合性质 (4) 可知, H 是正定的当且仅当 G 给出了内积. K 是实值的 $(1,1)$ 次形式, 即 $K\in V_{\mathbb{C}}^{1,1}\cap\wedge^2V$, 我们称之为 H 的 Kähler 形式.

注 1.1.2 (1) 对复 m 维向量空间 W, 因为它作为实 $2m$ 维空间具有自然的复结构 (见注记 1.1.1), 所以其上的 Hermite 结构等价于满足以下条件的复值函数

$$H(\alpha u+\beta v,w)=\alpha H(u,w)+\beta H(v,w),\quad H(u,v)=\overline{H(v,u)},\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \forall u,v,w\in W.$$

(2) 一个带有复结构 J 的实向量空间上如有满足 J 不变性的实值对称双线性函数, 则显然可以诱导 Hermite 结构.
(3) 对任何实向量空间 V, 若 V 上有实值对称双线性函数 $\langle,\rangle$, 那么 $V\otimes\mathbb{C}$ 上自然诱导 Hermite 结构:

$$\langle\alpha_1+i\beta_1,\alpha_2+i\beta_2\rangle:=(\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\langle\beta_1,\beta_2\rangle)+i(\langle\beta_1,\alpha_2\rangle-\langle\alpha_1,\beta_2\rangle),\ \ \alpha_j,\beta_j\in V.$$

如前所述, H 正定当且仅当 $\langle,\rangle$ 是内积. ■

回顾 $V_{\mathbb{C}}$ 中的基底 $\lambda^j:=e^{*j}+ie^{*m+j}$ $(j=1,\cdots m)$.

引理 1.1.4 设 V 有复结构 J 和 Hermite 结构 $H=G-iK$, $\dim_{\mathbb{R}}V=2m$, 那么
(1) (以下采用指标求和记法)

$$H=h_{j\bar{k}}\lambda^j\otimes\bar{\lambda}^k,$$
$$K=\frac{i}{2}\cdot h_{j\bar{k}}\lambda^j\wedge\bar{\lambda}^k$$

这里系数 $h_{j\bar{k}}=H(e_i,e_k)$ 满足 $\bar{h}_{j\bar{k}}=h_{k\bar{j}}$.
(2) 假设 H 是正定的, 那么内积 G 诱导了 $\wedge^rV^*\otimes\mathbb{C}$ 上的正定 Hermite 结构, 记作h_r. H 也诱导了 $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ 上的正定 Hermite 结构, 记为 $h^{p,q}$. 它们满足关系式

$$2^rh_r=\sum_{p+q=r}h^{p,q},\tag{1-3}$$

上式右边求和号表示直和.

进一步, 由内积 G 诱导的 Hodge $*$ 算子可以自然延拓到 $\wedge^r(V^*\otimes\mathbb{C})$ 上. 我们有

$$\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol}=\alpha\wedge\overline{*\beta},\ \ \alpha,\beta\in\wedge^r(V^*\otimes\mathbb{C}).$$

证明 (1) 来自于直接计算.

以下证 (2). 由注记 1.1.2(3), G 诱导了 $V\otimes\mathbb{C}$ 上的正定 Hermite 结构 H_1, 从而类似引理 1.1.1, 我们也得到 $V^*\otimes\mathbb{C}$ 上的正定 Hermite 结构 h_1. 由此也得到 Hodge 算子的延拓.

另一方面, J 在 $V\otimes\mathbb{C}$ 上也诱导了特征子空间分解

$$V\otimes\mathbb{C}\cong W^{1,0}\oplus W^{0,1}.$$

$W^{1,0}$ 的基底可以选为

$$\theta_i:=\frac{1}{2}(e_i-iJe_i)$$

它们恰好和 $V^{1,0}$ 的基底 λ^i 对偶. 利用 $\mathbb{R}$ 线性同构

$$Re:W^{1,0}\longrightarrow V,\qquad \theta_i\to\frac{1}{2}e_i.$$

我们可以自然诱导 $W^{1,0}$ 上的正定 Hermite 结构 $H^{1,0}$. 相应地, $W^{0,1}$ 有正定 Hermite 结构 $H^{0,1}$. 通过对偶及张量积, 我们可以分别诱导 $\wedge^rV^*\otimes\mathbb{C}$ 及 $V_{\mathbb{C}}^{p,q}=\wedge^pV_{\mathbb{C}}\otimes\wedge^q\overline{V}_{\mathbb{C}}$ 上的正定 Hermite 结构, 分别记作 h_k 及 $h^{p,q}$.

为证式 (1-3), 我们只需要考虑 $r=1$ 情形即可. 这时由直接计算可得

$$\frac{1}{2}H_1=H^{1,0}\oplus H^{0,1}.$$

将该式对偶到 $V^*\otimes\mathbb{C}$ 上即得结论. ■

推论 1.1.3 *在引理 1.1.4 的条件下, 复化的 Hodge 算子诱导了同构*

$$*:V^{p,q}\to V^{m-q,m-p}.$$

假设 $h(e_i,e_j)=\delta^i_j$ $(1\le i,j\le m)$, 则 Hodge 算子的具体表达式为

$$\begin{aligned}*(\lambda^{i_1}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_p}\wedge\bar\lambda^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar\lambda^{j_q})&=2^{p+q}\cdot(\frac{i}{2})^m\cdot(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+mp}\\ &\cdot sgn(i_1\cdots i_p\alpha_1\cdots\alpha_{m-p})\cdot sgn(j_1\cdots j_q\beta_1\cdots\beta_{m-q})\lambda^{\beta_1}\wedge\cdots\lambda^{\beta_{m-q}}\wedge\bar\lambda^{\alpha_1}\wedge\cdots\bar\lambda^{\alpha_{m-p}}\end{aligned}$$

特别地, $*^2=(-1)^{p+q}$.

本节最后考虑一个经典的例子.

例 1.1.2 考虑复平面 $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ 一点处的切空间 $T=\mathbb{R}\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\rangle$. 它的余切空间 T^* 则由对偶基 dx,dy 生成.

(1) T 上有自然的复结构 (等价于将切向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$)

$$J\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}.$$

因而余切空间上也有相应的复结构 $Jdx=-dy$.

(2) T 上有自然的 J 不变内积

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=1,\quad\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle=0.$$

对偶到余切空间 T^* 上则有内积 $\langle dx,dx\rangle=\langle dy,dy\rangle=1$, $\langle dx,dy\rangle=0$. 我们可以定义体积元 $\mathrm{Vol}=dx\wedge dy$ 及 Hodge 算子 $*dx=dy$, $*dy=-dx$.

(3) 考虑复化切空间 $T \otimes \mathbb{C}$, 则它作为复 2 维向量空间由以下两个元素生成

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

复化余切空间 $T^* \otimes \mathbb{C}$ 的对偶基为

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

复结构可以延拓到 $T^* \otimes \mathbb{C}$ 上, 即 $Jdz = idz$, $Jd\bar{z} = -id\bar{z}$, 因此构成特征子空间的直和分解

$$T^* \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1},$$

这里 $T^{1,0} = \mathbb{C}\langle dz \rangle$, $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}} = \mathbb{C}\langle d\bar{z} \rangle$.

(4) T 的复结构 J 及自然内积诱导了其上的正定 Hermite 结构 $H = dz \otimes d\bar{z}$, 亦即

$$H\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = H\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 1, \quad H\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \overline{H\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)} = i.$$

它的 Kähler 形式为 $K = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$.

对偶到余切空间 T^* 上则有诱导的正定 Hermite 结构 $h = 4\frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, 即

$$h(dx, dx) = h(dy, dy) = 1, \quad h(dx, dy) = \overline{h(dy, dx)} = i.$$

(5) T 的自然内积诱导了复化切空间上的正定 Hermite 结构 $H_1 = \frac{1}{2} dz \otimes dz + \frac{1}{2} d\bar{z} \otimes d\bar{z}$, 即

$$H_1\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = H_1\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}, \quad H_1\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = H_1\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = 0.$$

$W^{1,0} = \mathbb{C}\langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle \cong_{\mathbb{R}} V$ (相应地, $W^{1,0}$) 上有正定 Hermite 结构 $H^{1,0} = \frac{1}{4} dz \otimes dz$ (相应地, $H^{0,1} = \frac{1}{4} d\bar{z} \otimes d\bar{z}$).

H_1 又进一步诱导了复化余切空间 $T^* \otimes \mathbb{C}$ 上的正定 Hermite 结构 $h_1 = 2\frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 使得

$$h_1(dz, dz) = h_1(d\bar{z}, d\bar{z}) = 2, h_1(dz, d\bar{z}) = h_1(d\bar{z}, dz) = 0.$$

另一方面, $H^{1,0}$ (相应地, $H^{0,1}$) 诱导了 $V^{1,0}$ (相应地, $V^{0,1}$) 上的正定 Hermite 结构 $h^{1,0} = 4\frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$ (相应地, $h^{0,1} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

(6) $*dz = *(dx + idy) = dy - idx = -idz$. 同理 $*d\bar{z} = id\bar{z}$. 此外, 我们有

$$*(dz \wedge d\bar{z}) = -2i * (dx \wedge dy) = -2i,$$

以及

$$*1 = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

1.2 L^2 度量与微分算子

这一节中, 我们总假设 X 是 n 维紧黎曼流形, $\Omega^k_{X,\mathbb{R}}$ 是 X 上的 k 次微分形式向量丛, $A^k(X)$ 是其 $\mathcal{C}^\infty$ 整体截面空间. 设 $\Omega^k_{X,x}$ 是在点 $x \in X$ 处的 k 次微分形式全体.

设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $\Omega_{X,x}$ 的一组基, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ 是黎曼度量. 由引理 1.1.1, 我们可以自然诱导

$\Omega^k_{X,x}$ 上的黎曼内积以及体积元

$$\mathrm{Vol} = \frac{1}{\sqrt{G}} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

这里 $G = \det(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

今取整体截面 $\alpha, \beta \in A^k(X)$, 利用上述黎曼内积可定义 X 上的函数

$$\langle \alpha, \beta \rangle : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \to \langle \alpha_x, \beta_x \rangle,$$

这里 $\alpha_x(\beta_x)$ 指 $\alpha(\beta)$ 在点 x 处对应的形式. 这样, 我们可结合积分运算定义所谓的 L^2 度量

$$(\alpha, \beta)_{L^2} := \int_X \langle \alpha, \beta \rangle \mathrm{Vol} \tag{1-4}$$

由引理 1.1.2, 我们有

引理 1.2.1 Hodge $*$ 算子诱导了自然同构

$$* : A^k(X) \to A^{n-k}(X).$$

使得对任何 $\alpha, \beta \in A^k(X)$, 使得对任何 $x \in X$ 都有

$$\langle \alpha_x, \beta_x \rangle \mathrm{Vol}_x = \beta_x \wedge *\alpha_x.$$

Hodge 算子给出了自然同构 $* : \Omega^k_X \cong \Omega^{n-k}_X$. 现在式 (1-4) 也可以写为

$$(\alpha, \beta)_{L^2} := \int_X \beta \wedge *\alpha.$$

利用 Hodge 算子, 我们进一步可定以所谓的余微分算子

$$d^* := (-1)^k *^{-1} d* : A^k(X) \longrightarrow A^{k-1}(X).$$

由上面的引理, $d^* = (-1)^{nk+n+1} * d*$.

引理 1.2.2 设 $\alpha \in A^{k-1}(X)$, $\beta \in A^k(X)$. 我们有
(1) $d^* d^* = 0$,
(2) $(\alpha, d^*\beta)_{L^2} = (d\alpha, \beta)_{L^2}$,
(3) $\mathrm{Im} d \cap \mathrm{Ker} d^* = \{0\}$, $\mathrm{Im} d^* \cap \mathrm{Ker} d = \{0\}$.

证明 (1) 对任何 $\gamma \in A^k(X)$, 有

$$d^* d^* \gamma = (-1)^{k-1} *^{-1} d * (d^* \gamma) = (-1)^{k-1} *^{-1} d * ((-1)^k *^{-1} d*)\gamma = - *^{-1} dd * \gamma = 0.$$

(2) $d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d*\beta$. 对上式两边取积分, 则左边等于 $\int_X d(\alpha \wedge *\beta) = 0$, 右边等于

$$\begin{aligned}
&\int_X d\alpha \wedge *\beta + \int_X (-1)^{k-1} \alpha \wedge *\beta \\
=&(d\alpha, \beta)_{L^2} + (-1)^{k-1} \int_X \alpha \wedge (-1)^k * d^*\beta \\
=&(d\alpha, \beta)_{L^2} - \int_X \alpha \wedge *d^*\beta \\
=&(d\alpha, \beta)_{L^2} - (\alpha, d^*\beta).
\end{aligned}$$

这就证明了 (2).

(3) 设 $\alpha \in A^k(X)$, 使得 $d\alpha \in \mathrm{Ker}d^*$, 即 $d^*d\alpha = 0$. 于是 $(d\alpha, d\alpha) = (\alpha, d^*d\alpha) = 0$. 这就推出 $d\alpha = 0$, 即 $\mathrm{Im}\alpha \cap \mathrm{Ker}d^* = \{0\}$. 同理可证另一关系式. ■

注 1.2.1 考虑复化从 $\Omega^k_{X,\mathbb{C}} = \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. 由引理 1.1.4, Hodge $*$ 算子可以自然延拓其上. 具体言之, 对任何 $\alpha, \beta \in A^k_{\mathbb{C}}(X)$, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 延拓为 $\Omega^k_{X,\mathbb{C}}$ 上的 Hermite 度量, 我们有

$$\langle \alpha_x, \beta_x \rangle \mathrm{Vol}_x = \alpha_x \wedge \overline{*\beta_x},\ \forall x \in X.$$

利用 Hodge 算子, 我们可以进一步定义著名的*拉普拉斯算子*

$$\Delta_d := dd^* + d^*d.$$

$\mathrm{Ker}\Delta_d$ 中的元素称为 Δ_d-*调和形式*.

命题 1.2.1 设 $\alpha, \beta \in A^k(X)$, 那么我们有

(1) (自伴性) $(\alpha, \Delta_d\beta)_{L^2} = (\Delta_d\alpha, \beta)_{L^2}$,

(2) $*\Delta_d = \Delta_d *$,

(3) $(\alpha, \Delta_d\alpha)_{L^2} = (d\alpha, d\alpha)_{L^2} + (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2}$,

(4) $\mathrm{Ker}\Delta_d = \mathrm{Ker}d \cap \mathrm{Ker}d^*$.

证明 (1) 和 (3) 是引理 1.2.2 (2) 的直接推论.

注意到

$$*\Delta_d\alpha = *dd^*\alpha + *d^*d\alpha = (-1)^{nk+n+1} * d * d * \alpha + (-1)^{k+1} d * d\alpha.$$

另一方面

$$\Delta_d * \alpha = dd^* * \alpha + d^*d * \alpha = (-1)^{nk+1} d * d * *\alpha + (-1)^{nk+n+1} * d * d * \alpha.$$

由此即得 (2).

由拉普拉斯算子的定义, $\mathrm{Ker}d \cap \mathrm{Ker}d^* \subseteq \mathrm{Ker}\Delta_d$. 又由 (3), 则得 $\mathrm{Ker}\Delta_d \subseteq \mathrm{Ker}d \cap \mathrm{Ker}d^*$. ■

例 1.2.1 设 $X = \mathbb{R}^n$ 的坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$. 它具有标准常数度量 $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^n dx_i^2$. 容易计算

$$d^*(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}) = -\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} dx_{i_1} \wedge \cdots \widehat{dx_{i_k}} \cdots \wedge dx_{i_r},$$

这里 $\widehat{dx_{i_k}}$ 表示去掉项 dx_{i_k}. 因而由直接计算可知 (留给读者验证), 对 $\omega = \sum\limits_{|I|=q} f_I dx_I$ 有

$$\Delta\omega = -\sum_{i,I} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i^2} dx_I. \tag{1-5}$$

今取 $n = 3$ 详细计算各阶微分式的微分与余微分运算. 我们设 $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ 是梯度算子, $d\boldsymbol{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$.

(1) 设 f 是光滑函数, 则 $df = \nabla f \cdot d\boldsymbol{x}$, $d^*f = 0$.

(2) 设 $A = A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 = \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x}$, 这里 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$. 我们有

$$dA = (\nabla \times \boldsymbol{A})_1\, dx_2 \wedge dx_3 + (\nabla \times \boldsymbol{A})_2\, dx_3 \wedge dx_1 + (\nabla \times \boldsymbol{A})_3\, dx_1 \wedge dx_2,$$

此处 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 是旋度, 也记作 curl$\boldsymbol{A}$. 进一步,

$$d^*A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \boldsymbol{A},$$

此处 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 是散度, 也记作 div$\boldsymbol{A}$.

(3) 设 $B = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$, 则 $dB = \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. 另一方面

$$d^*B = (\nabla \times \boldsymbol{B})_1\, dx_1 + (\nabla \times \boldsymbol{B})_2\, dx_2 + (\nabla \times \boldsymbol{B})_3\, dx_3.$$

(4) 设 $C = \varphi dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. 显见 $dC = 0$. 此外

$$d^*C = -(\nabla\varphi)_1\, dx_2 \wedge dx_3 - (\nabla\varphi)_2\, dx_3 \wedge dx_1 - (\nabla\varphi)_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

(5) 利用 $d^2 = 0$ 及 $d^{*2} = 0$, 可得经典的向量分析公式 $\nabla \times \nabla f = 0$ 以及 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$. ■

上面讨论的诸算子也可以过渡到一般的向量丛上. 设 E 和 F 是 X 上 (实或复的) $\mathcal{C}^\infty$ 向量丛, $\mathrm{rk}(E) = p$, $\mathrm{rk}(F) = q$. 设$P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$ 是 E 和 F 的 $\mathcal{C}^\infty$ 整体截面空间之间的 ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 线性映射.

考虑 X 的局部坐标邻域 U, 其坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)$, 使得 E 和 F 限制在 U 上是平凡的. 这样, P 在 U 上可以局部写为 $P(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$. 如果这里的分量 β_j 可以写为如下形式, 那么我们就称 P 是 k 阶微分算子:

$$\beta_i = \sum_{I,j} P_{I,i,j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_I},$$

这里系数 $P_{I,i,j}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的; 当 $|\ I\ | > k$ 时, 皆为零; 而当 $|\ I\ | = k$ 时至少有一项非零. 易知这一定义不依赖于向量丛的标架坐标选取以及底流形局部坐标的选取.

设

$$P_{ij}^k = \sum_{|I|=k} P_{I,i,j} \frac{\partial}{\partial x_I}.$$

考虑矩阵

$$P^k = (P_{ij}^k)_{1\le i\le p, 1\le j\le q}.$$

我们关心的一个问题是: 在向量丛的标架变换以及底流形局部坐标变换下, P^k 按何种规律变化. 由于 P_{ij}^k 只关心阶数最高的部分, 因此在任何一种变换下, 我们可以扔掉所有的低阶项, 只保留最高阶的项. 当底流形坐标变换时, P_{ij}^k 的变化取决于 $\frac{\partial}{\partial x_I}$ 的变化, 而后者 (在扔掉低阶项后) 等同于 S^kT_U 的变化规律, 这里 S^kT_U 是局部切丛的 k 次对称积. 当向量丛标架变换时, P_{ij}^k 的变化规律等同于 $\mathrm{Hom(E, F)}$ 的变化规律 (在扔掉低阶项后). 具体的验证留给读者完成.

因此 P^k 的这种局部变换规律自然诱导了 $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes S^kT_X$ 上的一个截面 σ_P, 我们称之为算子 P 的符号 (Symbol). 显然, 对 $\forall x \in X$, 我们也可以将 $\sigma_{P,x}$ 视为 k 次齐次映射 $\sigma_{P,x} : \Omega_{X,x} \to \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$. 进一步, 如果对任何非零微分形式 $\alpha_x \in \Omega_{X,x}$, $\sigma_{P,x}(\alpha) : E_x \to F_x$ 都是单射, 那么我们称 P 是椭圆微分算子.

例 1.2.2 设 $E = F = \Omega^0_{X,\mathbb{R}}$, 考虑二阶微分算子

$$P(f) = \sum_{|I|\le 2} P_I \frac{\partial f}{\partial x_I},\ \ \forall f \in A^0(X).$$

此时 $P^2 = \sum\limits_{u,v} P_{u,v}\frac{\partial^2}{\partial x_u \partial x_v}$, 它对应 $\mathrm{Hom}(E,F) \otimes S^2T_X$ 中的截面

$$\sigma_P = \sum_{u,v} P_{u,v}\frac{\partial}{\partial x_u} \cdot \frac{\partial}{\partial x_v}.$$

任取 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i dx_i$, 则由缩并计算可知

$$\sigma_{P,x}(\alpha)(f) = \sum_{u,v} P_{u,v}(x)h_u(x)h_v(x)f(x).$$

请注意, 此时 $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ 只是数乘映射. 由 α 及 x 的任意性可知, P 是椭圆算子当且仅当上面的二次型 $\sum\limits_{u,v} P_{u,v}h_u h_v$ 是恒正定的 (或负定的), 亦即矩阵 $(P_{u,v})_{1\le u,v\le n}$ 恒正定的 (或负定的). ■

例 1.2.3 设 $X = \mathbb{R}^2$ 是二维空间, $E = F = \Omega^k_{X,\mathbb{R}}$, 拉普拉斯算子 Δ_d 是 2 阶微分算子.

(1) 当 $k = 0$ 时, 对任意 $f \in A^0(X)$, 有 $\Delta_d f = -(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$. 由上例的讨论, 对任意 $\alpha = adx + bdy$, 有 $\sigma_P(\alpha)(f) = -(a^2+b^2)f$. 因而 Δ_d 是椭圆的.

(2) 当 $k = 1$ 时, 对任意 $\omega = fdx + gdy \in A^1(X)$, $\Delta_d\omega = (\Delta_d f)dx + (\Delta_d g)dy$. 此时系数矩阵

$$P^k = \begin{pmatrix} \Delta_d & 0 \\ 0 & \Delta_d \end{pmatrix}$$

对任何 $\alpha = adx + bdy$,

$$\sigma_P(\alpha) = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & 0 \\ 0 & -(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

因此对 $\omega = fdx + gdy$, 有 $\sigma_P(\alpha)(\omega) = -(a^2+b^2)\omega$.

(3) 当 $k = 2$ 时, 对任意 $\omega = fdx \wedge dy \in A^2(X)$, $\Delta_d\omega = (\Delta_d f)dx \wedge dy$. 类似 $k = 0, 1$ 的情形, 我们有 $\sigma_P(\alpha)(\omega) = -(a^2+b^2)\omega$, 对 $\forall\alpha = adx + bdy$. ■

上例所描述的现象并非偶然, 实际上我们有以下普遍结论 (留给读者验证).

命题 1.2.2 *设 Δ_d 是 X 上黎曼度量 g 对应的拉普拉斯算子, 则 Δ_d 的符号 σ_Δ 可写为*

$$\sigma_\Delta(\alpha)(\omega) = -\|\alpha\|\omega, \ \ \forall\alpha \in \Omega_X, \forall\omega \in A^k(X).$$

这里 $\|\alpha\|$ 是 X 的函数, 由 $\|\alpha_x\| = \langle\alpha_x, \alpha_x\rangle$ 定义.

证明 这是一个局部问题. 注意到 Δ 的 2 阶偏导项的系数中不出现度量的导数, 因此不失一般性, 我们可考虑标准常度量情形. 设 $\omega = \sum\limits_{|I|=q} f_I dx_I$. 由式(1-5), 即

$$\Delta\omega = -\sum_{i,I} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i^2} dx_I.$$

立得所需结论.

当然读者也可以按如下方式得到上述结论. 首先有

$$d\omega = \sum_{i,I} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I, \qquad *d\omega = \sum_{i,I} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} * (dx_i \wedge dx_I).$$

因此

$$*^{-1}d*d\omega=\sum_{k,i,I}\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i\partial x_k}*^{-1}(dx_k\wedge*(dx_i\wedge dx_I)).$$

类似地,

$$d*^{-1}d*\omega=\sum_{k,i,I}\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i\partial x_k}dx_k\wedge*^{-1}(dx_i\wedge*dx_I).$$

于是有

$$\Delta\omega=(-1)^q\left(\sum_{k,i,I}\tfrac{\partial^2 f_I}{\partial x_i\partial x_k}(*^{-1}(dx_k\wedge*(dx_i\wedge dx_I))-dx_k\wedge*^{-1}(dx_i\wedge*dx_I))\right)$$

计算上式右边的项再次得到式 (1-5). ■

如果向量丛 E 也具备度量的话, 那么我们显然也能够定义 $\mathcal{C}^\infty(E)$ 上两个截面 α,β 的 L^2 度量等等. 今设 E,F 都有度量, 且 $P:\mathcal{C}^\infty(E)\to\mathcal{C}^\infty(F)$ 是微分算子. 如果存在另一个微分算子 $P^*:\mathcal{C}^\infty(F)\to\mathcal{C}^\infty(E)$, 满足

$$(\alpha,P\beta)_{L^2}=(P^*\alpha,\beta)_{L^2},\ \forall\alpha\in\mathcal{C}^\infty(F),\,\beta\in\mathcal{C}^\infty(E),$$

那么我们称 P^* 为 P 的相伴算子. 前面已经看到 d,d^* 是相伴的, 而 Δ_d 则是自伴算子.

本节最后将陈述一个关键性的定理.

定理 1.2.1 (Demailly, 1966) 设 $P:E\to F$ 是紧流形上的椭圆微分算子, E,F 具备度量且有相同的秩, 则
(1) 核 $\mathrm{Ker}P\subset\mathcal{C}^\infty(E)$ 是有限维的,
(2) 像 $P(\mathcal{C}^\infty(E))\subset\mathcal{C}^\infty(F)$ 是余维数有限的闭子空间,
(3) 在 L^2 度量下有正交直和分解 $\mathcal{C}^\infty(E)=\mathrm{Ker}P\oplus P^*(\mathcal{C}^\infty(F))$.

1.3 复流形与全纯向量丛

设 X 是带有近复结构 $J:T_X\to T_X$ 的流形. 复化切空间诱导了分解 $T_{X,\mathbb{C}}=T_X^{1,0}\oplus T_X^{0,1}$, 从而也诱导了对偶分解

$$\Omega_{X,\mathbb{C}}=\Omega_X^{1,0}\oplus\Omega_X^{0,1}.$$

我们记 $\Omega^k_{X,\mathbb{C}}:=\wedge^k\Omega_{X,\mathbb{C}}$. 上面的分解也进一步诱导了如下分解

$$\Omega^k_{X,\mathbb{C}}=\sum_{p+q=k}\Omega_X^{p,q},\qquad \Omega_X^{p,q}:=\wedge^p\Omega_X^{1,0}\otimes\wedge^q\Omega_X^{0,1}.$$

如果 X 是 n 维复流形, z_i 是复坐标, 那么 X 上的函数 $f\in\Omega_X^{0,0}$ 有微分运算 $df=\partial f+\overline{\partial}f$, 这里

$$\partial f:=\sum_i\frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i,\qquad \overline{\partial}f:=\sum_i\frac{\partial f}{\partial\bar z_i}d\bar z_i.$$

f 全纯当且仅当 $\overline{\partial}f\equiv0$. ∂ 和 $\overline{\partial}$ 算子也可以自然诱导到 (p,q) 次形式以及 k 次微分形式上, 此处不再一一赘述. 我们有如下熟知的结论.

命题 1.3.1 假设 X 是复流形, $\alpha \in \Omega^k_{X,\mathbb{C}}$, $\beta \in \Omega^l_{X,\mathbb{C}}$, 那么
(1) (Leibniz 法则)

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \overline{\partial}\beta,$$
$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \partial\beta$$

(2) $\partial^2 = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$, $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

X 上的Hermite 度量 h 是 2 阶光滑复值张量场, 使其在每个点 $x \in X$ 处的限制是切空间 $T_{X,x}$ 上的正定 Hermite 结构. 带有埃尔米特度量的 (近) 复流形 X 称为 (近) Hermite 流形.

我们写 $h = g - i\omega$. 由前面讨论已知 g 是黎曼度量. Kähler 形式 ω 是实值的 $(1,1)$ 型 2 次形式, 即 $\omega \in \Omega^{1,1}_X \cap \Omega^2_{X,\mathbb{R}}$. 如果 X 是 Hermite 流形, 且 ω 是闭形式, 则称 X 是 Kähler 流形, 此时 h 称为 Kähler 度量 . 如果 Kähler 类 $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{Z})$, 我们就称 $[\omega]$ 是整的. 带有整 Kähler 类的紧复流形称为极化流形 (Polarised manifold), 记作 $(X,[\omega])$.

注 1.3.1 由引理 1.1.4, Kähler 形式有如下表达式

$$\omega = \frac{i}{2} h_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha.$$

闭条件 $d\omega = 0$ 在局部上等价于存在实函数 $F(z,\bar{z})$, 使得

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 F(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}.$$

这一局部函数称为 Kähler 势. 遗憾的是, Kähler 势一般无法在整体上定义, 且不唯一. ■

注 1.3.2 由 Kodaira-Akizuki-Nakano 消失定理可以证明: 极化流形必是射影簇. ■

引理 1.3.1 设 (X,h) 是 Kähler 流形, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$, $x \in X$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $T_{X,x}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的一组基, 使得 $h(e_j,e_k) = \delta^j_k$, 那么
(1) $\langle e_1, Ie_1, \cdots, e_n, Ie_n \rangle$ 是黎曼度量 g_x 下的正交基,
(2) 设 $\langle dx_1, dy_1, \cdots, dx_n, dy_n \rangle$ 是 $\Omega_{X,x,\mathbb{R}}$ 的相应对偶基, 令 $dz_j = dx_j + idy_j$ $(j = 1,\cdots,n)$, 则

$$\omega_x = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

(3) $\mathrm{Vol} = \frac{\omega^n}{n!}$,
(4) 如果 X 是紧的, 那么 ω^k 不可能是恰当形式 $(k = 1,\cdots,n)$. 特别地, Betti 数 $b_{2k} > 0$.

证明 (1)(2)(3) 直接来自于推论 1.1.2 和引理 1.1.4 及推论 1.1.3.

(4) 不妨设 $\omega^k = d\gamma$. 因而由 ω 的闭条件知 $\omega^n = d(\omega^{n-k} \wedge \gamma)$. 对该式两边积分得

$$\int_X \omega^n = \int_X d(\omega^{n-k} \wedge \gamma) = 0.$$

但这和 $\int_X \omega^n = n! \int_X \mathrm{Vol} > 0$ 矛盾! ■

引理 1.3.2 设 X 是 n 维复流形, 带有 Kähler 度量 h, $x \in X$ 附近的全纯坐标 $(z_1,\cdots,z_n)$, 令 $h_{ij} = h(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})$. 那么我们在总可以选取合适的全纯坐标, 使得矩阵

$$(h_{ij})_{1\le i,j\le n} = I_n + O(\sum_i |z_i|^2),$$

这里 I_n 是单位阵.

注 1.3.3 Kähler 流形 X 的复子流形也是 Kähler 流形. 进一步, 如果该子流形还是紧的, 那么由其体积元积分的正性可以推出它不可能是 X 的边界 (习题 1.12). 这些结论可以用来构造 Kähler 流形和非 Kähler 流形的例子. ■

以下如无特别声明, 我们总假设 X 是 n 维 Hermite 流形. 我们用 $A^{p,q}(X)$ (相应地, $A^k_{\mathbb{C}}(X)$) 表示 X 上光滑 (p,q) 次形式 (相应地, 光滑复值 k 次微分形式) 全体. 由推论 1.1.3 和注记 1.2.1, Hermite 度量诱导 Hodge 算子

$$*: \Omega_X^{p,q} \longrightarrow \Omega_X^{n-q,n-p}. \tag{1-6}$$

进一步也诱导了 L^2 度量,

$$(\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge \overline{*\beta}, \qquad \alpha,\beta \in A^k_{\mathbb{C}}(X). \tag{1-7}$$

我们定义

$$\partial^* = -*\overline{\partial}*, \qquad \overline{\partial}^* = -*\partial*.$$

容易验证, ∂^* (相应地, $\overline{\partial}^*$) 将 (p,q) 次形式映为 $(p-1,q)$ 次形式 (相应地, $(p,q-1)$ 次形式). $d^* = \partial^* + \overline{\partial}^*$ 可以视为余微分的复延拓.

引理 1.3.3 ∂^* (相应地, $\overline{\partial}^*$) 是 ∂ (相应地, $\overline{\partial}$) 是关于 L^2 度量的伴随算子.

证明 设 $\alpha \in A^k_{\mathbb{C}}(X)$, $\beta \in A^{k+1}_{\mathbb{C}}(X)$. 利用命题 1.3.1 和 式 (1-7), 我们有

$$(\overline{\partial}\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X \overline{\partial}(\alpha\wedge\overline{*\beta}) - (-1)^k \int_X \alpha \wedge \overline{\partial}(\overline{*\beta}).$$

注意到 $\alpha\wedge\overline{*\beta} \in A^{2n-1}_{\mathbb{C}}(X) = A^{n,n-1}_{\mathbb{C}}(X) \oplus A^{n-1,n}_{\mathbb{C}}(X)$, 故 $\int_X \overline{\partial}(\alpha\wedge\overline{*\beta}) = 0$.

另一方面, $*^{-1}\partial*\beta = (-1)^k * \partial * \beta$ 推出 $\partial*\beta = (-1)^{k+1} * \overline{\partial}^*\beta$ (习题 1.8). 因而

$$\int_X \alpha\wedge\overline{\partial}(\overline{*\beta}) = (-1)^{k+1}\int_X \alpha\wedge\overline{*(\overline{\partial}^*\beta)} = (-1)^{k+1}(\alpha,\overline{\partial}^*\beta)_{L^2}.$$

这就推出 $(\overline{\partial}\alpha,\beta)_{L^2} = (\alpha,\overline{\partial}^*\beta)_{L^2}$. ■

此时我们可以定义 $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$ 及 $\Delta_{\overline{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$. 我们称 $\mathrm{Ker}\Delta_{\overline{\partial}}$ 中的元素为 $\Delta_{\overline{\partial}}$-调和形式.

例 1.3.1 $X = \mathbb{C}^n$ 具有标准的 Kähler 度量 $h = \sum\limits_{i=1}^n dz_i \otimes d\bar{z}_i$, 其 Kähler 形式为 $\omega = \frac{i}{2}\sum\limits_{i=1}^n dz_i\wedge d\bar{z}_i$. 如果令 $f = \sum\limits_{i=1}^n |z_i|^2$, 那么 Kähler 形式也可写为 $\omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}f$. 此时

$$\partial^*\varphi dz_{i_1}\wedge\cdots dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots d\bar{z}_{j_q} = 2\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_{i_k}} dz_{i_1}\wedge\cdots\widehat{dz_{i_k}}\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots d\bar{z}_{j_q},$$

这里 $\widehat{dz_{i_k}}$ 表示去掉该项. 同样地,

$$\overline{\partial}^*\varphi dz_{i_1}\wedge\cdots dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots d\bar{z}_{j_q} = 2(-1)^p\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{j_k}} dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\widehat{d\bar{z}_{j_k}}\cdots d\bar{z}_{j_q}.$$

设

$$\sigma_{p,q} = \sum_{|I|=p,|J|=q} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

我们由以上计算可知

$$\Delta_{\partial}(\sigma_{p,q}) = \Delta_{\partial^*}(\sigma_{p,q}) = 2\sum_{i,I,J} \frac{\partial^2 \varphi_{I,J}}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} dz_I \wedge d\bar{z}_J. \tag{1-8}$$

以及

$$\begin{aligned} \partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial = 0, \\ \overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial} = 0 \end{aligned} \tag{1-9}$$

由 (1-8) 可知

$$\Delta_d = 2\Delta_{\partial} = 2\Delta_{\overline{\partial}}. \tag{1-10}$$

事实上, 式 (1-8)、式 (1-9) 与式 (1-10) 对一般 Kähler 流形也成立 (见定理 2.2.2 与推论 2.2.2). ■

例 1.3.2 复射影空间 $X = \mathbb{P}^n$ 也是重要的 Kähler 流形. 设 $[z_0, z_1, \cdots, z_n]$ 是齐次坐标. Kähler 形式的齐次坐标表达为

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \frac{|z|^2 \sum\limits_{k=0}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k - \sum\limits_{k,j=0}^{n} \bar{z}_k z_j dz_k \wedge d\bar{z}_j}{|z|^4} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\ln(|z|^2),$$

这里 $|z| := \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} |z_k|^2}$.

考虑 $z_0 \neq 0$ 的邻域, 其局部坐标为 $\xi_i = \frac{z_i}{z_0}$, $i = 1, \cdots, n$. 于是 Kähler 形式为

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \frac{(1+|\xi|^2) \sum\limits_{k=0}^{n} d\xi_k \wedge d\bar{\xi}_k - \sum\limits_{k,j=1}^{n} \bar{\xi}_k \xi_j d\xi_k \wedge d\bar{\xi}_j}{(1+|\xi|^2)^2} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\ln(1+|\xi|^2),$$

这里 $|\xi| := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^2}$. 这个 Kähler 形式也被称为 Fubini-Study 度量. $SU(n+1)$ 在 $\mathbb{P}^n$ 下的作用保持 Kähler 形式不变. ■

注 1.3.4 由上述例子以及注记 1.3.3 立知, 光滑射影簇是 Kähler 流形. 特别地, 我们所熟知的光滑射影代数曲面是 Kähler 流形. 此外还可证明紧 Kähler 流形上的全纯向量丛对应的射影丛也是 Kähler 流形. ■

设 E 是秩 k 的全纯向量丛. 上述很多讨论都可以过渡到全纯向量丛上. 首先, Hermite 度量可以推广到 E 上, 即以光滑方式在每个点 $x \in X$ 对应的复向量空间 E_x 上给出正定的 Hermite 结构; 此时称 E 是 Hermite 向量丛. 类似地, 我们用 $A^{p,q}(E)$ (相应地, $A^k(E)$) 表示向量丛 $\Omega_X^{p,q} \otimes E$ (相应地, $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k \otimes E$) 的 $\mathcal{C}^\infty$ 截面全体.

注 1.3.5 (1) 全纯向量丛的“全纯” 性体现在局部迁移函数上, 而并非指其截面的全纯性.
(2) 由单位分解定理可知复向量丛上必有 Hermite 度量.
(3) $A^{p,q}(E)$ 中的截面限制在局部平凡化上可写为 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, 这里 α_i 是 (p,q) 次微分形式. ■

向量丛的截面之间有几类重要的映射. 首先是我们熟悉的联络

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \longrightarrow A^1(E).$$

它满足莱布尼兹法则

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma,\quad \sigma \in \mathcal{C}^\infty(E),\ f \in \mathcal{C}^\infty(X).$$

其次是 $\overline{\partial}_E$ 算子

$$\overline{\partial}_E : A^{0,q}(E) \longrightarrow A^{0,q+1}(E),\quad \overline{\partial}_E(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (\overline{\partial}\alpha_1, \cdots, \overline{\partial}\alpha_k),$$

这里 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 是 E 的截面在局部标架中的分量表示, α_i 是 $(0,q)$ 形式. 注意到 E 的转移函数是全纯的, 因此上述局部定义不依赖于标架选取, 因而可以过渡到整体上 (具体验证留给读者). 它满足以下莱布尼兹法则

$$\overline{\partial}_E(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}_E\alpha \wedge \beta + (-1)^q \alpha \wedge \overline{\partial}_E\beta,\quad \alpha \in A^{0,q}(E), \tag{1-11}$$

以及 $\overline{\partial}_E^2 = 0$. 这就诱导了 Dolbeault 复形

$$\cdots A^{0,q-1}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_E} A^{0,q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_E} A^{0,q+1}(E) \cdots$$

假设 X 和 E 各有 Hermite 度量, 则可诱导 $\Omega_X^{0,q} \otimes E$ 上的 Hermite 度量 (见引理 1.1.4). 类似注记 1.1.1 的讨论, 这一度量诱导了 $\mathbb{C}$ 反线性同构

$$\Omega_X^{0,q} \otimes E \longrightarrow (\Omega_X^{0,q} \otimes E)^*.$$

另一方面, $\Omega_X^{n,n} \cong \Omega_{X,\mathbb{C}}^{2n}$ 由体积元 Vol 生成, 这就给出了同构

$$(\Omega_X^{0,q} \otimes E)^* \cong \Omega_X^{n,n-q} \otimes E^*.$$

综上, 我们即得 $\mathbb{C}$ 反线性同构

$$*_E : \Omega_X^{0,q} \otimes E \longrightarrow \Omega_X^{n,n-q} \otimes E^*. \tag{1-12}$$

$\Omega_X^{n,0}$ 是全纯向量丛, 称为 X 的典范丛, 也记作 K_X. 因此 $\Omega_X^{n,n-q} \otimes E^* = \Omega_X^{0,n-q} \otimes (K_X \otimes E^*)$. 对任何 $x \in X$, $\alpha_x, \beta_x \in \Omega_{X,x}^{0,q} \otimes E_x$, 按照 $*_E$ 的定义则有

$$\langle \alpha_x, \beta_x \rangle \mathrm{Vol} = \alpha_x \wedge *_E \beta_x.$$

注 1.3.6 请读者注意, 式 (1-12) 与式 (1-6) 定义的 Hodge 算子在形式上相差一个共轭. 这一差异来自于 Hermite 度量在第二分量上的 $\mathbb{C}$ 反线性性. ■

我们定义算子 $\overline{\partial}_E^* : A^{0,q}(E) \to A^{0,q-1}(E)$, 满足

$$\overline{\partial}_E^* := (-1)^q *_E^{-1} \circ \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} \circ *_E.$$

引理 1.3.4 *$\overline{\partial}_E^*$ 是 $\overline{\partial}_E$ 是关于 L^2 度量的伴随算子.*

证明 对式 (1-11) 两边求积分并用 $\int_X \bar{\partial}(\alpha \wedge *\beta) = 0$ (习题 1.8), 类似引理 1.3.3 讨论即得. ■

类似地, 我们可定义 $\Delta_E = \overline{\partial}_E\overline{\partial}_E^* + \overline{\partial}_E^*\overline{\partial}_E$. 我们称 $\mathrm{Ker}\Delta_E$ 中的元素称为 Δ_E-调和形式.

注 1.3.7 如果取 $E = \Omega_X^{p,0}$, 那么 $A^{p,q}(X) = A^{0,q}(E)$, 此时有 $\overline{\partial}_E = (-1)^p\overline{\partial}$ 及 $\overline{\partial}^* = (-1)^p\frac{1}{2}\overline{\partial}_E^*$. 后者的系数 $\frac{1}{2}$ 来自于式 (1-3) 及引理 1.3.4. ■

引理 1.3.5 (1) Δ_∂ 和 $\Delta_{\overline{\partial}}$ 在 $\Omega^k_{X,\mathbb{C}}$ 上的符号都是

$$\xi \longrightarrow -\frac{1}{2}\|\xi\|^2 Id.$$

(2) Δ_E 在 $\Omega^{0,q}\otimes E$ 上的符号是

$$\xi \longrightarrow -\|\xi\|^2 Id.$$

推论 1.3.1 $\Delta, \Delta_\partial, \Delta_{\overline{\partial}}, \Delta_E$ 都是椭圆微分算子.

假设 E 是复流形 X 上的全纯线丛, h 是其上的 Hermite 度量. 考虑 X 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, 使得 $E|_{U_i}\cong U_i\times\mathbb{C}$. 设 $\sigma=\{\sigma_i\}_{i\in I}$ 是 E 的一个全纯截面, 局部关系满足 $\sigma_i=g_{ij}\sigma_j$, 这里 g_{ij} 是全纯的转移函数. 令 $h_i=h(\sigma_i,\sigma_i)$, $\omega_i=\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\partial\overline{\partial}\log h_i$ $(i\in I)$, 则有 $h_i=|g_{ij}|^2h_j$ (在 $U_i\cap U_j$). 易知 $\partial\overline{\partial}\log|g_{ij}|^2=0$. 因而 $\omega_i=\omega_j$ (在 $U_i\cap U_j$). 这就定义了 X 上实 $(1,1)$ 次微分形式 $\omega=\{\omega_i\}_{i\in I}$, 我们称之为 Chern 形式.

例 1.3.3 $\mathbb{P}^n$ 上带有一个自然的全纯线丛 S, 即对任何 $\Delta\in\mathbb{P}^n$, Δ 可看作 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的直线, 因而我们将它定义成 S 在 Δ 处的茎. 这样的 S 称作 tautological 线丛. 通常我们将 S 的对偶记作 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, 称作 Serre 扭层 (Serre twist sheaf) 或超平面丛 (Hyperplane bundle). 这一定义也可以推广到格拉斯曼流形上 (见第 1.4 节).

设 $[z_0,\cdots,z_n]$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的齐次坐标. 我们可以构造全纯截面 $\sigma=\{\sigma_i\}_{i=0}^n$, 其中

$$\sigma_i(z_0,\cdots,z_n)=(z_0,\cdots,z_{i-1},1,z_{i+1},\cdots,z_n)$$

定义在开集 $U_i=\{[z_0,\cdots,z_n]\mid z_i\neq 0\}$ 上. 因此我们可以构造 S 上的 Hermite 度量 h, 使得

$$h(\sigma_i)=1+\sum_{k\neq i}|z_k|^2.$$

考虑 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 的对偶 Hermite 度量 h^*. 显见 $h^*(\sigma_i^*)=1/h(\sigma_i)$, 这里 σ_i^* 是相应的对偶基. 现在我们可以构造 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 的 Chern 形式,

$$\omega_i=\frac{1}{2i\pi}=\frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{1}{1+\sum\limits_{k\neq i}|z_k|^2}\right),$$

它是处处正定的. 事实上, $\omega=\{\omega_i\}_{i=0}^n$ 就是例 1.3.2 中定义的 Fubini-Study 度量. ■

本节最后回顾一些关于联络的基本事实. 首先, 对于黎曼流形 (X,g), 存在 Levi-Civita 联络 (有时也称黎曼联络)

$$\nabla:\mathcal{C}^\infty(T_X)\longrightarrow A^1(T_X),$$

对任何 $\chi,\psi\in\mathcal{C}^\infty(T_X)$, 满足

(1) 保度量性质: $d(g(\chi,\psi))=g(\chi,\nabla\psi)+g(\nabla\chi,\psi)$;

(2) 无挠性质: $\nabla_\chi\psi-\nabla_\psi\chi=[\chi,\psi]$.

这一结论可以过渡到带有 Hermite 度量的全纯向量丛上.

命题 1.3.2 设 E 是全纯向量, 带有 Hermite 度量 h. 则存在唯一的联络 ∇, 使得

(1) 该联络保 Hermite 度量: $d(h(\sigma,\tau))=h(\sigma,\nabla\tau)+h(\nabla\sigma,\tau)$;

(2) 设 $\nabla^{0,1}=p\circ\nabla:\mathcal{C}^\infty(E)\to A^{0,1}(E)$, 这里 $p:A^1(E)\to A^{0,1}(E)$ 是投影映射, 则有 $\nabla^{0,1}=\overline{\partial}_E$.

这一联络称为 (E,h) 的 Chern 联络.

设 T_X 是 X 上的全纯切丛, $h=g-i\omega$ 是其上的 Hermite 度量. 利用实部映射, 我们有典范同构 $Re: T_X\to T_{X,\mathbb{R}}$. 这样, T_X 上有两种联络: (1) $(T_{X,\mathbb{R}},g)$ 的 Levi-Civita 联络 ∇_R; (2) (T_X,h) 的 Chern 联络 ∇_C.

命题 1.3.3 以下条件等价:
(1) h 是 Kähler 度量;
(2) 对复结构 J 有, $\nabla_R(J\chi)=J\nabla_R\chi, \forall\chi\in A^0(T_{X,\mathbb{R}})$.
(3) 若将 T_X 与 $T_{X,\mathbb{R}}$ 通过典范同构 Re 等同起来, 那么 ∇_R 与 ∇_C 是一致的.

证明 (3) $\Rightarrow$ (2). 对 $\chi\in T_{X,\mathbb{R}}$, 由典范同构 Re 知, $i\cdot\chi=J\chi$. 又由 $\nabla_C(i\chi)=i\nabla_C\chi$ 及 (3) 的条件即得 $\nabla_R(JX)=J\nabla_R X$.

(2) $\Rightarrow$ (1). 由 J 的平坦性, $g(u,v)=\omega(u,Jv)$ 及 ∇_R 的保度量性得

$$d(\omega(\chi,\psi))=\omega(\nabla_R\chi,\psi)+\omega(\chi,\nabla_R\psi),\qquad \forall\chi,\psi\in T_{X,\mathbb{R}}.$$

任取 $\phi\in T_{X,\mathbb{R}}$ 代入上式则得

$$\phi(\omega(\chi,\psi))=\omega(\nabla_\phi\chi,\psi)+\omega(\chi,\nabla_\phi\psi). \tag{1-13}$$

另一方面, 我们有恒等式

$$\begin{aligned} d\omega(\phi,\chi,\psi)=&\phi(\omega(\chi,\psi))-\chi(\omega(\phi,\psi))+\psi(\omega(\phi,\chi))\\ &-\omega([\phi,\chi],\psi)+\omega(\phi,[\chi,\psi])+\omega([\phi,\psi],\chi). \end{aligned} \tag{1-14}$$

将式 (1-13) 代入式 (1-14), 并利用联络的无挠性即得 $d\omega(\phi,\chi,\psi)=0$. 由 ϕ,χ,ψ 的任意性可知 $d\omega=0$.

(1) $\Rightarrow$ (3). 注意到在每一点上的联络矩阵系数只涉及到度量矩阵的一阶导数. 因此由引理 1.3.2, 不失一般性, 我们可考虑常度量情形. 此时易知两种联络都是平凡联络. ∎

1.4 格拉斯曼流形

设 W 是复 w 维向量空间, 我们考虑由 W 中所有 k 维复子空间构成的集合

$$\mathrm{Grass}(k,W)=\{K\subseteq W\mid \dim K=k\}.$$

当 $k=1$ 或 $w-1$ 时, $G=\mathbb{P}(W)$, 即 W 的射影化.

我们将证明 $G=\mathrm{Grass}(k,W)$ 具有紧复流形结构, 它被称作格拉斯曼流形 (Grassmannian). 为此, 我们需要一些准备工作.

考虑 $G=\mathrm{Grass}(k,W)$ 的子集

$$G_V=\{Z\subseteq W\mid Z\cap V=\{0\},\quad \dim Z=k\}.$$

设 $W=V\oplus K$ 是复子空间的直和分解, $\dim K=k$, $\pi_V: W\to V$ 及 $\pi_K: W\to K$ 是投影映射. 对任何 $Z\in G_V$, 限制映射 $\pi_{K|Z}: Z\to K$ 显然是同构. 我们可定义 $\mathbb{C}$-线性映射

$h_Z := \pi_V \circ \pi_{K|Z}^{-1} : K \to V$, 并有以下交换图 ($i : Z \to W$ 是包含映射)

$$
\begin{tikzcd}
 & K & \\
W \arrow[ur, "\pi_K"] \arrow[dr, "\pi_V"'] & Z \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "\pi_{K|Z}"'] \arrow[d, "\pi_{V|Z}"'] & K \arrow[l, "\pi_{K|Z}^{-1}"'] \arrow[ul, equal] \arrow[dl, "h_Z"] \\
 & V &
\end{tikzcd}
\tag{1-15}
$$

引理 1.4.1 (1) 设 $Z \in G_V$, 则 $Z = (1_K + h_Z)(K)$.

(2) 存在双射

$$\phi_{V,K} : G_V \to \mathrm{Hom}(K, V), \qquad Z \to h_Z.$$

(3) $G_V = \{Z \mid \pi_{K|Z} : Z \to K \text{ 是同构.}\}$

证明 (1) 由 h_Z 的定义直接得到.

(2) $\phi_{V,K}$ 单射性来自于 (1). 下证满射性. 设 $h \in \mathrm{Hom}(K, V)$. 由以下交换图可以构造复合映射 $j : K \to W$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "h \times id"'] \arrow[dr, "j"] & \\
V \times K \arrow[r, "+"] & W
\end{tikzcd}
$$

令 $Z = \mathrm{Im} j$, 即

$$Z = \{h(k) + k \mid k \in K\}.$$

由 $W = V \oplus K$ 可知 $j : K \to Z$ 是同构. 容易验证, 这样构造的 Z 满足交换图 (1-15), 故 $\phi_{V,K}$ 是满射.

(3) 只需证右边集合包含在 G_V 中. 设 $Z \subseteq W$ 满足 $\pi_{K|Z} : Z \to K$ 是同构. 假设 $z \in Z \cap V$, 则 $\pi_K(z) = 0$, 从而 $z = 0$. 这表明 $Z \in G_V$. ■

推论 1.4.1 设 $W = V \oplus K = V' \oplus K'$, 则

(1)

$$\phi_{V,K}(G_V \cap G_{V'}) = \{\psi \in \mathrm{Hom}(K, V) \mid \phi := \pi_{K'} \circ (1_K \oplus \psi) : K \to K' \text{ 是同构.}\}$$

(2) $\phi_{V',K'} \circ \phi_{V,K}^{-1}(\psi) = \pi_{V'} \circ (1_K + \psi) \circ \phi^{-1}$, 对任何 $\psi \in \phi_{V,K}(G_V \cap G_{V'})$.

证明 由引理 1.4.1 直接计算可得, 我们留给读者验证. ■

命题 1.4.1 $G = \mathrm{Grass(k, W)}$ 具有 $k(w-k)$ 维紧复流形结构, 这里 $w = \dim W$.

证明 对每个 $K \in G$, 我们总是可以找到 K 的某个补子空间 V, 因而 $K \in G_V$. 这表明 G 被这样的 G_V 所覆盖. 由引理 1.4.1, G_V 在双射 $\phi_{V,K}$ 下配备了 $k(w-k)$ 维欧氏空间拓扑 (注意 $\dim \mathrm{Hom}(K, V) = k(w-k)$). 易知, $G_V \cap G_{V'}$ 仍是 G_V 中的开集, 且由推论 1.4.1可知坐标卡变换是全纯的, 因而 G 是复流形.

以下证明紧性. $k = 1$ 时, $G = \mathbb{P}(W)$ 已知是紧的. 今对 k 施归纳法. 考虑簇

$$P := \{(x, V) \in \mathbb{P}(W) \times G \mid x \in V\}.$$

首先, P 可以视为 $\mathbb{P}(W)$ 上的丛, 其纤维为 $\mathrm{Grass}(k-1,W')$ (这里 $\dim W'=w-1$). 由归纳假设可知 P 是紧的. 另一方面, P 又可视为 G 上的射影丛, 故由 P 的紧性推知 G 是紧的. ■

命题 1.4.2 $G=\mathrm{Grass}(k,W)$ 是射影流形, 即存在 Plücker 嵌入映射

$$\mathrm{Grass}(k,W)\longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k W),\qquad Z\longrightarrow \wedge^k Z.$$

(证明留给读者)

$G=\mathrm{Grass}(k,W)$ 上有平凡向量丛, 其纤维为 W. 我们可以构造它的全纯子丛 $\mathcal{S}$ 使得其在点 $K\in G$ 处纤维为子空间 $K(\subset W)$. 取 $V\in W$ 作为 K 的补空间, 考虑 K 的局部邻域 $G_V\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$. 对任何 $\phi\in G_V$, $\mathcal{S}$ 在 ϕ 的茎也就是 $\mathrm{Im}(1+\phi)$.

设 $(\sigma_i)_{1\le i\le k}$ 是 K 的一组基, 我们可以在 K 的局部邻域内, 将它们扩张为 $\mathcal{S}$ 的局部全纯截面 $(\tilde{\sigma}_i)_{1\le i\le k}$, 使得 $\tilde{\sigma}_i(K)=\sigma$. 当然这一扩张并不唯一. 比如我们可以取 $\tilde{\sigma}_i$ 满足 $\tilde{\sigma}_i(\phi)=\sigma_i+\phi(\sigma_i)$. 设 u 是 G 在 K 处的切向量. 若我们将 $\tilde{\sigma}_i$ 视为定义在 G 上, 取值于 W 中的向量函数, 则显然可以定义它关于 u 的导数 $u(\tilde{\sigma}_i)$. 进一步, 我们可以定义 $\mathbb{C}$-线性映射

$$h_u: K\longrightarrow W/K,\qquad h_u(\sigma_i)=u(\tilde{\sigma}_i)\,\mathrm{mod}K.$$

引理 1.4.2 上述 h_u 的定义不依赖于 σ_i 与 $\tilde{\sigma}_i$ 的选取.

证明 只需验证如下事实: 设 σ 是 $\mathcal{S}$ 的截面, 满足 $\sigma(K)=0$, 则 $u(\sigma)=0\in W/K$. 在 $K\in G$ 的局部邻域上, 不妨设 $\sigma=\sum\limits_i f_i\tilde{\sigma}_i$, 这里 f_i 是局部全纯函数, 且在 K 处取零值. 我们有

$$u(\sigma)=\sum_i u(f_i)\tilde{\sigma}_i(K)=\sum_i u(f_i)\sigma_i\in K.$$

这就证明了结论. ■

取 $V\in W$ 作为 K 的补空间, 于是 $K\in G_V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$. G 在 K 处的切空间可以视作 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$ 在 0 处的切空间, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$. 注意到 $V\cong W/K$, 故 $T_{G,K}\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,W/K)$.

命题 1.4.3 上述复合同构

$$T_{G,K}\cong T_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V),0}\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,W/K)$$

不依赖于 V 的选取, 即将 $u\in T_{G,K}$ 映为 $h_u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,W/K)$.

证明 将 K 的基 σ_i 扩张为 $\mathcal{S}$ 的截面 $\tilde{\sigma}_i$, 满足 $\tilde{\sigma}_i(\phi)=\sigma_i+\phi(\sigma_i)$, $\forall\phi\in G_V$. 设 u 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$ 在 $\phi=0$ 处的切向量. 为方便起见, 我们将它视为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(K,V)$ 中的元素, 并记作 $\tilde{u}$. 这就得到

$$h_u(\sigma_i)=u(\tilde{\sigma}_i)=u(\sigma_i+\phi(\sigma_i))_{\phi=0}=\tilde{u}(\tilde{\sigma}_i)\,\mathrm{mod}K.$$

因此命题中的同构 $u\to h_u$ 相当于是由映射 $u\to\tilde{u}$ 和 $\tilde{u}\to\pi\circ\tilde{u}$ 复合得到, 此处 $\pi:V\to W/K$ 是自然同构. ■

考虑递减数列 $\dim W>b^1>\cdots>b^k>0$. 我们构造所谓的旗空间 (Flag space)

$$F_{b^\cdot}(W)=\left\{(W^1,\cdots,W^k)\in\prod_{1\le p\le k}\mathrm{Grass}(b^p,W)\,\middle|\, W^i\subset W^{i-1},1<i\le k\right\}.$$

它是 $\prod\limits_{1\le p\le k}\mathrm{Grass}(b^p,W)$ 的复子流形. 点 $F\in F_{b^\cdot}(W)$ 通常可写为滤过形式

$$F:=(F^kW\subset\cdots\subset F^1W).$$

进一步, $F_{b^1\dots b^k}(W)$ 也可以看成 $F_{b^1\dots b^{k-1}}(W)$ 上的纤维丛, 对每个点

$$F_{b^1\dots b^{k-1}}:=(F^{k-1}W\subset\cdots\subset F^1W)\in F_{b^1\dots b^{k-1}}(W),$$

其上的纤维恰好是 $\mathrm{Grass}(b^{k-1},F^{k-1}W)$. 利用这一关系, 我们可以归纳计算旗空间的维数 (留给读者讨论).

推论 1.4.2 考虑 $F_{b^\cdot}(W)$ 在点 F 处的切空间 $T_{F_{b^\cdot}(W),F}\subset\bigoplus_i T_{G(b^i,W),F^\cdot W}$. 我们有

$$T_{F_{b^\cdot}(W),F}=\left\{(h_1,\cdots,h_k)\in\bigoplus_i\mathrm{Hom}(F^iW,W/F^iW)\mid h_{i|F^{i+1}W}=h_{i+1}\ \mathrm{mod}F^iW\right\}.$$

证明 设 (σ_i) 是 F^1W 的一组基. 通过合适的选取, 我们可以假设 F^pW 的基恰好是 (σ_i) 中的一部分. 由前面的讨论, 它们可以分别扩张为某个全纯子丛的截面 $(\tilde\sigma_i)$, 并且仍然保持以上假设 (即对 F 附近的滤过 F', F'^pW 的基元素取自于 F'^1W 的基). 今取 u 为 $F_{b^\cdot}(W)$ 在 F 处的切向量, 其像为

$$(h_1,\cdots,h_k)\in\bigoplus_i\mathrm{Hom}(F^iW,W/F^iW).$$

由前面的讨论, $h_i(\sigma_i)=u(\tilde\sigma_i)\ \mathrm{mod}F^iW$, $\forall\sigma_i\in F^iW$. 因而 $h_i|_{F^{i+1}W}=h_{i+1}\ \mathrm{mod}F^iW$. 这样就有

$$T_{F_{b^\cdot}(W),F}\subseteq\left\{(h_1,\cdots,h_k)\in\bigoplus_i\mathrm{Hom}(F^iW,W/F^iW)\mid h_{i|F^{i+1}W}=h_{i+1}\ \mathrm{mod}F^iW\right\}.$$

直接计算以上两个空间的维数, 即得所需结论. ■

$G=\mathrm{Grass}(k,W)$ 上带有一个自然的秩 k 全纯向量丛 S, 即对任何 $\Delta\in G$, Δ 可看作 G 中的 k 维子空间, 因而我们将它定义成 S 在 Δ 处的茎. 这样的 S 称作 tautological 丛. 我们已在前面讨论过射影空间 $\mathbb{P}(W)$ 上的 tautological 线丛. 事实上, 我们还可以证明 $\mathbb{P}(W)$ 的 Picard 群是由 tautological 线丛生成的循环群.

例 1.4.1 假设 X 是代数簇, E 是秩 k 复向量丛, H 是 ample 除子. 对充分大 ν, $E'=E\otimes H^{\otimes\nu}$ 由整体截面生成. E' 的这些整体截面诱导了全纯映射

$$\phi:X\to\mathrm{Grass}(r,n),\qquad n=\dim H^0(X,E').$$

若 E' 是线丛, 该映射就是我们熟知的线性映射. ■

例 1.4.2 设 $X\subset\mathbb{C}^N$ 是 n 维光滑子流形, 我们可以诱导 Gauss 映射

$$G:X\longrightarrow\mathrm{Grass}(n,N),\qquad x\to T_{X,x}.$$

考虑其切映射

$$dG:T_{X,x}\longrightarrow\mathrm{Hom}(T_{X,x},\mathbb{C}^N/T_{X,x}),\qquad u\to dG(u)\Big(v\longrightarrow d_uV\Big),$$

这里 V 是 X 上的向量场, 在 x 处取 v. 该定义只依赖于 v, 而与 V 的选取无关. 令 $\Phi(u,v)=dG(u)(v)$, $u,v\in T_{X,x}$. 可以证明这是对称双线性的, 因而也可以写为 $\Phi:S^2T_{X,x}\to\mathbb{C}^N/T_{X,x}$. 它被称为第二基本形式 (Second fundamental form). 将 $\mathbb{C}^N$ 替换为 $\mathbb{R}^N$ 也有同样的讨论. ■

1.5 复形与谱序列

设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴, A 是 $\mathscr{A}$ 中的对象. A 的滤过 (Filtration) 指一族子对象 (F^pA) 构成的递减列

$$A = F^0A \hookleftarrow F^1A \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow F^{p-1}A \hookleftarrow F^pA \cdots .$$

有时为方便起见, 对 $p \le 0$, 我们记 $F^pA = A$.

一个复形 $M^\cdot$ 指一族对象 (M^k) $(k \in \mathbb{Z})$ 以及一族态射 $d^k : M^k \to M^{k+1}$ 满足 $d^{k+1}d^k = 0$,

$$\cdots \longrightarrow M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \longrightarrow \cdots M^k \xrightarrow{d^k} M^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

有时我们也将该复形记作 $M^\cdot = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} M^k$. 通常情形下, 我们主要考虑左边有界的复形, 即 $M^i = 0$, 对任何 $i < 0$.

复形 $(M^\cdot, d_M)$ 的第 i 个上同调 (Cohomology) 指对象

$$H^i(M^\cdot) := \mathrm{Coker}\left(d_M^{i-1} : M^{i-1} \to \mathrm{Ker} d_M^i\right).$$

例 1.5.1 考虑 n 维紧黎曼流形 X 上的 C^∞ 整体 k 次微分形式空间 $A^k(X)$, 在微分算子 d 下, 我们有复形 $A^\cdot(X)$,

$$0 \longrightarrow A^0(X) \longrightarrow A^1(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^n(X) \longrightarrow 0.$$

$H^k_{DR}(X) := H^i(A^\cdot(X))$ 称为第 k 个 de Rham 上同调群 (de Rham cohomology). 由经典 de Rham 定理, $H^k_{DR}(X) \cong H^k(X, \mathbb{R})$ (参见定理 1.5.2 及例 1.5.7). 今后我们不再区分两者. ■

复形态射 $\phi : (M^\cdot, d_M) \to (N^\cdot, d_N)$ 是指一族态射 $\phi^i : M^i \to N^i$, 满足 $d_N \circ \phi^i = \phi^{i+1} \circ d_M$. 它诱导了相应上同调群之间的态射 $H^i(\phi^\cdot) : H^i(M^\cdot) \to H^i(N^\cdot)$. 如果所有诱导态射 $H^i(\phi^\cdot)$ 均是同构, 我们就称 $\phi^\cdot$ 是拟同构 (Quasi-isomorphism).

例 1.5.2 在 n 维紧 Kähler 流形上, 考虑全纯 De Rham 复形 $(\Omega^\cdot_X, \partial)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega_X \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \Omega^n_X \xrightarrow{\partial} 0.$$

设 $\mathbb{C}_X$ 是常层，它诱导的如下复形也记为 $\mathbb{C}_X$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0.$$

这样, 由包含关系 $\mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ 诱导了复形之间的拟同构 $\mathbb{C}_X \to (\Omega^\cdot_X, \partial)$. ■

对复形的短正合列

$$0 \longrightarrow A^\cdot \longrightarrow B^\cdot \longrightarrow C^\cdot \longrightarrow 0$$

都可诱导上同调群的长正合列

$$\cdots H^i(A^\cdot) \longrightarrow H^i(B^\cdot) \longrightarrow H^i(C^\cdot) \longrightarrow H^{i+1}(A^\cdot) \longrightarrow \cdots .$$

例 1.5.3 设 X 是紧黎曼流形, U 是 X 中的开集. 我们用 $C^\cdot_{\mathrm{sing}}(X)$ 表示 X 上的奇异上链复形; 类似地可定义 $C^\cdot_{\mathrm{sing}}(U)$. 我们定义相对奇异上链复形

$$C^\cdot_{\mathrm{sing}}(X, U) = \mathrm{Ker}(C^\cdot_{\mathrm{sing}}(X) \longrightarrow C^\cdot_{\mathrm{sing}}(U)).$$

它的上同调记作 $H^k(X,U,\mathbb{Z})$, 称为 (X,U) 的*相对奇异上同调* (Relative singular cohomology). 由短正合列

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}_{\text{sing}}(X,U) \longrightarrow C^{\cdot}_{\text{sing}}(X) \longrightarrow C^{\cdot}_{\text{sing}}(U) \longrightarrow 0$$

诱导相对奇异上同调的长正合列

$$\cdots H^{k-1}(X) \longrightarrow H^{k-1}(U) \longrightarrow H^k(X,U) \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow \cdots$$

利用相对奇异上同调及 Thom 同构定理, 在很多情形下可以有效计算 $H^k(X)$. ■

$M^{\cdot}$ 的滤过指一族子复形 $(F^pM^{\cdot})$ 构成的递减列

$$M^{\cdot} = F^0M^{\cdot} \hookleftarrow F^1M^{\cdot} \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow F^{p-1}M^{\cdot} \hookleftarrow F^pM^{\cdot} \cdots$$

使得 $(F^p(M^k))_{p\geq 0}$ 构成 M^k 的滤过, 并且有诱导态射 $d^k : F^pM^k \to F^pM^{k+1}$. 这样的复形也称为*滤子化复形* (Filtered complex). 对 $M^{\cdot}$ 的第 i 上同调 $H^i(M^{\cdot})$, 我们可以进一步诱导它的滤过

$$F^pH^i(M^{\cdot}) := \mathrm{Im}(H^i(F^pM^{\cdot}) \to H^i(M^{\cdot})).$$

上述诱导滤过也可以推广到更一般情形. 设 $\mathscr{B}$ 另一 Abel 范畴, F 是从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的左正合函子, 且 $\mathscr{A}$ 有足够多的内射对象. 这样, 对每个左边有界的复形, 我们有右导出函子作用 $R^iF(M^{\cdot})$. 如果 $M^{\cdot}$ 有滤过, 则可诱导态射

$$\alpha_{p,i} : R^iF(F^pM^{\cdot}) \longrightarrow R^iF(M^{\cdot}).$$

令

$$F^pR^iF(M^{\cdot}) := \mathrm{Im}\alpha_{p,i},$$

则可诱导 $R^iF(M^{\cdot})$ 上的滤过.

例 1.5.4 (1) 对复形 $M^{\cdot}$, 取 $F^pM^{\cdot} := M^{\geq p}$, 即

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M^p \longrightarrow M^{p+1} \longrightarrow M^{p+2} \longrightarrow \cdots.$$

这样的滤过被称为*"朴素"滤过* ("Naive" filtration).

(2) 设 $(M^{p,q}, D_1, D_2)$ 是双复形, $(M^{\cdot}, D)$ 是相应的诱导复形, 即

$$M^k = \bigoplus_{p+q=k} M^{p,q}, \qquad D = D_1 + (-1)^pD_2.$$

它有两种滤过

$$'F^pM^k = \bigoplus_{r+s=k, r\geq p} M^{r,s},$$
$$''F^pM^k = \bigoplus_{r+s=k, s\geq p} M^{r,s}.$$

考虑到对称性, 我们这里仅讨论第一种情形. 注意到 $DM^{p,q} \subseteq M^{p+1,q} \oplus M^{p,q+1}$, 所以我们有诱导态射 $D : {}'F^pM^k \to {}'F^pM^{k+1}$. 这就得到了复形 $M^{\cdot}$ 的滤过, 我们称之为*双复形滤过*. ■

设 $K^{\cdot}$ 和 $L^{\cdot}$ 是某拓扑空间 X 上 (Abel 群) 层的复形, 我们定义一个三元组 $(M^{\cdot}, \alpha, \beta)$, 这里 $M^{\cdot}$ 是 X 上的层复形, $\alpha : K^{\cdot} \to M^{\cdot}$ 及 $\beta : L^{\cdot} \to M^{\cdot}$ 是拟同构. 这样的三元组称为 $K^{\cdot}$ 和 $L^{\cdot}$ 的等

价 (Equivalence). 如果进一步要求上述 $K^\cdot, L^\cdot$ 和 $M^\cdot$ 都是滤子化复形, 且 α, β 也是滤子化拟同构, 那么 $(M^\cdot, \alpha, \beta)$ 也称为滤子化等价 (Filtered equivalence).

例 1.5.5 (1) 设 $\alpha : L^\cdot \to K^\cdot$ 是拟同构映射, 则 $(K^\cdot, \alpha, id_{K^\cdot})$ 是 $K^\cdot$ 和 $L^\cdot$ 的等价.
(2) 设有拟同构 $\alpha' : N^\cdot \to L^\cdot$ 和 $\beta' : N^\cdot \to K^\cdot$. 令 $M^\cdot = (L^\cdot \oplus K^\cdot)/(\alpha', \beta')N^\cdot$. 这样, $M^\cdot$ 连同 $L^\cdot, K^\cdot$ 到 $M^\cdot$ 的自然态射构成了 $K^\cdot$ 和 $L^\cdot$ 的等价.
(3) 利用以上结论, 可以验证等价实际上诱导了复形之间的等价关系 (留给读者验证). ■

复形滤过可以诱导出相应的谱序列. 首先让我们回顾谱序列的概念. 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathscr{A}$ 中的谱序列 (Spectral sequence) $E_a^{p,q} \Rightarrow E^n$ (这里 a 通常取 $0, 1, 2$) 由以下要素构成:
(1) $\mathscr{A}$ 中的一族对象 $(E_r^{p,q})$, 其中 p, q, r 都是整数, 且 $p, q \geq 0$, $r \geq a$. 有时也简记为 E_r.
(2) 一族态射

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1},$$

满足 $d_r^{p+r,q-r+1} d_r^{p,q} = 0$, 且当 $p, q, p+r, q-r+1$ 有一个小于零时皆有 $d_r^{p,q} = 0$. 有时也将它们简记为 d_r.
(3)

$$E_{r+1}^{p,q} = \mathrm{Ker} d_r^{p,q} / \mathrm{Im} d_r^{p-r,q+r-1}.$$

对每组 (p,q), 存在一个有关的 r_0, 使得对所有 $r \geq r_0$, 有 $d_r^{p,q} = 0 = d_r^{p-r,q+r-1}$, 从而

$$E_{r_0}^{p,q} = E_{r_0+1}^{p,q} = \cdots \stackrel{def}{=} E_\infty^{p,q}.$$

(4) 存在一族对象 (E^n) $(n \geq 0)$, 以及对每个 E^n 存在一个滤过

$$E^n = E_0^n \supseteq E_1^n \supseteq E_2^n \supseteq \cdots \supseteq E_n^n \supseteq 0,$$

使得 $E_p^n / E_{p+1}^n = E_\infty^{p,n-p}$.
有时我们也称谱序列 $(E_a^{p,q})$ 收敛于 (E^n).

设 $(M^\cdot, F^p M^\cdot)$ 是复形滤过. 我们假设对每个 k, 存在 l, 使得 $F^l M^k = 0$. 由前讨论, 我们可诱导 $H^k(M^\cdot)$ 上的滤过 $F^p H^k(M^\cdot)$. 令

$$\mathrm{Gr}_p^F H^k(M^\cdot) := F^p H^k(M) / F^{p+1} H^k(M),$$
$$\mathrm{Gr}_p^F M^k := F^p M^k / F^{p+1} M^k.$$

以下结论给出了该复形滤过与谱序列之间的关系.

定理 1.5.1 设 $(M^\cdot, F^p M^\cdot)$ 如上, 则存在谱序列 $E_0^{p,q} \Rightarrow E^n$ 满足以下条件:
(1) $E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}_p^F M^{p+q}$, 且 $d_0^{p,q}$ 由 $M^\cdot$ 的态射 d 诱导.
(2) $E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}_p^F H^{p+q}(M^\cdot)$.

证明 设

$$Z_r^{p,q} := \{x \in F^p M^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} M^{p+q+1}\},$$
$$B_r^{p,q} := Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}.$$

由 $Z_r^{p,q}$ 定义可知 $B_r^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$. 令取 $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$, 则由 d 可诱导态射 $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, 且满足 $d_r^{p+r,q-r+1} d_r^{p,q} = 0$.

注意到 $Z_0^{p,q}=F^pM^{p+q}$, $B_0^{p,q}=F^{p+1}M^{p+q}$, 故有 $E_0^{p,q}=\mathrm{Gr}_p^FM^{p+q}$.

对给定的 n, 当 $k\geq n$ 充分大时, 由假设条件知 $F^kM^n=0$, $F^kM^{n-1}=0$ 及 $F^kM^{n+1}=0$. 这样, 对 $n=p+q$，有

$$\begin{aligned}Z_{k+1}^{p,q}&=\mathrm{Ker}(d:F^pM^n\to F^pM^{n+1}),\\ Z_{k+1}^{p+1,q-1}&=\mathrm{Ker}(d:F^{p+1}M^n\to F^{p+1}M^{n+1}),\\ dZ_k^{p-k,q+k-1}&=F^pM^n\cap\mathrm{Im}d.\end{aligned}$$

因而 $E_{k+1}^{p,q}=\mathrm{Gr}_p^FH^n(M^\cdot)$.

谱序列需满足的其他条件可从定义直接验证, 我们不再一一赘述. ■

推论 1.5.1 $E_1^{p,q}=H^{p+q}(\mathrm{Gr}_p^FM^\cdot)$, 态射 $d_1^{p,q}:E_1^{p,q}\to E_1^{p+1,q}$ 等价于由以下正合列诱导的连接同态 $\delta:H^{p+q}(\mathrm{Gr}_p^FM^\cdot)\to H^{p+q+1}(\mathrm{Gr}_{p+1}^FM^\cdot)$,

$$0\longrightarrow\mathrm{Gr}_{\mathrm{p+1}}^{\mathrm{F}}M^\cdot\longrightarrow F^pM^\cdot/F^{p+2}M^\cdot\longrightarrow\mathrm{Gr}_p^FM^\cdot\longrightarrow0.$$

设 $(M^{p,q},D_1,D_2)$ 是双复形, $(M^\cdot,D)$ 是相应的诱导复形. 如例 1.5.4 (2) 所述, 此时有两种滤过 $'F^pM^n$ 及 $''F^pM^n$, 从而对应两种谱序列 $'E_r$ 及 $''E_r$. 我们考虑第一种谱序列. 此时有
(1) $'E_0^{p,q}=M^{p,q}$, $d_0=(-1)^pD_2$,
(2) $'E_1^{p,q}=H^q(M^{p,\cdot})$, $d_1:H^q(M^{p,\cdot})\to H^q(M^{p+1,\cdot})$ 由以下复形态射诱导

$$D_1:M^{p,\cdot}\to M^{p+1,\cdot}.$$

例 1.5.6 设 X 是复流形, 令 $M^{p,q}=A^{p,q}(X)$ 是 (p,q) 形式全体. 此时双复形态射取为 $(\partial,\overline{\partial})$, 诱导的单复形就是 De Rham 复形 $(A^\cdot(X),d)$. 我们称谱序列 $'E_r$ 为 Frölicher 谱序列. 此时,

$$E_1^{p,q}=H^q(A^{p,\cdot}(X),\overline{\partial})=H^q(X,\Omega_X^p).$$

态射 $d_1:E_1^{p,q}\to E_1^{p+1,q}$ 由 ∂ 诱导, 即 $\partial:H^q(X,\Omega_X^p)\longrightarrow H^q(X,\Omega_X^{p+1})$. ■

如果复形滤过 $(M^\cdot,F^pM^\cdot)$ 诱导的谱序列满足以下条件, 那么我们称其在 E_r 处退化 (Degenerate): 对任何 $k\geq r$, 有 $d_k=0$. 此时有 $E_r^{p,q}=E_\infty^{p,q}=\mathrm{Gr}_p^FH^{p+q}(M^\cdot)$. 比如紧 Kähler 流形上的 Frölicher 谱序列在 E_1 退化 (见定理 2.2.4).

设 $\mathscr{A}$ 是拓扑空间 X 上的 Abel 群层构成的范畴, $\mathcal{F}^\cdot$ 是层的复形. 设 $\underline{U}=\{U_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖. $C^p(\underline{U},\mathcal{F}^q)$ 是取值 $\mathcal{F}^q$ 的 p 次 Čech 余链. 我们有两个算子

$$\begin{aligned}\delta:&C^p(\underline{U},\mathcal{F}^q)\longrightarrow C^{p+1}(\underline{U},\mathcal{F}^q),\\ d:&C^p(\underline{U},\mathcal{F}^q)\longrightarrow C^p(\underline{U},\mathcal{F}^{q+1}).\end{aligned}$$

满足 $d^2=\delta^2=0$, $d\delta+\delta d=0$. 因此诱导双复形

$$\{C^{p,q}:=C^p(\underline{U},\mathcal{F}^q);\delta,d\}.$$

设 $(C^\cdot(\underline{U}),D)$ 是相应的诱导复形. 由此可进一步诱导出所谓的超上同调 (Hypercohomology)

$$\mathbb{H}^k(X,\mathcal{F}^\cdot):=\lim_{\underline{U}}H_D^k(C^\cdot(\underline{U})).$$

由此我们可以得到两个谱序列 $'E_r$ 及 $''E_r$. 我们有

$$'E_1^{p,q}=\lim_{\underline{U}}H_\delta^q(C^\cdot(\mathcal{F}^p))=H^q(X,\mathcal{F}^p),$$

$$''E_1^{p,q} = \varinjlim_{U} H_d^p(C^q(\mathcal{F}^{\cdot})),$$

以及

$$'E_2^{p,q} = H_d^p(H^q(X, \mathcal{F}^{\cdot})),$$
$$''E_2^{p,q} = H^p(X, H_d^q(\mathcal{F}^{\cdot})).$$

我们在这里罗列部分关于超上同调的性质.

命题 1.5.1 设 $\alpha : \mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{G}^{\cdot}$ 是拓扑空间 X 上 Abel 群层复形之间的映射, 则

(1) 我们有诱导的自然同态

$$\mathbb{H}^q(\alpha) : \mathbb{H}^q(X, \mathcal{F}^{\cdot}) \longrightarrow \mathbb{H}^q(X, \mathcal{G}^{\cdot}).$$

(2) 如果 α 是拟同构, 那么对所有 q, $\mathbb{H}^q(\alpha)$ 都是同构.

此外, 任何短正合列总是诱导超上同调群的长正合列.

关于超上同调, 还有以下经典结论.

定理 1.5.2 (抽象 de Rham 定理) 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上的层, $\mathcal{F} \xhookrightarrow{i} \mathcal{K}^{\cdot}$ 是 $\mathcal{F}$ 的析解, 那么

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \mathbb{H}^p(X, \mathcal{K}^{\cdot}).$$

假如 $H^p(X, \mathcal{K}^q) = 0$ 对所有 q 以及所有 $p > 0$ 成立, 那么我们也有典范同构

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{K}^{\cdot}) \cong H^p_{DR}(X, \mathcal{K}^{\cdot}) := H_d^p(\Gamma(X, \mathcal{K}^{\cdot})),$$

这里 $\Gamma(X, \mathcal{K}^{\cdot})$ 是指由整体截面函子 Γ 诱导的复形.

例 1.5.7 取 $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ 为局部常数层, $\mathcal{K}^{\cdot}$ 是全纯 De Rham 复形

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega_X \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \Omega_X^n \xrightarrow{\partial} 0.$$

设 $i : \mathbb{C} \to \mathcal{O}_X$ 是包含映射. 可以证明 $\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^{\cdot}$ 是 $\mathbb{C}$ 的析解, 从而 $H^k(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^k(X, \Omega_X^{\cdot})$. ■

本章习题

习题 1.1 将例子 1.1.2 的讨论推广到 n 维复向量空间上.

习题 1.2 设 $X = \mathbb{R}^3$ 是三维欧氏空间, $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ 是 Ω_X 的一组基, $g_{ij} = (e_i, e_j)$ 是黎曼内积. 请写出 Hodge 算子的具体表达式.

习题 1.3 证明引理 1.1.3 的结论.

习题 1.4 设 $X = \mathbb{R}^2$ 是二维欧氏空间, $\langle dx, dy \rangle$ 是 Ω_X 的标准正交基. 设 $\alpha_0 = f \in A^0(X)$, $\alpha_1 = fdx + gdy \in A^1(X)$, $\alpha_2 = fdx \wedge dy$, 请计算 $d^*\alpha_k$ 及 $\Delta_d \alpha_k$ $(k = 0, 1, 2)$.

习题 1.5 证明式 (1-5).

习题 1.6 设 E, F 是具备度量的向量丛, $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$ 是微分算子, P^* 是相伴算子, 证明: P 的符号与 P^* 的符号相伴, 即 $\sigma_{P^*}(\alpha) = \sigma_P(\alpha)^*$, $\forall \alpha \in \Omega_X$. 特别地, 若 $\mathrm{rk}(E) = \mathrm{rk}(F)$, 那么 P 是椭圆的当且仅当 P^* 是椭圆的.

习题 1.7 设 E 是复流形 X 上的全纯向量丛,
(1) 证明: $\overline{\partial}_E$ 的局部定义不依赖于 E 的局部标架选取.
(2) 证明: $\mathrm{Ker}(\overline{\partial}_E : A^{0,0}(E) \to A^{0,1}(E))$ 就是 E 的全纯截面全体.
(3) 验证 $\overline{\partial}_E$ 的莱布尼兹公式.
(4) 验证 $\overline{\partial}_E^2 = 0$.

习题 1.8 设 X 是 n 维紧复流形, $\alpha \in A^{n,n-1}(X) \oplus A^{n-1,n}(X)$, 证明: $\int_X \partial\alpha = \int_X \overline{\partial}\alpha = 0$, 并将该结论推广到全纯向量丛上. (提示: 利用 Stokes 公式及 $d = \partial + \overline{\partial}$)

习题 1.9 证明引理 1.3.5 的结论.

习题 1.10 证明式 (1-14).

习题 1.11 设 X 是 Kähler 流形, Y 是其复子流形. 证明: Y 也是 Kähler 流形. 进一步, 如果 Y 是紧的, 那么它不可能是 X 的边界.

习题 1.12 设 X 是紧 Kähler 流形, E 是全纯向量丛. 证明: 射影丛 $\mathbb{P}(E)$ 也是紧 Kähler 流形.

习题 1.13 具体验证推论 1.4.1.

习题 1.14 假设 $Z \in \mathrm{Grass}(k, W)$,$\{e_i\}_{1\le i\le k}$ 是 Z 的基, $\alpha_Z = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$.
(1) 证明:

$$Z = \{u \in W \mid \alpha_Z \wedge u = 0 \text{ in } \bigwedge^{k+1} W\},$$

从而命题 1.4.2 中的 Plücker 映射是单射.
(2) 进一步证明 Plücker 映射是全纯浸入.

习题 1.15 验证例 1.5.5 的诸结论.

第二章　Hodge 结构

2.1　对偶定理

Demailly 定理 (参见定理 1.2.1) 是建立 Hodge 理论基础的关键工具. 在这一节中, 我们首先阐释各类调和形式与各类同调群之间的关系, 然后利用这些结果证明 Poicaré 对偶定理及 Serre 对偶定理.

定理 2.1.1 (Hodge 基本定理)　*设 (X,g) 是紧黎曼流形, $H^k(X,\mathbb{R})$ 是 de Rham 上同调群. 设 $\mathscr{H}^k$ 是 k 次 Δ-调和形式构成的向量空间, 则我们有自然同构*

$$\Phi:\mathscr{H}^k\longrightarrow H^k(X,\mathbb{R}),\qquad \alpha\longrightarrow[\alpha].$$

证明　由定理 1.2.1 以及 Δ 的自伴性, 我们有

$$A^k(X)=\mathscr{H}^k\oplus\Delta(A^k(X)).$$

今设 $\beta\in A^k(X)$ 是闭形式, 即 $d\beta=0$. 按上述分解写为

$$\beta=\alpha+\Delta\gamma=\alpha+dd^*\gamma+d^*d\gamma,$$

这里 $\alpha\in\mathscr{H}^k$, $\gamma\in A^k(X)$. 由命题 1.2.1, $d\alpha=0$. 因而 $dd^*d\gamma=0$, 故 $d^*d\gamma\in\mathrm{Im}d^*\cap\mathrm{Ker}d$. 由引理 1.2.2 即知 $d^*d\gamma=0$, 从而 $\beta=\alpha+dd^*\gamma$. 由此可知 $[\beta]=[\alpha]\in H^k(X,\mathbb{R})$. 这就证明 Φ 的满射性.

设 $\beta\in\mathscr{H}^k$ 且为闭形式, 即 $\beta=d\gamma$. 于是由命题 1.2.1, $d^*\beta=0$. 再次由引理 1.2.2 推出 $d\gamma=0$, 即 $\beta=0$. 这就证明了 Φ 是单射. ■

推论 2.1.1　*设 X 是紧黎曼流形, 则 $H^k(X,\mathbb{R})$ 是有限维的.*

证明　因 $\mathscr{H}^k=H^k(X,\mathbb{R})$, 故由定理 1.2.1 立得. ■

这些结论可以通过复化自然过渡到复值调和形式与 $H^k(X,\mathbb{C})$ 上.

引理 2.1.1　*设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, 则存在非退化实双线性映射*

$$H^k(X,\mathbb{R})\otimes H^{2n-k}(X,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},\qquad([\alpha],[\beta])\longrightarrow\int_X\alpha\wedge\beta.$$

证明　首先说明合理性. 设 $\alpha,\tilde\alpha\in A^k_{\mathbb{R}}(X)$, $\beta,\tilde\beta\in A^{2n-k}_{\mathbb{R}}(X)$, 使得 $[\alpha]=[\tilde\alpha]\in H^k(X,\mathbb{R})$ 及 $[\beta]=[\tilde\beta]\in A^{2n-k}_{\mathbb{R}}(X)$. 不妨设 $\alpha-\tilde\alpha=d\gamma$, $\beta-\tilde\beta=d\mu$. 因而

$$\int_X\alpha\wedge\beta-\int_X\tilde\alpha\wedge\tilde\beta=\int_X\tilde\alpha\wedge d\mu+\int_X d\gamma\wedge\tilde\beta+\int_X d\gamma\wedge d\mu.\tag{2-1}$$

注意到

$$\int_X d\gamma\wedge\tilde\beta=\int_X d(\gamma\wedge\tilde\beta)-(-1)^{d^0\gamma}\int_X\gamma\wedge d\tilde\beta,$$

这里 $d^0\gamma$ 表示 γ 的次数. 由 Stokes 定理及 $d\beta=0$ 立知 $\int_X d\gamma\wedge\tilde{\beta}=0$. 类似可证式 (2-1) 右边其余项也为 0. 因此

$$\int_X \alpha\wedge\beta=\int_X \tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}.$$

其次, 我们证明其是非退化的. 任取 $\alpha\in\mathscr{H}^k$, 则由命题 1.2.1(2) 知, $*\alpha\in\mathscr{H}^{2n-k}$. 我们有

$$\int_X \alpha\wedge *\alpha=\|\alpha\|_{L^2}^2>0.$$

因此该双线性映射非退化. ■

定理 2.1.2 (Poincaré **对偶定理**) 设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, 那么我们有

$$H^k(X,\mathbb{R})\cong H^{2n-k}(X,\mathbb{R})^*.$$

证明 由引理 2.1.1, 我们有线性映射

$$\Phi: H^k(X,\mathbb{R})\longrightarrow H^{2n-k}(X,\mathbb{R})^*,\qquad \alpha\longrightarrow(\alpha,\cdot)=\int_X\alpha\wedge\cdot.$$

由于 $(\alpha,\cdot)$ 非退化, 故 Φ 是单射. 由定理 2.1.1 及推论 2.1.1, 为证上述 Φ 同构, 我们只需要证明 $\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{H}^k=\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{H}^{2n-k}$.

对任何 $\alpha\in\mathscr{H}^k$, 因 $*\Delta\alpha=\Delta(*\alpha)=0$ (命题 1.2.1), 所以 $*\alpha\in\mathscr{H}^{2n-k}$. 这就诱导了线性映射 $*:\mathscr{H}^k\to\mathscr{H}^{2n-k}$. 由于 $*^2=(-1)^k$, 因此这是同构, 从而两者维数相等. ■

注 2.1.1 Poincaré 对偶定理对一般的定向紧流形也成立. 这里只讨论紧 Hermite 流形的情形. ■

推论 2.1.2 设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, 那么我们有

$$H^k(X,\mathbb{R})\cong H_{2n-k}(X,\mathbb{R}).$$

证明 这是 de Rham 同构定理与庞加莱对偶定理的直接推论. 我们这里顺便解释一下 de Rham 同构的构造. 设 $\eta\in H_{2n-k}(X,\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$, Z 是 η 的代表元, 则可定义 $H_{2n-k}(X,\mathbb{R})=H_{2n-k}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}$ 上的泛函

$$\int_Z: H^{2n-k}(X,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \omega\longrightarrow\int_Z\omega.$$

该定义与 $\eta=[Z]$ 的代表元选取无关. 因而 η 可以视为 $H^{2n-k}(X,\mathbb{R})^*$ 中的元素, 即诱导同态

$$H_{2n-k}(X,\mathbb{R})\longrightarrow H^{2n-k}(X,\mathbb{R})^*,\qquad \eta=[Z]\longrightarrow\int_Z.$$

由 de Rham 定理, 这一映射是同构. ■

现在我们将这些结论推广到全纯向量丛上. 设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, E 是 X 上 Hermite 向量丛. 回顾由 $\overline{\partial}_E$ 算子诱导的 Dolbeault 复形

$$\cdots A^{0,q-1}(E)\xrightarrow{\overline{\partial}_E}A^{0,q}(E)\xrightarrow{\overline{\partial}_E}A^{0,q+1}(E)\cdots$$

我们定义 Dolbeault 上同调群

$$H^q(X,E)=\frac{\mathrm{Ker}\left(\overline{\partial}:A^{0,q}(E)\to A^{0,q+1}(E)\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{\partial}:A^{0,q-1}(E)\to A^{0,q}(E)\right)}.$$

如果 $E=\Omega_X^{p,0}$, 那么我们也记 $H^{p,q}(X)=H^q(X,E)$.

我们有以下类似的结果 (遗憾的是, 证明并不容易).

命题 2.1.1 设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, E 是 X 上 Hermite 向量丛. $\mathscr{H}^{0,q}(E)$ 是 $\Omega_X^{0,q}\otimes E$ 上的 Δ_E-调和形式构成的空间, 则存在自然同构

$$\mathscr{H}^{0,q}(E)\longrightarrow H^q(X,E).$$

此外, $H^q(X,E)$ 是有限维的.

类似地, 我们也能定义双线性映射

$$H^q(X,E)\otimes H^{n-q}(X,E^*\otimes K_X)\longrightarrow H^n(X,K_X)\cong\mathbb{C},\qquad ([\alpha],[\beta])\longrightarrow\int_X\alpha\wedge\beta.$$

这里 $\alpha\wedge\beta$ 是通过缩并 E 和 $E^*\otimes K_X$ 得到的 $2n$ 次微分形式.

定理 2.1.3 (Serre 对偶定理) 设 X 是 n 维紧 Hermite 流形, E 是 X 上 Hermite 向量丛. 那么我们有

$$H^q(X,E)\cong H^{n-q}(X,E^*\otimes K_X)^*.$$

证明 证明与定理 2.1.2 类似. 我们留给读者完成. ■

2.2 Hodge 分解定理

以下我们总假设 X 是 Kähler 流形, ω 是 Kähler 形式. 我们用 $\mathscr{A}_X^k$ 表示实的 k 次闭形式全体. 我们已有如下几类 Laplace 算子 Δ_d, Δ_∂ 以及 $\Delta_{\bar\partial}$. 这一节首先将阐述此三者之间的关系, 并在此基础上给出著名的 Hodge 分解定理.

首先我们定义 Lefschetz 算子

$$L:\mathscr{A}_X^k\longrightarrow\mathscr{A}^{k+2},\qquad \alpha\longrightarrow\omega\wedge\alpha.$$

注 2.2.1 由于 ω 是闭的实 2 次微分形式, 所以上述定义合理, 且 L 是实算子. ■

引理 2.2.1 存在 L 的相伴算子 $\Lambda:\mathscr{A}_X^k\to\mathscr{A}_X^{k-2}$, 使得

$$\langle L\alpha,\beta\rangle_x=\langle\alpha,\Lambda\beta\rangle_x,\qquad \alpha\in\mathscr{A}_X^{k-2},\beta\in\mathscr{A}_X^k,x\in X,$$

这里度量 $\langle,\rangle_x$ 就是由 ω 在 $\Omega_{X,x}$ 上诱导的黎曼内积.

特别地, 我们有 $\Lambda=*^{-1}L*=(-1)^k*L*$.

证明 由以下诸等式

$$\langle L\alpha,\beta\rangle\mathrm{Vol}=L\alpha\wedge*\beta=\omega\wedge\alpha\wedge*\beta=\alpha\wedge(\omega\wedge*\beta)=\alpha\wedge*(*^{-1}L*\beta)=\langle\alpha,*^{-1}L*\beta\rangle$$

即得结论. ■

引理 2.2.2 设 η 是 $(0,1)$ 次形式. 我们有

$$[\Lambda,(\eta\wedge)]=i*(\eta\wedge)*\in\mathrm{Hom}(\Omega_X^{p,q},\Omega_X^{p-1,q}),$$

这里 $[,]$ 是李括号.

证明 不失一般性, 我们设 X 上有标准常数度量 (从而 $\omega = \frac{i}{2}\sum\limits_i dz_i \wedge d\bar{z}_i$), $\eta = d\bar{z}_1$. 首先我们有 (留给读者验证)

$$*(d\bar{z}_1\wedge)* = 2\operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) \tag{2-2}$$

及

$$L \circ \operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) - \operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) \circ L = -\frac{i}{2}(d\bar{z}_1\wedge) \tag{2-3}$$

这里 $\operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)$ 是缩并记号.

由引理 2.2.1 有

$$[\Lambda, (\eta\wedge)] = *^{-1}L * (\eta\wedge) - (\eta\wedge) *^{-1} L * . \tag{2-4}$$

由式 (2-2) 及式 (2-3),

$$\begin{aligned} L * (\eta\wedge) &= 2L \circ \operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) *^{-1} = 2\operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) \circ L *^{-1} - i(d\bar{z}_1\wedge)*^{-1} \\ &= *(d\bar{z}_1\wedge) * L *^{-1} - i(d\bar{z}_1\wedge) *^{-1} . \end{aligned}$$

将上式代入 (2-4), 并注意到 $*L*^{-1} = *^{-1}L*$, 我们得到

$$[\Lambda, d\bar{z}_1] = -i *^{-1} (d\bar{z}_1)*^{-1} = i * (d\bar{z}_1\wedge) * .$$

请注意, 我们这里反复使用了如下事实 $*^{-1} = (-1)^{d^0} *$. ■

例 2.2.1 考虑 $X = \mathbb{C}^n$ 的标准常数度量, $\omega = \frac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$ 是 Kähler 形式. 设 $A_k = \frac{i}{2}dz_k \wedge d\bar{z}_k$. 由直接计算可得 (留给读者验证)

$$*^{-1}A_k* = -2i\operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right), \tag{2-5}$$

这里 int 是缩并算子, 相当于省略掉形式中的相应项. 我们有

$$\Lambda = -2i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right). \tag{2-6}$$

进一步, 由式 (2-5) 得到 $[A_i, *^{-1}A_j*] = 0$, $i \neq j$. 因而

$$[L, \Lambda] = \sum_k \left[dz_k \wedge d\bar{z}_k, \operatorname{int}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right)\right]. \tag{2-7}$$

引理 2.3.1 将指出 $[L, \Lambda] = (k-n)\mathrm{Id}$ (在 $\mathscr{A}_X^k$ 上). ■

回顾算子

$$\partial^* = - * \overline{\partial} *, \qquad \overline{\partial}^* = - * \partial * .$$

定理 2.2.1 (Hodge **等式**)

$$[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*, \qquad [\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*$$

证明 注意到上述 Hodge 等式只涉及到度量矩阵系数的一阶导数部分, 因此由引理 1.3.2, 我们不妨考虑标准常数度量情形. 注意到 Λ 是实的, 因此

$$[\Lambda, \partial](\alpha) = \overline{[\Lambda, \overline{\partial}](\bar{\alpha})}.$$

这样, 我们只需要证明 $[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*$. 由于该式两端都是 1 阶微分算子, 且度量是常数, 因而我们只需要证明该式两端有相同的符号即可. 注意到 0 阶算子的符号和自身相同, 因而 $[\Lambda, \overline{\partial}]$ 的符号为 $[\Lambda, \sigma_{\overline{\partial}}]$, 而 $-i\partial^*$ 的符号为 $i * \sigma_{\overline{\partial}} *$. 由具体计算式

$$\overline{\partial}\left(\sum_{I,J} f_{I,J} dz_I \wedge dz_J\right) = \sum_{i,I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge dz_J$$

可知其符号

$$\sigma_{\overline{\partial}} \in T_X \otimes Hom\left(\Omega_X^{p,q}, \Omega_X^{p,q+1}\right)$$

就等于 $\sum\limits_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \otimes (d\bar{z}_i \wedge)$. 今由引理 2.2.2 立得结论. ■

通过相伴关系, 我们还有其他一些 Hodge 等式.

推论 2.2.1 $[\partial^*, L] = -i\overline{\partial}$, $[\overline{\partial}^*, L] = i\partial$.

以下定理给出了各类 Laplace 算子之间的关系.

定理 2.2.2 $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d$.

证明 由定理 2.2.1, $\partial^* = i(\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda)$. 因此

$$\partial^*\overline{\partial} = -i\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial^*. \tag{2-8}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\Delta_d &= (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\partial^* + \overline{\partial}^*)(\partial + \overline{\partial}) \\ &= (\partial + \overline{\partial})(\partial^* - i[\Lambda, \partial]) + (\partial^* - i[\Lambda, \partial])(\partial + \overline{\partial})\end{aligned}$$

展开上式右边各项, 并利用式 (2-8) 及命题 1.3.1(2), 最终得

$$\Delta_d = \Delta_\partial + i\partial[\Lambda, \overline{\partial}] + i[\Lambda, \overline{\partial}]\partial.$$

对上式右边最后两项再次使用定理 2.2.1 即得 $\Delta_d = 2\Delta_\partial$. 同理可得另一等式. ■

上述定理的证明还给出了以下结论

推论 2.2.2

$$\begin{aligned}\partial^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial^* &= 0, \\ \partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial &= 0.\end{aligned}$$

推论 2.2.3 (1) $[\Delta_d, L] = [\partial, L] = 0$.
(2) $\Delta_d(A^{p,q}(X)) \subseteq A^{p,q}(X)$.
(3) 对任何 $\alpha = \sum\limits_{p+q=k} \alpha^{p,q} \in \mathscr{H}^k(X)$, 有 $\alpha^{p,q} \in \mathscr{H}^{p,q}(X)$.

证明 (1) 由于 ω 是 ∂ 闭的, 故有 $[\partial, L] = 0$. 此外, 由该结论可得

$$[\Delta_d, L] = 2([\partial\partial^*, L] + [\partial^*\partial, L]) = 2(\partial[\partial^*, L] + [\partial^*, L]\partial).$$

利用推论 2.2.1 可知上式右边为零.

(2) $\Delta_d = 2\Delta_\partial$. 后者显然是双齐次的.

(3) $0 = \Delta_d \alpha = \sum\limits_{p+q=k} \Delta_d \alpha^{p,q}$. 由 (2) 立得结论. ■

推论 2.2.4 设 $\mathscr{H}^{p,q}$ 是 (p,q) 次调和形式, 我们有以下直和分解

$$\mathscr{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}.$$

注意到 $\mathscr{H}^{p,q} \cong \mathscr{H}^{0,q}(\Omega_X^{p,0}) \cong H^q(X, \Omega_X^{p,0})$, 所以 $\mathscr{H}^{p,q}$ 在 $H^k(X,\mathbb{C})$ 中的同调类构成的空间同构于 $H^{p,q}(X) := H^q(X, \Omega_X^{p,0})$. 今后如无特别声明, 我们将不再区分两者.

定理 2.2.3 (Hodge **分解定理**) 设 X 是紧 Kähler 流形, 那么 $H^k(X.\mathbb{C})$ 有以下直和分解

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q},$$

满足 $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$. 进一步, 这一分解与 Kähler 度量的选取无关. 我们称该分解为 Hodge 分解.

证明 我们证明该分解与 Kähler 度量选取无关. 设

$$K^{p,q} = \{[\alpha] \in H^k(X,\mathbb{C}) \mid \alpha\text{是 } (p,q) \text{ 型}\}, \qquad p+q=k.$$

显见 $H^{p,q} \subseteq K^{p,q}$. 今证 $K^{p,q} \subseteq H^{p,q}$, 因而 $K^{p,q} \cong H^{p,q}$. 由于 $K^{p,q}$ 与 Kähler 度量选取无关, 故得结论.

设 $[\gamma] \in K^{p,q}$, 由定理 1.2.1 以及 Δ_d 的自伴性, 我们有 $\gamma = \alpha + \Delta_d\beta$, 这里 α 是调和形式. 由推论 2.2.3 及 γ 的选取, $\gamma = \alpha^{p,q} + \Delta_d \beta^{p,q}$ 且 $\alpha^{p,q}$ 是调和形式. 因而 $\Delta_d\beta^{p,q}$ 是闭形式. 又由

$$\Delta_d \beta^{p,q} = dd^*\beta^{p,q} + d^*d\beta^{p,q},$$

推得 $dd^*d\beta^{p,q} = 0$, 即 $d^*d\beta^{p,q} \in \mathrm{Im} d^* \cap \mathrm{Ker} d$. 由引理 1.2.2 可知, $d^*d\beta^{p,q} = 0$. 这样, $\gamma = \alpha^{p,q} + dd^*\beta^{p,q}$, 从而 $[\gamma] = [\alpha^{p,q}] \in H^k(X,\mathbb{C})$. 这就证明了 $K^{p,q} \subseteq H^{p,q}$.

其余结论都是显然的, 这里不再赘述. ■

我们称 $h^{p,q} := \dim H^{p,q}(X)$ 为 X 的 Hodge 数.

推论 2.2.5 设 X 是紧 Kähler 流形, b_k 是 Betti 数.我们有

(1) $b_k = \sum\limits_{p+q=k} h^{p,q}$.

(2) $h^{p,q} = h^{q,p}$.

(3) $h^{p,q} = h^{n-q,n-p}$, 从而 $b_k = b_{2n-k}$.

(4) b_{2k+1} 是偶数, $b_{2k} > 0$.

(5) $h^{1,0} = h^{0,1} = \frac{1}{2}b_1$ 是拓扑不变量.

证明 这里我们说明一下 (3), 其余结论都是显然的. 事实上, 由命题 1.2.1 (2) 及 Hodge 算子定义的同构 $* : H^{p,q}(X) \to H^{n-q,n-p}(X)$ 即得结论. ■

上述结论是 Kähler 流形所需满足的数值条件, 有时可以用此来构造一些非 Kähler 流形 (比如 Hopf 流形) 的例子.

例 2.2.2　(1) 设 X 是亏格 g 光滑代数曲线. 我们有 $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 2g$, $h^{1,0} = h^{0,1} = g$. 容易计算 $\chi_{top}(X) = 2 - 2g$. 特别地,

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong H^{1,0}(X) \oplus \overline{H^{1,0}(X)}.$$

$H^{1,0}(X)$ 由 g 个线性无关全纯 1-形式生成.
(2) 设 X 是光滑射影代数曲面. 我们有 $b_0 = b_4 = 1$, $b_1 = b_3 = 2q$, $b_2 = 2p_g + h^{1,1}$, $h^{1,0} = h^{0,1} = q$, $h^{2,0} = h^{0,2} = p_g$. 欧拉拓扑示性数 $\chi_{top}(X) = 2 - 4q + 2p_g + h^{1,1}$. 由于 Kähler 形式落在 $H^{1,1}$ 中, 所以 $h^{1,1} > 0$. ■

例 2.2.3　设 X 是紧 Kähler 流形. 由指数正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

诱导态射

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}), \qquad L \longrightarrow c_1(L).$$

由经典结果, 全纯线丛 L 对应的陈类 $c_1(L)$ 就是其 Chern 形式. $\mathrm{Im}c_1$ 称作 Néron-Severi 群. 利用 Hodge 分解, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}c_1 &= \mathrm{Ker}(H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)) \\ &= \mathrm{Ker}(H^2(X, \mathbb{C}) \to H^{0,2}(X)) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \\ &= (H^{1,1}(X) \oplus H^{2,0}(X)) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \\ &= H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}c_1$ 称为 Picard 簇, 也记作 $\mathrm{Pic}^0(X)$. 由指数正合列可知

$$\mathrm{Pic}^0(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H^{0,1}(X)/H^1(X, \mathbb{Z}).$$

因而 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 是复环面. ■

例 2.2.4　设 X 是复 n 维 Calabi-Yau 流形, 即具有平凡典范丛的复 n 维紧 Kähler 流形. 设 $\Omega \in H^0(X, K_X)$ 是生成元, 那么 Ω 是处处非零的全纯 n-形式. 因此由缩并映射可诱导同构

$$\Omega : T_X \cong \Omega_X^{n-1},$$

从而也诱导同调群的同构

$$\Omega : H^1(X, T_X) \cong H^1(X, \Omega_X^{n-1}).$$

此外, 我们有 $h^{p,0} = h^{n-p,0}$ 以及 $h^{n,0} = h^{0,0} = 1$.

K_3 曲面是复 2 维 Calabi-Yau 流形, $b_1(X) = 0$. 由此可知 $h^{2,0} = h^{0,0} = 1$, $h^{1,0} = 0$, 因而欧拉示性数 $\chi = h^{1,1} + 4$. 此时 $h^1(X, T_X) = h^{1,1}$. ■

回顾例 1.5.6 中 $(A^{\cdot}(X), d)$ 所对应的 Frölicher 谱序列. 当 X 是紧 Kähler 流形时,

$$E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}_p^F H^{p+q}(X) = H^{p,q}(X) \cong H^q(X, \Omega_X^p).$$

我们有以下结果.

定理 2.2.4　*设 X 是紧 Kähler 流形, 那么 X 的 Frölicher 谱序列在 E_1 处退化.*

证明 注意到 $E_{i+1}^{p,q} = \mathrm{Ker} d_i/\mathrm{Im} d_i$, 故 $\dim E_i^{p,q} \le \dim E_{i-1}^{p,q}$. 由前面讨论, $\dim E_\infty^{p,q} = \dim E_1^{p,q}$. 因此对所有 (p,q), 上述诸不等式的等号都必须成立, 这就推出 $d_i = 0$, $\forall i \ge 1$. ■

注 2.2.2 Frölicher 谱序列在 E_1 处退化等价于

$$F^pH^k(X,\mathbb{C})/F^{p+1}H^k(X,\mathbb{C}) = H^q(X,\Omega_X^p), \qquad k=p+q,$$

以及 $b_k = \sum\limits_{p+q=k} h^{p,q}$. 但令人遗憾的是, 它无法推出 $h^{p,q} = h^{q,p}$, 更无法得到 Hodge 分解. ■

作为 Hodge 定理的一个有趣例子, 我们来计算 $\mathbb{P}^n$ 的上同调群 $H^k(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. 计算中需要用到所谓的 Thom 同构定理, 这里简要介绍一下. 设 M 是 n 维有限型流形, 即存在有限开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^k$, 使得任何非空有限交 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_p}$ 都微分同胚于 $\mathbb{R}^n$. 设 $E \to M$ 是实秩为 r 的可定向向量丛, 0_E 是其零截面.

定理 2.2.5 (Thom 同构定理) *在上述假设条件下, 我们有同构*

$$H^j(E,E-0_E) \cong H^{j-r}(M), \qquad \forall j.$$

推论 2.2.6 *设 X 是紧复流形, $Z \subset X$ 是余维数为 r 的闭复子流形, 且 Z 的法丛 $N_{Z/X} \to Z$ 可定向. 我们有*

$$H^j(X,X-Z,\mathbb{Z}) \cong H^{j-2r}(Z,\mathbb{Z}).$$

特别地, 当 $j<2r$ 时, 相对上同调 $H^j(X,X-Z,\mathbb{Z}) \cong 0$.

证明 考虑 Z 的管状邻域 T, 使得 T 微分同胚于 Z 的法丛, $0_N \cong Z$. 由切除定理

$$H^j(X,X-Z,\mathbb{Z}) \cong H^j(T,T-Z,\mathbb{Z}) = H^j(N_{Z/X},N_{Z/X}-0_N).$$

另一方面, 由 Thom 同构定理,

$$H^j(N_{Z/X},N_{Z/X}-0_N,\mathbb{Z}) \cong H^{j-2r}(Z,\mathbb{Z}).$$

这就得到所要结论. ■

现在回到我们原先的问题. 令 $X=\mathbb{P}^n$, $Z=\mathbb{P}^{n-1}$, $X-Z=\mathbb{C}^n$. 考虑 $(X,X-Z)$ 的相对奇异上同调群

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k-1}(X-Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X,X-Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots.$$

由推论 2.2.6, $H^k(X,X-Z,\mathbb{Z}) \cong H^{k-2}(Z,\mathbb{Z})$. 注意到 $\mathbb{C}^n$ 是可缩的, 因此 $H^{k-1}(X-Z,\mathbb{Z})=0$. 这样, 我们得到

$$H^k(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) \cong H^{k-2}(\mathbb{P}^{n-1},\mathbb{Z}), \qquad k \ge 1.$$

现在由归纳法, 我们可以得到以下结论.

推论 2.2.7

$$h^k(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & k \text{ 是奇数}, \\ 1, & k \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

进一步, 设 $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, 那么 $H^{2p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}H^p$ $(p \le n)$. 特别地, $H^{2p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$ 的上同调类都是 (p,p) 型.

2.3 Lefschetz 分解定理

设 X 是 n 维 Kähler 流形, L 是 Lefschetz 算子, Λ 是其伴随算子.

引理 2.3.1 对 $L^r : \mathscr{A}^k \to \mathscr{A}^{k+2r}$, 我们有

$$[L^r, \Lambda] = (r(k-n) + r(r-1))L^{r-1}$$

证明 $r = 1$ 的情形来自于对 (2-7) 的直接计算, 我们留给读者验证. 一般情形可以通过如下公式归纳得到 $[L^r, \Lambda] = L[L^{r-1}, \Lambda] + [L, \Lambda]L^{r-1}$. ■

命题 2.3.1 我们有以下同构

$$L^{n-k} : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \to \Omega^{2n-k}_{X,\mathbb{R}},$$

从而有同构

$$L^{n-k} : \mathscr{A}^k \longrightarrow \mathscr{A}^{2n-k}.$$

证明 我们只须证 $L^{n-k} : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \to \Omega^{2n-k}_{X,\mathbb{R}}$ 是单射即可. 当 $k = 0$ 时, 这是显然的. 今对 k 施归纳法, 即假设对 $< k$ 的情形已证. 如果 L^{n-k} 不是单射, 那么可找到最小的正整数 r 使得 $L^r : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \to \Omega^{2n-k}_{X,\mathbb{R}}$ 不是单射, 从而 $r \leq n-k$. 设 $\alpha \in \Omega^k_{X,\mathbb{R}}$ 使得 $L^r(\alpha) = 0$ 且 $\alpha \neq 0$. 由引理 2.3.1 可知,

$$L^r\Lambda\alpha - (r(k-n) + r(r-1))L^{r-1}\alpha = \Lambda L^r\alpha = 0.$$

因而

$$L^{r-1}(L\Lambda\alpha - (r(k-n) + r(r-1))\alpha) = 0.$$

由 r 的极小性推知

$$L\Lambda\alpha - (r(k-n) + r(r-1))\alpha = 0.$$

注意到 $(k-n) + (r-1) \neq 0$, 因此 $\alpha = L\beta$, 这里 $\beta \in \Omega^{k-2}_{X,\mathbb{R}}$. 这就推出 $L^{r+1}\beta = 0$.

另一方面, 由归纳假设, $L^{n-k+2} : \Omega^{k-2}_{X,\mathbb{R}} \to \Omega^{2n-k+2}_{X,\mathbb{R}}$ 是单射, 而 $r + 1 < n - k + 2$, 故有 $\beta = 0$ 及 $\alpha = 0$, 矛盾! 因此 $L^{n-k} : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \to \Omega^{2n-k}_{X,\mathbb{R}}$ 是单射. 综上可知, 该结论对任何情形都成立. ■

设 $\alpha \in \Omega^k_{X,\mathbb{R}}$, $k \leq n$. 如果 $L^{n-k+1}\alpha = 0$, 那么 α 称为本原的 (Primitive).

引理 2.3.2 设 $\alpha \in \Omega^k_{X,\mathbb{R}}$ $(k \leq n)$, 则 α 是本原的当且仅当 $\Lambda\alpha = 0$.

证明 令 $r = n - k + 1$, 由引理 2.3.1, 我们有

$$[L^r, \Lambda]\alpha = (r(k-n) + r(r-1))L^{r-1}\alpha = 0,$$

第二个等号来自于 $(k-n) + (r-1) = 0$. 因而 $L^r\Lambda\alpha = 0$ 当且仅当 $\Lambda L^r\alpha = 0$.

另一方面, 因 $r < n - k + 2$, 故由命题 2.3.1 知, $L^r(\Lambda\alpha) = 0$ 当且仅当 $\Lambda\alpha = 0$. 由相伴性, Λ 在 $\Omega^{2n-k+2}_{X,\mathbb{R}}$ 上是单射, 因而 $\Lambda L^r\alpha = 0$ 当且仅当 $L^r\alpha = 0$. 综上即得结论. ■

注 2.3.1 Lefschetz 算子及其相伴算子显然也可以自然定义到复化空间 $\Omega^2_{X,\mathbb{C}}$ 上, 因此本原形式的概念及判别条件等等也都有自然推广. ■

定理 2.3.1 (Lefschetz 分解) 对任何 $\alpha \in \Omega^k_{X,\mathbb{R}}$, 存在唯一的分解

$$\alpha = \sum_r L^r \alpha_r,$$

这里 $\alpha_r \in \Omega^{k-2r}_{X,\mathbb{R}}$ 是本原的, $\max(k-n,0) \leq r \leq \frac{k}{2}$.

证明 若次数 $d^0\alpha := k > n$, 则由命题 2.3.1, $\alpha = L^{k-n}\beta$, 这里次数 $d^0\beta = 2n-k < n$. 因而证明可以归结到 $d^0\alpha \leq n$ 的情形.

先证分解的存在性. $L^{n-k+1}\alpha \in \Omega^{2n-k+2}_{X,\mathbb{R}}$. 由命题 2.3.1, 存在 $\beta \in \Omega^{k-2}_{X,\mathbb{R}}$, 使得 $L^{n-k+2}\beta = L^{n-k+1\alpha}$, 即 $L^{n-k+1}(\alpha - L\beta) = 0$. 因而 $\alpha - L\beta$ 是本原的. 令 $\alpha_0 = \alpha - L\beta$, 即 $\alpha = L\beta + \alpha_0$. 对 β 作类似讨论, 依此类推即得分解.

再证唯一性. 设 $\sum\limits_r L^r\alpha_r = 0$, $k \leq n$, 诸 α_r 皆本原. 设 r_0 是出现在 $\sum\limits_r L^r\alpha_r$ 中的最小下标. 若 $r_0 \geq 1$, 则 $L(\sum\limits_r L^{r-1}\alpha_r) = 0$, 从而 $\sum\limits_r L^{r-1}\alpha_r = 0$. 这样, 我们可以将归纳法用到 $\sum\limits_r L^{r-1}\alpha_r = 0$ 上. 若 $r_0 = 0$, 则 α_0 是 k 次本原形式, 即 $L^{n-k+1}\alpha_0 = 0$. 这样

$$L^{n-k+2}\sum_{r>0} L^{r-1}\alpha = L^{n-k+1}\sum_{r>0} L^r\alpha_r = 0.$$

再次由命题 2.3.1 得到 $\sum\limits_{r>0} L^{r-1}\alpha_r = 0$, 从而可施归纳法于其上. ■

注 2.3.2 (1) 对复形式 $\alpha = \sum\limits_{p+q=k} \alpha^{p,q} \in \Omega^k_{X,\mathbb{C}}$, 考虑 Lefschetz分解 $\alpha = \sum\limits_r L^r\alpha_r$. 不妨设 $\alpha_r = \sum\limits_{p+q=r} \alpha_r^{p,q}$. 我们有 $\alpha^{p,q} = \sum\limits_r L^r\alpha_r^{p-r,q-r}$.

(2) 设 ω 是 X 的 Kähler 形式. 对 $\alpha \in \mathscr{A}^k$, $\omega \wedge d\alpha = d(\omega\wedge\alpha)$. 这就诱导了映射

$$L : H^k(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{k+2}(X,\mathbb{R}).$$

例 2.3.1 设 $X = \mathbb{C}^n$ 有标准 Kähler 度量, 其 Kähler 形式为 $\omega = \frac{i}{2}\sum\limits_i, dz_i \wedge d\bar{z}_i$. 今设 $\alpha \in \Omega^2_{X,\mathbb{C}}$, 我们可以写为

$$\alpha = \sum_{i<j} a_{ij}dz_i\wedge dz_j + \sum_{i<j} b_{ij}d\bar{z}_i\wedge d\bar{z}_j + \sum_{i,j} c_{ij}dz_i\wedge d\bar{z}_j.$$

由例 2.2.1, $\Lambda\alpha = -2i\sum\limits_{k=1}^n c_{kk}$. 另一方面,

$$L^{n-1}\alpha = \frac{(-2i\sum\limits_{k=1}^n c_{kk})}{n}\omega^n.$$

这样, α 是本原形式当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^n c_{kk} = 0$.

设

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}(-2i\sum_k c_{kk}), \qquad \alpha_0 = \alpha - L\alpha_1,$$

这就得到 α 的 Lefschetz 分解 $\alpha = L\alpha_1 + \alpha_0$. ■

定理 2.3.2 (强 Lefschetz 定理) 设 X 是 n 维紧 Kähler 流形. 我们有以下同构

$$L^{n-k} : H^k(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n-k}(X,\mathbb{R}).$$

证明 由推论 2.2.3 知 $[\Delta_d, L] = 0$, 故 L^{n-k} 将调和形式映到调和形式. 这样, 我们有以下合理映射 $L^{n-k} : \mathscr{H}^k(X) \to \mathscr{H}^{2n-k}(X)$. 由命题 2.3.1 知 L^{n-k} 是单射, 故上述映射是同构. 再由定理 2.1.1 即得结论. ■

由类似的讨论, 我们有

定理 2.3.3 (Lefschetz 分解定理) 设 X 是 n 维紧 Kähler 流形, $[\alpha] \in H^k(X, \mathbb{R})$, 则存在唯一的分解

$$\alpha = \sum_r L^r \alpha_r,$$

这里 $[\alpha_r] \in H^{k-2r}(X, \mathbb{R})$, $\max(k-n, 0) \le r \le \frac{k}{2}$, 并且 $[\alpha_r]$ 在同调意义下是本原的, 即

$$[L^{n-k+2r+1}\alpha_r] = [0] \in H^{2n-k+2r+2}(X, \mathbb{R}).$$

注 2.3.3 有时为方便起见, 我们记 $(r \le n)$

$$A^r_{X\ \mathrm{prim}} := \mathrm{Ker} L^{n-r+1} \subseteq A^r_X,$$
$$H^r(X, \mathbb{C})_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Ker} L^{n-r+1} \subseteq H^r(X, \mathbb{C}).$$

$H^r(X, \mathbb{C})_{\mathrm{prim}}$ 称为本原上同调 (Primitive cohomology). 这样, 定理 2.3.1 与定理 2.3.3 可改写为

$$A^k_X \cong \bigoplus_{k-2r \ge 0} L^r A^{k-2r}_{X\ \mathrm{prim}},$$
$$H^k(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{k-2r \ge 0} L^r H^{k-2r}(X, \mathbb{C})_{\mathrm{prim}}.$$
■

下面的结论给出了 Lefschetz 算子和 Hodge 算子之间的关系.

命题 2.3.2 设 $\gamma \in \Omega^{p,q}_X \subseteq \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ 是本原的, 那么

$$*\gamma = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} i^{p-q} \frac{L^{n-k}}{(n-k)!}\gamma.$$

证明 证明来自于直接计算等式两端. 鉴于计算复杂性, 我们不再具体展开. 读者可以通过习题 2.5 的指引完成验证. ■

2.4 Hodge 指标定理

设 X 是 n 维紧 Kähler 流形, ω 是 Kähler 形式, L 是 Lefschetz 算子. 设 $\alpha, \beta \in H^k(X.\mathbb{R})$. 我们定义

$$Q(\alpha, \beta) = \int_X L^{n-k}\alpha \wedge \beta = \int_X \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \beta.$$

这就给出了 $H^k(X, \mathbb{R})$ 上的相交型. 这一定义显然也可以延拓到 $H^k(X, \mathbb{C})$ 上. 由此可以诱导 $H^k(X, \mathbb{C})$ 上的 Hermite 形式

$$H_k(\alpha, \beta) = i^k Q(\alpha, \bar{\beta}), \qquad \forall \alpha, \beta \in H^k(X, \mathbb{C}).$$

引理 2.4.1 设 $\alpha, \beta \in H^{p,q}(X) \subseteq H^k(X, \mathbb{C})$ 都是本原的, 则

$$H_k(\alpha, \beta) = (n-k)! \cdot (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot (-i)^{p-q-k} \cdot (\alpha, \beta)_{L^2}.$$

证明 这是命题 2.3.2 的直接推论. ■

命题 2.4.1 Lefschetz 分解

$$H^k(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{k-2r\geq 0} L^r H^{k-2r}(X,\mathbb{C})_{\text{prim}}$$

在 H_k 下是正交直和分解. 此外, H_k 限制在 $L^r H^{k-2r}(X,\mathbb{C})_{\text{prim}}$ 上相当于 $(-1)^r H_{k-2r}$.

证明 (1) 设 $\alpha = L^r\alpha'$, $\beta = L^s\beta'$, $\alpha' \in H^{k-2r}(X,\mathbb{C})_{\text{prim}}$, $\beta' \in H^{k-2s}(X,\mathbb{C})_{\text{prim}}$, $r<s$. 于是 $L^{n-k}\alpha\wedge\beta = (L^{n-k+r+s}\alpha')\wedge\beta'$. 注意到 $n-k+2r < n-k+r+s$, 因此 $L^{n-k+r+s}\alpha' = 0$. 这就推出 $H_k(\alpha,\beta)=0$.

设 $\alpha,\beta \in H^{k-2r}(X,\mathbb{C})_{\text{prim}}$, 则

$$H_k(L^r\alpha, L^r\beta) = i^k Q(L^r\alpha, L^r\bar{\beta}) = i^k\int_X L^{n-k+2r}\alpha\wedge\bar{\beta} = i^k Q(\alpha,\bar{\beta}) = (-1)^r H_{k-2r}(\alpha,\beta).$$

这就证明了结论. ■

命题 2.4.2 设

$$H^{p,q}_{\text{prim}} := H^k(X,\mathbb{C})_{\text{prim}} \cap H^{p,q}(X),$$

那么

(1) Hodge 分解

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

在 H_k 下是正交直和分解.

(2) $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q-k} H_k$ 在 $H^{p,q}_{\text{prim}}$ 上是正定的.

证明 (1) 设 $\alpha^{p,q}, \beta^{p',q'} \in H^k(X,\mathbb{C})$, $p+q=p'+q'=k$, $p>p'$. 因而 $L^{n-k}\alpha^{p,q}\wedge\overline{\beta^{p',q'}}$ 是 $(n-k+p+q', n-k+p'+q)$ 型, 亦即 $(n+p-p', n+p'-p)$ 型. 注意到 $n+p-p'>n$, 因此上述形式等于零, 从而 $H_k(\alpha^{p,q},\beta^{p',q'})=0$.

(2) 是引理 2.4.1 的直接推论. ■

推论 2.4.1 $H^k(X,\mathbb{C})$ 在 H_k 下有如下正交直和分解

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{2r\leq k}\bigoplus_{p+q=k-2r} L^r H^{p,q}_{\text{prim}}.$$

在 $H^n(X,\mathbb{R})$ 上, $Q(\alpha,\beta) = \int_X \alpha\wedge\beta$. 如果 n 是偶数, 那么相交型 Q 是对称的.

定理 2.4.1 (Hodge 指标定理) 设 n 是偶数, 那么在 $H^n(X,\mathbb{R})$ 上, 相交型 Q 的符号差

$$\text{sign}(Q) = \sum_{a,b}(-1)^a h^{a,b}(X).$$

证明 设 $H(\alpha,\beta) = \int_X \alpha\wedge\bar{\beta}$. 它是 $H^n(X,\mathbb{C})$ 上的 Hermite 型, 且具有与 Q 相同的符号差. 由推论 2.4.1 的正交直和分解, 我们只需分别计算各分解项上的符号差.

由命题 2.4.1 可得

$$\text{sign}(H\mid_{L^r H^{a,b}_{\text{prim}}}) = (-1)^{\frac{n}{2}}\text{sign}(H_n\mid_{L^r H^{a,b}_{\text{prim}}}) = (-1)^{\frac{n}{2}+r}\text{sign}(H_{n-2r}\mid_{H^{a,b}_{\text{prim}}}).$$

进一步, 由命题 2.4.2 (2) 可得

$$\operatorname{sign}(H\mid_{L^r H^{a,b}_{\mathrm{prim}}}) = (-1)^b h^{a,b}_{\mathrm{prim}} = (-1)^a h^{a,b}_{\mathrm{prim}}, \qquad a+b=n-2r.$$

这样

$$\operatorname{sign}(Q) = \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b}_{\mathrm{prim}}.$$

另一方面, 由

$$H^{a,b} = \bigoplus_{k\geq 0} L^k H^{a-k,b-k}_{\mathrm{prim}}$$

得到

$$h^{a,b} = h^{a,b}_{\mathrm{prim}} + \sum_{k\geq 1} h^{a-k,b-k}_{\mathrm{prim}}.$$

同理有

$$h^{a-1,b-1} = \sum_{k\geq 1} h^{a-k,b-k}_{\mathrm{prim}}.$$

这样就有 $h^{a,b}_{\mathrm{prim}} = h^{a,b} - h^{a-1,b-1}$. 因而

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(Q) &= \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a (h^{a,b} - h^{a-1,b-1}) \\
&= \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b} + \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^{a-1} h^{a-1,b-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b} + \sum_{r=1}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b} \\
&= \sum_{a+b=n} (-1)^a h^{a,b} + 2\sum_{r=1}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b}.
\end{aligned}$$

利用 Poincaré 对偶定理,

$$2\sum_{r=1}^{n/2} \sum_{a+b=n-2r} (-1)^a h^{a,b} = \sum_{a+b\equiv 0 \pmod 2} (-1)^a h^{a,b} - \sum_{a+b=n} (-1)^a h^{a,b}.$$

由复共轭条件,

$$\sum_{a+b\equiv 1 \pmod 2} (-1)^a h^{a,b} = 0.$$

这样就得到 $\operatorname{sign}(Q) = \sum_{a,b} (-1)^a h^{a,b}$. ■

例 2.4.1 考虑紧光滑射影代数曲面 X, 我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(Q) &= 2 + 2h^{2,0} - h^{1,1}, \\
\chi_{\mathrm{top}}(X) &= 2 + 2h^{2,0} + h^{1,1} - 4h^{1,0}, \\
\chi(\mathcal{O}_X) &= 1 - h^{1,0} + h^{2,0}.
\end{aligned}$$

由诺特公式可知 $\mathrm{sign}(Q) = K_X^2 - 8\chi(\mathcal{O}_X)$.

由定理 2.4.1, $H^{1,1}(X)$ 上的相交型的符号恰好由一个 $+1$ 和若干 -1 构成. 这就导出代数曲面上经典形式的 Hodge 指标定理. ■

2.5 Hodge 结构

设 $V_{\mathbb{Z}}$ 是有限秩的自由 Abel 群, $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$. 如果 $V_{\mathbb{C}}$ 有以下分解, 则称之为权 k 的整 Hodge 结构 (简称 HS):

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}, \tag{2-9}$$

满足 $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$. 由这一分解可诱导所谓的 Hodge 滤过 $F^{\cdot}V$:

$$V_{\mathbb{C}} = F^0V_{\mathbb{C}} \supset F^1V_{\mathbb{C}} \supset \cdots F^kV_{\mathbb{C}} \supset F^{k+1}V_{\mathbb{C}} = 0,$$

这里

$$F^pV_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r \geq p} V^{r,k-r}.$$

容易验证,

$$V_{\mathbb{C}} = F^pV_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{k-p+1}V_{\mathbb{C}}}, \tag{2-10}$$

$$V^{p,q} = F^pV_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^qV_{\mathbb{C}}}. \tag{2-11}$$

如果 $(V_{\mathbb{Z}}, F^{\cdot}V_{\mathbb{C}})$ 是权 $2n$ 的 Hodge 结构, 那么我们将 V 中 (n,n) 型的整类称作 Hodge 类 (Hodge class), 并将它们构成的空间记为

$$\mathrm{Hdg(V)} := V_{\mathbb{Z}} \cap V^{n,n} = V_{\mathbb{Z}} \cap F^nV_{\mathbb{C}}. \tag{2-12}$$

后面的章节中, 我们将详细介绍几种重要的 Hodge 类, 比如闭链类、陈类等. 这里不再赘述.

例 2.5.1 设 X 是紧 Kähler 流形, $V_{\mathbb{Z}} = H^k(X,\mathbb{Z})$ 是权 k 整 Hodge 结构. 设 $F^pA^k(X)$ 是由所有 $(r,k-r)$ 次形式 ($r \geq p$) 的和生成的空间. 我们有

$$F^pH^k(X,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(d : F^pA^k(X) \to F^pA^{k+1}(X))}{\mathrm{Im}(d : F^pA^{k-1}(X) \to F^pA^k(X))}. \tag{2-13}$$

(留给读者验证) ■

例 2.5.2 我们记 $\mathbb{Z}(-k)$ 为权 $2k$ 的 1 维 Hodge 结构, 具体定义如下: 设 $V_{\mathbb{Z}} = (2\pi i)^{-k}\mathbb{Z}$, $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} = V^{k,k}$. 比如对于 n 维紧复流形 X, $H^{2n}(X) \cong \mathbb{Z}(-n)$. ■

假设 $V_{\mathbb{Z}}$ 上有相交型 Q, 我们可以将 Q 自然延拓到 $V_{\mathbb{C}}$ 上. 如果 Q 满足以下诸条件, 那么我们称 $(V_{\mathbb{Z}}, F^pV_{\mathbb{C}})$ 为整极化 Hodge 结构:
(1) $Q(\alpha,\beta) = (-1)^kQ(\beta,\alpha)$, $\alpha,\beta \in V_{\mathbb{Z}}$;
(2) 设 $H(\alpha,\beta) = i^kQ(\alpha,\bar{\beta})$ 是由 Q 诱导的 Hermite 型, 则式 (2-9) 是 H 下的正交直和分解;
(3) 对任何 $\alpha \in V^{p,q}$, 有

$$i^{p-q-k} \cdot (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} H(\alpha,\alpha) > 0.$$

注 2.5.1 有时为书写方便，我们也常采用所谓的 Weil 算子 C, 它是 $V_{\mathbb{C}}$ 上的线性算子, 且满足 $Cx = i^{p-q}x$, $\forall x \in V^{p,q}$. 易知 C 将 $V_{\mathbb{R}}$ 映到 $V_{\mathbb{R}}$. 这样, 极化条件 (3) 也可以写为 $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}Q(C\alpha,\bar{\alpha}) > 0$ 或者 $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}Q(\alpha,\overline{C\alpha}) > 0$. 请注意, 在不同的书里, 相交型 Q 或者对应的 Hermite 型有时可能会与这里的定义相差一个正负号. ■

我们首先考察权 1 的整 Hodge 结构 $V_{\mathbb{Z}}$, 有分解

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}, \qquad V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}.$$

因此 $V_{\mathbb{C}}$ 是偶数维的, 不妨设 $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2g$. 由包含关系 $V^{1,0} \subseteq V_{\mathbb{C}}$ 可诱导对偶投射

$$i : V_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow (V^{1,0})^*,$$

其核 $\mathrm{Ker}i = (V^{0,1})^*$. 由 Hodge 结构可知 $V_{\mathbb{R}}^* \cap (V^{0,1})^* = 0$, 因而 i 诱导了 $\mathbb{R}$-同构 $i : V_{\mathbb{R}}^* \to (V^{1,0})^*$ 且 $i(V_{\mathbb{Z}}^*) \subseteq (V^{1,0})^*$ 是具有极大秩的格. 我们称 $\mathrm{Alb}V_{\mathbb{C}} := (V^{1,0})^*/i(V_{\mathbb{Z}}^*)$ 为该 Hodge 结构的 Albanese 簇.

进一步假设上述整 Hodge 结构是极化的, 那么相交型 Q 所需满足的条件相当于

(1) Q 是反对称双线性型;

(2) $Q(\xi,\xi') = 0$, $\forall \xi,\xi' \in V^{1,0}$;

(3) $iQ(\xi,\bar{\xi}) > 0$, $\forall \xi \in V^{1,0}$, $\xi \neq 0$.

在 $V_{\mathbb{Z}}$ 的一组典范基下, Q 可以表成如下矩阵

$$\begin{pmatrix} O & \Delta \\ -\Delta & O \end{pmatrix},$$

这里 $\Delta = \mathrm{diag}[\delta_1,\cdots,\delta_g]$ 是 g 阶对角阵. 我们称 Q 为 Δ 型极化; 如果所有 δ_i 皆等于 1, 则称之为主极化.

不妨假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g$ 是 $V_{\mathbb{Z}}$ 中对应 Δ 型极化的一组典范基. 设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_g$ 是 $V^{1,0}$ 的一组基, 则可将 φ_k 表为 α_i,β_j 的线性组合,

$$(\varphi_1,\cdots,\varphi_g) = (\alpha_1,\cdots,\beta_g)\Omega,$$

这里 Ω 是 $(2g \times g)$ 阶矩阵, 称之为周期矩阵. 令

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix},$$

这里 Ω_i 是 g 阶方阵. Δ 型极化等价于给出如下条件

(1) $\Omega_1^t\Delta\Omega_2$ 是对称矩阵;

(2) $i(\Omega_1^t\Delta\overline{\Omega}_2 - \Omega_2^t\Delta\overline{\Omega}_1)$ 是 Hermite 正定矩阵.

后一条件推出 Ω_1 是可逆的. 我们取 $V^{1,0}$ 的另一组基

$$(\varphi_1',\cdots,\varphi_g') = (\varphi_1,\cdots,\varphi_g)\Omega_1^{-1}\Delta^{-1},$$

则新的周期矩阵形如

$$\Omega' = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ Z \end{pmatrix}.$$

这样, 极化条件等价于

$$Z = Z^t, \qquad \mathrm{Im}Z > 0.$$

这组条件称为黎曼周期条件, 满足该条件的 g 阶复方阵构成的集合称作 Siegel 上半空间 $\mathcal{D}_g$. 上述 $\varphi_1',\cdots,\varphi_g'$ 以及周期矩阵 Ω' 称作关于典范基 $\alpha_1,\cdots,\beta_g$ 的规范化.

进一步, 对于主极化情形, 假设两组典范基的关系为

$$(\alpha_1,\cdots,\beta_g)=(\alpha_1',\cdots,\beta_g')\sigma,\qquad \sigma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}),\tag{2-14}$$

并且新周期矩阵对应 Z', 那么 $Z'=(DZ+C)(BZ+A)^{-1}$ (留给读者验证). 这样, $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ 给出了 $\mathcal{D}_g$ 上的群作用. 注意到 $\pm I_g$ 作用是平凡的, 因此诱导模群 $\Gamma_g=\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})/\{\pm I_g\}$ 的作用. 我们将商空间 $D_g=\mathcal{D}_g/\Gamma_g$ 称为该主极化 Hodge 结构的周期域 (Period domain).

例 2.5.3 设 X 紧黎曼曲面. $H^1(X,\mathbb{C})$ 有权 1 的主极化 Hodge 结构. 它的相交型为

$$Q(\alpha,\beta)=\int_X\alpha\wedge\beta,\qquad \alpha,\beta\in H^1(X).$$

利用庞加莱对偶可以验证, 前面定义的周期矩阵实际上与经典代数曲线理论中的对应概念 (在相差一个辛群作用下) 是一致的. ∎

现在我们讨论权 2 的极化 Hodge 结构. 设 Q 是 $V_{\mathbb{Z}}$ 上的对称相交型. Hodge 分解为

$$V_{\mathbb{C}}=V^{2,0}\oplus V^{1,1}\oplus V^{0,2},\qquad V^{0,2}=\overline{V^{2,0}},\quad \overline{V^{1,1}}=V^{1,1}.$$

这一分解在 Hermite 型 $H(\alpha,\beta)=Q(\alpha,\bar\beta)$ 下是正交直和分解, 并且 H 在 $V^{1,1}$ 上负定, 在 H 在 $V^{2,0}$ 及 $V^{0,2}$ 上正定 (请注意这里的 H 与前面的定义差一个负号).

反过来, 一个带有整相交型 Q 的权 2 极化 Hodge 结构也可以由一个秩为 $h^{2,0}$ 且满足以下条件的复子空间 $V^{2,0}$ 完全确定 (验证留给读者):

(1) $Q(\alpha,\alpha)=0$, $\forall\alpha\in V^{2,0}$,

(2) $H(\alpha,\alpha)>0$, $\forall\alpha\in V^{2,0}$, $\alpha\neq 0$,

(3) Q 的符号差为 $(2h^{2,0},h^{1,1})$.

特别地, 如果进一步要求 $h^{2,0}=1$, 那么 $(V_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q})$ 上满足诸条件的所有权 2 极化 Hodge 结构形成所谓的周期域

$$\mathcal{D}=\{\omega\in\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})\mid Q(\omega,\omega)=0,\quad Q(\omega,\bar\omega)>0\}.$$

$\mathcal{D}$ 是一个复流形. 这里的 ω 可以视为 $V^{2,0}$ 的生成元.

设 $(V_{\mathbb{Z}},F^pV_{\mathbb{C}})$ 和 $(W_{\mathbb{Z}},F^pW_{\mathbb{C}})$ 分别是权 n 和 $m=n+2r$ 的 Hodge 结构, $\phi:V_{\mathbb{Z}}\to W_{\mathbb{Z}}$ 是群同态. 如果 ϕ 可以扩充为 $\mathbb{C}$-线性同态 $\phi:V_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$, 且满足

$$\phi(V^{p,q})\subseteq W^{p+r,q+r},$$

那么我们就称 ϕ 为 (r,r) 型的 Hodge 结构态射. 如果 $r=0$, 则直接称为 Hodge 结构态射. 我们有以下一些性质 (留给读者验证).

命题 2.5.1 设 ϕ 是 (r,r) 型的 Hodge 结构态射, 那么我们有

(1) $\mathrm{Im}\phi\cap F^{k+r}W_{\mathbb{C}}=\phi(F^kV_{\mathbb{C}})$.

(2) $(\mathrm{Im}\phi)^{p+r,q+r}=\mathrm{Im}\phi\cap W^{p+r,q+r}=\phi(V^{p,q})$.

(3) $\mathrm{Im}\phi=\bigoplus\limits_{p+q=n}(\mathrm{Im}\phi)^{p+r,q+r}$.

命题 2.5.2 设 $K_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Ker}\phi \subseteq V_{\mathbb{Z}}$, $K_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \subseteq V_{\mathbb{C}}$. 设 $F^pK_{\mathbb{C}} = K_{\mathbb{C}} \cap F^pV_{\mathbb{C}}$, 则 $(K_{\mathbb{Z}}, F^pK_{\mathbb{C}})$ 构成 Hodge 结构, 即 $K_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$, 此处 $K^{p,q} = F^pK_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^qK_{\mathbb{C}}}$.

对于 Corkerϕ, 我们也有类似的结果.

命题 2.5.3 设 $W_{\mathbb{Q}}$ 是有理极化 Hodge 结构, $V_{\mathbb{Q}} \subseteq W_{\mathbb{Q}}$ 是子 Hodge 结构, 那么 $V_{\mathbb{Q}}$ 也是极化的. 进一步, 设 $V_{\mathbb{Q}}^{\perp} \subseteq W_{\mathbb{Q}}$ 是 $V_{\mathbb{Q}}$ 在有理相交型 Q 下的正交补空间, 则 $V_{\mathbb{Q}}^{\perp}$ 也是 $W_{\mathbb{Q}}$ 的子 Hodge 结构.

例 2.5.4 设 $\pi : X \to Y$ 是紧 Kähler 流形之间的全纯映射. 我们显然有拉回映射

$$\pi^* : H^k(Y, \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{R}).$$

π^* 诱导了 $(0,0)$ 型的 Hodge 结构态射. 特别地, 如果 π 是全纯满射, 那么可以证明 $\pi^* : H^k(Y, \mathbb{Q}) \to H^k(X, \mathbb{Q})$ 是单射 (见习题 2.14).

另一方面, π 诱导了奇异同调之间的态射 $(\dim X = n)$

$$\pi_* : H_{2n-k}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2n-k}(Y, \mathbb{Z}), \qquad (\psi : \Delta_l \to X) \longrightarrow \pi_*(\psi) = \pi \circ \psi,$$

这里 ψ 是奇异链. 设 $\dim Y = n + r$, 利用上述态射及庞加莱对偶定理, 我们得到所谓的 Gysin 态射

$$\pi_* : H^k(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k+2r}(X, \mathbb{Z}).$$

可以验证, Gysin 态射诱导了 (r, r) 型 Hodge 结构态射 (见习题 2.15). ■

设 V 和 V' 分别是权 k 和 l 的 Hodge 结构, 我们可以定义 $V \otimes V'$ 的权为 $k + l$ 的 Hodge 结构, 称为 Hodge 结构张量积:

$$\begin{cases} (V \otimes V')_{\mathbb{Z}} &= V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} V'_{\mathbb{Z}}, \\ F^p(V \otimes V')_{\mathbb{C}} &= \sum\limits_{r+s=p} F^rV_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} F^sV'_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

后一式等价于

$$(V \otimes V')^{p,q} = \sum_{r+s=p, u+v=q} V^{r,u} \otimes V'^{s,v}.$$

同样地, 我们还可定义 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 的权为 $l - k$ 的 Hodge 结构:

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(V, V')_{\mathbb{Z}} &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V_{\mathbb{Z}}, V'_{\mathbb{Z}}), \\ F^p\mathrm{Hom}(V, V')_{\mathbb{C}} &= \{f : V_{\mathbb{C}} \to V'_{\mathbb{C}} \mid f(F^iV_{\mathbb{C}}) \subseteq F^{i+p}V'_{\mathbb{C}}, \forall i\}. \end{cases}$$

例 2.5.5 设 V 是权 k 的 Hodge 结构. 回顾例 2.5.2 定义的 $\mathbb{Z}(-n)$. 令 $V(-n) := V \otimes \mathbb{Z}(-n)$, 则 $V(-n)$ 是权 $k + 2n$ 的 Hodge 结构,

$$V_{\mathbb{C}}(-n)^{p,q} = V^{p-n,q-n} \otimes V^{n,n}, \qquad p + q = 2n + k.$$

由缩并映射, 我们得到自然的 $(-n, -n)$ 型 Hodge 结构态射 $\phi : V(-n) \to V$. 这样, 对任何 (n, n) 型的 Hodge 结构态射 $\psi : V \to W$, 我们都可以诱导 Hodge 结构态射 $\psi\phi : V(-n) \to W$. ■

例 2.5.6 设 X 是 n 维紧 Kähler 流形. 由 Poincaré 对偶定理, 我们得到权 $2n$ 的 Hodge 结构的态射

$$H^k(X) \otimes H^{2n-k}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}(-n).$$

它将 $H^{2n-k}(X)$ 与 $\mathrm{Hom}(H^k(X),\mathbb{Z}(-n))$ 等同起来. ■

Hodge 结构张量积的一个经典例子来自于 Künneth 公式.

定理 2.5.1 (Künneth **公式**) *设 X 和 Y 是局部可缩拓扑空间 (即每个点都有局部可缩基), 且上同调 $H^*(X,\mathbb{Z})$ 是有限生成的, 则由杯积映射 $H^p(X,\mathbb{Z})\otimes H^q(Y,\mathbb{Z})\to H^{p+q}(X\times Y,\mathbb{Z})$ (在模掉挠元后) 可诱导如下同构*

$$H^n(X\times Y,\mathbb{Z})=\bigoplus_{p+q=n}H^p(X,\mathbb{Z})\otimes H^q(Y,\mathbb{Z}).$$

例 2.5.7 假设 X,Y 是紧 Kähler 流形, 那么 $H^p(X)\otimes H^q(Y)$ 是 $H^{p+q}(X\times Y)$ 的子 Hodge 结构, 它同构于 $H^p(X)$ 与 $H^q(Y)$ 的 Hodge 结构张量积. 进一步, 设 $\dim X=n$, 那么由庞加莱对偶 $H^p(X,\mathbb{Z})\cong(H^{2n-p}(X,\mathbb{Z}))^*$ (模掉挠元), 我们有

$$H^p(X,\mathbb{Z})\otimes H^q(Y,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(H^{2n-p}(X,\mathbb{Z}),H^q(Y,\mathbb{Z})).$$

请注意, 上式要求模掉挠元. ■

Künneth 公式实际上是 Leray-Hirsch 定理的直接推论. 我们在这里简要介绍一下该定理. 设 X 是局部可缩空间, $\phi:Y\to X$ 是纤维化. 由 X 的局部可缩性, 对每点 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U_x, 使得 $\phi^{-1}(U_x)\cong Y_x\times U_x$, 此处 $Y_x=\phi^{-1}(x)$. 我们假设 $H^*(Y_x,\mathbb{Z})$ 是无挠的.

定理 2.5.2 (Leray-Hirsch **定理**) *假设存在同调类*

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_N\in H^*(Y,\mathbb{Z})$$

满足以下条件: 对每点 $x\in X$, 由诸 α_i 生成的子群 $A\subset H^*(Y,\mathbb{Z})$ 在限制映射下同构于 $H^*(Y_x,\mathbb{Z})$. 那么 $H^*(Y)$ 是环 $H^*(X)$ 上的模, 且以诸 α_i 为生成元. 换言之,

$$H^*(Y,\mathbb{Z})\cong A\otimes H^*(X,\mathbb{Z}).$$

结合推论 2.2.7 以及 Leray-Hirsch 定理 2.5.2, 我们有

引理 2.5.1 *设 $\varpi:E\to X$ 是复流形 X 上的秩 $(r-1)$ 射影丛, 那么上同调群 $H^*(E,\mathbb{Z})$ 是环 $H^*(X,\mathbb{Z})$ 上以 $1,h,\cdots,h^{r-1}$ 为基的自由模. 特别地, 拉回映射*

$$\varpi^*:H^*(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^*(E,\mathbb{Z})$$

是单射.

假设 X 是复 Kähler 流形, $Z\subset X$ 是余维数为 r 的复子流形. 我们可以得到沿着 Z 的爆发 $\tau:\widetilde{X}_Z\to X$, 其例外除子 $E=\tau^{-1}(Z)$ 是秩为 $(r-1)$ 的射影丛, 并且也是 $\widetilde{X}_Z$ 中的光滑超曲面. 当 X 是代数曲面且 Z 是点时, 这就是我们所熟知的曲面上光滑点的爆发. 我们记包含映射 $j:E\hookrightarrow\widetilde{X}_Z$ 及 $j_Z:Z\hookrightarrow X$, 并设 $h=c_1(\mathcal{O}_E(1))\in H^2(E,\mathbb{Z})$. 此时 $h^i\in H^{2i}(E,\mathbb{Z})$. 它诱导的杯积映射是 Hodge 结构态射.

命题 2.5.4 设 X 是紧 Kähler 流形, 我们有 Hodge 结构的同构态射

$$H^k(X,\mathbb{Z})\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{r-2}H^{k-2i-2}(Z,\mathbb{Z})\right)\xrightarrow{\tau^*+\sum_i j_*\circ h^i\circ\tau|_E^*}H^k(\widetilde{X}_Z,\mathbb{Z}).$$

证明 我们这里主要证明上述态射是 $\mathbb{Z}$-模同构. 剩余的验证工作留给读者完成. 令 $U=X-Z$, 显见 $U\cong \widetilde{X}_Z-E$. 由推论 2.2.6, 我们有

$$H^k(X,U)\cong H^{k-2r}(Z),\qquad H^k(\widetilde{X}_Z,U)\cong H^{k-2}(E).$$

这样, 我们有以下相对上同调正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_U^*=id"] & H^{k-2r}(Z) \arrow[r, "j_{Z*}"] \arrow[d, "\alpha"] & H^k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_X^*"] & H^k(U) \arrow[d, "\tau_U^*=id"] \\
H^{k-1}(U) \arrow[r] & H^{k-2}(E) \arrow[r, "j_*"] & H^k(\widetilde{X}_Z) \arrow[r] & H^k(U).
\end{tikzcd}$$

这里 (由引理 2.5.1)

$$\alpha: H^{k-2r}(Z)\longrightarrow H^{k-2}(E)=\bigoplus_{i=0}^{r-1}h^i\tau^*H^{k-2-2i}(Z)$$

是单射. 由习题 2.14, $\tau_X^*: H^k(X)\to H^k(\widetilde{X}_Z)$ 也是单射. 我们诱导自然态射

$$(\tau^*,j_*): H^k(X)\oplus H^{k-2}(E)\longrightarrow H^k(\widetilde{X}_Z).$$

我们来说明这是个满射. 类似考虑正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
H^k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_X^*"] & H^k(U) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_U^*=id"] & H^{k+1}(Z) \arrow[d, "\tau_Z^*"] \\
H^k(\widetilde{X}_Z) \arrow[r, "\beta"] & H^k(U) \arrow[r] & H^{k+1}(E)
\end{tikzcd}$$

对任何 $\gamma\in H^k(\widetilde{X}_Z)$, $\beta(\gamma)\in \mathrm{Ker}(H^k(U)\to H^{k+1}(E))$. 由 τ_Z^* 的单射性推出 $\beta(\gamma)\in \mathrm{Ker}(H^k(U)\to H^{k+1}(Z))$. 这样, 由正合性可知, 存在 $\gamma'\in H^k(X)$ 使得

$$\gamma-\tau_X^*(\gamma')\in \mathrm{Ker}(H^k(\widetilde{X}_Z)\to H^k(U))=\mathrm{Im}j_*.$$

这就证明了满射性. 类似地, 我们有

$$\mathrm{Ker}(\tau^*,j_*)=\mathrm{Im}\Big((j_{Z*},-\alpha): H^{k-2r}(Z)\longrightarrow H^k(X)\oplus H^{k-2}(E)\Big).$$

注意到 α 的第 $r-1$ 个分支 $\alpha_{r-1}=h^{r-1}\tau^*$, 因此 $H^k(X)\oplus H^{k-2}(E)/\mathrm{Ker}(\tau^*,j_*)$ 中所有来自 $\alpha_{r-1}H^{k-2r}(Z)$ 的元素都可以用其他直和项替代, 换言之, 我们有同构

$$H^k(X,\mathbb{Z})\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{r-2}H^{k-2i-2}(Z,\mathbb{Z})\right)\cong H^k(X)\oplus H^{k-2}(E)/\mathrm{Ker}(\tau^*,j_*).$$

这就完成了证明. ■

本章习题

习题 2.1 证明定理 2.1.3 的结论.

习题 2.2 证明式 (2-2), 式 (2-3) 及式(2-5).

习题 2.3 证明: 在 $\mathscr{A}_X^k$ 上有 $[L,\Lambda]=(k-n)\mathrm{Id}$. (提示: 利用式 (2-7))

习题 2.4 设 X 是 Kähler 流形, 形式 γ 即是 ∂ 闭的也是 $\overline{\partial}$ 闭的. 证明: 如果 γ 是 d (相应地, ∂, $\overline{\partial}$)-恰当的, 那么存在形式 λ, 使得 $\gamma=\partial\overline{\partial}\lambda$.

习题 2.5 设 $\gamma \in \Omega_X^{p,q} \subseteq \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C}$ 是本原的.
(1) 证明: γ 可以唯一写成如下形式:

$$\gamma = \sum_{A,B,M} \gamma_{A,B,M} dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge w_M,$$

这里 A, B, M 分别是 $\{1, \cdots, n\}$ 中两两不相交的子集, w_M 是由一些形如 $dz_i \wedge d\bar{z}_i$ 的项作外积得到, $\gamma_{A,B,M}$ 是系数.
(2) 证明: γ 是本原的, 当且仅当 $\gamma_{A,B} = dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge \sum\limits_M \gamma_{A,B,M} w_M$ 是本原的 (对所有可能的 A, B).
(3) 设 $\omega_{A,B} = dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge \sum\limits_M \gamma_M w_M$, $M \subseteq K := \{1, \cdots, n\} - (A \cup B)$, 这里 A, B 是给定的子集. 设 $m = \frac{1}{2}(k - |A| - |B|)$. 证明: $\omega_{A,B}$ 是本原的当且仅当以下条件成立:

$$\forall N \subseteq K, \qquad |N| = m - 1. \qquad \sum_{i \in K - N} \gamma_{N \cup \{i\}} = 0.$$

(4) 在上一小题中, 我们假设 $\omega_{A,B}$ 是本原的. 设 $J \subseteq K$ 且 $|J| = |K| - m$, ${}^cJ$ 是 J 在 K 中的补集. 证明:

$$\sum_{M \subseteq J} \gamma_M = (-1)^m \gamma_{{}^cJ},$$

这里要求所有 M 满足 $|M| = m$.
(5) 证明:

$$\frac{L^{n-k}}{(n-k)!} \omega_{A,B} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-k} \sum_{M,N} \gamma_M dz_A \wedge d\bar{z}_B \wedge w_{M \cup N},$$

这里 N 跑遍 K 中所有满足 $|N| = n - k$ 且与 M 不相交的子集.
(6) 利用以上诸结论证明命题 2.3.2.

习题 2.6 证明式 (2-10) 及式 (2-11).

习题 2.7 证明式 (2-13).

习题 2.8 设 X 是 n 维紧 Kähler 流形, $T = \mathrm{Pic}^0(X)$ 是 X 的 Picard 簇, Q 是 $H^1(X)$ 上的相交型, 即 $Q(\alpha, \beta) = \int_X L^{n-1} \alpha \wedge \beta$.
(1) 证明: 基本群 $\pi_1(T) \cong H^1(X, \mathbb{Z})$.
(2) 证明: $H^1(T)$ 上的 Hodge 结构与$H^1(X)$ 上的 Hodge 结构对偶, 即 $H^1(T, \mathbb{Z}) \cong H^1(X, \mathbb{Z})^*$, $H^{1,0}(T) = H^{0,1}(X)^*$. 进一步, T 由 $H^1(T)$ 的 Hodge 结构唯一确定.
(3) 证明: Q 诱导了 T 上的 Kähler 形式, 因而 T 是 Abel 簇.

习题 2.9 假设 $V_{\mathbb{Z}}$ 有权 1 的主极化整 Hodge 结构, 有两组典范基满足关系式 (2-14), Z, Z' 分别是这两组基对应的 Siegle 上半平面中的矩阵. 证明: $Z' = (DZ + C)(BZ + A)^{-1}$ (提示: 考虑投射 $p : V_{\mathbb{C}} \to H^{0,1}$, 先证明 $(p\alpha_1, \cdots, p\alpha_g) = -(p\beta_1, \cdots, p\beta_g)Z$).

习题 2.10 试具体阐述例 2.5.3 中周期矩阵与经典代数曲线中的周期矩阵的关系.

习题 2.11 设 $V_{\mathbb{C}}$ 是带有整相交型 Q 的复向量空间. $H(\alpha, \beta) := Q(\alpha, \bar{\beta})$ 是相应的 Hermite 型, $V^{2,0}$ 是某个秩为 $h^{2,0}$ 的复子空间, 使得 Q 在 $V^{2,0}$ 上平凡且 H 在 $V^{2,0}$ 上正定.

(1) 设 $V^{0,2} := \overline{V^{2,0}}$, 证明: $V^{2,0} \cap V_{\mathbb{R}} = 0$, $V^{2,0} \cap V^{0,2} = 0$, 且 H 在 $V^{2,0} \oplus V^{0,2}$ 上正定.
(2) 设 $V^{1,1} = (V^{2,0} \oplus V^{0,2})^{\perp}$ (在 H 下), 证明: $V_{\mathbb{C}} = V^{2,0} \oplus V^{1,1} \oplus V^{0,2}$, 且 H 在 $V^{1,1}$ 上负定. 因而 $V^{2,0}$ 唯一确定了 $V_{\mathbb{C}}$ 的权 2 极化 Hodge 结构.

习题 2.12　证明命题 2.5.1、命题 2.5.2 和命题 2.5.3 的结论, 并类似讨论 Corkerϕ.

习题 2.13　证明命题 2.5.3 的结论.

习题 2.14　设 $\pi : X \to Y$ 是紧复流形之间的全纯满态射, X 是 Kähler 的, 证明: 拉回映射 $\pi^* : H^k(Y, \mathbb{Q}) \to H^k(X, \mathbb{Q})$ 是单射.

习题 2.15　设 $\pi : X \to Y$ 是紧 Kähler 流形之间的全纯态射, $\dim X = n$, $\dim Y = n + r$, 证明: Gysin 态射 $\pi_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^{k+2r}(Y, \mathbb{Z})$ 诱导了 (r, r) 型 Hodge 结构态射.

第三章 Hodge 结构变分 (I)

3.1 Kodaira-Spencer 映射

设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是复流形之间的正常全纯浸没, 我们称其为复流形族 (Family of complex manifold). 对任何 $t \in B$, $X_t := \phi^{-1}(t)$ 称为 ϕ 在 t 处的纤维 (Fibre).

注 3.1.1 这里所谓的正常 (Proper) 是指 B 中紧集在 ϕ 下的原像也是紧的; 所谓浸没 (Submersion) 是指 ϕ 在每点处诱导的切空间映射都是满的. ■

我们总假设 B 连通, 并将 X_0 作为参考纤维. 我们称 $\mathcal{X}$ 为 X_0 的形变族, X_t $(t \in B)$ 称为 X_0 的形变 (Deformation).

我们有以下经典结论.

定理 3.1.1 (Ehresmann 定理) *设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是两个微分流形之间的正常浸没, B 是可缩流形, 且以 $0 \in B$ 为基点, 那么存在 B 上的微分同胚 $T : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$. 该平凡化相当于给出了投影 $\pi : \mathcal{X} \to X_0$, 从而诱导了微分同胚 $X_t \cong X_0$. .*

进一步, 假设 ϕ 是复流形族, 我们用 $0 \in B$ 的小邻域替代 B, 那么平凡化 $T = (\pi, \phi) : \mathcal{X} \to X_0 \times B$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的, 且 π 的纤维是 $\mathcal{X}$ 的复子流形.

注 3.1.2 在复流形族情形, 平凡化 T 一般不是全纯的. π 一般也不是全纯的, 但是 $X_t \overset{\pi|_{X_t}}{\cong} X_0$ 的复结构随着参数 $t \in B$ 全纯地变化. ■

考虑复流形族 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 的参考纤维 $X_0 = \phi^{-1}(0)$. 我们有以下全纯向量丛正合列

$$0 \longrightarrow T_{X_0} \longrightarrow T_{\mathcal{X}|X_0} \longrightarrow \phi^* T_{B|X_0} \longrightarrow 0, \tag{3-1}$$

这里 T_{X_0} (相应地, $T_{\mathcal{X}}$, T_B) 是 X_0 (相应地, $\mathcal{X}$, B) 上的切丛, $T_{\mathcal{X}|X_0}$ (相应地, $\phi^* T_{B|X_0}$) 是 $T_{\mathcal{X}}$ (相应地, $\phi^* T_B$) 在 X_0 上的限制. 进一步, $\phi^* T_{B|X_0}$ 是平凡全纯向量丛, 其纤维为 $T_{B,0}$. 映射 $T_{\mathcal{X}} \to \phi^* T_B$ 由切映射 ϕ_* 给出.

由上述正合列可诱导同态映射

$$\rho : T_{B,0} = H^0(X_0, \phi^* T_{B|X_0}) \longrightarrow H^1(X_0, T_{X_0}).$$

上述映射 ρ 称为复流形族 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 在 $0 \in B$ 处的 Kodaira-Spencer 映射.

我们来具体分析这一映射, 为此先做一些准备工作.

Step 1. 首先通过选取合适的坐标, 我们可设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 有如下局部坐标表示:

$$\phi : (z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_r) \to (t_1, \cdots, t_r),$$

这里 $(t_1, \cdots, t_r)$ 是 B 的局部全纯坐标. $\pi : \mathcal{X} \to X_0$ 局部上可以写为

$$\pi : (z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_r) \to (\pi_1(z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_r), \cdots, \pi_n(z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_r)),$$

这里 π_i 是可微函数, 且关于诸 t_k 是全纯的. 设 π_* 是 π 诱导的切空间映射, 那么

$$\begin{aligned}\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\pi}_j}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \\ \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\pi}_j}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \\ \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}.\end{aligned} \tag{3-2}$$

Step 2. 由定理 3.1.1, 给定 $x = (z_1, \cdots, z_n) \in X_0$, 我们有 $\mathcal{X}$ 的复子流形 $T^{-1}(x \times B)$, 其关于 $t = (t_1, \cdots, t_r)$ 的局部参数方程可写为

$$(\sigma_1(x,t), \cdots, \sigma_n(x,t), t),$$

这里 σ_i 是 $\mathcal{C}^\infty$ 函数, 且关于参数 t 全纯, 它满足

$$\pi_k(\sigma_1, \cdots, \sigma_n, t_1, \cdots, t_r) \equiv z_k, \qquad k = 1, \cdots, n. \tag{3-3}$$

这相当于给出了微分同胚 $B \cong T^{-1}(x \times B)$. 它诱导了 $\mathcal{C}^\infty$ 切丛映射

$$\sigma : \phi^* T_B \longrightarrow T_{\mathcal{X}}, \qquad \left(x, \frac{\partial}{\partial t_k}\right) \longrightarrow \left(x, \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}\right).$$

注意到 $\pi_*|_{X_0} = id_{X_0}$, 故由式 (3-3) 求导可知, 在 T_{X_0} 上有

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}. \tag{3-4}$$

此外, σ 也给出了 $\mathcal{C}^\infty$ 分裂正合列

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{X}/B} \longrightarrow T_{\mathcal{X}} \longrightarrow \phi^* T_B \longrightarrow 0.$$

如限制到 X_0 上, 即得正合列 (3-1), 它是 $\mathcal{C}^\infty$ 分裂正合的. 因此 Kodaira-Spencer 映射 $\rho : T_{B,0} \to H^1(T_{X_0})$ 作为 Dolbeault 复形正合列诱导的连接同态, 在局部上有以下关系 (相差某个恰当截面)

$$\rho(u) = \bar{\partial}\sigma(u), \forall u \in T_{B,0}. \tag{3-5}$$

(注: 由 Dolbeault 同调的结果, $\bar{\partial}$ 闭链可以从局部的 $\bar{\partial}$ 恰当性推出, 反之也成立)

Step 3. 当 t 充分接近 0 时, 由定理 3.1.1, 我们可以将复化切空间 $T_{X_t, x_t, \mathbb{C}}$ 等同于 $T_{X_0, x, \mathbb{C}}$, 此处 $x_t (\in X_t)$ 是 $x (\in X_0)$ 在 $\pi|_{X_t}$ 下的原像. 因此, 当 t 变动时, X_t 上复结构的变化可以通过复子空间

$$T^{0,1}_{X_t, x_t} \subseteq T_{X_0, x, \mathbb{C}}$$

的变化来刻画. 由式 (3-2) 以及 $\pi_*|_{X_0} = id_{X_0}$, 我们有 $(0,1)$ 型切空间的同构

$$T^{0,1}_{X_t, x_t} \xrightarrow{\sim} T^{0,1}_{X_0, x}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \longrightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\pi}_j}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

这样, 我们可以诱导复合映射 $\alpha_t : T^{0,1}_{X_0, x} \to T^{1,0}_{X_0, x}$ 如下,

$$T^{0,1}_{X_0, x} \cong T^{0,1}_{X_t, x_t} \hookrightarrow T_{X_0, x, \mathbb{C}} \longrightarrow T^{1,0}_{X_0, x} \xrightarrow{(-1)} T^{1,0}_{X_0, x}, \tag{3-6}$$

其中倒数第二个映射来自于投影, 最后一个映射表示数乘 (-1). 从张量的角度看, $\alpha_t \in \Omega^{0,1}_{X_0,x} \otimes T^{1,0}_{X_0,x}$. $x_t \in X_t$ 处复结构对应的 $(0,1)$ 型切向量都可以表为 $u - \alpha_t(u)$ $(u \in T^{0,1}_{X_0,x})$. 复结构形变相当于被 α_t 参数化, 且关于 t 是全纯的, $\alpha_0 = 0$. 式 (3-2) 表明

$$\alpha_t\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\pi}_j}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

上式两边求导, 并限制在 $t=0$ 上, 我们就得到

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\alpha_t)\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}\right).$$

结合式 (3-4), 即得

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\alpha_t)\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right). \tag{3-7}$$

这就得到

$$\bar{\partial}\sigma(u) = d_u(\alpha_t) \in A^{0,1}(T_{X_0}), \forall u \in T_{B,0}, \tag{3-8}$$

此处 d_u 表示沿切向量 u 求导.

综合以上各讨论, 我们得到如下结论.

命题 3.1.1 设 $\phi: \mathcal{X} \to B$ 是复流形族, $\rho: T_{B,0} \to H^1(T_{X_0})$ 是 Kodaira-Spencer 映射, α_t 定义同 (3-6), 那么在同调群 $H^1(T_{X_0})$ 中有

$$\rho(u) = d_u(\alpha_t), \forall u \in T_{B,0}.$$

3.2 局部系与 Gauss-Manin 联络

设 $\phi: \mathcal{X} \to B$ 是复流形族, H 是 B 上的一个 Abel 群层. 如果 H在局部上总是同构于某个常层 (其茎为给定 Abel 群 G), 那么我们将 H 称作茎为 G 的*局部系* (Local system). 显然, 该局部系的转移函数是 $\mathrm{Aut}(G)$ 中的元素. 如果 G 是向量空间, H 就称为*向量空间局部系*, 其转移函数就是向量空间的自同构.

有时我们将 Abel 群对应的局部系扩张到自由 $\underline{\mathcal{C}}^0(B)$-模层

$$\mathcal{H} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{\mathcal{C}}^0(B).$$

同样地, 对实向量空间局部系 H, 也可扩张为自由 $\underline{\mathcal{C}}^\infty(B)$-模层

$$\mathcal{H} = H \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathcal{C}}^\infty(B),$$

或者 $\mathcal{O}_B$-模层

$$\mathcal{H} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_B.$$

它上面可以配备联络结构

$$\nabla: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \Omega_B, \qquad \sigma = \sum_i \alpha_i \sigma_i \longrightarrow \nabla\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes d\alpha_i,$$

这里 $\{\sigma_i\}$ 是 H 的一组局部基. 由于局部系的转移函数是常值的, 因此上述定义不依赖于转移函数的选取. 进一步, 我们有映射

$$\nabla : \mathcal{H} \otimes \Omega_B \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \Omega_B^2, \qquad \sigma \otimes \alpha \longrightarrow \nabla\sigma \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha.$$

∇ 的曲率定义为 $\Theta := \nabla \circ \nabla$. 我们有

引理 3.2.1 上述 ∇ 是平坦联络, 即曲率 $\Theta = 0$.

考虑常层 A (通常取 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), 我们可以构造局部系 $H_A^k = R^k\phi_*A$, 它的茎为 $H^k(X_0, A)$ (请读者验证). 设 $\mathcal{H}^k$ 是类似前面所述的相应 $\mathcal{C}^\infty$ 或全纯向量丛. 我们将平坦联络

$$\nabla : \mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{H}^k \otimes \Omega_B$$

称作局部系 H_A^k 的 Gauss-Manin 联络.

现在我们考虑 $H_{\mathbb{C}}^k$ 对应的 Gauss-Manin 联络 ∇. 设 Ω 是 $\mathcal{X}$ 上复 k 次微分形式, 使得对任何 $b \in B$, $\Omega_b := \Omega|_{X_b}$ 是闭形式. 这样, 我们可以在 b 的可缩小邻域 U 上定义 $H^k(\mathcal{X}_U, \mathbb{C})$ 中的局部截面

$$\omega : b \mapsto [\Omega_b] \in H^k(X_b, \mathbb{C}) \cong H^k(\mathcal{X}_U, \mathbb{C}).$$

假设 Ω 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的, 那么 ω 是 $\mathcal{H}^k$ 中的截面.

下面我们计算 $\nabla\omega$. 首先由定理 3.1.1, $H^k(X_0, \mathbb{C}) \cong H^k(X_b, \mathbb{C})$, $\forall b \in U$. 因此我们可以将 $(\Omega_b)_{b\in B}$ 视作 X_0 上一族微分形式 ϕ_b, 且随着参数 $b \in B$ 以 $\mathcal{C}^\infty$ 方式变化. 这样, $\nabla\omega|_0 \in H^k(X_0, \mathbb{C}) \otimes \Omega_{B,0}$ 等价于给出如下映射

$$\nabla\omega|_0 : T_{B,0} \longrightarrow H^k(X_0, \mathbb{C}), \qquad u \longrightarrow \mathrm{class}(d_u(\phi_b)|_{b=0}).$$

为计算 $d_u(\phi_b)|_{b=0}$, 我们考虑局部情形 $T : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$, 并采用第 3.1 的诸记号. 按照 dt_i 在形式中出现的次数, Ω 可写为

$$\Omega = \Phi + \sum_{i=1}^r dt_i \wedge \psi_i + \Omega',$$

此处 $\Phi|_{X_b} = \phi_b$, dt_i 不出现在 Φ 和 ψ_i 中, 并且 $\Omega' \in \phi^*(\wedge^2\Omega_B) \wedge \Omega_{\mathcal{X}}^{k-2}$. 注意到 ϕ_b 是闭形式, 因而有

$$d\Omega = \sum_{i=1}^r dt_i \wedge \frac{\partial\phi_b}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^r dt_i \wedge d\psi_i + d\Omega'.$$

将 $d\Omega$ 与 $\frac{\partial}{\partial t_i}$ 缩并, 并限制在 X_0 上, 则有 (int 表示缩并)

$$\mathrm{int}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(d\Omega)|_{X_0} = \frac{\partial\phi_b}{\partial t_i}\Big|_b - d\psi_i|_{X_0}.$$

这样, 我们有

命题 3.2.1 (Cartan-Lie **公式**) 设 $u \in T_{B,0}$, $v \in \Gamma(T_{\mathcal{X}|X_0})$ 使得 $\phi_*(v) = u$, 那么我们有

$$\nabla(\omega)|_0(u) = \mathrm{class}(\mathrm{int}(v)(d\Omega)|_{X_0}).$$

注 3.2.1 (1) 尽管我们有微分同胚 $X_b \cong X_0$, 但它一般不是恒同映射. 因此 $H^k(X_b, \mathbb{C})$ 与 $H^k(X_0, \mathbb{C})$ 只是在同构意义下视为一样, 而并非恒同. 局部系 $\mathcal{H}^k$ 相当于是将 $H^k(X_0, \mathbb{C})$ 视作参

考系, 将其他 $H^k(X_t,\mathbb{C})$ 同构映到前者, 从而它将上述 $\Omega|_{X_b}$ 也映入到 $H^k(X_0,\mathbb{C})$ 中的 $\omega(b)$. 因此 $\mathcal{H}^k$ 中的截面 ω 并非 $H^k(\mathcal{X},\mathbb{C})$ 中的截面 Ω, 两者是不同的概念.

(2) 截面 ω 的平坦联络只涉及水平方向 B 上的参数变化, 但 Ω 的微分不仅依赖于 B 的参数变化, 也依赖于竖直方向 X_0 上的参数变化 (这是 X_b 与 X_0之间的非恒等同胚造成的). Cartan-Lie 公式实际上就是说, 如果我们忽略掉微分同胚 $X_b\cong X_0$ 所带来的影响, 即不考虑竖直方向上的变化, 强行将它们"等同"起来, 那么 Ω 与 ω 沿着相应切方向的"求导"是一样的 (同调意义下). ■

推论 3.2.1 *设 X,Y 是连通复流形, $\dim X=n$. 设 $Z\subseteq Y\times X$ 是余维数为 k 的光滑复子流形, 且投影 $\mathrm{pr}_1:Z\to Y$ 是浸没, 记 $Z_y:=\mathrm{pr}_1^{-1}(y)\subset X$ 为 $y\in Y$ 的纤维. 设 Ω 是 Z 上复 $2n-2k$ 次微分形式, 使得对任何 $y\in Y$, $\Omega|_{Z_y}$ 是闭形式. 那么*

$$d_v\left(\int_{Z_y}\Omega\right)=\int_{Z_y}\mathrm{int}(\chi_v)(d\Omega),\qquad y\in Y,$$

这里 χ_v 是 Z 中的向量场, 使得 $\mathrm{pr}_1(\chi_v)=v$.

证明 任取一点 $y_0\in Y$, 设 $U\subset Y$ 是 y_0 的可缩小邻域, $Z_U=\mathrm{pr}_1^{-1}(U)$. 显见 Z_U 同胚于 $Z_{y_0}\times U$. 由积分的变量替换,

$$\int_{Z_y}\Omega=\int_{Z_{y_0}}\omega_{y_0},$$

这里 ω_y 是 $\Omega|_{Z_y}$ 在 $H^{2n-2k}(Z_y,\mathbb{C})$ 中的像. 应用 Cartan-Lie 公式于上式右边即得所需. ■

注 3.2.2 上述推论实际上推广了实数情形带参数积分的求导计算. 具体言之, 取 $X=Y=\mathbb{R}$,

$$Z=\{(t,x)\in Y\times X\mid \alpha(t)\le x\le\beta(t)\}.$$

$\pi:Z_U\cong U\times Z_{y_0}\to Z_{y_0}$ 定义为

$$(t,x)\longrightarrow\frac{(x-\alpha(t))}{\beta(t)-\alpha(t)}(\beta(t_0)-\alpha(t_0))+\alpha(t).$$

取切向量及向量场

$$v=\frac{\partial}{\partial t},\qquad \chi_v=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\beta'(t)-\alpha'(t)}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)\cdot\frac{\partial}{\partial x}.$$

代入推论 3.2.1, 即得经典的参数积分求导公式

$$\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x,t)dx\right)'=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx+\beta'(t)f(\beta(t),t)-\alpha'(t)f(\alpha(t),t).$$

3.3 Kähler 流形的稳定性

我们首先介绍以下经典结果.

定理 3.3.1 (上半连续性定理) *设 $\phi:\mathcal{X}\to B$ 是紧复流形族, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{X}$ 上全纯向量丛, 那么函数 $b\mapsto\dim H^q(X_b,\mathcal{F}|_{X_b})$ 是上半连续的, 亦即*

$$\dim H^q(X_b,\mathcal{F}|_{X_b})\le\dim H^q(X_0,\mathcal{F}|_{X_0}),$$

这里 b 落在 $0 \in B$ 的充分小邻域中.

由此立得

推论 3.3.1　函数 $b \mapsto h^{p,q}(X) := \dim H^q(X_b, \Omega^p_{X_b})$ 是上半连续的.

以下总假设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 的中心纤维 X_0 是 Kähler 流形. 我们首先将证明 X_b 的 Hodge 数不依赖于 b 的选取. 具体言之, 即有如下命题

命题 3.3.1　在上述假设条件下, 我们有 $h^{p,q}(X_b) = h^{p,q}(X_0)$, 这里 b 落在 $0 \in B$ 的充分小邻域内. 进一步, X_b 的 Frölicher 谱序列在 E_1 处退化.

证明　由推论 3.3.1, $h^{p,q}(X_b) \le h^{p,q}(X_0)$. 设 $E_r^{p,q}(X_b)$ 是 X_b 上的 Frölicher 谱序列. 由第 1.5 节讨论, 我们有

$$\begin{aligned} E_1^{p,q}(X_b) &= H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), \\ E_\infty^{p,q}(X_b) &= F^pH^{p+q}(X_b)/F^{p+1}H^{p+q}(X_b), \\ \dim E_\infty^{p,q} &\le \dim E_1^{p,q}, \\ \dim H^k(X_b, \mathbb{C}) &= \sum_{p+q=k} \dim E_\infty^{p,q}(X_b). \end{aligned}$$

由定理 3.1.1, X_b 与 X_0 微分同胚, 因而

$$\dim H^k(X_b, \mathbb{C}) = \dim H^k(X_0, \mathbb{C}) := b_k.$$

结合上述诸式, 我们有

$$\begin{aligned} b_k = \sum_{p+q=k} \dim E_\infty^{p,q}(X_b) &\le \sum_{p+q=k} \dim E_1^{p,q}(X_b) \\ = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X_b) &\le \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X_0) = b_k. \end{aligned}$$

这就迫使 $h^{p,q}(X_b) = h^{p,q}(X_0)$ 及 $E_1^{p,q}(X_b) = E_\infty^{p,q}(X_b)$. ■

其次, 我们将证明 X_b 也有 Hodge 分解. 为此需要应用如下经典结果.

引理 3.3.1 (Kodaira)　设 $F \to \mathcal{X}$ 是向量丛, $F_b := F|_{X_b}$, $\Delta = (\Delta_b)_{b\in B}$ 是作用在 F 上的相对微分算子, 使得 Δ_b 在 F_b 上是具有固定阶数的椭圆算子. 如果 $\mathrm{Ker}\Delta_b$ 不依赖于 b, 那么 $\mathrm{Ker}\Delta_p \subseteq \mathcal{C}^\infty(F_b)$ 随参数 b 以 $\mathcal{C}^\infty$ 方式变化. 特别地, 存在 F 的一组 $\mathcal{C}^\infty$ 截面 $(\eta_b^i)_{b\in B}$, 使得它们在 X_b 上的限制构成 $\mathrm{Ker}\Delta_b$ 的一组基.

命题 3.3.2　设 b 落在 $0 \in B$ 的充分小邻域内, 则

$$H^k(X_b, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X_b),$$

满足 $H^{p,q}(X_b) = \overline{H^{q,p}(X_b)}$ 及 $H^{p,q}(X_b) \cong H^q(X_b, \Omega^p_{X_b})$.

证明　**Step 1.** 欲证存在分解

$$H^k(X_b, \mathbb{C}) = F^pH^k(X_b, \mathbb{C}) \oplus \overline{F^{q+1}H^k(X_b, \mathbb{C})}, \quad p+q=k.$$

由命题 3.3.1,

$$F^pH^k(X_b,\mathbb{C})\subseteq H^k(X_b,\mathbb{C})\cong H^k(X_0,\mathbb{C})$$

是具有不依赖于参数 b 的复子空间. 进一步, 由引理 3.3.1, 它随着 b 以 $\mathcal{C}^\infty$ 方式变化 (作为调和形式来看).

对 $b=0$, 我们已有 Hodge 分解

$$H^k(X_0,\mathbb{C})=F^pH^k(X_0,\mathbb{C})\oplus\overline{F^{q+1}H^k(X_0,\mathbb{C})},\quad p+q=k.$$

由引理 3.3.1 蕴含的基底连续性, 上述分解对 b 也成立.

Step 2. 今设

$$H^{p,q}(X_b):=F^pH^k(X_b,\mathbb{C})\cap\overline{F^qH^k(X_b,\mathbb{C})}.$$

欲证

$$H^{p,q}(X_b)\cong H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})\cong F^pH^k(X_0,\mathbb{C})/F^{p+1}H^k(X_0,\mathbb{C}).$$

考虑复合映射 $\varphi: H^{p,q}(X_b)\to H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})$ 如下

$$H^{p,q}(X_b)\hookrightarrow F^pH^k(X_b,\mathbb{C})\longrightarrow F^pH^k(X_b,\mathbb{C})/F^{p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})\cong H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})$$

其中最后一个同构映射来自于命题 3.3.1. 我们说明 φ 是单的. 事实上, 取 $\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi=H^{p,q}(X_b)\cap F^{p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})$, 则

$$\alpha\in F^pH^k(X_b,\mathbb{C})\cap\overline{F^qH^k(X_b,\mathbb{C})}\cap F^{p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})=0.$$

另一方面, 由向量空间维数公式, 我们有

$$\dim H^{p,q}(X_b)=\dim F^pH^k(X_b,\mathbb{C})+\dim\overline{F^qH^k(X_b,\mathbb{C})}-\dim H^k(X_b,\mathbb{C}).$$

上述等式右边不依赖于 b, 从而 $\dim H^{p,q}(X_b)=\dim H^{p,q}(X_0)$. 由命题 3.3.1, $\dim H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})=\dim H^q(X_0,\Omega^p_{X_0})$, 因而 $\dim H^{p,q}(X_b)=\dim H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})$. 这就证明 φ 是同构.

综合以上讨论, 即得所需结论. ■

最后, 我们要证明 X_b 也是 Kähler 的. 首先, 利用引理 3.3.1, 我们有如下推论.

推论 3.3.2 设 $\phi:\mathcal{X}\to B$ 是紧复流形族且 X_0 是 Kähler 的, ω 是 X_0 上 $(1,1)$ 型 $\Delta_{\overline{\partial}}$ 调和形式, 则存在 $\mathcal{C}^\infty$ 截面 $(\omega_b)_{b\in B}$, 使得 $\omega_0=\omega$, ω_b 在 X_b 上是 $\overline{\partial}$-闭的, 这里 b 充分接近 $0\in B$.

现在我们叙述 Kähler 流形的稳定性定理.

定理 3.3.2 设 $\phi:\mathcal{X}\to B$ 是紧复流形族且 X_0 是 Kähler 的, B_0 是 $0\in B$ 的充分小邻域, 那么 X_b 也是 Kähler 流形.

证明 设 ω 是 X 的 Kähler 流形, $(\omega_b)_{b\in B}$ 同推论 3.3.2, $\omega_0=\omega$. 由命题 3.3.1, 我们有 $d_1^{p,q}=0$, 这里 $d_1=\partial$. 今取 $p=q=1$, 则

$$\partial: H^1(X_b,\Omega_{X_b})\longrightarrow H^1(X_b,\Omega^2_{X_b})$$

是零态射. 这就推出 $\partial\omega_b=\overline{\partial}\eta_b$, 对某个 $(2,0)$ 形式 η_b. 类似引理 3.3.1 更精确讨论, 我们可以断言, 当 b 趋近于 0 时, η_b 及其导数都一致收敛于 0 (注意 $\partial\omega_0=0$).

$\partial\eta_b$ 是 $(3,0)$ 形式, 且 $\overline{\partial}\partial\eta_b = -\partial\overline{\partial}\eta_b = 0$. 这表明 $\partial\eta \in H^{3,0}(X_b) \cong H^0(\Omega^3_{X_b})$. 由命题 3.3.2, $H^{3,0}(X_b) \cong \overline{H^{0,3}(X_b)}$, 而 $\overline{\partial\eta_b} = \overline{\partial}\bar{\eta}_b$ 是 $\overline{\partial}$ 恰当形式, 故 $\partial\eta_b$ 也是 $\overline{\partial}$ 恰当, 这就迫使 $\partial\eta_b = 0$. 因而 $\overline{\partial}\bar{\eta}_b = 0$, 即 $[\bar{\eta}_b] \in H^{0,2}(X_b) = \overline{H^{2,0}(X_b)}$. 这样, $\bar{\eta}_b = \bar{\alpha}_b + \overline{\partial}\gamma_b$, 此处 α_b 是全纯 $(2,0)$ 形式, γ_b 是 $(0,1)$ 形式. 类似地可以断言, 当 b 趋近于 0 时, η_b 及其导数都一致收敛于 0.

现在我们有

$$\partial\omega_b = \overline{\partial}\eta_b = \overline{\partial}(\alpha + \partial\bar{\gamma}_b) = \overline{\partial}\partial\bar{\gamma}_b = -\partial\overline{\partial}\bar{\gamma}_b,$$

此处 $\overline{\partial}\bar{\gamma}_b$ 是 $(1,1)$ 形式. 令 $\omega'_b = \omega_b + \overline{\partial}\bar{\gamma}_b$. 于是 $\partial\omega'_b = \overline{\partial}\omega'_b = 0$, 且当 b 趋近于 0 时, ω'_b 一致收敛于 ω_0. 注意到 ω_0 是实形式, 因而 $\mathrm{Re}\omega'_b$ 一致收敛于 ω_0. 由 ω_0 的正定性以及 ϕ 是正常态射事实, 可推出 $\mathrm{Re}\omega'_b$ 的正定性 (从而非退化). 这就证明了 X_b 是 Kähler 的. ■

3.4 周期映射与周期域

设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是紧复流形族且 X_0 是 Kähler 的. 由定理 3.3.2, 对充分接近 $0 \in B$ 的点 b, 其纤维 X_b 也是 Kähler 的. 由定理 3.1.1, X_b 微分同胚于 X_0, 故 $H^k(X_b,\mathbb{C}) \cong H^k(X_0,\mathbb{C})$, 因而我们可以将两者等同起来. 由命题 3.3.1 和命题 3.3.2, X_b 上的 Hodge 分解保持 Hodge 数不变. 特别地, 我们记

$$b^{p,k} := \dim F^pH^k(X_b,\mathbb{C}) = \dim F^pH^k(X_b,\mathbb{C}).$$

为了研究 X_0 的形变, 我们可以研究 $F^pH^k(X_b,\mathbb{C})$ 在 $H^k(X_0,\mathbb{C})$ 中的变动情况, 而这种变动可以通过 Grassmann 流形中的轨迹来描述. 为此, 我们可以定义所谓的周期映射 (Period map)

$$\mathcal{P}^{p,k} : B \longrightarrow \mathrm{Grass}(b^{p,k}, H^k(X,\mathbb{C})), \qquad b \longrightarrow F^pH^k(X_b,\mathbb{C}).$$

我们有以下经典结论

定理 3.4.1 (Griffiths) 周期映射 $\mathcal{P}^{p,k}$ 是全纯的.

证明 由引理 3.3.1, $\mathcal{P}^{p,k}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 的. 由命题 1.4.3, 我们有切空间映射

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}^{p,k} : & T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b,\mathbb{C}), H^k(X,\mathbb{C})/F^pH^k(X_b,\mathbb{C})), \\ & u \longrightarrow d\mathcal{P}^{p,k}(u)\big(\sigma \longrightarrow \nabla_u(\tilde{\sigma})\big), \end{aligned}$$

这里 $\tilde{\sigma}$ 是 $\mathcal{H}^k$ 中的截面, 使得 $\tilde{\sigma}(b) = \sigma$.

另一方面, 由命题 1.4.3, 我们可构造 $X_b \subseteq \mathcal{X}$ 的某个管状邻域上的微分形式 $\Omega \in F^pA^k(\mathcal{X})$, 使得 $\Omega|_{X_{b'}}$ 是闭的, 且其在 $F^pH^k(X_{b'},\mathbb{C})$ 中的同调类就是 $\tilde{\sigma}(b')$ (这里 b' 是 b 的小邻域内任一点).

今设 $u \in T_{B,b}$, $v \in \phi^*T_{B,b}$, 使得 $\phi_*(v) = u$. 由 Cartan-Lie 公式 (3.2.1), 我们有

$$d\mathcal{P}^{p,k}(u)(\sigma) = \nabla_u(\tilde{\sigma}) = \mathrm{class}(\mathrm{int}(v)(d\Omega|_{X_b})) \quad \mathrm{mod} F^pH^k(X_b). \tag{3-9}$$

如果 u 是 $(0,1)$ 型向量, 则 v (限制在 X_b 上) 亦然, 从而由 $d\Omega \in F^pA^{k+1}(\mathcal{X})$ 推得 $\mathrm{int}(v)(d\Omega|_{X_b}) \in F^pA^k(\mathcal{X})$. 因此, $\mathrm{int}(v)(d\Omega|_{X_b})|_{X_b} \in F^pA^k(\mathcal{X})$ 是闭的, 即其同调类落在 $F^pH^k(X_b,\mathbb{C})$ 内. 这样

$$d\mathcal{P}^{p,k}(u)(\sigma) = 0 \quad \mathrm{mod} F^pH^k(X_b).$$

这就证明 $\mathcal{P}^{p,k}$ 是全纯的. ■

定理 3.4.2 (Griffiths 横截定理) 映射

$$d\mathcal{P}^{p,k}: T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b), H^k(X_b,\mathbb{C})/F^pH^k(X_b))$$

的像落在 $\mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b), F^{p-1}H^k(X_b)/F^pH^k(X_b))$ 中.

证明 回顾式 (3-9), $d\Omega$ 落在 $F^pA^{k+1}(\mathcal{X})$ 中, 因而 $\mathrm{int}(v)(d\Omega) \in F^{p-1}A^k(\mathcal{X})$. 这样, $\nabla_u(\tilde{\sigma})$ 是 $F^{p-1}H^k(X_b)$ 中的元素, 由此即得命题. ■

今考虑周期映射

$$\mathcal{P}^k : B \longrightarrow F_{b^\cdot}(H^k(X,\mathbb{C})), \qquad b \longrightarrow \mathcal{P}^k(b) := (\mathcal{P}^{1,k}(b), \cdots, \mathcal{P}^{k,k}(b)).$$

由上讨论, 它是全纯的. 进一步, 若 X_b 是 Kähler 的, 那么该 Hodge 滤过满足

$$H^k(X_b,\mathbb{C}) = F^pH^k(X_b,\mathbb{C}) \oplus \overline{F^{k-p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})}.$$

上述条件定义了 $F_{b^\cdot}(H^k(X,\mathbb{C}))$ 中的开集 $\mathcal{D}$, 我们称之为 (非极化) 周期域 (Period domain). 若以 B 的小邻域代之, 则得全纯的局部周期映射 $\mathcal{P}^k : B \to \mathcal{D}$, 并满足上述的 Griffiths 横截性条件.

类似地, 我们也可以定义极化周期域. 首先考虑极化流形族 $\phi : \mathcal{X} \to B$, 并假设存在 $\omega \in H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})$, 使得对每条纤维 X_b, $\omega|_{X_b}$ 是 Kähler 类. 由此可以定义以下局部系的 Lefschtz 态射

$$L : R^i\phi_*\mathbb{C} \longrightarrow R^{i+2}\phi_*\mathbb{C}$$

以及 Lefschtz 分解

$$R^k\phi_*\mathbb{C} = \bigoplus_{k\geq 2r\geq 2k-2n} L^rR^{k-2r}\phi_*\mathbb{C}_{\mathrm{prim}},$$

此处 $R^i\phi_*\mathbb{C}_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Ker}L^{n-i+1}$, $n = \dim X_b$. 进一步, 在每个 $H^0(X_b,\mathbb{Z}) \cong H^0(X_0,\mathbb{Z})$ 中有相交型 $Q(\alpha,\beta) = \langle L^{n-k}\alpha,\beta\rangle$. 由前一章的讨论, 此时 Hodge 滤过满足以下条件:

(1) $F^pH^k(X_b,\mathbb{C}) = F^{k-p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})^\perp$,

(2) $H^k(X_b,\mathbb{C}) = F^pH^k(X_b,\mathbb{C}) \oplus \overline{F^{k-p+1}H^k(X_b,\mathbb{C})}$,

(3) $H^{p,q}(X_b)_{\mathrm{prim}} := F^pH^k(X_b) \cap \overline{F^qH^k(X_b)_{\mathrm{prim}}}$ $(p+q=k)$ 上有正定性

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} Q(\alpha,\bar{\alpha}) > 0.$$

令 $W := H^k(X,\mathbb{C})_{\mathrm{prim}}$. 我们将 W 上满足上述三个条件的 Hodge 滤过构成的集合称为极化周期域. 显然, 若假设 B 是局部可缩邻域, 则 $\mathcal{P}^k : B \to \mathcal{D}$ 是全纯的.

3.5 Hodge 丛

设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是紧 Kähler 流形族. 考虑局部系 $\mathcal{H}^k = R^k\phi_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_B$ 及 Gauss-Manin 联络

$$\nabla : \mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{H}^k \otimes_{\mathcal{O}_B} \Omega_B.$$

利用关系

$$F^pH^k(X_b,\mathbb{C}) \subset H^k(X_b,\mathbb{C}) \cong H^k(X_0,\mathbb{C})$$

我们可以构造一个全纯向量子丛 $F^p\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^k$, 其茎 $\mathcal{H}_b^k = F^pH^k(X_b,\mathbb{C})$. 这个丛被称为 Hodge 丛. 我们还可定义商丛 $\mathcal{H}^{p,q} := F^p\mathcal{H}^k/F^{p+1}\mathcal{H}^k$, 其茎 $\mathcal{H}_b^{p,q} = H^q(X_b,\Omega^p_{X_b})$ $(p+q=k)$.

由定理 3.4.2 及式 (3-9) 立得以下结论.

命题 3.5.1 (Griffiths **横截性条件**) $\nabla F^p\mathcal{H}^k \subset F^{p-1}\mathcal{H}^k \otimes \Omega_B$.

利用上述结论, 我们可以从以下交换图诱导算子 $\overline{\nabla}$,

$$\begin{array}{lccc}
\nabla: & F^{p+1}\mathcal{H}^k & \longrightarrow & F^p\mathcal{H}^k \otimes \Omega_B \\
& \downarrow & & \downarrow \\
\nabla: & F^p\mathcal{H}^k & \longrightarrow & F^{p-1}\mathcal{H}^k \otimes \Omega_B \\
& \downarrow & & \downarrow \\
\overline{\nabla}^{p,q}: & \mathcal{H}^{p,q} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{p-1,q+1} \otimes \Omega_B
\end{array}$$

命题 3.5.2 $\overline{\nabla}^{p,q}: \mathcal{H}^{p,q} \to \mathcal{H}^{p-1,q+1}$ 是 $\mathcal{O}_B$ 模态射, 且在点 $b \in B$ 处的茎映射满足以下交换图

$$\begin{array}{lccc}
\overline{\nabla}_b^{p,q}: & \mathcal{H}_b^{p,q} & \longrightarrow & \mathcal{H}_b^{p-1,q+1} \otimes \Omega_{B,b} \\
& \| & & \| \\
& H^q(X_b, \Omega_{X_b}^p) & \longrightarrow & H^{q+1}(X_b, \Omega_{X_b}^{p-1}) \otimes \Omega_{B,b}
\end{array}$$

$\overline{\nabla}_b^{p,q}$ 被称为 Hodge 结构在 b 处的无限小变分 (Infinitesimal variation, 简称 IVHS).

证明 由 ∇ 的 Lebniz 法则, 对任何 $\sigma \in F^p\mathcal{H}^k$ 及 $f \in \mathcal{O}_B$, 我们有

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df = f\nabla(\sigma) \mod F^p\mathcal{H}^k \otimes \Omega_B.$$

因此 $\overline{\nabla}^{p,q}$ 是 $\mathcal{O}_B$ 模态射. 命题后半部分是显然的. ■

令 $\overline{\nabla}^p$ 是以下态射的复合

$$F^p\mathcal{H}^k \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^k \otimes \Omega_B \longrightarrow (\mathcal{H}^k/F^p\mathcal{H}^k) \otimes \Omega_B.$$

它在点 $b \in B$ 处的茎映射

$$\overline{\nabla}_b^p: F^pH^k(X_b) \longrightarrow H^k(X_b, \mathbb{C})/F^pH^k(X_b) \otimes \Omega_{B,b}.$$

事实上, 这就诱导了前面所讨论的切映射

$$d\mathcal{P}^{p,k}: T_{B,b} \longrightarrow T_{G,F^pH^k(X_b)} = \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b), H^k(X_b, \mathbb{C})/F^pH^k(X_b)).$$

将定理 3.4.2 应用到 F^p 和 F^{p+1} 上, 我们就得到如下结论.

推论 3.5.1 $\mathrm{Im}\, d\mathcal{P}^{p,k}$ 落在以下子空间内

$$\mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b)/F^{p+1}H^k(X_b), F^{p-1}H^k(X_b)/F^pH^k(X_b)).$$

由推论 1.4.2, 旗流形在滤过 $F^pH^k(X_b)$ 处的切空间包含了以下子空间

$$\mathrm{Im}\, d\mathcal{P}^k = \bigoplus_p \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b)/F^{p+1}H^k(X_b), F^{p-1}H^k(X_b)/F^pH^k(X_b)).$$

该子空间被称为旗流形上的水平切空间 (Horizontal tangent space). 它通常不同于旗空间的切空间, 因而周期映射一般不是满的.

推论 3.5.2

$$\overline{\nabla}_b^{p,q} : \frac{F^pH^k(X_b)}{F^{p+1}H^k(X_b)} \longrightarrow \frac{F^{p-1}H^k(X_b)}{F^pH^k(X_b)} \otimes \Omega_{B,b}$$

诱导了周期映射 $\mathcal{P}^{p,k}$ 的切映射

$$d\mathcal{P}^{p,k} : T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^pH^k(X_b)/F^{p+1}H^k(X_b), F^{p-1}H^k(X_b)/F^pH^k(X_b)).$$

换言之, 对 $u \in T_{B,b}$, 有

$$d\mathcal{P}^{p,k}(u) \in \mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b})).$$

为了具体描述 $d\mathcal{P}^{p,k}(u)$, 我们考虑缩并映射 $T_{X_b} \otimes \Omega^p_{X_b} \to \Omega^{p-1}_{X_b}$. 由此可以诱导 Dolbeault 同调群的缩并映射

$$H^1(X_b, T_{X_b}) \otimes H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}) \longrightarrow H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b}).$$

它实际上来自于以下形式的外积与缩并

$$A^{0,1}(T_{X_b}) \otimes A^{0,q}(\Omega^p_{X_b}) \longrightarrow A^{0,q+1}(T_{X_b} \otimes \Omega^p_{X_b}) \longrightarrow A^{0,q+1}(\Omega^{p-1}_{X_b}).$$

这样, 我们得到映射

$$\mathrm{int} : H^1(X_b, T_{X_b}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b})), \qquad \eta \longrightarrow (\mathrm{int}(\eta) : \sigma \longrightarrow \mathrm{int}(\eta)(\sigma)).$$

定理 3.5.1 (Griffiths) 设 $u \in T_{B,b}$, $\sigma \in H^q(X_b, \Omega^p_{X_b})$, $\rho : T_{B,b} \to H^1(X_b, T_{X_b})$ 是 Kodaira-Spencer 映射, 则

$$d\mathcal{P}^{p,k}(u)(\sigma) = [\mathrm{int}(\rho(u))(\sigma)] \in H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b}).$$

换言之, 我们有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
H^1(X_b, T_{X_b}) \arrow[r, "\mathrm{int}"] & \mathrm{Hom}(H^q(X_b, \Omega^p_{X_b}), H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b})) \\
T_{B,b} \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "d\mathcal{P}^{p,k}"'] &
\end{tikzcd}$$

证明 由式 (3-5), 局部上有 $\rho(u) = \overline{\partial}(v)|_{X_b}$, 此处 $v \in T^{1,0}_{\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{C}^\infty$ 向量场, 满足 $\phi_*(v) = u \in T^{1,0}_{B,b}$. 今取 $F^p\Omega^k_{\mathcal{X}}$ 的局部截面 Ω, 使得 $\Omega_{|X_t}$ 是闭的, 且 $\sigma = [\Omega|^{p,q}_{X_t}] \in H^q(X_b, \Omega^p_{X_b})$.

由命题 3.2.1以及 v 是 $(1,0)$ 型的, 我们得到

$$d\mathcal{P}^{p,k}(u)(\sigma) = \overline{\nabla}^{p,q}_u(\sigma) = [\mathrm{int}(v)(d\Omega)^{p-1,q+1}_{|X_b}] = [\mathrm{int}(v)(\overline{\partial}\Omega)^{p,q}]_{|X_b}.$$

将以下等式

$$\overline{\partial}(\mathrm{int}(v)(\Omega^{p,q})) = -\mathrm{int}(v)(\overline{\partial}\Omega^{p,q}) + \mathrm{int}(\overline{\partial}v)(\Omega^{p,q})$$

限制到 X_b 上, 即得

$$[\mathrm{int}(v)(\overline{\partial}\Omega^{p,q})_{|X_b}] = [\mathrm{int}(\overline{\partial}v)(\Omega^{p,q}_{|X_b})] \in H^{q+1}(X_b, \Omega^{p-1}_{X_b}).$$

综合以上各式即得结论. ■

例 3.5.1 设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是亏格 g 紧曲线族. 由经典结论, 我们允许 ϕ 是万有形变族 (Universal family of deformations), 即 $(B,0)$ 是局部光滑复流形芽, 且其切空间在 Kodaira-Spencer 映射下同构于 $H^1(X_0, T_{X_0})$. 特别地, 由此可知 $\dim B = h^0(X_0, T_{X_0}) = 3g-3$, 即亏格 g 曲线模空间 $\mathscr{M}_g$ 的维数.

此时 $H^1(X_b,\mathbb{C}) = H^{1,0}(X_b) \oplus H^{0,1}(X_b)$. 我们有局部周期映射

$$\mathcal{P}^1 : B \longrightarrow \mathrm{Grass}(g, H^1(X_0,\mathbb{C})), \qquad b \longmapsto H^{1,0}(X_b) \subset H^1(X_b,\mathbb{C}) \cong H^1(X_0,\mathbb{C}).$$

其切映射为

$$d\mathcal{P}^1 : T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{1,0}(X_b), H^{0,1}(X_b)).$$

由定理 3.5.1, 上述切映射可以通过缩并 $T_{X_b} \otimes K_{X_b} \to \mathcal{O}_{X_b}$ 所诱导的同调映射来描述, 即

$$\mathrm{int} : H^1(X_b, T_{X_b}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(K_{X_b}), H^1(\mathcal{O}_{X_b})).$$

由 Serre 对偶定理,

$$H^1(\mathcal{O}_{X_b}) \cong H^0(K_{X_b})^*, \qquad H^1(X_b, T_{X_b}) \cong H^0(K_{X_b}^{\otimes 2})^*.$$

因此, 上述缩并映射 int 的对偶就是乘积映射 (留给读者验证)

$$\mu : H^0(K_{X_b}) \otimes H^0(K_{X_b}) \longrightarrow H^0(K_{X_b}^{\otimes 2}).$$

由经典结果, 当 X 是非超椭圆曲线时, μ 是满射. 因而 $d\mathcal{P}^1$ 在 b 附近是单射, 这就推出 $\mathcal{P}^1$ 是在 b 附近是嵌入映射. 此即所谓曲线的无限小 Torelli 定理 (Infinitesimal Torelli theorem) ■

例 3.5.2 由经典结果, 存在 n 维 Calabi-Yau 流形 (定义见例 2.2.4) 的局部万有形变族 $\phi : \mathcal{X} \to B$, 使得 B 光滑并且 $T_{B,0} \cong H^1(X_0, T_{X_0})$. 利用 Hodge 数的不变性可知 $H^{n,0}(X_b) \cong \mathbb{C}$, 对任何 0 附近的点 $b \in B$ 成立. 由于 K_{X_0} 的唯一全纯截面处处非零, 故由连续性可知 X_b 也满足此性质, 因而 K_{X_b} 仍然保持平凡性. 由例 2.2.4 的讨论, 生成元 $\Omega \in H^1(X_b, K_{X_b})$ 诱导了同构 $\Omega : H^1(X_b, T_{X_b}) \cong H^1(X_b, \Omega_{X_b}^{n-1})$.

考虑部分周期映射

$$\mathcal{P}^{n,n} : B \to \mathrm{Grass}(h^{n,0}, H^n(X_0,\mathbb{C})) \cong \mathbb{P}(H^n(X,\mathbb{C})).$$

其切映射

$$d\mathcal{P}^{n,n} : T_{B,b}\left(\overset{\rho}{\cong} H^1(X_b, T_{X_b})\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(X_b, K_{X_b}), H^1(X_b, \Omega_{X_b}^{n-1}))$$

相当于 $d\mathcal{P}^{n,n}(u)(\Omega) = \Omega(\rho(u))$. 这表明局部周期映射 $\mathcal{P}^{n,n}$ 是浸入. ■

本章习题

习题 3.1 验证式 (3-2) 和式 (3-4).

习题 3.2 请具体解释平凡 Kodaira-Spencer 映射的几何意义 (特别是曲面纤维化情形).

习题 3.3 设 $\phi : \mathcal{X} \to B$ 是复流形族, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{O}_B$-模的局部系. 证明: Θ 可以视为 $\mathrm{End}(\mathcal{H}) \otimes \wedge^2 \Omega_B$ 的截面.

习题 3.4 设 A 是常层, 证明: $H_A^k = R^k \pi_* A$ 是局部系, 它的茎为 $H^k(X_0, A)$.

习题 3.5 证明推论 3.3.2.

习题 3.6 请描述权值为 1 的 Hodge 结构的参数化所对应的非极化与极化周期域.

习题 3.7 验证例 3.5.1 中的缩并映射 $int: H^1(X_b, T_{X_b}) \to \mathrm{Hom}(H^0(K_{X_b}), H^1(\mathcal{O}_{X_b}))$ 的对偶就是乘积映射 $\mu: H^0(K_{X_b}) \otimes H^0(K_{X_b}) \longrightarrow H^0(K_{X_b}^{\otimes 2})$.

习题 3.8 设 $\phi: \mathcal{X} \to B$ 是椭圆曲线族, 局部定义方程 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. 试以此为例, 具体解释 Gauss-Manin 联络、周期映射、周期域、Griffiths 横截性以及无限小 Torelli 定理等.

习题 3.9 将习题 3.8 的讨论推广到超椭圆曲线族上 (其局部方程定义为 $y^2 = (x - \lambda_1) \cdots (x - t_{2g+2})$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$).

习题 3.10 设 $\phi: \mathcal{X} \to B$ 是 K_3 曲面的万有形变族, $\mathcal{P}^{2,2}: B \to \mathbb{P}(H^2(X, \mathbb{C}))$ 是周期映射, Q 是 $H^2(X, \mathbb{C})$ 上的相交型.
(1) 证明: $Q(\omega, \omega) = 0$, 对 $\forall b \in B$, $\forall \omega \in H^{2,0}(X_b)$ 成立, 从而 $\mathcal{P}^{2,2}$ 局部上是到由 Q 定义的二次超曲面的同构.
(2) 请问: 上述结论对高维 Calabi-Yau 流形族是否成立?

习题 3.11 设 $\phi: \mathcal{X} \to B$ 是复流形族, B 是可缩的, X_t 是 $t \in B$ 对应的纤维. 设 Ω 是 χ 上的闭形式, 次数等于 $1 + \dim X_0$. 证明:
(1) Ω 限制在 X_0 上等于零;
(2) Ω 是恰当形式.

第四章　整系数上同调类

4.1　闭链与闭链类

我们回顾权 $2k$ 的 Hodge 结构 $(V_{\mathbb{Z}}, F^{\cdot}V_{\mathbb{C}})$ 中的 Hodge 类 (见式 (2-12))

$$\mathrm{Hdg}(V) = V_{\mathbb{Z}} \cap V^{k,k}.$$

对于 Kähler 流形 X 及 $V = H^{2k}(X,\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$, 我们记 $\mathrm{Hdg}^{2k}(X) := \mathrm{Hdg}(V)$, 并记 $\mathrm{Hdg}^{2k}(X,\mathbb{Z})$ 是 $H^{2k}(X,\mathbb{Z})$ 所有满足以下条件的整类: 它们在 $H^{2k}(X,\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$ 中的像为 Hodge 类. 我们将在这一节中引入一种重要的 Hodge 类: *闭链类*. 为此, 我们需要做一些准备工作.

设 X 是复流形, $Z \subset X$ 是闭子集. 如果 X 上有一组开覆盖 $\mathscr{A}$, 使得对任何开集 $U \in \mathscr{A}$, $U \cap Z$ 都是 $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ 中有限个全纯函数的公共零点集, 那么我们就称 Z 是 X 的*解析子集*. 如果另一个解析子集 $Z' \subset Z$, 我们也称 Z' 为 Z 的解析子集. X 中闭复子流形显然是一个解析子集.

注 4.1.1　我们这里罗列一部分与解析子集有关的性质与概念:
(1) 设 Z_{smooth} 是 Z 的光滑部分, 它是 Z 中的稠密开集, 因而 $Z_{\mathrm{sing}} = Z - Z_{\mathrm{smooth}}$ 是 Z 中无处稠密的解析子集.
(2) 如果 Z_{smooth} 是连通的, 我们就说 Z 是不可约的. 由 Narasimhan 的结果, Z 局部上可以写为有限个不可约解析子集的并. 当 Z 紧时, 这一性质在整体上也成立.
(3) 对不可约解析子集 Z, 我们把它的光滑部分的维数作为它的维数. 对一般的解析子集 Z, 设 $z \in Z$, 那么 $\dim_z Z$ 定义为 Z 中过点 z 的不可约分支的最大维数. 类似地, 我们也可以整体定义 $\dim Z$. 设 $Z' \subset Z$, 则 $\dim Z' \leq \dim Z$. 当 Z' 在 Z 中的内部是空集时, 严格的不等式成立.
(4) (**Weirestrass 预备引理**) 设 U 是 $0 \in \mathbb{C}^N$ 的小邻域, $f(x_1, \cdot, x_N)$ 是 U 上的全纯函数,且 $f(x_1, 0, \cdots, 0)$ 不恒为零. 设 l 是 $f(x_1, 0, \cdots, 0)$ 在 $x_1 = 0$ 处的零点阶数. 那么通过限制 U, 我们可以找到一个全纯可逆函数 ϕ, 使得

$$\phi \cdot f = x_1^l + \sum_{0 \leq i < l} x_1^i f_i,$$

这里 f_i 是关于 $x_2, \cdots, x_N$ 的全纯函数, 满足 $f_i(0, \cdots, 0) = 0$.
(5) 存在解析子集 Z 的滤过 $Z = Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_{m+1} = \emptyset$, 使得维数 $n_k = \dim Z_k$ 构成严格递减列, 且 $Z_k - Z_{k+1}$ 是 $X - Z_{k+1}$ 中闭的复子流形.
(6) (**Hironaka 解消定理**) 设 $Z \subset X$ 是紧解析子集, 那么存在紧复流形 Z' 以及全纯态射 $\tau : Z' \to Z$, 使其在 Z_{smooth} 上是同构. ■

我们的首要目标, 是要将余维数为 r 的解析子集 Z 对应到 $H^{2r}(X,\mathbb{Z})$ 的上同调类, 通常记作 $[Z]$. 首先, 我们考虑闭的光滑复子流形 $Z \subset X$, 假设 Z 在 X 中的法丛是可定向的. 由 Thom 同构 $T : H^{2r}(X, X - Z, \mathbb{Z}) \cong H^0(Z, \mathbb{Z})$ 以及限制映射 $j_Z : H^{2r}(X, X - Z, \mathbb{Z}) \to H^{2r}(X, \mathbb{Z})$, 我们可以定义 $[Z] := (j_Z \circ T^{-1})(1) \in H^{2r}(X, \mathbb{Z})$.

为了对一般的解析子集也能定义上同调类 $[Z]$, 我们需要如下辅助引理.

引理 4.1.1 设 $Y \subset X$ 是余维数为 r 的闭的复子流形, 那么以下限制映射

$$H^l(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^l(X-Y,\mathbb{Z})$$

是同构 ($l \leq 2r-2$).

证明 由 Thom 同构定理, $H^j(X,X-Y,\mathbb{Z}) \cong 0$ ($j < 2r$). 进一步, 结合相对上同调正合列

$$\cdots H^l(X,X-Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^l(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^l(X-Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{l+1}(X,X-Y,\mathbb{Z}) \cdots$$

立得所需结论. ■

设解析子集 $Z \subset X$ 的余维数为 r. 考虑注记 4.1.1(5) 的滤过

$$Z = Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_{m+1} = \emptyset.$$

由于 $Z_k - Z_{k+1}$ 是 $X - Z_{k+1}$ 中闭的复子流形, 且余维数严格大于 r. 因此由引理 4.1.1, 我们有

$$H^{2r}(X-Z_k) \cong H^{2r}(X-Z_{k+1}), \qquad k = 1, \cdots, m.$$

这就得到 $H^{2r}(X-Z_1,\mathbb{Z}) \cong H^{2r}(X,\mathbb{Z})$. 这样, 为了定义上同调类 $[Z] \in H^{2r}(X,\mathbb{Z})$, 我们只需要定义光滑子流形 $Z - Z_1 \subset X - Z_1$ 对应的上同调类即可, 我们已经在前面处理了这一情形.

光滑复子流形 $Z \subset X$, $[Z]$ 在 $H^k(X,\mathbb{R})$ 中对应的 de Rham 同调类可以通过如下方式构造. 考虑 Z 的法丛 $N_{Z/X}$ 及其截面 $0_N \cong Z$ 的邻域 V. 设 $\pi : V \to Z$ 是态射 $N_{Z/X} \to Z$ 的限制映射, $V_z := \pi^{-1}(z)$, $\forall z \in Z$. 我们选取一个支集在 V 内的 k 次闭微分形式 ω, 使得 $\omega|_{V_z}$ 在 V_z 内有紧支集, 且满足

$$\int_{V_z} \omega = 1, \qquad \forall z \in Z. \tag{4-1}$$

设 $U \subset X$ 是同构于 V 且包含 Z 的邻域. ω 作为 U 上的形式当然可以被延拓为 X 上的可微闭形式.

引理 4.1.2 上述构造的 ω 恰是 $[Z]$ 在 $H^{2r}(X,\mathbb{R})$ 中的同调类代表元, 这里 r 是 $Z \subset X$ 的余维数.

证明 $[Z]$ 在 $H^{2r}(X,\mathbb{R})$ 的同调类来自于以下复合映射,

$$H^0(Z,\mathbb{R}) \xrightarrow{T^{-1}} H^{2r}(X,X-Z,\mathbb{R}) \xrightarrow{j_Z} H^{2r}(X,\mathbb{R}), \qquad 1 \longrightarrow [Z].$$

另一方面, 由切除定理, 我们有

$$H^{2r}(X,X-Z,\mathbb{R}) \cong H^{2r}(U,U-Z,\mathbb{R}) \cong H^{2r}(V,V-Z,\mathbb{R}) \cong H^{2r}(N_{Z/X},N_{Z/X}-0_N,\mathbb{R}).$$

这样, 我们只需要证明

$$H^{2r}(N_{Z/X},N_{Z/X}-0_N,\mathbb{R}) \cong H^0(Z,\mathbb{R}),$$

并且 ω 作为 V 上的形式恰好通过以上同构对应 $H^0(Z,\mathbb{R})$ 中的生成元 1.

为此, 我们选取截面 0_N 的一个邻域 V', 使得它可以形变收缩到 0_N, 并且 ω 在 $N_{Z/X} - V'$ 上恒为零. 由于

$$H^{2r}(N_{Z/X},N_{Z/X}-0_N,\mathbb{R}) \cong H^{2r}(N_{Z/X},N_{Z/X}-V',\mathbb{R}),$$

所以我们等价于证明

$$H^{2r}(N_{Z/X},N_{Z/X}-V',\mathbb{R}) \cong H^0(Z,\mathbb{R}),$$

并且 ω 对应生成元 1. 由相对上同调的 Leray-Hirsch 定理 (参考定理 2.5.2), 问题进一步归结为证明:

$$H^{2r}(N_{Z/X,z}, N_{Z/X,z} - V_z', \mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$

且 $\omega|_{N_{Z/X,z}}$ 对应生成元 1 ($\forall z \in Z$).

利用相对上同调正合列, 立得

$$H^{2r}(N_{Z/X,z}, N_{Z/X,z} - V_z', \mathbb{R}) \cong H^{2r-1}(S^{2r-1}) \cong \mathbb{R}$$

其中第二项同构由积分诱导. 这样, 由 ω 的选取条件 (4-1) 以及 Stokes 公式可知, ω 在上述复合同构下对应生成元 1. 至此, 我们完成了证明. ■

设 $Z \subset X$ 都是紧的定向复流形, 且其定向与 Z 的法丛定向相容. 设 $\dim Z = n$, $\dim X = n + r$. 我们考虑以下杯积映射与积分映射的复合双线性型

$$\langle , \rangle_X : H^{2r}(X, \mathbb{R}) \otimes H^{2n}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2r+2n}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

取 $\alpha \in H^n(X, \mathbb{R})$, 我们希望计算 $\langle [Z], \alpha \rangle_X$. 不妨设 $\tilde{\alpha}$ 是同调类 α 的代表元, 我们有以下结论

推论 4.1.1 在上述假设条件与记号下, 我们有

$$\langle [Z], \alpha \rangle_X = \int_Z \tilde{\alpha}|_Z.$$

证明 我们仍然采用前面的诸记号. 首先

$$\langle [Z], \alpha \rangle_X = \int_X \omega \wedge \tilde{\alpha} = \int_U \omega \wedge \tilde{\alpha}.$$

由于 U 可以收缩到 Z, 所以存在 U 上的 $2n - 1$ 次形式 β, 使得

$$\tilde{\alpha}|_U = \pi^*(\alpha\tilde{|}Z) + d\beta. \tag{4-2}$$

注意到 ω 是闭的, 并且其支集与 U 的边界不相交, 故由 Stokes 公式可得

$$\int_U \omega \wedge \tilde{\alpha} = \int_U \omega \wedge \pi^*(\tilde{\alpha}|_Z).$$

由式 (4-1) 及 Fubini 定理推出

$$\int_U \omega \wedge \pi^*(\tilde{\alpha}|_Z) = \int_Z \tilde{\alpha}|_Z.$$

这就得到所需结论. ■

注 4.1.2 上述推论可以用 α 具有紧支集这一条件替代原先的紧性要求. ■

定理 4.1.1 (Lelong **定理**) 设 X 是 $n + r$ 维光滑复流形, $Z \subset X$ 是余维数为 r 的解析子集. 设 ω 是 X 上具有紧支集的 $2n$ 次微分形式, 那么
(1)积分 $\int_{Z_{\text{smooth}}} \omega$ 是收敛的.
(2) 如果 ω 是恰当的, 那么 $\int_{Z_{\text{smooth}}} \omega = 0$. 因此 $\int_{Z_{\text{smooth}}}$ 诱导了 $H^{2n}(X, \mathbb{C})$ 上的线性型, 即 $\int_{Z_{\text{smooth}}} \in H^{2n}(X, \mathbb{C})^*$.
(3) $[Z]$ 在以下复合映射下的像等于 $\int_{Z_{\text{smooth}}}$,

$$H^{2r}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n}(X, \mathbb{C})^*,$$

这里第二项映射来自于相交型

$$H^{2r}(X,\mathbb{C})\otimes H^{2n}(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}.$$

换言之, 对于 X 上任何 $2n$ 次闭形式 α, 我们有

$$\langle [Z],[\alpha]\rangle=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha.$$

证明 我们这里只证明最后一个论断. 由引理 4.1.1, 我们可以找到支集在 $X-Z_{\text{sing}}$ 内的闭形式 α' 使得 $[\alpha]=[\alpha']$, 且 α' 的具有紧支集. 由 (2) 可知

$$\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha'.$$

由推论 4.1.1 及其注记, 我们有

$$\langle [Z]|_{X-Z_{\text{smooth}}},[\alpha']\rangle_{X-Z_{\text{smooth}}}=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha'.$$

因此

$$\langle [Z]|_{X-Z_{\text{smooth}}},[\alpha']\rangle_{X-Z_{\text{smooth}}}=\langle [Z],[\alpha']\rangle=\langle [Z],[\alpha]\rangle.$$

这样, 我们就得到

$$\langle [Z],[\alpha]\rangle=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha'=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha.$$

命题 4.1.1 设 X 是 $n+r$ 维紧 Kähler 流形, 且 Z 是余维数为 r 的解析子集, 则 $[Z]$ 在 $H^{2r}(X,\mathbb{C})$ 中的像落在 $H^{r,r}(X)$ 中. 换言之, $[Z]\in H^{2r}(X,\mathbb{Z})\cap H^{r,r}(X)$ 是 Hodge 类.

证明 设 $z\in Z_{\text{smooth}}$, 选取 z 在 X 中的局部邻域全纯坐标 $\{z_i\}_{i=1}^{r+n}$, 使得 Z_{smooth} 由方程 $z_1=\cdots=z_r=0$ 定义. 设 α 是一个 (p,q) 闭形式 (这里 $p+q=2n$, 且 $(p,q)\neq(n,n)$), 则 $\alpha|_{Z_{\text{smooth}}}=0$. 因而由定理 4.1.1, 我们有

$$\langle [Z],[\alpha]\rangle_X=\int_{Z_{\text{smooth}}}\alpha=0.$$

这表明 $[Z]$ 与 $H^{p,q}(X)$ 中的元素相交型是零, 故 $[Z]\in H^{r,r}(X)$. ∎

注 4.1.3 上述关于光滑子流形 $Z\subset X$ 定义上同调类 $[Z]$ 以及构造 de Rham 表示的诸讨论, 都可以类似推广到实流形情形. 但总是需要保证 Z 在 X 中的法丛是可定向的. ∎

在复流形 X 上, 我们可以定义更一般的解析闭链 (Analytic cycle) 的概念. 具体言之, 即如下形式的有限项整系数组合 $Z=\sum\limits_i n_iZ_i$, 此处 $Z_i\subset X$ 是余维数 r 的不可约解析闭子集. 利用线性扩张, 可以自然地定义解析闭链 Z 的上同调类 $[Z]=\sum\limits_i n_i[Z_i]\in H^{2r}(X,\mathbb{Z})$, 我们称之为闭链类 (Cycle class). 余维数 1 的闭链称作除子 (Divisor), 其闭链类称作除子类. 类似地, 在代数簇上, 我们也可以定义代数闭链 (Algebraic cycle) 等概念.

注 4.1.4 对射影代数簇 X, 由周炜良的经典结果 (更一般的, Serre 的 GAGA 原理), X 上的代数子集与解析子集是一样的. 因此我们可以将代数闭链与解析闭链等同起来. X 上的超平面截口对应 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中的上同调元. ∎

4.2 向量丛与陈类

前面我们已经证明了 Kähler 流形上的解析闭链类都是 Hodge 类. 这一节我们将给出另一种重要的 Hodge 类, 即向量丛的陈类. 我们此前已定过复线丛的第一陈类. 现在我们希望引入更一般的概念. 为此需要做一些准备工作.

设 X 是微分 (或拓扑) 流形, $\pi : E \to X$ 是秩 r 复向量丛, $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E) \to X$ 是射影丛. E_x 是 E 在点 $x \in X$ 上的茎.

引理 4.2.1 *存在 tautological 子线丛 $\mathcal{L} \subset \bar{\pi}^*E$, 使得 $\bar{\pi}^*E$ 有如下分解,*

$$\bar{\pi}^*E \cong \mathcal{L} \oplus E', \qquad E' \cong \bar{\pi}^*(E)/\mathcal{L}.$$

证明 我们具体构造 $\mathcal{L}$. 对任何 $\Delta \in \mathbb{P}(E_x)$, Δ 可看作 E_x 中的直线, 因而也可定义成 $\mathcal{L}$ 在 Δ 处的茎. 在 $\bar{\pi}^*E$ 上配备 Hermite 度量, 那么我们可以在此度量下定义 $\mathcal{L}$ 的正交补 E'. ■

设 $\mathcal{L}^*$ 是 $\mathcal{L}$ 的对偶, 令 $h = c_1(\mathcal{L}^*)$. 由推论 2.2.7, 闭链类 $h^i \in H^{2i}(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$ $(i = 0, \cdots, r-1)$ 限制到每条茎 E_x 上, 恰好构成了 $H^*(E_x, \mathbb{Z})$ 的基. 我们曾经利用 Leray-Hirsch 定理 2.5.2 得到以下结论.

引理 4.2.2 (引理 2.5.1) *同调群 $H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$ 是环 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 上以 $1, h, \cdots, h^{r-1}$ 为基的自由模. 特别地, 拉回映射*

$$\bar{\pi}^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$$

是单射.

命题 4.2.1 (分裂原理) *设 $\pi : E \to X$ 是复向量丛, 则存在一个连续映射 $\phi : Y \to X$, 使得拉回映射 $\phi^* : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(Y, \mathbb{Z})$ 是单射, 并且 ϕ^*E 是线丛的直和.*

证明 由引理 4.2.1, 我们可以对 E 的秩施归纳法, 将归纳假设用于丛 $E' \to \mathbb{P}(E)$ 上. ■

注 4.2.1 如果 E 是可微的, 那么 ϕ 可以取成可微映射. 如果 $\pi : E \to X$ 是复流形上全纯向量丛, 那么在该情形中, 我们只能保证 π^*E 具有一个全纯子丛的滤过, 使得相邻两项的商层是全纯线丛. ■

定理 4.2.1 (陈类公理化定义) *设 $\pi : E \to X$ 是复向量丛, 则存在唯一的映射 c, 使得*

$$c(E) = \sum_i c_i(E) t^i \in H^*(X, \mathbb{Z})[t], \qquad c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}), \quad c_0(E) := 1,$$

并满足以下条件:

(1) 若 $\mathrm{rank} E = 1$, 则 $c(E) = 1 + t c_1(E)$.

(2) 设 $\phi : Y \to X$ 是连续 (或可微) 映射, $\phi^* : H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \to H^{2i}(Y, \mathbb{Z})$ 是拉回映射, 则

$$c(\phi^*E) = \phi^*(c(E)).$$

(3) (Whitney 公式) 设 $E = F \oplus G$, 则在 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 环结构运算下, 我们有 $c(E) = c(F)c(G)$.

我们称 $c_i(E)$ 为 E 的第 i 陈类 (Chern class).

证明 先证唯一性. 由分裂原理, 我们设 $\phi : Y \to X$, 使得 $\phi^* E = \oplus_i L_i$. 由条件 (2)(3)

$$\phi^* c(E) = \prod_i (1 + t c_1(L_i)).$$

因为 $\phi^* : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(Y, \mathbb{Z})$ 是单的, 这就唯一确定了诸 $c_i(E)$.

现证明存在性. 由引理 4.2.2, $H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$ 在环 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 下有一组基 $1, h, \cdots, h^{r-1}$. 因此存在 $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, 使得 (令 $c_0(E) = 1$)

$$h^r + \sum_{0<i\leq r} \bar{\pi}^* c_i(E) h^{r-i} = 0. \tag{4-3}$$

这就给出了陈类的构造. 以下验证该定义满足命题条件.

如果 E 是线丛, 那么 $\mathbb{P}(E) \cong X$, 而 tautological 子线丛 $\mathcal{L} \cong E$. 由 h 的定义得 $h = -c_1(E)$, 即条件 (1) 成立. 由 $c(E)$ 的构造可知条件 (2) 是显然的. 今证 Whitney 公式. 设 $E = F \oplus G$, $k = \mathrm{rank} F$, $l = \mathrm{rank} G$, 于是 $\mathbb{P}(F)$ 和 $\mathbb{P}(G)$ 是 $\mathbb{P}(E)$ 中不相交的射影子丛. 为方便讨论, 我们用 $\hat{c} := t^r c(\frac{1}{t})$ 表示陈多项式的互反多项式, 用记号 $\mathcal{L}_E$ 代替 $\mathcal{L}$, 用 h_E 代替 h 等等. 由式 (4-3), $\hat{c}(E)(h_E) = 0 \in H^{2r}(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$.

令 $Z_G = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(G)$, $Z_F = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F)$. 我们有自然投影

$$\begin{aligned} \pi_F : & Z_G \longrightarrow \mathbb{P}(F), \\ \pi_G : & Z_F \longrightarrow \mathbb{P}(G). \end{aligned}$$

这就诱导同构

$$\mathcal{L}_E|_{Z_G} \cong \pi_F^*(\mathcal{L}_F), \qquad \mathcal{L}_E|_{Z_F} \cong \pi_G^*(\mathcal{L}_G).$$

这样, 由 $\hat{c}(F)(h_F) = 0 \in H^{2k}(\mathbb{P}(F), \mathbb{Z})$ 推出

$$\hat{c}(F)(h_E)|_{Z_G} = 0 \in H^{2k}(Z_G, \mathbb{Z}).$$

同理有

$$\hat{c}(G)(h_E)|_{Z_F} = 0 \in H^{2k}(Z_F, \mathbb{Z}).$$

因此, $\hat{c}(F)(h_E)$ (相应地, $\hat{c}(G)(h_E)$) 的支集落在 $\mathbb{P}(G)$ (相应地, $\mathbb{P}(G)$) 的邻域内, 从而互不相交. 这样, 杯积

$$\hat{c}(F)(h_E) \cup \hat{c}(G)(h_E) = 0 \in H^{2r}(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z}).$$

注意到 $\hat{c}(F)\hat{c}(G)$ 是关于 t 的首一多项式, 且 $1, h_E, \cdots, h_E^{r-1}$ 是 $H^*(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$ 的基, 这就迫使 $\hat{c}(F)\hat{c}(G) = \hat{c}(E)$. 由互反关系即得 $c(F)c(G) = c(E)$. ■

今假设 X 是紧 Kähler 流形, E 是 X 上的秩 r 全纯向量丛, 那么 $\mathbb{P}(E)$ 也是紧 Kähler 流形 (习题 1.12). 上面的讨论给出了如下典范同构

$$H^k(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{0\leq l\leq r-1} h_E^l H^{k-2l}(X, \mathbb{Z}).$$

h_E 是 $(1,1)$ 型的上同调类, 故诱导态射

$$h_E^l : H^{k-2l}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$$

是 (l,l) 型的 Hodge 结构态射. 对任何 $\alpha\in H^{p,q}(\mathbb{P}(E))\cap H^k(\mathbb{P}(E),\mathbb{Z})$, 我们可以写为

$$\alpha=\sum_{l=0}^{r-1}h_E^l\alpha_l,\qquad \alpha_l\in H^{p-l,q-l}(\mathbb{P}(E))\cap H^{k-2l}(\mathbb{P}(E),\mathbb{Z}).$$

今取 $k=2r$, $\alpha=h_E^r$, 则 $\alpha_l=-c_{r-l}(E)$. 这就得到以下结论.

推论 4.2.1 设 X 是紧 Kähler 流形, E 是 X 上的秩 r 全纯向量丛, 那么 $c_i(E)$ 是 (i,i) 型整类, 亦即 Hodge 类.

在例 2.2.3 中, 我们实际上证明了如下所谓的 Lefschetz $(1,1)$ 类定理.

推论 4.2.2 设 X 是紧 Kähler 流形, $c_1:\mathrm{Pic}(X)\to H^2(X,\mathbb{Z})$ 是 Chern 形式映射. 我们有

$$\mathrm{Hdg}^2(X,\mathbb{Z})\cong \mathrm{Im}c_1.$$

命题 4.2.2 (Lelong **定理**) 设 X 是复流形, L 是全纯线丛, σ 是 L 的非零全纯截面, D 是 σ 对应的除子, 那么除子类 $[D]$ 与第一陈类 $c_1(L)$ 在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中相等.

证明 设 $D=\sum\limits_i n_iD_i$, 这里 D_i 是不可约分支. 令 $L_i=\mathcal{O}_X(D_i)$. 由经典结果, L_i 是全纯线丛, 且$L_i^*=\mathcal{I}_{D_i}$ 是理想层, 局部上由函数 f_i 生成 (即 D_i 由 $f_i=0$ 定义). 因而 $\mathcal{O}_X(D)=\bigotimes_i\mathcal{I}_{D_i}^{\otimes(-n_i)}$. 注意到陈类与闭链类的可加性, 我们只需要证明 $c_1(L_i)=[D_i]$ 的情形即可.

由注记 4.1.1(1) 与引理 4.1.1, 我们有

$$H^2(X,\mathbb{Z})\cong H^2(X-\mathrm{sing}D_i,\mathbb{Z}).$$

这样, 我们就可以进一步将问题归结为 D_i 是光滑除子的情形. 现在考虑相对上同调

$$\cdots H^2(X,X-D_i,\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(X-D_i,\mathbb{Z})\longrightarrow\cdots$$

及 Thom 同构

$$H^2(X,X-D_i,\mathbb{Z})\cong H^0(D_i,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}.$$

由定义, 除子类 $[D_i]$ 就是 $1\in H^0(D_i,\mathbb{Z})$ 在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中的像. 注意到 L_i 在 $X-D_i$ 上是平凡线丛, 因此 $c_1(L_i)\in H^2(X,X-D_i,\mathbb{Z})$, 因而它是 $[D_i]$ 的整数倍. 这样, 为证 $c_1(L_i)=[D_i]$, 我们只需验证如下积分等式成立即可,

$$\int_{D_i}\omega=\int_X\omega\wedge\alpha,\tag{4-4}$$

此处 $\alpha=\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\partial\overline{\partial}\log h(\sigma)$ Chern 形式, ω 是任何在 X 上有紧支集的 $(2n-2)$ 次闭形式 ($n=\dim X$).

注意到 $\log h(\sigma)$ 是奇异的, 所以我们不能直接计算式 (4-4) 右边积分, 而需要极限方式去逼近积分值. 具体言之, 我们考虑 D_i 的管状邻域 T_ε. 在 $X-T_\varepsilon$ 上应用 Stokes 公式,

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\int_{X-T_\varepsilon}\omega\wedge\partial\overline{\partial}\log h(\sigma)=\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\int_{\partial T_\varepsilon}\omega\wedge\partial\log h(\sigma).$$

两边求极限, 即得

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\int_X\omega\wedge\partial\overline{\partial}\log h(\sigma)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\int_{\partial T_\varepsilon}\omega\wedge\partial\log h(\sigma).$$

上式右边的计算可以归结为局部问题. 不妨设在合适的局部坐标下, $\sigma = z_1$, $D_i = \{z \mid z_1 = 0\}$, 于是 $\partial \log h(\sigma) = \frac{dz_1}{z_1} + \{\mathcal{C}^\infty\text{形式}\}$. 代入上式右端, 并应用 Cauchy 积分公式, 即得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{\partial T_\varepsilon} \omega \wedge \partial \log h(\sigma) = \int_{D_i} \omega.$$

综上, 我们有

$$\int_{D_i} \omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_X \omega \wedge \partial\overline{\partial} \log h(\sigma). \tag{4-5}$$

至此我们完成了证明. ■

注 4.2.2　式 (4-5) 称为 Lelong 公式. ■

推论 4.2.3　*设 X 是射影复流形, 那么全纯线丛陈类全体构成的集合与除子类全体构成的集合是相同的.*

证明　如果给定除子 $D = \sum_i n_i D_i$, 那么前面已证 $[D] = c_1(\mathcal{O}_X(D))$. 反之, 如果给定全纯线丛, 则由 Moving 引理, 存在 ample 线丛 H 以及充分大整数 N, 使得 $L \otimes H^{\otimes N}$ 以及 $H^{\otimes N}$ 存在非零全纯截面, 从而 $c_1(L) = c_1(L \otimes H^{\otimes N}) - c_1(H^{\otimes N})$ 可以按照除子类定义. ■

由推论 4.2.2 和推论 4.2.3, 我们看到 $\mathrm{Hdg}^2(X)$ 中的类都是除子类. 对于更一般的 Hodge 类, 我们有著名的 Hodge **猜想**:
设 X 是射影流形, $\alpha \in \mathrm{Hdg}^{2k}(X)$, 那么存在某个非零整数 N, 使得 $N\alpha$ 是代数闭链类.

定理 4.2.2　*设 X 是代数簇, E 是 X 上的全纯向量丛, 那么 $\mathrm{Hdg}^{2k}(X)$ 中全纯向量丛第 k 陈类都可以表示成余维数为 k 的代数闭链类.*

证明　设 H 是一个 ample 除子. 由 Moving 引理, 对充分大 ν, $E' = E \otimes H^{\otimes \nu}$ 由整体截面生成. E' 的这些整体截面诱导了全纯嵌入

$$\phi : X \to \mathrm{Grass}(r, n), \qquad n = \dim H^0(X, E').$$

若 E' 是线丛, 该映射就是我们熟知的线性系映射. E' 可以看成是格拉斯曼流形上 tautological 丛的拉回, 因而由陈类的性质可知, E' 的陈类可以视为格拉斯曼流形的闭链类的拉回. 由已知的结果, 格拉斯曼流形的上同调都是由光滑代数闭链类生成, 所以 E' 的陈类是代数闭链类. 另一方面, 利用陈类性质可以得到以下公式

$$\hat{c}(E)(t) = \hat{c}(E')(t - N\bar{\pi}^* c_1(H)),$$

这里 $\hat{c} = t^r c(\frac{1}{t})$ 是陈多项式的互反多项式, $\bar{\pi} : \mathbb{P}(E) \to X$. 由习题 4.8, 这就推出 E 的陈类是代数闭链类. ■

注 4.2.3　反过来, 任何代数闭链类都是某个向量丛的陈类. 这个结论的证明需要用到相交理论中的一些知识, 我们不再介绍了. ■

4.3　Abel-Jacobi 映射

设 $(V_\mathbb{Z}, F^\cdot V_\mathbb{C})$ 是权 $2p-1$ 的 Hodge 结构. 我们有直和分解

$$V_\mathbb{C} = F^p V_\mathbb{C} \oplus \overline{F^p V_\mathbb{C}},$$

因而 $F^pV_{\mathbb{C}} \cap V_{\mathbb{R}} = \{0\}$, 并且有 $\mathbb{R}$-同构

$$V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}/F^pV_{\mathbb{C}}.$$

这样, 格 $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{R}}$ 也给出了 $V_{\mathbb{C}}/F^pV_{\mathbb{C}}$ 的格. 现在我们可以定义复环簇

$$J^{2p-1}(V) := V_{\mathbb{C}}/(F^pV \oplus V_{\mathbb{Z}}).$$

它被称为第 p 个中间雅克比簇 (Intermediate Jacobian). 对任何 (r,r) 型结构态射 $(V_{\mathbb{Z}}, F^{\cdot}V_{\mathbb{C}}) \to (W_{\mathbb{Z}}, F^{\cdot}W_{\mathbb{C}})$, 我们总有

$$J^{2p-1}(V) \longrightarrow J^{2(p+r)-1}(W).$$

例 4.3.1 设 X 是紧 Kähler 流形, $V_{\mathbb{Z}} = H^{2p-1}(X,\mathbb{Z})$. 我们记 $J^{2p-1}(X) := J^{2p-1}(V)$. 由例 2.2.3, $J^1(X) \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ 就是 Picard 簇. 一般说来, 即使 X 是代数簇, $J^{2p-1}(X)$ 也不一定是阿贝尔簇, 其性质要比 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 复杂得多. ■

设 X 是 n 维紧 Kähler 流形, $[Z] \in H^{2k}(X,\mathbb{Z})$. 由庞加莱对偶 $H_{2n-k}(X,\mathbb{Z}) \cong H^{2k}(X,\mathbb{Z})$, 条件 $[Z]=0$ 等价于说, 存在 (实) $2n-2k+1$ 维的可微链 $\Gamma \subset X$, 使得 $\partial\Gamma = Z$. 令 $\mathcal{Z}^k(X)_{hom}$ 是由余维数为 k 的零调闭链生成的群. 我们的第一个目标是要建立所谓的 Abel-Jacobi 映射

$$\Phi_X^k : \mathcal{Z}^k(X)_{hom} \longrightarrow J^{2k-1}(X). \tag{4-6}$$

为此, 我们需要一些准备工作. 以下为讨论方便, 我们默认所有整系数同调群一律模掉了挠元.

引理 4.3.1 设 Γ 是(实) $2n-2k+1$ 维的可微链, 则

$$\int_{\Gamma} \in F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X,\mathbb{C})^*.$$

证明 回顾

$$F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X,\mathbb{C}) = \frac{F^{n-k+1}A^{2n-2k+1}(X) \cap \mathrm{Ker}d}{dF^{n-k+1}A^{2n-2k}(X)}.$$

设 $\phi \in F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X,\mathbb{C})$, 我们取 ϕ 的代表元 $\eta \in F^{n-k+1}A^{2n-2k+1}(X) \cap \mathrm{Ker}d$. 定义 $\int_\Gamma \phi := \int_\Gamma \eta$. 我们要说明这一定义与代表元选取无关. 今设 η' 是另一代表元, 则 $\eta' - \eta = d\psi$, 这里 $\psi \in F^{n-k+1}A^{2n-2k}(X)$. 设 $Z = \partial\Gamma$. 由 ψ 的类型可知, $\psi|_Z = 0$. 这样, 由 Stokes 公式得

$$\int_\Gamma d\psi = \int_Z \psi = 0.$$

因此 $\int_\Gamma \phi$ 的定义合理. ■

引理 4.3.2

$$J^{2k-1}(X) = F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*/H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z}) \tag{4-7}$$

其中右边的商来自于由链上积分诱导的映射

$$H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*. \tag{4-8}$$

证明 由庞加莱对偶, 我们有

$$F^kH^{2k-1}(X) \cong (F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*)^{\perp}$$

这就得到

$$H^{2k-1}(X,\mathbb{C})/F^kH^{2k-1}(X) \cong F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*.$$

现在我们有交换图 (模掉挠元)

$$
\begin{array}{ccc}
H^{2k-1}(X,\mathbb{Z}) & = & H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{2k-1}(X,\mathbb{C}) & = & H^{2n-2k+1}(X,\mathbb{C})^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{2k-1}(X,\mathbb{C})/F^kH^{2k-1}(X) & = & F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*
\end{array}
$$

由此即得同构 (4-7). ■

引理 4.3.3 Abel-Jacobi 映射 Φ_X^k (见 (4-6)) 是将 $Z \in \mathcal{Z}^k(X)_{\text{hom}}$ 映成

$$\Phi_X^k(Z) = \int_\Gamma \in F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*/H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z}) = J^{2k-1}(X),$$

这里 $\partial\Gamma = Z$.

证明 我们要说明映射与 Γ 的选取无关. 设 Γ' 是另一个链, 满足 $\partial\Gamma' = Z$. 因此 $\partial(\Gamma - \Gamma') = 0$, 从而 $\int_\Gamma - \int_{\Gamma'}$ 落在映射 (4-8) 的像中. 这就证明了我们的结论. ■

$\Phi_X^k(Z)$ 被称为零调闭链 Z 的 Abel-Jacobi 不变量.

例 4.3.2 设 X 是复代数曲线, $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g} \in H_1(X,\mathbb{Z})$ 是一组典范基, $\omega_1,\cdots,\omega_g \in H^{1,0}(X)$ 是线性无关的全纯 1-形式. 设 $Z = \sum\limits_{i=1}^k p_i - \sum\limits_{i=1}^k q_i$ 是次数为零的除子, $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^k \Gamma_i$, 这里 Γ_i 是连接 p_i 和 q_i 的道路. 显然有 $\partial\Gamma_i = p_i - q_i$. $\int_\Gamma$ 可以用向量表示为

$$\int_\Gamma = \left(\sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \cdots, \sum_{i=1}^k \int_{q_i}^{p_i} \omega_g\right)^T \in F^1H^1(X)^*.$$

类似地, 我们有

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow F^1H^1(X)^*, \qquad \gamma_j \longrightarrow \int_{\gamma_j}.$$

这里 $\int_{\gamma_j}$ 可写成向量

$$\int_{\gamma_j} = \left(\int_{\gamma_j}\omega_1, \cdots, \int_{\gamma_j}\omega_g\right)^T.$$

我们它们称为周期向量 (Period vector), 而把

$$\Pi = (\int_{\gamma_1}, \cdots, \int_{\gamma_{2g}})$$

称作周期矩阵 (Period matrix). $H_1(X,\mathbb{Z})$ 在 $F^1H^1(X)^*$ 中的像记为格 Λ. 这样, Abel-Jacobi 映射将次数为零的除子 Z 映成了 $\Phi_X^1(Z) = \int_\Gamma + \Lambda$. 曲线上更一般的 Abel-Jacobi 映射定义为

$$u : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow J^1(X), \qquad D \longrightarrow \Phi_X^1(D - (\deg D)q),$$

这里 $q \in X$ 是选定的点. ■

例 4.3.3 设 X 是紧 Kähler 流形, Z 是除子, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(Z)$ 相应的全纯线丛. 由 Lelong 定理, Z 是同调于零的除子当且仅当 $c_1(\mathcal{L}) = 0$. 在这一情形下, $\mathcal{L}$ 的同构类在 $\mathrm{Pic}^0(X) = J^1(X)$ 中有对应的元素 α_Z. 可以证明, $\alpha_Z = \Phi_X^1(Z)$ (习题 4.11). ■

我们这里介绍一个重要的结果, 它的证明要用到后面几章的深刻结论.

定理 4.3.1 (Green-Voisin **定理**) 设 $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是 $\mathbb{P}^{2n}$ 中光滑 d 次超曲面族. 如果 $(n+2)d-(2n+1)<(2n+1)(d-2)$, 那么对充分一般的 $f \in B$, Abel-Jacobi 映射

$$\Phi_{Y_f} : \mathcal{Z}^n(Y_f)_{\mathrm{hom}} \longrightarrow J^{2n-1}(Y_f)$$

的像含于 $J^{2n-1}(Y_f)$ 的挠元部分中, 此处 Y_f 是 f 对应的纤维.

定理 4.3.2 (Griffiths-Abel-Jacobi **映射定理**) 设 Y 是连通复流形, $y_0 \in Y$ 是给定点. $Z \subseteq Y \times X$ 是余维数为 k 的闭链. 设 $Z = \sum_i n_i Z_i$, Z_i 是光滑的且投影 $\mathrm{pr}_1 : Z_i \to Y$ 是浸没. 考虑纤维 $Z_y = \sum_i n_i Z_{i,y}$, $Z_{i,y} := \mathrm{pr}_1^{-1}(y) \subset X$. 那么
(1) 这些纤维 Z_y 在 X 中彼此同调;
(2) 以下映射

$$\phi : Y \longrightarrow J^{2k-1}(X), \qquad y \longrightarrow \Phi_X^k(Z_y - Z_{y_0})$$

是全纯的.

证明 由 $J^{2k-1}(X)$ 上的加法结构, 我们只需要考虑 Z 是光滑不可约的情形即可. 设 $y_1 \in Y$, $U \subset Y$ 是 y_1 的可缩小邻域. 设

$$p_Y := \mathrm{pr}_1|_Z : Y \times X \to Y,$$
$$p_X := \mathrm{pr}_2|_Z : Y \times X \to X.$$

对任何 $y \in U$, 取连接 y_1, y 的道路 $[y_1, y]$, 并设 $\Gamma_y = p_Y^{-1}([y_1, y]) \subset Z$. 此时, $\partial\Gamma_y = y \times Z_y - y_1 \times Z_{y_1}$, 它在 p_X 下的像就是 $Z_y - Z_{y_1}$. 这样, 我们就得到 X 中的一个可微链, 其边界恰好是 $Z_y - Z_{y_1}$, 从而 $[Z_y] = [Z_{y_1}]$. 由此即得定理结论 (1).

由 $J^{2k-1}(X)$ 上的加法结构, $\phi(y) = \phi(y_1) + \Phi_X^k(Z_y - Z_{y_1})$. 这样, 我们只需要验证 $\phi'(y) = \Phi_X^k(Z_y - Z_{y_1})$ 在 U 上全纯即可. 进一步, 我们可以将 ϕ' 提升到

$$\psi : U \longrightarrow F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*, \qquad y \longrightarrow \psi(y)\left(\eta \to \psi(y)(\eta) := \int_{\Gamma_y} p_X^*(\tilde{\eta})\right),$$

这里 $\eta \in F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)$, $\tilde{\eta} \in F^{n-k+1}A^{2n-2k+1}(X) \cap \mathrm{Ker}d$ 是 η 的代表元. 这样, 问题进一步转化为, 验证 $\psi_\eta(y) := \psi(y)(\eta)$ 在 U 上全纯 (对任何 η).

注意到 $p_X^*(\tilde{\eta})$ 是 $2n-2k+1$ 次闭形式, 而 $\dim Z_{y_1} = 2n-2k$, 所以 $p_X^*(\tilde{\eta})|_{Z_{y_1}} = 0$. 由于 $Z_U = p_Y^{-1}(U)$ 微分同胚于 $Z_{y_1} \times U$, 而 U 可缩, 因此 $H^*(Z_U) \cong H^*(Z_{y_1})$. 这样, $p_X^*(\tilde{\eta}) = d\beta$ 是恰当的. 由 Stokes 公式即得

$$\psi_\eta(y) = \int_{Z_y} \beta - \int_{Z_{y_1}} \beta.$$

由推论 3.2.1, 我们有

$$d\psi_\eta(y)(v) = d_v\left(\int_{Z_y} \beta\right) = \int_{Z_y} \mathrm{int}(\chi_v) d\beta = \int_{Z_y} \mathrm{int}(\chi_v)(p_X^*(\tilde{\eta})),$$

这里 χ_v 是 Z 中的向量场, 使得 $p_Y(\chi_v) = v$.

今取 v 为 $y \in Y$ 处的 $(0,1)$ 型切向量, 并且其提升 χ_v 也是 $(0,1)$ 型. 注意到$p_X^*(\tilde{\eta}) \in F^{n-k+1}A^{2n-2k+1}(Z)$, 因此缩并形式 $\mathrm{int}(\chi_v)(p_X^*(\tilde{\eta}))|_{Z_y} = 0$, 这就推出 $d\psi_\eta(y)(v) = 0$, 即 ψ_η

是全纯的. ■

注 4.3.1 定理条件也可以替换为更弱形式, 即只要求 Z 在 Y 上是平坦的. ■

设 X 是连通的 n 维紧 Kähler 流形. 设 Z 是余维数 n 的闭链, 于是可以写为 $Z=\sum_i n_ip_i$, 此处 p_i 是 X 中的点. $[Z]=0$ 当且仅当 $\sum_i n_i=0$. 我们将复环簇 $\mathrm{Alb}(X):=J^{2n-1}(X)$ 称作 Albanese 簇. 由定义,

$$\mathrm{Alb}(X)=H^0(X,\Omega_X)^*/H_1(X,\mathbb{Z}) \tag{4-9}$$

考虑对角线 $\Delta\subset X\times X$, 并取定 $x_0\in X$. 由定理 4.3.2, 我们得到全纯映射

$$\mathrm{alb}_X:X\longrightarrow \mathrm{Alb}(X),\qquad x\to\Phi_X^{2n-1}(x-x_0).$$

它被称为 Albanese 映射. 例 4.3.2 关于曲线上 Jacobi 簇的讨论都可以推广到 Albanese 簇上, 这里不再赘述.

我们这里罗列 Albenese 簇的部分性质.

命题 4.3.1 设 X 是紧 Káhler 流形, 那么
(1) 像 $\mathrm{alb}_X(X)$ 生成了 $\mathrm{Alb}(X)$ (作为加法群);
(2) 如果 X 是射影簇, 则 $\mathrm{Alb}(X)$ 是阿贝尔簇;
(3) 设 $f:X\to T$ 是从 X 到复环簇 T 的全纯映射, 使得 $f(x_0)=0$, 那么存在唯一的复环簇态射 $g:\mathrm{Alb}(X)\to T$ 满足 $f=g\circ\mathrm{alb}_X$.

设 $X\times Y$ 是光滑紧 Kähler 流形, $\dim X=n,\dim Y=m$, Y 要求连通. 设 $Z\subset X\times Y$ 是余维数 k 的闭链, 且在 Y 上平坦. 取参考点 $y_0\in Y$. 由定理 4.3.2 及注记 4.3.1, 我们有全纯映射

$$\phi:Y\longrightarrow J^{2k-1}(X),\qquad y\to\Phi_X^k(Z_y-Z_{y_0}).$$

又由命题 4.3.1, 可诱导复环簇之间的态射

$$\psi:\mathrm{Alb}Y\longrightarrow J^{2k-1}(X).$$

ψ 显然由态射

$$\phi_*:H_1(Y,\mathbb{Z})\longrightarrow H_1(J^{2k-1}(X,\mathbb{Z}))=H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})\left(\overset{P.D.}{\cong}H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z})\right)$$

决定 (见式(4-9)). 设 $\gamma:[0,1]\to Y$ 是以 0 点为基点的环路. 由 Abel-Jacobi 映射的定义, 我们可以将 $J^{2k-1}(X)$ 中的道路 $\phi\circ\gamma$ 提升到 $J^{2k-1}(X)$ 的万有覆盖空间 $F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X)^*$ 上, 即

$$\widetilde{\phi\circ\gamma}(t)(\eta)=\int_{\Gamma_t}(p_X^*\eta),\qquad\forall\eta\in F^{n-k+1}H^{2n-2k+1}(X),$$

此处 $\Gamma_t=p_Y^{-1}(\gamma([0,t]))$. 设 $[\gamma]\in H_1(Y,\mathbb{Z})$ 是对应的同调类, $\phi_*([\gamma])\in H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z})$ 在 $F^{n-k+1}H^{2n2-k+1}(X)^*$ 中的像就是

$$\widetilde{\phi\circ\gamma}(1)-\widetilde{\phi\circ\gamma}(0):\eta\to\int_\Gamma p_X^*\eta,\qquad\Gamma:=p_Y^{-1}(\gamma).$$

这样, $\phi_*([\gamma])=(p_X)_*[\Gamma]=[p_X(p_Y^{-1}(\gamma))]\in H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z})$.

设 $[Z]^{1,2k-1}\in H^1(Y,\mathbb{Z})\otimes H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})$ 是 $[Z]$ 的相应 Küneth 分支. 由习题 4.10, 它诱导

$$[Z]:H^{2m-1}(Y,\mathbb{Z})\longrightarrow H^{2k-1}(X,\mathbb{Z}),$$

并且 ϕ_* 在庞加莱对偶下恰好对应上述态射. 这样, 我们得到以下结论.

命题 4.3.2 $\psi : \mathrm{Alb}Y \longrightarrow J^{2k-1}(X)$ 就是由 $[Z] : H^{2m-1}(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ 诱导的复环簇态射.

推论 4.3.1 ψ 的像是 $J^{2k-1}(X)$ 的复子环簇, 它在 0 处的切空间含于 $H^{k-1,k}(X)$ 中.

证明 Hodge 态射 $[Z]^{1,2k-1} \in H^1(Y, \mathbb{Z}) \otimes H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ 是 $(k-m, k-m)$ 型的, 且 $H^{2m-1}(Y) = H^{m,m-1}(Y) \oplus H^{m-1,m}(Y)$. 这样, $[Z]$ 映射的像含于 $H^{k,k-1}(Y) \oplus H^{k-1,k}(Y)$ 中. $J^{2k-1}(X)$ 在 0 处的切空间等于 $H^{2k-1}(X, \mathbb{C})/F^k H^{2k-1}(X)$, 它显然包含 $H^{k-1,k}(X)$. 因此 $[Z]$ 的像在 0 处的切空间含于 $H^{k-1,k}(X)$ 中. ■

4.4 弱 Lefschetz 定理

我们将在这一节证明如下经典结果.

定理 4.4.1 (Lefschetz 超平面截口定理) 设 X 是 n 维射影簇, $j : Y \hookrightarrow X$ 是超平面截口, $U = X - Y$ 是光滑的, 考虑限制映射

$$j^* : H^k(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{Z}).$$

那么, 当 $k < n-1$ 时, j^* 是同构; 当 $k = n-1$ 时, j^* 是单射.

该定理有时也称为弱 Lefschetz 定理. 证明此定理的主要工具是 Morse 理论. 我们先来回顾这些内容.

设 X 是微分流形, $p \in X$, f 是 X 上 $\mathcal{C}^\infty$ 实可微函数. 如果 $df(p) = 0$, 那么我们就称 p 是 f 的临界点 (Critical point), 而 $f(p)$ 称为 f 的临界值 (Critical value). 考虑临界点 $p \in X$ 附近的局部坐标 $(x_1, \cdots, x_k)$ 使得 $p = 0$. 我们定义 f 在点 p 的 Hesse 泛函 $H_p(f)$, 它是切空间 $T_{X,p}$ 上的对称双线性型

$$H_p(f)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

它对应的对称矩阵也叫作 Hesse 矩阵. 如果 $H_p(f)$ 在切空间 $T_{X,p}$ 上非退化, 则称 p 是 f 的非退化临界点. 通过合适的坐标选取, 我们可以将 Hesse 矩阵对角化为 H', 使得对角元为 ± 1 或 0. H' 对角线上 (-1) 的个数称作 $H_p(f)$ 的Morse 指标 (Index), 或简称为 f 在 p 处的Morse 指标, 并记作 $\mathrm{ind}_p f$. H' 对角线上 0 的个数称作零化数. 临界点 p 非退化当且仅当零化数为 0.

临界点的概念显然可以通过切空间进一步推广到微分流形之间的映射上. 我们有以下熟知结果.

定理 4.4.2 (Sard 定理) 设 M_1 和 M_2 都是具有可数基的微分流形, $\dim M_i = m_i$. 设 $f : M_1 \to M_2$ 是 $\mathcal{C}^k$ 映射 $(k \geq \max\{m_1 - m_2 + 1, 1\})$, 那么临界点集的像在 M_2 中具有零测度.

引理 4.4.1 (Morse 引理) 设 p 是 f 的非退化临界点, 那么在 p 的某个邻域中, 存在一组坐标, 使得 $p = 0$, 且

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(0) - \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2,$$

此处 $r = \mathrm{ind}_p f$.

特别地, 非退化临界点 p 是孤立的, 因而临界值也是离散的.

我们令 $X_{[a,b]} = f^{-1}([a,b])$, $X_{\le b} := f^{-1}((-\infty,b])$, 这里 $-\mathbb{R} < a \le b < +\mathbb{R}$. 这些集合被称为 f 的水平集 (Level set). 如果对任何 $b \in \mathbb{R}$, 闭子集 $X_{\le b}$ 都是紧的, 那么就称 f 为穷竭函数 (Exhaustion function). 显然穷竭函数 f 的纤维 $X_a = f^{-1}(a)$ 都是紧的. 进一步, 如果穷竭函数 f 的临界点都是非退化的, 那么由 Morse 引理, 每个临界值最多只有有限个对应的临界点. 特别地, $(-\infty,b]$ 中只有有限个临界值. 这样的 f 也叫做 Morse 函数.

定理 4.4.3 (Morse **定理**) 设 X 是微分流形, $f: X \to \mathbb{R}$ 是可微穷竭函数. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ 使得 $[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$ 中最多只有 λ 是临界值.
(1) 如果 λ 不是临界值, 那么 $X_{\le\lambda-\varepsilon}$ 微分同胚于 $X_{\le\lambda+\varepsilon}$, 并且 $X_{\le\lambda-\varepsilon}$ 是 $X_{\le\lambda+\varepsilon}$ 的形变收缩核, 因而包含映射 $X_{\le\lambda-\varepsilon} \to X_{\le\lambda+\varepsilon}$ 是同伦等价.
(2) 如果 λ 是临界值, 设 $p_1, \cdots, p_k$ 是 f 在 $X_\lambda := f^{-1}(\lambda)$ 上的所有临界点, 且 $r_i = \mathrm{ind}_{p_i} f$, 那么存在从 $X_{\le\lambda+\varepsilon}$ 到 $Y = X_{\le\lambda-\varepsilon} \cup_{S^{r_1-1}} B^{r_1} \cup_{S^{r_k-1}} B^{r_k}$ 的形变收缩, 此处 Y 是由 $X_{\le\lambda-\varepsilon}$ 与各 r_i 维球 B^{r_i} 沿着它们各自边缘 S^{r_i-1} 粘合而得.

设 $X \subset \mathbb{R}^N$ 是微分簇, h 是 $\mathbb{R}^N$ 的黎曼内积. 取 $p \in \mathbb{R}^N$, 我们定义距离平方函数 $f_p(x) = h(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{px})$ (有时简记为 $h(\overrightarrow{px})$), $\forall x \in X$, 这里 $\overrightarrow{px}$ 表示向量.

引理 4.4.2 对充分一般点 $p \in \mathbb{R}^N$, 上述 f_p 是 X 上的 Morse 函数.

证明 f_p 显然是穷竭函数. 我们要证明, 对一般的点 p, f_p 没有退化临界点. 首先, 我们来确定临界点所要满足的条件. 对任何 $u \in T_{X,x}$, $df_{p,x}(u) = 2h(\overrightarrow{px}, u)$. 因此 x 是 f_p 的临界点当且仅当 $\overrightarrow{px}$ 与切空间 $T_{X,x}$ 正交. 考虑

$$Z = \{(x,0) \in X \times \mathbb{R}^N \mid \overrightarrow{px} \perp T_{X,x}\}.$$

我们考虑投影 $\pi: Z \to \mathbb{R}^N$. 显见 $\dim Z = N$, 因而 π 在某点是浸没当且仅当在该点是浸入. 由 Sard 定理, 那些非浸入点在 π 下的像的全体构成零测度集合 (记为 S), 因而其内部是空集.

现在我们只需要证明, 使得 f_p 有退化临界点的 $p \in \mathbb{R}^n$ 构成的集合 (记为 T) 恰好就是 S. 注意 $p \in S$ 当且仅当存在 $(u,0) \in T_{X,x} \times T_{\mathbb{R}^N,p}$ 落在 $T_{Z,(x,p)}$ 中; 而 $p \in T$ 等价于存在 $u \in T_{X,x}$ 使得 Hesse 矩阵满足 $H_p(f)u = 0$. 这样, 问题进一步归结为证明: 对 $(x,p) \in Z$ 及 $u \in T_{X,x}$, $(u,0) \in T_{X,x} \times T_{\mathbb{R}^N,p}$ 落在 $T_{Z,(x,p)}$ 中当且仅当 $H_p(f)u = 0$.

Z 可以看成 $X \times \mathbb{R}^N$ 中向量丛 $\mathrm{pr}_1^*\Omega_X$ 的截面 $df_{p,x}$ 的零点集. 今取 X 上的局部坐标 x_i, 该截面写为 $\sum_i \frac{\partial f_p}{\partial x_i} dx_i$. 于是 Z 在 (x,p) 处的切空间可写为

$$T_{Z,(x,p)} = \left\{(u,w) \in T_{X,x} \times T_{\mathbb{R}^N,0} \mid d_u \frac{\partial f_p}{\partial x_i} + d_w \frac{\partial f_p}{\partial x_i} = 0, \forall i\right\}.$$

设 $u = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, 那么上述集合条件式的第一项等价于 $\sum_j u_j \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j}$. 因此 $(u,0) \in T_{Z,x,p}$ 当且仅当 $\sum_j u_j \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, 即 $H_p(f)u = 0$. ■

现在我们将 $\mathbb{R}^N$ 替换为 $\mathbb{C}^N$, 将 h 替换为 Hermite 度量, 并将 X 替换为 n 维仿射簇 (Affine variety), 即 $\mathbb{C}^N$ 中的解析子簇. 由上述引理, 对一般的点 $p \in \mathbb{C}^N$, 我们有 Morse 函数 $f_p(x) =$

$h(\overrightarrow{px})$, $\forall x \in X$. h 的实部 $\mathrm{Re}h := \langle , \rangle$ 可以视为欧几里德空间内积. 作为欧几里德空间上的函数, 我们有

$$df_{p,x}(u) = 2\langle \overrightarrow{px}, u\rangle, u \in T_{X,x}.$$

如果 x 是临界点, 对该式再次微分即得

$$H_p(f)(u,v) = 2(\langle \overrightarrow{px}, \Phi(u,v)\rangle + \langle u, v\rangle),$$

这里 $\Phi(u,v)$ 是第二基本形式 (见例 1.4.2). 令 $H(u,v) = h(\Phi(u,v), \overrightarrow{px})$. 它显然是 $T_{X,x} \cong \mathbb{C}^n$ 上的对称双线性型. 由数乘 i 诱导的 $\mathbb{C}^n$ 的自同构, 将 H 变成 $-H$. 这表明如果 λ 是 H (相应地, $\mathrm{Re}H = \langle \overrightarrow{px}, \Phi(u,v)\rangle$) 的特征值, 那么 $-\lambda$ 也是特征值. 因此 $H_p(f)$ 在欧几里德空间上的特征值形如 $2(1+\lambda_i), 2(1-\lambda_i)$, $i = 1, \cdots, n$. 显然其中最多有 n 个复特征值. 这就得到以下结论.

命题 4.4.1 n 维仿射簇 $X \subset \mathbb{C}^N$ 上的距离函数 $f_p(x) = h(\overrightarrow{px})$ 在每个临界点处的指标不超过 n, 这里 $p \in \mathbb{C}^N$ 是充分一般点.

为了应用 Morse 定理, 我们回顾一下 CW-复形的概念. 一个拓扑空间如果能写成有限个闭胞腔 (Cell, 即同胚于 $\mathbb{R}^k$ 中闭球) 的并, 则称之为紧 CW-复形, 所有胞腔中最大维数 k 称作该紧 CW-复形的维数. 一个拓扑空间如果存在递增的开集序列 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 构成开覆盖, 使得每个 $\overline{U}_i$ 是紧 CW-复形, 则称之为 CW-复形 .

定理 4.4.4 n 维仿射簇有一个实维数不超过 n 的 CW-复形的同伦型.

证明 考虑 $X \subset \mathbb{C}^N$ 上的距离函数 $f_p(x) = h(\overrightarrow{px})$. 由引理 4.4.2, 对一般的 $p \in \mathbb{C}^N$, 这是 Morse 函数. 设

$$X_k = \{x \in X \mid h_0(x) \le k\},$$

X_k^0 是其内部, 于是 $\{X_k^0\}$ 是 X 的开覆盖. 由定理 4.4.3 及命题 4.4.1, X_{k+1} 有一个同伦型, 恰好是 X_k 与有限个实维数 $\le n$ 的球的并. 这就得到了所要结论. ■

我们还需要一些分析方面的准备工作. 设 X 是光滑射影簇, $i : Y \hookrightarrow X$ 是光滑超平面截口. 由推论 4.2.3, 闭链类 $[Y] \in H^2(X,\mathbb{Z})$ 等于陈类 $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$. 我们有 Gysin 态射 $j_* : H^k(Y,\mathbb{Z}) \to H^{k+2}(X,\mathbb{Z})$. 设 $\pi : T \to Z$ 是 Y 的管状领域. $k : T \hookrightarrow X$ 是包含映射.

引理 4.4.3 设 $\eta_Y \in H_c^2(T,\mathbb{Z})$ 是在 T 内有紧致集的 Y 同调类, 则 $j_* = k_* \circ (\cup \eta_Y) \circ \pi^*$.

证明 由 j_* 的定义, 它实际上是限制映射 $j^* : H^{2n-k-2}(X,\mathbb{Z}) \to H^{2n-k-2}(Y,\mathbb{Z})$ 由庞加莱对偶所诱导, 这等价于

$$\int_Y \beta \wedge j^*\alpha = \int_X j_*\beta \wedge \alpha, \qquad \forall [\alpha] \in H^{2n-k-2}(X,\mathbb{Z}), \quad \forall [\beta] \in H^k(Y,\mathbb{Z}).$$

另一方面,

$$\int_X (k_* \circ (\cup \eta_Y) \circ \pi^*)\beta \wedge \alpha = \int_X k_*(\tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta) \wedge \alpha = \int_X \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \alpha = \int_T \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \alpha,$$

这里 $\tilde{\eta}_Y$ 是 η_Y 的 de Rham 表示, 它是闭的 2-形式, 支集落在 T 中, 且 $\pi_*\tilde{\eta} = 1_Y$ (见引理 4.1.2).

因而, 我们只需证明

$$\int_Y \beta \wedge j^*\alpha = \int_T \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \alpha.$$

由于 T 可以通过 π 形变收缩到 Y, 故限制映射 $H^*(T,\mathbb{Z}) \to H^*(Y,\mathbb{Z})$ 是同构, 因而存在闭 $(2n-k-2)$-形式 α', 以及 $(2n-k-3)$ 形式 α'', 使得 $\alpha|_T = \pi^*\alpha' + d\alpha''$. 由 Stockes 定理以及 $\pi_*\tilde{\eta}_Y = 1_Y$, 我们得到

$$\int_T \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \alpha = \int_T \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \pi^*\alpha' = \int_Y \beta \wedge \alpha' = \int_Y \beta \wedge j^*\alpha. \tag{4-10}$$

这就证明了结论. ■

注 4.4.1 式 (4-10) 第二个等号本质上是用条件 $\int_{V_y} \tilde{\eta}_Y = 1$ $(\forall y \in Y)$ 导出, 此处 $V_y = \pi^{-1}(y)$. 具体言之,

$$\int_T \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*\beta \wedge \pi^*\alpha' = \int_Y \int_{V_y} \tilde{\eta}_Y \wedge \pi^*(\beta \wedge \alpha') = \int_Y \beta \wedge \alpha'.$$

推论 4.4.1 设 $h_Y := h|_Y = [Y]|_Y$. 考虑杯积 $h_Y \cup : H^k(Y,\mathbb{Z}) \to H^{k+2}(Y,\mathbb{Z})$, 那么我们有 $j^* \circ j_* := h_Y \cup$.

类似可证如下结论

推论 4.4.2 $j_* \circ j^* = [Y]\cup : H^k(X,\mathbb{Z}) \to H^{k+2}(X,\mathbb{Z})$.

考虑有理系数上同调的杯积

$$h_Y \cup = j^* \circ j_* : H^k(Y,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{k+2}(Y,\mathbb{Q}).$$

因为 h_Y 是 Kähler 类, 故由强 Lefshetz 定理 2.3.2 可知, 当 $k < n-1$ 时, $h_Y \cup$ 是单射; 当 $k > n-1$ 时, $h_Y \cup = j^* \circ j_*$ 是满射. 同理, 当 $k < n$ 时, $h\cup = j_* \circ j^*$ 是单射; 当 $k > n$ 时, $h\cup$ 是满射. 这就推出如下结论.

推论 4.4.3 当 $k \geq n$ 时, $j^* : H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^k(Y,\mathbb{Q})$ 是满射; 当 $k < n$ 时, j^* 是单射.

引理 4.4.4 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是 n 维代数子簇 (不一定光滑), $Y = \mathbb{P}^{n-1} \cap X$ 是超平面截口, 使得 $U = X - Y$ 是光滑 n 维的, 那么我们有

$$H^k(X,Y,\mathbb{Z}) = H_{2n-k}(U,\mathbb{Z}).$$

证明 我们构造 X 中的邻域序列 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使其形变收缩到 Y. 这样,

$$H^k(X,Y,\mathbb{Z}) \cong \varinjlim H^k(X,Y_i,\mathbb{Z}).$$

由切除定理,

$$H^k(X,Y_i,\mathbb{Z}) \cong H^k(U,Y_i \cap U,\mathbb{Z}).$$

今取 $K_i = U - Y_i \cap U$. 因为 U 是可定向的, 且可以形变收缩到 K_i, 所以由 Lefschetz 对偶, 我们可以得到以下同构

$$H_{2n-k}(K_i,\mathbb{Z}) \cong H^k(U,U-K_i,\mathbb{Z}) = H^k(U,Y_i \cap U,\mathbb{Z}).$$

因此我们有

$$H^k(X,Y,\mathbb{Z}) \cong \varinjlim H_{2n-k}(K_i,\mathbb{Z}).$$

注意每个奇异链都含在某个紧集 $K_i \subset U$ 中, 因此

$$H_{2n-k}(U, \mathbb{Z}) = \varinjlim H_{2n-k}(K_i, \mathbb{Z}).$$

综合各式即得结论. ■

定理 4.4.1 的证明: 由相对上同调长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^k(X, Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k+1}(X, Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

以及引理 4.4.4, 我们只需要证明 $H_k(U, \mathbb{Z}) = 0$ $(k \geq n+1)$. U 显然是 $\mathbb{C}^N$ 的仿射簇. 设 h 是 $\mathbb{C}^N$ 的 Hermite 度量, $p \in \mathbb{C}^N$, f_p 是距离函数, 且通过取合适的 p, 可以假设 f_p 是 Morse 函数. U 可以写为递增开集序列 $\{U_{\leq M}\}_{M \in \mathbb{Z}}$ 的并, 且 $U_{\leq -1} = \emptyset$. 显然

$$H_k(U, \mathbb{Z}) = \lim_{M \longrightarrow \infty} H_k(U_{\leq M}, \mathbb{Z}).$$

这样, 我们只需要证明 $H_k(U_{\leq M}, \mathbb{Z}) = 0$, $k \geq n+1$. 考虑相对同调正合列

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(U_{\leq M+1}, U_{\leq M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(U_{\leq M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(U_{\leq M+1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(U_{\leq M+1}, U_{\leq M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

由于 $U_{\leq -1} = \emptyset$, 所以问题可以进一步归结为证明

$$H_k(U_{\leq M+1}, U_{\leq M}, \mathbb{Z}) = 0, \qquad k > n. \tag{4-11}$$

假设 M 和 $M+1$ 不是临界值, 并且 f_p 在 $[M, M+1]$ 中的临界值为

$$M < \lambda_1 < \cdots < \lambda_i < \cdots \lambda_k < M+1.$$

取 $\lambda_i' \in (\lambda_i, \lambda_{i+1})$. 由定理 4.4.4, $U_{\leq \lambda_i'}$ 的同伦型是 $U_{\leq \lambda_{i-1}'}$ 与诸 r_i 维球 $B_{i,j}^{r_i}$ 通过边界 $S_{i,j}^{r_i}$ 粘合得到, 此处 r_i 对应临界值 λ_i 的相应临界点 $x_{i,j}$ 的指标. 定理 4.4.4 保证了这些指标不超过 n, 因而每个球都满足 $H_k(B, S, \mathbb{Z}) = 0$ $(k > n)$, 从而切除定理即得式 (4-11). ■

考虑由 $\mathbb{P}^n$ 上 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ 诱导的 d 次 Veronese 嵌入映射

$$\Phi_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N.$$

设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是 d 次超曲面, 显然有 $X = \Phi_d(\mathbb{P}^n) \cap \mathbb{P}^{N-1}$. 结合定理 4.4.4 以及推论 2.2.7, 我们立得以下结论.

推论 4.4.4 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是超曲面, 则
(1) 当 k 是奇数且小于 $\dim X$ 时, $H^k(X, \mathbb{Z}) = 0$;
(2) 当 $2k < \dim X$ 时, $H^{2k}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h^k$, 此处 $h = \mathcal{O}_X(1)$.

对上述推论应用庞加莱对偶定理, 即得

推论 4.4.5 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是光滑超曲面, 则
(1) 当 k 是奇数且大于 $\dim X$ 时, $H^k(X, \mathbb{Z}) = 0$;
(2) 当 $2k > \dim X$ 时, $H^{2k}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\alpha$, 此处 α 与 h^{n-1-k} 的相交数恰为 1.

注 4.4.2 考虑 d 次光滑超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$, 设 $\alpha \in H_2(X, \mathbb{Z}) = H^4(X, \mathbb{Z})$ 是生成元, 使得相交数 $\langle \alpha, h \rangle = 1$. $C = X \cap \mathbb{P}^2$ 是 d 次曲线, $[C] = d\alpha$ 显然是代数闭链. 若 X 含有直线, 则显然该直线对应的闭链类就是 α, 因而也是代数闭链. 但当 $d > 5$ 时, X 一般不含直线. Kollár 证明, 对充分大的 d, 闭链类 α 一般不是代数的. 因此, Hodge 猜想中规定有理上同调是必要的. ■

上述的两个推论显然可以通过反复应用 Lefschetz 定理推广到完全交上. 这里不再赘述. 我们给出完全交上 Picard 群的一个有趣推论.

推论 4.4.6 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是光滑完全交, $\dim X \geq 3$, 则 $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1)$.

证明 考虑指数映射正合列

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}).$$

由推论 4.4.4, $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$, 故 $H^1(X,\mathbb{C}) = 0$, 从而由 Hodge 分解可知 $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$. 这就得到单射 $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$. 由于 X 是 $\mathbb{P}^n$ 中的完全交, 所以 $\mathrm{Pic}(X)$ 显然不是平凡群. 为证 c_1 是同构, 我们只需要证 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 由一个元生成即可. 注意到 $\dim X > 3$, 故由推论 4.4.4 可知 $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})$. 因为 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h$. 这样, 我们就得到 $\mathrm{Pic}(X) \cong H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1)$. ∎

利用 Kodaira 消失定理, 我们可以将 Lefshcetz 超平面截口定理推广到更一般的情形.

定理 4.4.5 (Kodaira 消失定理) 设 $L \to X$ 是 n 维紧复簇 X 上的正定线丛, 如果 $p+q > n$, 那么

$$H^q(X,\Omega_X^p(L)) = 0, \qquad p+q > n.$$

由 Serre 对偶定理, 这也等价于

$$H^q(X,\Omega_X^p(-L)) = 0, \qquad p+q < n.$$

定理 4.4.6 (弱 Lefschetz 定理) 设 X 是 n 维紧复簇, $j : Y \hookrightarrow X$ 是光滑超曲面, 且线丛 $\mathcal{O}_X(Y) = (\mathcal{L}_Y)^*$ 是正定的. 那么当 $k < n-1$ 时, 限制映射 $j^* : H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^k(Y,\mathbb{Q})$ 是同构; 当 $k = n-1$ 时, j^* 是单射.

证明 不失一般性, 我们可以考虑复系数上同调的情形. 由 Hodge 分解定理, $j^* = \oplus_{p+q=k} j^*_{p,q}$, 此处 $j^*_{p,q} : H^q(X,\Omega_X^p) \to H^q(Y,\Omega_Y^p)$ 是由 $j_p^* : \Omega_X^p \to j_*\Omega_Y^p$ 诱导. 我们需要证明 $j^*_{p,q}$ 是同构 $(p+q < n-1)$ 或单射 $(p+q = n-1)$. 注意到 $j^*_{p,q}$ 是以下映射的复合

$$\Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_Y = j_*(\Omega_X^p|_Y) \longrightarrow j_*\Omega_Y^p,$$

因此我们只要证明上述每个映射诱导上同调群的同构或单射即可.

对正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p(-Y) \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^p|_Y \longrightarrow 0$$

所诱导的长正合列应用 Kodaira 消失定理, 立知

$$H^q(X,\Omega_X^p) \longrightarrow H^q(Y,\Omega_X^p|_Y)$$

是同构 $(p+q < n-1)$ 或单射 $(p+q = n-1)$.

同样地, 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_Y^{p-1}(-Y) \longrightarrow \Omega_X^p|_Y \longrightarrow \Omega_Y^p \longrightarrow 0$$

诱导的长正合列, 并运用 Kodaira 消失定理, 则可知

$$H^q(Y,\Omega_X^p|_Y) \longrightarrow H^q(Y,\Omega_Y^p)$$

是同构 $(p+q<n-1)$ 或单射 $(p+q=n-1)$. 这就完成了证明. ■

Lefschetz 超平面截口定理可以推广到充分 ample 超曲面完全交的情形. 我们下面陈述此结果, 它的证明要用到后面几章的深刻结论.

定理 4.4.7 (Nori **连通性定理**) 设 X 是 $(n+r)$ 簇, $j:\mathcal{Y}_B\hookrightarrow X\times B$ 是所有 r 个充分 ample 超曲面的完全交构成的万有族. 设 T 是光滑拟射影簇, $\phi:T\to B$ 是浸没, $\mathcal{Y}_T=T\times_B\mathcal{Y}_B$. 那么
$$j^*:H^k(X\times T,\mathbb{Q})\longrightarrow H^k(\mathcal{Y}_T,\mathbb{Q})$$
是同构 $(k<2n)$ 或单射 $(k=2n)$.

Morse 理论可以推广到全纯情形, 后面将会应用它处理 Lefschetz 线束等等问题. 我们在这里做一个简要的介绍.

考虑 n 维复流形 X 上的全纯函数 $f:X\to\mathbb{C}$. 如果 $p\in f$ 满足 $df(p)=0$, 则称临界点; 进一步, 如果全纯 Hesse 泛函 $H_p(f)=0$ 非退化, 则称该临界点非退化, 此处 $H_p(f)$ 是全纯切空间 $T^{1,0}_{X,p}$ 上的对称双线性型, 在合适的局部坐标 $z_1,\cdots,z_n$ 下可表达为
$$H_p(f)\left(\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial z_j}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}.$$
设 $p\in X$ 是非退化临界点, $t=f(p)$, 我们也常称 p 是 $X_t=f^{-1}(t)$ 的通常二重点 (Ordinary double point). 类似实情形的 Morse 引理, 我们可以选取 p 附近的合适全纯坐标, 使得
$$f(z)=f(0)+\sum_{i=1}^n z_i^2.$$

例 4.4.1 考虑全纯映射
$$f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C},\qquad z\to\sum_{i=1}^n z_i^2.$$
0 显然是非退化临界点. 设 B 是以 0 为原点, 以 r 为半径的球, $B_t=B\cap f^{-1}(t)$. 将 f 限制到球 B 上, 即 $f:B\to\Delta$, 此处 Δ 是半径为 r^2 的圆盘. 它被称为 Lefschetz 退化.

对 $t=se^{i\theta}\in\Delta^*:=\Delta-\{0\}$, $s=|t|\le r^2$, B_t 含有球面
$$S_t^{n-1}=\left\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in B\mid z_i=\sqrt{s}e^{\frac{i\theta}{2}},x_i\in\mathbb{R},\sum_{1\le i\le n}x_i^2=1\right\}.$$
当 t 趋向于 0 时, S_t^{n-1} 收缩为一点, 因此我们称 S_t^{n-1} 为零化球面 (Vanishing sphere). 此外, 也可定义球
$$B_t^n=\left\{z=(z_1,\cdots,z_n)\mid z_i=\sqrt{s}e^{\frac{i\theta}{2}},x_i\in\mathbb{R},\sum_{1\le i\le n}x_i^2\le 1\right\}$$
它被称为 S_t^{n-1} 的锥. 我们将 $H_{n-1}(B_t,\mathbb{Z})$ 的生成元 δ 称为该 Lefschetz 退化的零化闭链 (Vanishing cycle). ■

定理 4.4.8 (**全纯** Morse **定理**) 设 X 是 n 维复簇, Δ 是小圆盘. 设 $f:X\to\Delta$ 是正常全纯映射, 使得 f 是 $\Delta^*:=\Delta-\{0\}$ 上的浸没, 且 f 在 $0\in\Delta$ 上有一个临界点 x_0. 那么 X 可以形变收缩成 $X_t\bigcup_{S_t^{n-1}}B_t^n$, 即 X_t 与一个 n 维球沿着零化球面 $S_t^{n-1}\subset X_t$ 粘合得到的并 $(t\in\Delta^*)$.

推论 4.4.7 设 $f : X_\Delta \to \Delta$ 是圆盘 Δ 上的正常全纯映射, 满足定理 4.4.8 的条件, $i : X_t \to X_\Delta$ 是包含映射. 那么 $i_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \to H_k(X_\Delta, \mathbb{Z})$ 是同构 $(k < n-1)$ 或满射 $(k = n-1)$.

进一步, 当 $k = n-1$ 时, $\mathrm{Ker}(i)$ 是零化球面 $S_t^{n-1} \subset X_t$ 的类生成.

证明 由定理 4.4.8 以及切除定理, 我们有

$$H_*(X_\Delta, \mathbb{Z}) \cong H_*(X_t \bigcup_{S_t^{n-1}} B_t^n, X_t, \mathbb{Z}) \cong H_*(B_t^n, S_t^{n-1}, \mathbb{Z}).$$

这样, 由相对同调正合列以及 $H_k(X_t \bigcup_{S_t^{n-1}} B_t^n, X_t, \mathbb{Z}) = 0$ $(k \leq n-1)$ 即得命题第一部分.

命题后半部分直接来自于以下正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(B_t^n, S_t^{n-1}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H_{n-1}(S_t^{n-1}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & H_n(X_\Delta, X_t, \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(X_\Delta, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

■

4.5 Lefschetz 线束

这一节中, 我们将介绍 Lefschetz 线束的基本概念和性质, 并利用它给出 Lefschetz 超平面截口定理的一个归纳性证明 (本质上仍然需要 Mores 理论).

设 X 是复簇, L 是 X 上的全纯线丛, $\mathbb{P}(H^0(X, L)) := |L|$ 中的直线 $\mathbb{P}^1$ 称为 X 的超曲面线束 (Pencil of hypersurfaces). 这样的一个线束等价于由 $H^0(X, L)$ 中的两个截面 σ_0, σ_∞ 诱导的有理映射

$$\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \qquad z \to [\sigma_0, \sigma_\infty].$$

截面 $\sigma_t := \sigma_0 + t\sigma_\infty$ 的零点集记为 X_t. 有时我们也将超曲面线束记为 $(X_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$.

以下如无特别声明, 我们总假设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是非退化复射影簇, $L = \mathcal{O}_X(1)$, 且

$$H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(1)).$$

我们称 $B = \bigcap_{t \in \mathbb{P}^1} X_t$ 为基轨迹 (Base locus). B 显然是由方程 $\sigma_0 = \sigma_\infty = 0$ 定义. 如果 X_0 与 X_∞ 没有公共分支, 那么 B 是余维数 2 的完全交.

注 4.5.1 $X \subset \mathbb{P}^N$ 非退化等价于限制映射 $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ 是单射. ■

如果一个超曲面线束满足以下各条件, 则称为 Lefschetz 线束:

(1) 基轨迹 B 是 X 中光滑的余维数 2 子簇. 特别地, 该线束中的超曲面都沿着 B 光滑.

(2) 每个超曲面 X_t 最多只有一个通常二重点作为其奇点.

考虑非退化复射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}^N$. 我们用 $(\mathbb{P}^N)^*$ 表示 $\mathbb{P}^N$ 的对偶, 它可以看成所有超平面构成的集合或者齐次线性函数集合. 考虑代数子集

$$Z = \{(x, H) \in X \times (\mathbb{P}^N)^* \mid X \cap H \text{ 在 } x \text{ 处奇异}\}.$$

如果把 Z 限制到某点 (x, H) 附近 (取局部坐标 $z_1, \cdots, z_n$), 那么 Z 也可以如下描述

$$Z = \{(y, k) \in X \times K \mid k(y) = dk(y) = 0\},$$

这里 K 是 $\mathbb{C}^N$ 上线性函数构成的集合. 换言之, Z 由方程组 $k(y)=\frac{\partial k}{\partial z_i}(y)=0\ (1\le i\le n)$ 定义. 这样, Z 在该点的切空间

$$T_{Z,(x,H)}= \\ \left\{(u,k)\in T_{X,x}\times T_{K,H}\middle| d_uH+k(x)=0 \text{ 及 } d_u\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\right)+\frac{\partial k}{\partial z_i}(x)=0,\quad 1\le i\le n\right\} \tag{4-12}$$

投影 $Z\to X$ 显然可以看作 X 上的 $\mathbb{P}^{N-n-1}$ 丛, 故 Z 是光滑 $N-1$ 维子簇.

引理 4.5.1　设 $(x,H)\in Z$, 那么 $x\in X$ 是 $X_H:=X\cap H$ 的通常二重点当且仅当 $\mathrm{pr}_2:Z\to(\mathbb{P}^N)^*$ 在点 (x,H) 处是浸入.

证明　由式 (4-12), 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\left(\mathrm{pr}_2:T_{Z,(x,H)}\to T_{K,H}\right)&=T_{Z,(x,H)}\cap(T_{X,x}\times\{0\})\\ &\cong\left\{u\in T_{X,x}\middle| d_uH=0 \text{ 及 } d_u\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\right)=0,\quad 1\le i\le n\right\}.\end{aligned}$$

这就推出所要结论. ■

推论 4.5.1　如果 x 是 X_H 的通常二重点, 那么

$$\mathrm{pr}_{2*}(T_{Z,(x,H)})=\{k\in T_{K,H}\mid k(x)=0\}$$

可以视为 $T_{K,H}\cong\mathbb{C}^N$ 中的超平面.

证明　由式 (4-12), 因为 $dH_x=0$, 所以 $k(x)=0$. 反之, 假设切向量 $k\in T_{K,H}$ 满足 $k(x)=0$. 为求 $u\in T_{X,x}$ 满足式 (4-12), 将 u 写为 $u=\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial z_i}$, 代入式 (4-12) 的条件. 这等价于求解关于 $a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程. 由于 H 在 x 处非退化, 这样的 u 显然存在, 从而 $(u,k)\in T_{Z,(x,H)}$. 这就得到所需结论. ■

设 $\mathcal{D}_X=\mathrm{pr}_2(Z)\subset(\mathbb{P}^N)^*$, $\mathcal{D}_X^0\subset\mathcal{D}_X$ 是由所有使得超平面截口 X_H 至多只有一个通常二重点作为其奇点的超平面 H 所组成的子集. 由 Z 的不可约性可知 $\mathcal{D}_X$ 是不可约的, 它通常被称为判别式簇 (Discriminant variety) 或者判别式超曲面. 此外, $\mathcal{D}_X^0$ 是 $\mathcal{D}_X$ 的 Zariski 开集.

推论 4.5.2　以下条件等价:
(1) 存在超平面截口 X_H 带有通常二重点;
(2) 对 $\mathcal{D}_X$ 中的一般点 H, 它对应的超曲面截口 X_H 仅带有一个通常二重点;
(3) $\dim\mathcal{D}_X=N-1$.

证明　首先注意几个事实. 由 Sard 定理及引理 4.5.1, X 上带有退化奇点的超平面截口构成的集合维数不超过 $N-2$. 由推论 4.5.1, 带有多个通常二重点的超平面截口构成的集合维数不超过 $N-2$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 如果存在带有通常二重点的超平面截口, 那么引理 4.5.1 以及 $\dim Z=N-1$ 立刻推出 $\dim\mathcal{D}_X=N-1$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) 假设 $\dim\mathcal{D}_X=N-1$, 那么由上面指出的事实可知, $\mathcal{D}_X^0$ 是 $\mathcal{D}_X$ 的非空 Zariski 开子集, 因而稠密.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 显然. ■

事实上, 上面条件成立时, 由于 pr_2 在 $\mathcal{D}_X^0$ 上是同构, 故 $\mathcal{D}_X^0$ 光滑.

命题 4.5.1 设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是光滑的, 那么对应直线 $\Delta \in (\mathbb{P}^N)^*$ 的超平面线束 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 是 Lefschetz 线束当且仅当以下条件之一成立:
(1) $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{P}^N$ 是超曲面, 且 Δ 与 $\mathcal{D}_X$ 横截相交;
(2) $\dim \mathcal{D}_X \le N-2$ 且 Δ 与 $\mathcal{D}_X$ 不相交.

证明 分情形讨论.

情形1. $\dim \mathcal{D}_X \le N-2$.
此时所有奇异超平面截口都有退化奇点. 因此 Lefschetz 线束对应的直线 Δ 当然不可能交 $\mathcal{D}_X$. 反过来, 如果 $\Delta \cap \mathcal{D}_X = \emptyset$, 那么所有超平面截口都是光滑的, 此时 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 显然是 Lefschetz 线束.

情形2. $\dim \mathcal{D}_X = N-1$.
由推论 4.5.2, 与 $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{P}^N$ 在 H 处相切的超平面就是

$$\{L \in (\mathbb{P}^N)^* \mid L(x) = 0\}.$$

Δ 与 $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{P}^N$ 在 H 处相切等价于 Δ 含于上述超平面中, 亦即 $x \in B$. 另一方面, 线束 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 的每个超平面截口至多只有一个通常二重点作为奇点当且仅当 Δ 与 $\mathcal{D}_X$ 的交点落在 $\mathcal{D}_X^0$ 中. ■

推论 4.5.3 设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是光滑复射影簇, 那么 X 上充分一般的超平面截口线束 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 都是 Lefschetz 线束.

设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是 n 维紧复射影簇, $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 是 Lefschetz 线束. 我们诱导簇

$$\widetilde{X} = \{(x,t) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid x \in X_t\}.$$

显见 $\mathrm{pr}_1|_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to X$ 是 X 沿着基轨迹 B 爆发, B 和 $\widetilde{X}$ 是光滑的. 我们可诱导映射

$$f := \mathrm{pr}_2|_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

纤维 $f^{-1}(t)$ 可以自然地看作 X_t, 以后我们不再区分. 设 $p_1, \cdots, p_M$ 是 f 所有的临界值, Δ_i 是以 p_i 为中心的圆盘, $\widetilde{X}_{\Delta_i} := f^{-1}(\Delta_i)$. 由定理 4.4.8, $\widetilde{X}_{\Delta_i}$ 可以形变收缩成 X_{t_i} 和一个 n 维球沿着零化球面粘合得到的并, $t_i \in \Delta_i$. 不失一般性, 我们可以假设 $0, \infty$ 都不是临界值.

定理 4.5.1 $\widetilde{X} - X_\infty$ 同伦于 X_0 与诸 n 维球沿着各自对应的零化球面粘合而得的并, 此处零化球面看成 X_{t_i} 的零化球面在微分同胚 $X_{t_i} \cong X_0$ 下的像.

证明 取 γ_i 为连接 0 与 p_i 的道路, 且不过任何临界值. 设 $\widetilde{X}_{\gamma_i} := f^{-1}(\gamma_i)$. 首先, 因为 $\mathbb{C}$ 可以收缩为诸 Δ_i 与 γ_i 的并, 因此由 Ehresmann 定理 3.1.1, $\widetilde{X} - X_\infty$ 可以形变收缩成 $\bigcup_i(\widetilde{X}_{\gamma_i} \cup \widetilde{X}_{\Delta_i})$. 又因为 $\widetilde{X}_{\gamma_i} \cong X_{t_i} \times \gamma_i$, 所以它可以形变收缩成 X_{t_i}, 而 X_{t_i} 又微分同胚于 X_0. 这样, $\widetilde{X} - X_\infty$ 同伦于 $X_0 \cup_i \widetilde{X}_{\Delta_i}$. 结合前面的讨论, 我们就得到了结论. ■

对于圆盘 Δ 上的 Lefschetz 线束 诱导纤维化(中心点为奇异纤维), 我们在上节作了部分讨论, 定义了零化球面上的锥以及零化闭链. 这些概念可以推广到一般的 Lefschetz 线束上. 采用以上诸记号, 我们已有微分同胚 $\widetilde{X}_{\gamma_i} \cong X_0 \times [0,1]$. 令 $B_i'^n := B_i^n \cup S_i^{n-1} \times [0,1]$, $S_i'^n := S_i^{n-1} \times 1 \subset X_0$. $B_i'^n$ 可以形象地看作 $S_i'^n$ 上的锥 (Cone). 这个锥的定向可以定义一个类

$$\Gamma_i \in H_n(\widetilde{X} - X_\infty, X_0, \mathbb{Z}).$$

Γ 称为零化闭链 $\delta_i \in H_{n-1}(S_i^{n-1}, \mathbb{Z})$ 上的锥.

结合定理 4.4.8 及切除定理, 立得以下结论.

命题 4.5.2 相对同调群 $H_n(\widetilde{X} - X_\infty, X_0, \mathbb{Z})$ 由零化闭链上的锥生成.

设 $t \in \mathbb{C}^1$ 不是临界值, 我们记

$$i_t : X_t \to X, \qquad i'_t : X_t \to \widetilde{X} - X_\infty, \qquad j_t : X_t \to \widetilde{X}$$

为各包含映射.

推论 4.5.4

$$i'_{t*} : H_k(X_t, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\widetilde{X} - X_\infty, \mathbb{Z})$$

是同构 $(k < n-1)$ 或满射 $(k = n-1)$. 在庞加莱对偶下, 这等价于

$$i'^*_t : H^k(\widetilde{X} - X_\infty, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X_t, \mathbb{Z})$$

是同构 $(k < n-1)$ 或单射 $(k = n-1)$.

进一步, 当 $k = n-1$ 时, $\mathrm{Ker} i'_{t*}$ 由那些零化球面的类生成.

证明 由定理 4.5.1, $\widetilde{X} - X_\infty$ 同伦于 X_0 与诸球沿着各自的零化球面粘合而得的并. 类似推论 4.4.7 的证明, 反复使用切除定理即得结论. ■

由命题 2.5.4, 我们有同构

$$H^{k+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H^{k+1}(X, \mathbb{Z}) \oplus H^{k-1}(B, \mathbb{Z}). \tag{4-13}$$

引理 4.5.2 设 $l : B \hookrightarrow X_t$ 是包含映射, 那么 l^* 就是以下复合映射

$$H^{k-1}(X_t, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(j_t)_*} H^{k+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H^{k+1}(X, \mathbb{Z}) \oplus H^{k-1}(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k-1}(B, \mathbb{Z}). \tag{4-14}$$

同样地, l_* 是复合映射

$$H^{k-2}(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H^k(X, \mathbb{Z}) \oplus H^{k-2}(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_t^*} H^k(X_t, \mathbb{Z}). \tag{4-15}$$

(证明留给读者)

引理 4.5.3 当 $k \leq n-1$ 时, Gysin 态射 $(j_\infty)_* : H^{k-1}(X_\infty, \mathbb{Z}) \to H^{k+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$ 是单射. 限制映射 $H^k(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \to H^k(\widetilde{X} - X_\infty, \mathbb{Z})$ 是满射.

特别地, 当 $k < n-1$ 时, $j_t^* : H^k(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X_t, \mathbb{Z})$ 是满射.

证明 由引理 4.5.2, 复合映射 (4-14)就是 l^*. 因为 B 是 X_∞ 的超平面截口, 故由 Lefschetz 超平面截口定理可知, $l^* : H^{k-1}(X_\infty, \mathbb{Z}) \to H^{k-1}(B, \mathbb{Z})$ 在 $k-1 \leq n-2$ 时是单射. 从而 $(j_\infty)_*$ 是单射.

利用 Thom 同构

$$H^{k+1}(\widetilde{X}, \widetilde{X} - X_\infty, \mathbb{Z}) \cong H^{k-1}(X_\infty, \mathbb{Z})$$

及相对上同调长正合列, 我们有以下正合列

$$H^k(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\widetilde{X} - X_\infty, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k-1}(X_\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(j_\infty)_*} H^{k+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Z}). \tag{4-16}$$

由此立得 $H^k(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \to H^k(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z})$ 的满射性.

j_t^* 的满射性直接来自于上述结论及推论 4.5.4. ■

推论 4.5.5

$$\mathrm{Ker}\Big(i_{t*}: H_{n-1}(X_0,\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\Big) = \mathrm{Ker}\ \Big(i'_{t*}: H_{n-1}(X_0,\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z})\Big)$$

证明 分解式 (4-13) 在 $k=n$ 时, 等价于同构 $H^{n+1}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \cong H^{n+1}(X,\mathbb{Z})$, 因而由庞加莱对偶

$$H_{n-1}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(X,\mathbb{Z}).$$

结合引理 4.5.3 的庞加莱对偶表述, 我们有单射

$$H_{n-1}(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(X,\mathbb{Z}).$$

由此立得结论. ■

上面诸讨论还可以帮助我们弄清楚相对同调群 $H_n(X,X_0,\mathbb{Z})$ 的生成元. 考虑映射 $\tau: \widetilde{X}-X_\infty \to X$, 它诱导态射

$$\tau_*: H_n(\widetilde{X}-X_\infty,X_0,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X,X_0,\mathbb{Z}).$$

命题 4.5.3 上述 τ^* 是满射. 换言之, $H_n(X,X_0,\mathbb{Z})$ 由零化闭链上的锥在 τ 下的像生成.

证明 考虑正合列交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(\widetilde{X}-X_\infty,X_0,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_0,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i'_{0*}} & H_{n-1}(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_n(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(X,X_0,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_0,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_{0*}} & H_{n-1}(X,\mathbb{Z})
\end{array}$$

由推论 4.5.5, 此处 $\mathrm{Ker}i'_{0*} = \mathrm{Ker}i_{0*}$. 利用上图的交换性与两行的正合性, 我们只需要证明最左边一列的映射 $\tau^*: H_n(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) \to H_n(X,\mathbb{Z})$ 是满射即可.

将正合列 (4-16) 写为庞加莱对偶形式, 我们得到

$$H_n(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_n(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H_{n-2}(X_\infty,\mathbb{Z}). \tag{4-17}$$

同样, 将分解式 (4-13) 写为庞加莱对偶形式,

$$H_n(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \cong H_n(X,\mathbb{Z}) \oplus H_{n-2}(B,\mathbb{Z}).$$

引理 4.5.2 中正合列 (4-14) 的庞加莱对偶形式就是 η 限制在 $H_{n-2}(B,\mathbb{Z})$. 将 Lefschetz 超平面截口定理应用于 $B \subset X_\infty$, 即知上述限制映射是满射.

假如 $\tau^*: H_n(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}) \to H_n(X,\mathbb{Z})$ 不是满射, 我们可取 $\alpha \in H_n(X,\mathbb{Z})$ 不落在像中. 由上面的讨论, 存在 $\beta \in H_{n-2}(B,\mathbb{Z})$, 使得 $\eta(\alpha)=\eta(\beta)$, 即 $\alpha-\beta \in \mathrm{Ker}\eta$. 由正合列 (4-17), 存在 $\gamma \in H_n(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z})$ 使得 $i_*(\gamma)=\alpha-\beta$. 注意到 i_* 在 $H_n(X,\mathbb{Z})$ 上的分量映射就是 τ^*, 这就与 α 的选取矛盾! ■

Lefschetz 线束的一个应用, 就是给出 Lefschetz 超平面截口定理的另一证明. 设 $X \subset \mathbb{P}^N$, Y 是 X 的光滑超平面截口. 由推论 4.5.3, 存在 Lefschetz 线束, 使得 Y 是某个 X_t. 我们将证明关

键性命题 4.5.4. 尽管这个命题可以在 $X_t \subset X$ 上直接使用 Lefschetz 超平面截口定理得到, 但是我们并不打算这么做, 而是希望在 X_t 的超平面截口 B 上应用的该定理. 因此这让我们可以对 X 的维数施归纳法, 以便归纳地证明 Lefschetz 定理.

命题 4.5.4 限制映射

$$i_t^*: H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X_t,\mathbb{Z})$$

是同构 $(k<n-1)$ 或单射 $(k=n-1)$.

证明 由引理 4.5.3, j_t^* 是满射. 因此由式 (4-15), 为了证明 i_t 是满射, 我们只需要证明 $\mathrm{Im} l_* \subseteq \mathrm{Im} i_t^*$ 即可. 因为 B 是 X_t 的超平面截口, 故由 Lefschetz 超平面截口定理, $\mathrm{Im} l^* = H^{k-2}(X,\mathbb{Z})$ $(k<n-1)$, 因而 $\mathrm{Im} l_* \circ l^* = \mathrm{Im} l_*$. 另一方面, 由上一节的讨论,

$$l_* \circ l^* = i_t^* \circ (i_t)_* = h\cup : H^{k-2}(X_t,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X_t,\mathbb{Z}).$$

因此 $\mathrm{Im} l_* \subseteq \mathrm{Im} i_t^*$.

现在我们来证 i_t 的单射性. 设 $\alpha \in H^k(X,\mathbb{Z})$, 使得 $i_t^*\alpha = 0 \in H^k(X_t,\mathbb{Z})$. 由推论 4.5.4, 我们有 $\tau^*\alpha|_{\widetilde{X}-X_\infty} = 0$. 由正合列

$$H^{k-2}(X_\infty,\mathbb{Z}) \xrightarrow{(j_\infty)_*} H^k(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(\widetilde{X}-X_\infty,\mathbb{Z}),$$

存在 $\beta \in H^{k-2}(X_\infty,\mathbb{Z})$, 使得 $\tau^*\alpha = (j_\infty)_*\beta$. 因而 $\alpha = (i_\infty)_*\beta$. 这样, $\tau^*(i_\infty)_*\beta = (j_\infty)_*\beta \in H^k(\widetilde{X},\mathbb{Z})$. 由引理 4.5.2 的分解式 (4-14) 推出 $l^*\beta = 0$. 注意到 B 是 X_∞ 的超平面截口, 且 β 的次数为 $k-2 \le n-3$, 故由 Lefschetz 定理立得 $\beta = 0$. ■

Lefschetz 线束的另一个应用是研究零化同调. 我们先介绍这一概念. 以下我们假设 $X \subset \mathbb{P}^N$, Y 是 X 的光滑超平面截口, 且 Y 是紧 Kähler 簇. 设 $j: Y \hookrightarrow X$ 是包含映射. 对系数环 $A(=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\cdots)$, 我们定义**零化同调** (Vanishing cohomology)

$$H^k(Y,A)_{\mathrm{van}} = \mathrm{Ker}(j_*: H^k(Y,A) \to H^{k+2}(X,A)).$$

另一方面, 由前面的讨论,

$$L = j^* \circ j_*: H^k(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{j_*} H^{k+2}(X,\mathbb{R}) \xrightarrow{j^*} H^{k+2}(Y,\mathbb{R}) \tag{4-18}$$

给出了 Lefschetz 算子. 我们还曾定义**本原上同调**

$$H^k(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Ker}\left(L^{n-k}: H^k(Y,\mathbb{R}) \to H^{2n-k}(Y,\mathbb{R})\right), \qquad \dim Y = n-1.$$

特别地, 当 $k=\dim Y$ 时,

$$H^k(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} := \mathrm{Ker}\left(L: H^k(Y,\mathbb{R}) \to H^{k+2}(Y,\mathbb{R})\right)$$

结合强弱 Lefschetz 定理, 我们有如下简单结论.

命题 4.5.5 在上述的假设条件下, 我们有

(1) 当 $k \ne \dim Y$ 时, $H^k(Y,A)_{\mathrm{van}} = 0$.

(2) 当 $k = \dim Y$ 时, $H^k(Y,A)_{\mathrm{van}} \subset H^k(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}$.

证明 若 $k<\dim Y$, 则由强 Lefschetz 定理可知 L 是单射, 因而由复合映射 (4-18) 立得 j_* 的单射性. 若 $k>\dim Y$, 则由弱 Lefschetz 定理的庞加莱对偶形式即得 j_* 的单射性. 若 $k=\dim Y$, 则由复合映射 (4-18) 及本原上同调的定义即得结论. ■

现在我们可以利用 Lefschetz 线束来描述零化同调 $H^{n-1}(Y,\mathbb{Z})$ 的生成元, 从而也可以解释零化同调中"零化"一词的意义.

引理 4.5.4 设 Y 是某个 Lefschetz 线束 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 中的纤维, 那么 $H^{n-1}(Y,\mathbb{Z})$ 由 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 中的零化球面对应的类生成.

证明 为方便计算, 考虑 Gysin 态射的庞加莱对偶形式

$$j_*: H_{n-1}(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z}).$$

由推论 4.5.4 及 4.5.5 立得结论. ■

命题 4.5.5 引出一个有趣的问题: 零化同调与本原同调到底相差了多少? 下面的结论给出了回答.

定理 4.5.2 设 $X\subset\mathbb{P}^N$ 是 n 维复簇, Y 是 X 的光滑超平面截口, 且 Y 是紧 Kähler 簇, $j: Y\hookrightarrow X$ 是包含映射.
(1) 我们有正交直和分解 (关于 $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})$ 的相交型)

$$H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) = H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}} \oplus j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q}).$$

(2) 类似地, 我们也有正交直和分解

$$H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} = H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}} \oplus j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}.$$

证明 (1) 由弱 Lefschetz 定理, $j^*: H^{n-1}(X,\mathbb{Q}) \to H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})$ 是单射, 因此 $j_*: H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) \to H^{n+1}(X,\mathbb{Q})$ 是满射, 且 $\dim j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q}) = \dim H^{n-1}(X,\mathbb{Q})$. 由零化同调的定义及庞加莱对偶定理, 我们首先可以确证

$$\dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) = \dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) + \dim j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q}).$$

对任何 $\eta\in H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$, 由庞加莱对偶, 它对应于 $H^{n-1}(X,\mathbb{R})$ 上的泛函, 满足

$$\int_Y \eta\wedge j^*\omega = 0, \qquad \omega\in H^{n-1}(X,\mathbb{R}).$$

这就表明在 $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})$ 的相交型下, $H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$ 正交于 $j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})$. 因此剩下的就是证明

$$H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})\bigcap j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q}) = 0.$$

设 $\alpha = j^*\beta\in H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})$ 满足 $j_*\alpha = 0$. 于是 $j_*\circ j^*\beta = 0\in H^{n+1}(X,\mathbb{Q})$, 即 $L_X\beta = 0$, 这里 L_X 是 X 的 Lefschetz 算子. 由强 Lefschetz 定理, $L_X: H^k(X,\mathbb{Q})\to H^{k+2}(X,\mathbb{Q})$ 是单射 $(k<n)$, 故 $\beta = 0$, 从而 $\alpha = 0$.

(2) 由命题 4.5.5, 我们有

$$H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} = H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}} \oplus j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})\cap H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}.$$

因此我们只需要验证

$$j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})\cap H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} = j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}. \tag{4-19}$$

设 $\alpha = j^*\beta\in H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}$, 则 $L_Y\alpha = 0$, 从而

$$0 = j_*L_Y\alpha = j_*L_Yj^*\beta = j_*j^*j_*j^*\beta = L_X^2\beta\in H^{n+3}(X,\mathbb{Q}).$$

这表明 $\beta \in H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\text{prim}}$. 因此式 (4-19) 的左边含于右边. 为了证另一个方向的包含关系, 我们只需验证维数等式

$$\dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\text{prim}} = \dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\text{van}} + \dim j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\text{prim}}.$$

因为 $L : H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) \to H^{n+1}(Y,\mathbb{Q})$ 是满射, 所以

$$\dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q})_{\text{prim}} = \dim H^{n-1}(Y,\mathbb{Q}) - \dim H^{n+1}(Y,\mathbb{Q}).$$

同理 (注意 j 是单射)

$$\dim j^*H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\text{prim}} = \dim H^{n-1}(X,\mathbb{Q})_{\text{prim}} = \dim H^{n-1}(X,\mathbb{Q}) - \dim H^{n+3}(X,\mathbb{Q}).$$

再次利用 Lefschetz 定理诱导同构

$$j_* : H^{n+1}(Y,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n+3}(X,\mathbb{Q}),$$

从而 $\dim H^{n+1}(Y,\mathbb{Q}) = \dim H^{n+3}(X,\mathbb{Q})$. 结合 (1) 对应的维数公式, 立得结论. ■

本章习题

习题 4.1 证明: 解析子集 Z 的光滑部分 Z_{smooth} 是 Z 的稠密开集, $Z_{sing} = Z - Z_{\text{smooth}}$ 是 Z 中无处稠密的解析子集.

习题 4.2 设 X 是的仿射代数簇, Z 是代数子集, 试用代数几何语言证明注记 4.1.1 (2)(3)(5) 的结论.

习题 4.3 设 X 是 $\mathbb{C}^N$ 的开集, $Z \subset X$ 是解析子集, $z \in Z$ 是任一点, $n = \dim_z Z$. 证明:
(1) 证明:在 z 的小邻域中存在从 $\mathbb{C}^N$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性映射, 其限制映射 $\phi : Z \to \mathbb{C}^n$ 满足以下性质:
 (a) 存在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$, 使得 $\phi(z) \in U$;
 (b) 限制映射 $\phi : \phi^{-1}(U) \to U$ 是具有有限纤维的正常态射.
(2) 证明: 对 $\mathbb{C}^N$ 上充分一般的线性坐标选取, 该坐标诱导的投影 $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$ 都满足结论 (1) 的性质.
(3) 如果 X 是仿射代数簇, Z 是代数子集, 请阐释上述结论与 Nöther 正规化引理的关系.

习题 4.4 请验证式 (4-2).

习题 4.5 设 X 紧定向微分流形, $j : Z \hookrightarrow X$ 是实余维数为 r 的定向子流形.
(1) 证明: $j_* \circ j^* : H^k(X,\mathbb{R}) \to H^{k+r}(X,\mathbb{R})$ 等价于杯积映射 $\cup[Z]$.
(2) 证明: $j_* \circ j^* : H^k(Z,\mathbb{R}) \to H^{k+r}(Z,\mathbb{R})$ 等价于限制在 Z 上的杯积映射 $\cup[Z]|_Z$.
(3) 设 X 是紧 Kähler 流形, Z 是 ample 的复超曲面, 试用强 Lefschetz 定理证明: 限制映射

$$j^* : H^k(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(Z,\mathbb{Q})$$

是单射, 这里 $k \le \dim_{\mathbb{C}} Z$.
(4) 在上一小题的假设下, 试用强 Lefschetz 定理证明: Gysin 映射

$$j_* : H^k(Z,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{k+2}(X,\mathbb{Q})$$

是单射, 这里 $k < \dim_{\mathbb{C}} Z$.

习题 4.6 设 $\mathcal{E},\mathcal{F}$ 都是复流形 X 上的全纯向量丛, 证明:
(1) $c_1(S^m\mathcal{E})=C^r_{m+r-1}c_1(\mathcal{E})$, 这里 $S^m\mathcal{E}$ 表示 m 次对称积,
(2) $c_1(\wedge^r\mathcal{E})=c_1(\mathcal{E})$, 这里 $r=\mathrm{rank}\mathcal{E}$,
(3) $c_1(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})=sc_1(\mathcal{E})+rc_1(\mathcal{F})$, 这里 $s=\mathrm{rank}\mathcal{F}$.

习题 4.7 设 $\mathcal{E}$ 是复代数曲面 X 上的秩 r 全纯向量丛, $\mathcal{E}_n:=S^n\mathcal{E}\otimes(\wedge^r\mathcal{E})^{-\frac{n}{2}}$ (n 是偶数), 证明:
(1) $\mathcal{E}_n^*\cong\mathcal{E}_n$, 这里 $\mathcal{E}_n^*$ 表示对偶丛.
(2) $c_1(\mathcal{E}_n)=0$, $c_2(\mathcal{E}_n)=C^3_{n+2}(c_2(\mathcal{E})-\frac{1}{4}c_1^2(\mathcal{E}))$.

习题 4.8 设 X 是代数簇, Z 是余维数 k 的代数闭链, L 是线丛, 证明: $[Z]\cup c_1(L)$ 是一个余维数 $k+1$ 的代数闭链类 $[Z']$, 这里 Z' 可以取作 Z 与 L 中某个充分一般半纯截面对应除子的交.

习题 4.9 设 X,Y 是紧 Kähler 流形, $\dim X=n$,

$$\alpha\in H^k(X,\mathbb{Z})\otimes H^l(Y,\mathbb{Z})\subset H^{k+l}(X\times Y,\mathbb{Z}),\qquad k+l\text{ 是偶数}.$$

它的对应态射为

$$\bar{\alpha}:H^{2n-k}(X,\mathbb{Z})\longrightarrow H^l(Y,\mathbb{Z}).$$

证明: α 是 Hodge 类当且仅当 $\bar{\alpha}$ 是 $(r-n,r-n)$ 型 Hodge 结构态射, 这里 $k+l=2r$.

习题 4.10 设 $X\times Y$ 是光滑紧 Kähler 流形, $\dim X=n,\dim Y=m$, Y 要求连通. 设 $Z\subset X\times Y$ 是余维数 k 的闭链, 且在 Y 上平坦, $[Z]^{1,2k-1}\in H^1(Y,\mathbb{Z})\otimes H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})$ 是 $[Z]$ 的相应 Küneth 分支. $p_X:Z\to X$ 及 $p_Y:Z\to Y$ 是相应的投影映射的限制.
(1) 证明: $[Z]^{1,2k-1}$ 诱导了 Hodge 结构态射

$$[Z]:H^{2m-1}(Y,\mathbb{Z})\longrightarrow H^{2k-1}(X,\mathbb{Z}).$$

(2) 设 $\gamma:[0,1]\to Y$ 是以 0 点为基点的环路. 证明: 上述态射在庞加莱对偶下, 恰好诱导态射

$$H_1(Y,\mathbb{Z})\longrightarrow H_{2n-2k+1}(X,\mathbb{Z}),\qquad [\gamma]\to[p_X(p_Y^{-1}(\gamma))].$$

习题 4.11 证明例 4.3.3 中的结论.

习题 4.12 证明 Reeb 定理: 设 M 是紧致流形, f 是 M 上仅有两个临界点的可微函数, 且它们都是非退化的, 那么 M 拓扑同胚于球面 S^n.

习题 4.13 设 $f:X\to\mathbb{C}$ 是 n 维复簇 X 上的全纯映射, $p\in X$ 是 f 的非退化临界点, 证明: 存在 p 的局部邻域全纯坐标 $z_1,\cdots,z_n$, 使得 $f(z)=f(0)+\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$.

习题 4.14 证明引理 4.5.2 的结论.

第五章　混合 Hodge 结构初步

5.1　混合 Hodge 结构

混合 Hodge 结构理论的一个基本思想是将某些簇的上同调通过某种滤过 $W.$, 使得分次部分 W_m/W_{m-1} 能够放入某些光滑射影簇的上同调群中, 并使之带有权 m 的 Hodge 结构. 我们首先从形式上定义所谓的混合 Hodge 结构 (Mixed Hodge Structure, 简称 MHS). 它是一个三元组 $(V_{\mathbb{Z}}, W., F^{\cdot})$, 其中
(1) $V_{\mathbb{Z}}$ 是有限生成的阿贝尔群;
(2) $W.$ 是 $V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ 的一个递增滤过, 并记分次商 $\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{Q}} := W_k/W_{k-1}$;
(3) $F^{\cdot}$ 是 $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ 的递降滤过;
(4) $F^{\cdot}$ 在 $\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{Q}}$ 诱导权 k 的 $\mathbb{Q}$-Hodge 结构.
$W.$ 被称为权滤过 (Weight filtration), $F^{\cdot}$ 被称为 Hodge 滤过. 此外, 我们记 $W_kV_{\mathbb{C}} = W_k \otimes \mathbb{C}$, 并令 $F^p\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{C}}$ 为 $F^p \cap W_kV_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathrm{Gr}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{W}} V_{\mathbb{C}}$ 中的像. 我们有

$$F^p\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{C}} = [W_kV_{\mathbb{C}} \cap F^p + W_{k-1}V_{\mathbb{C}}]/W_{k-1}V_{\mathbb{C}}.$$

上述条件 (4) 等价于以下等式

$$\begin{gathered} F^p \cap W_kV_{\mathbb{C}} + \overline{F^{k-p+1}} \cap W_kV_{\mathbb{C}} + W_{k-1}V_{\mathbb{C}} = W_kV_{\mathbb{C}}, \\ (F^pW_kV_{\mathbb{C}} + W_{k-1}V_{\mathbb{C}}) \cap (\overline{F^{k-p+1}} \cap W_kV_{\mathbb{C}} + W_{k-1}V_{\mathbb{C}}) \subseteq W_{k-1}V_{\mathbb{C}}. \end{gathered}$$

例 5.1.1　设 X 是只带结点的代数曲线, $p_1, \cdots, p_k$ 是所有结点. 考虑正规化 $\sigma : \tilde{X} \to X$. 我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \sigma_*\mathbb{C}_{\tilde{X}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}_{p_i} \longrightarrow 0.$$

利用 $H^i(X, \sigma_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}) = H^i(\tilde{X}, \mathbb{C})$ $(i = 0, 1)$, 我们得到正合列

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(\tilde{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^0(\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}_{p_i}) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(\tilde{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

所有的 H^0 都有权 0 Hodge 结构, $H^1(\tilde{X}, \mathbb{C})$ 有权 1 Hodge 结构. 这样, 连接同态 γ 的像有权 0 Hodge 结构, 其余核有权 1 Hodge 结构. 因而 $H^1(X, \mathbb{C})$ 在此意义上被"混合"了. 按照混合 Hodge 结构的定义, 我们令

$$\begin{aligned} W_0H^1(X, \mathbb{C}) &= \mathrm{Im}\gamma, \\ W_1H^1(X, \mathbb{C}) &= H^1(X, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

这样 $\mathrm{Gr}_1^W H^1(X, \mathbb{C}) := W_1/W_0 \cong H^1(\tilde{X}, \mathbb{C})$ 有权 1 Hodge 结构. 进一步, $\mathrm{Gr}_1^W H^1(X, \mathbb{C})$ 上的 Hodge 滤过由 $\tilde{X}$ 上全纯 1-形式空间 $F^1H^1(\tilde{X}, \mathbb{C}) = H^0(\tilde{X}, \Omega^1_{\tilde{X}})$ 给出. 这个滤过可以提升到 $H^1(X, \mathbb{C})$ 上, 即令

$$F^1H^1(X, \mathbb{C}) := \mathrm{Ker}(H^1(X, \mathbb{C}), H^1(X, \mathcal{O}_X)).$$

可以证明 (留给读者验证)

$$F^1H^1(X,\mathbb{C})\cap W_0H^1(X,\mathbb{C})=\{0\}. \tag{5-1}$$

因而进一步可知 $F^1H^1(X,\mathbb{C})\cong F^1H^1(\tilde{X},\mathbb{C})$. ■

例 5.1.2 设 X 是 n 维光滑复流形, $D\subset X$ 是余维数为 p 的光滑子簇. 设 $T\subset X$ 是 D 在 X 中的管状邻域, 它可以视作 D 上 $\mathcal{C}^\infty$ 纤维丛, 其纤维是 $2p$ 维圆盘. 我们有 Thom 同构 (定理 2.2.5)

$$H^i(D)\xrightarrow{\sim}H^{i+2p}(T,\partial T)=H^{i+2p}(X,X-D).$$

结合相对上同调正合列, 我们有如下长正合列 (Gysin 序列)

$$\cdots H^{k-2p}(D)\xrightarrow{\gamma}H^k(X)\longrightarrow H^k(X-D)\longrightarrow H^{k+1-2p}(D)\xrightarrow{\gamma}H^{k+1}(X)\cdots$$

这里 γ 是 Gysin 态射. 我们考虑 $H^k(X-D)$ 的滤过

$$\begin{cases}W_0H^k(X-D)=\mathrm{Im}(H^k(X)\to H^k(X-D)),\\ W_1H^k(X-D)=H^k(X-D).\end{cases}$$

分次部分 $\mathrm{Gr}_1^WH^k(X-D)$ 具有权 $k+1-2p$ 的 Hodge 结构. 我们将在后面详细讨论如何在 $H^k(X-D,\mathbb{C})$ 上诱导 W_0 以及 W_1/W_0 的 Hodge 滤过. ■

对混合 Hodge 结构, 我们可以引入某类 Hodge 分解. 令

$$V^{p,q}:=\mathrm{Gr}_F^p\mathrm{Gr}_{p+q}^WV_{\mathbb{C}}.$$

此时显然有

$$\mathrm{Gr}_k^WV_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{p+q=k}V^{p,q}.$$

我们称 $h^{p,q}:=\dim V^{p,q}$ 为 Hodge 数.

请注意, 这里的 $V^{p,q}$ 不是 $V_{\mathbb{C}}$ 的子空间. 我们可以通过典范态射 $W_{p+q}V_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Gr}_{p+q}^WV_{\mathbb{C}}$ 将 $V^{p,q}$ 提升为 $W_{p+q}V_{\mathbb{C}}(\subseteq V_{\mathbb{C}})$ 的子空间. 具体言之, 令 $I^{p,q}:=B\cap C$, 这里

$$B=F^p\cap W_{p+q},\qquad C=\overline{F^q}\cap W_{p+q}+\sum_{i\geq 2}\overline{F^{q+1-i}}\cap W_{p+q-i}.$$

我们有如下论断

引理 5.1.1 在典范态射 $W_{p+q}V_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Gr}_{p+q}^WV_{\mathbb{C}}$ 下, $I^{p,q}$ 同构地映到 $V^{p,q}$ 上.

证明 令 $A=W_{p+q-1}$. 这样

$$V^{p,q}=(A+B)\cap(A+C)/A.$$

注意到 $I^{p,q}+A=B\cap C+A$, 所以我们只需验证以下的等式

$$\begin{cases}B\cap C+A=(B+A)\cap(C+A),\\ B\cap C\cap A=0.\end{cases}$$

事实上, 我们可以用归纳法证明以下的一般结论 (留给读者验证).

$$\begin{cases}(B+W_{p+q-k})\cap(C+W_{p+q-k})+A=(B+A)\cap(C+A),\\ (B+W_{p+q-k})\cap(B+W_{p+q-k})\cap A=W_{p+q-k}.\end{cases} \tag{5-2}$$

今在上式 (5-2) 中, 取 $k=1$ 即得到第一个等式; 取 k 充分大, 则 $W_{p+q-k}=0$, 从而得第二式. ■

推论 5.1.1

$$\begin{aligned} W_kV_{\mathbb{C}} &= \bigoplus_{p+q\le k} I^{p,q}, \\ F^pV_{\mathbb{C}} &= \bigoplus_{r\ge p} I^{r,q}, \end{aligned}$$

其中第二式中上标 q 跑遍所有值.

证明 由同构 $I^{p,q}\cong V^{p,q}$ 立得第一式. 今证第二式. 首先我们有包含关系

$$F^pV_{\mathbb{C}} \supseteq \bigoplus_{r\ge p} I^{r,q}.$$

为证等号成立, 只需验证两边维数相等. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \dim F^pV_{\mathbb{C}} &= \sum_k \dim F^p\cap W_k/F^p\cap W_{k-1} \\ &= \sum_k \dim(F^p\cap W_k+W_{k-1})/W_{k-1} \\ &= \sum_k \dim F^p\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_k\sum_{r\ge p} \dim V^{r,k-r} = \dim\oplus_{r\ge p} I^{r,p}. \end{aligned}$$

这就证明了结论. ■

注 5.1.1 一般来说, 在上述分解中, $I^{p,q}\ne\overline{I^{q,p}}$. ■

设 V,V' 是两个混合 Hodge 结构, $\phi: V_{\mathbb{Z}}\to V'_{\mathbb{Z}}$ 是一个群同态, 使得它与 Hodge 滤过及权滤过相容, 即可诱导线性映射 $W_kV_{\mathbb{Q}}\to W_kV'_{\mathbb{Q}}$ 及 $F^pV_{\mathbb{C}}\to F^pV'_{\mathbb{C}}$. 这样的 ϕ 称作混合 Hodge 结构态射 . 由于 ϕ 将 $I^{p,q}$ 映到 $(I')^{p,q}$, 故由推论 5.1.1 可得

定理 5.1.1 (Deligne)

$$\mathrm{Im}\phi\cap W_kV'_{\mathbb{C}}=\phi(W_kV_{\mathbb{C}}),\qquad \mathrm{Im}\phi\cap F^pV'_{\mathbb{C}}=\phi(F^pV_{\mathbb{C}}).$$

有时我们也将以上性质说成, ϕ 严格相容于 Hodge 滤过和权滤过.

推论 5.1.2 设 $V'\to V\to V''$ 是混合 Hodge 结构的正合列, 那么我们可以诱导以下各正合列

$$\mathrm{Gr}_k^W V'_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_k^W V''_{\mathbb{Q}}$$

$$\mathrm{Gr}_F^p V'_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_F^p V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_F^p V''_{\mathbb{C}}$$

$$\mathrm{Gr}_F^p\mathrm{Gr}_k^W V'_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_F^p\mathrm{Gr}_k^W V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Gr}_F^p\mathrm{Gr}_k^W V''_{\mathbb{C}}$$

推论 5.1.3 设 X 是 Kähler 流形, $U \subset X$ 是某个解析子集的补集, $Y \subset X$ 是闭的复子簇, 且落在 U 内, 那么限制映射 $\alpha : H^k(U,\mathbb{Q}) \to H^k(Y,\mathbb{Q})$ 是混合 Hodge 结构态射, 且其像恰好等于复合映射 $\alpha \circ j : H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^k(Y,\mathbb{Q})$ 的像.

证明 由例 5.1.2 的讨论及定理 5.1.1 即得. ■

我们可以定义混合 Hodge 结构 V 的子结构 (Sub-MHS) V', 它满足以下条件:
(1) $V'_{\mathbb{Z}} \subseteq V_{\mathbb{Z}}$,
(2) $W_k V'_{\mathbb{Q}} = V'_{\mathbb{Q}} \cap W_k V_{\mathbb{Q}}$,
(3) $F^p V'_{\mathbb{Q}} = V'_{\mathbb{Q}} \cap F^p V_{\mathbb{Q}}$.
这样, 我们诱导了 V' 上的混合 Hodge 结构.

设 V, V' 是混合 Hodge 结构. 我们可以类似地定义 $\mathrm{Hom}(V,V')$ 上的混合 Hodge 结构

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(V,V')_{\mathbb{Z}} &= \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{Z}}, V'_{\mathbb{Z}}), \\ W_m\mathrm{Hom}(V,V')_{\mathbb{Q}} &= \{\varphi : V_{\mathbb{Q}} \to V'_{\mathbb{Q}} \mid \varphi(W_k V_{\mathbb{Q}}) \subseteq W_{k+m} V'_{\mathbb{Q}}\}, \\ F^p\mathrm{Hom}(V,V')_{\mathbb{C}} &= \{\varphi : V_{\mathbb{Q}} \to V'_{\mathbb{Q}} \mid \varphi(F^p V_{\mathbb{Q}}) \subseteq F^{k+p} V'_{\mathbb{Q}}\}, \end{cases}$$

及 $V \otimes V'$ 上的混合 Hodge 结构

$$\begin{cases} (V\otimes V')_{\mathbb{Z}} &= V_{\mathbb{Z}} \otimes V'_{\mathbb{Z}}, \\ W_m(V\otimes V')_{\mathbb{Q}} &= \sum\limits_{k+l=m} W_k V_{\mathbb{Q}} \otimes W_l V'_{\mathbb{Q}}, \\ F^p(V\otimes V')_{\mathbb{C}} &= \sum\limits_{r+s=p} F^r V_{\mathbb{C}} \otimes F^s V'_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

读者还可以进一步验证如下关系式

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V,V')^{p,q} &= \bigoplus_{r,s} \mathrm{Hom}(V^{r,s}, V^{r+p,s+q}), \\ (V\otimes V')^{p,q} &= \bigoplus_{r,s} V^{r,s} \otimes V'^{p-r,q-s}. \end{aligned} \tag{5-3}$$

例 5.1.3 我们讨论如下的混合 Hodge 结构 V, 它的 Hodge 数满足 $h^{0,0} = h^{1,1} = 1$, $h^{p,q} = 0$ (其他情形), 且 $V_{\mathbb{Z}}$ 无挠. 这样, $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, $W_0 V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}e_1$, $W_1 V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}}$. 进一步有, $F^0 V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}$ 及 $F^1 V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(e_2 + \alpha e_1)$ (对某个 $\alpha \in \mathbb{C}$).

保持 $W_0 V_{\mathbb{Q}}$ 不变的 $V_{\mathbb{Z}}$ 自同构都是以下形式 ($m \in \mathbb{Z}$)

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

它将 $\mathbb{C}(e_2 + \alpha e_1)$ 映为 $\mathbb{C}(\pm e_2 + (\alpha \pm m)e_1)$. 因此所有这样的混合 Hodge 结构可以被 $\mathbb{C}$ 的商 (由以下群作用决定 $\alpha \to -\alpha$ 及 $\alpha \to \alpha + m$, $m \in \mathbb{Z}$) 所分类. ■

5.2 对数 de Rham 复形

对于任何 n 维光滑复代数簇 U, 由 Hironaka 定理可知, 存在紧代数流形 X 以及单态射 $j : U \to X$, 使得 $D = X - U$ 是 X 上的正常交除子, 即在 X 每点的局部邻域内可选取合适的坐标系 $(z_1, \cdots, z_n)$, 使得 D 由局部方程 $z_1 \cdots z_r = 0$ 定义 (这里整数 $r \le n$ 依赖于所在邻域). 因此人们很自然希望研究这类非紧簇上的上同调结构.

我们首先在一般情形下介绍对数 de Rham 复形的概念. 设 X 是 n 维复流形, D 是 X 中的超曲面. 我们假设 D 是正常交除子, 此时也记作 (X, D).

设 $\Omega_X^k(*D) = \cup_{p\geq 0}\Omega_X^k(pD)$, 此处 $\Omega_X^k(pD)$ 是 X 上满足以下条件的半纯 k-形式构成的层: 该形式在 $X-D$ 上全纯, 而沿着 D 至多有阶数不超过 p 的极点. 无论如何, 这样的层仍然太大, 因此我们往往考虑一类重要的子层 $\Omega_X^k(\log D)$, 它的定义如下: 设 U 是局部邻域, $\alpha \in \Omega_X^k(*D)|_U$ 当且仅当 α 及其微分 $d\alpha$ 在 $U - D\cap U$ 上全纯, 且沿着 D 最多有一级极点. α 的这种极点也称为对数极点 (Logarithmic pole).

引理 5.2.1　设 $(z_1, \cdots, z_n)$ 是充分小邻域 U 的局部坐标系, $D\cap U$ 由局部方程 $z_1\cdots z_r = 0$ 定义. 那么 $\Omega_X^k(\log D)|_U$ 是自由 $\mathcal{O}_U$-模层, 诸形式

$$\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \cdots \frac{dz_{i_l}}{z_{i_l}} \wedge dz_{j_1} \wedge \cdots dz_{j_m}, \tag{5-4}$$

构成它的一组基 $(i_s \leq r,\ j_s > r,\ l + m = k)$.

特别地, $\Omega_X^k(\log D)$ 是局部自由 $\mathcal{O}_X$-模层.

证明　设 $\alpha \in \Omega_X^k(\log D)$, 由于 α 在 D 上至多有一级极点, 因而 $\alpha = \frac{\beta}{z_1\cdots z_r}$, β 是全纯 k-形式. 又由 $d\alpha$ 的相同性质可知

$$\sum_{i\leq r} z_1 \cdots \hat{z}_i \cdots z_r dz_i \wedge \beta|_D \equiv 0. \tag{5-5}$$

由此即可推出所需结论 (具体验证留给读者). ■

注 5.2.1　(1) 上述结论也可以如下描述: 设 f 是 D 的局部定义方程, 那么 $\Omega_X^k(\log D)$ 的元素 ϕ 就是满足以下形式的半纯形式: $f\phi$ 及 $fd\phi$ 皆全纯.
(2) $\Omega_X^*(D)$ 和 $\Omega_X^*(\log D)$ 完全是两回事, 读者切勿混淆. 此外, 在 D 上带一阶极点的微分形式也未必是 $\Omega_X^*(\log D)$ 中的元素. 比如 $\frac{dz_2}{z_1}$ 在微分后将包含项 $\frac{dz_1}{z_1^2}$.
(3) 若 D 是光滑超曲面, f 是局部定义方程, 那么 $\Omega_X(\log D)$ 局部上就是由 Ω_X 及 $\frac{df}{f}$ 生成的. 此时恰好有 $\Omega_X^k(\log D) = \wedge^k\Omega_X(\log D)$. ■

注意到上述 $d\alpha$ 除了 D 上的一级极点之外是全纯的, 因而 $d\alpha = \partial\alpha \in \Omega_X^{k+1}(\log D)$. 这就诱导了所谓的对数 de Rham 复形 $(\Omega_X^{\cdot}(\log D), \partial)$. 一般说来, 对数 de Rham 复形即使在局部上也不是正合的. 比如对曲线 X 上由局部方程 $z = 0$ 定义的单点除子 D, 有非恰当形式 $\frac{dz}{z} \in \Omega_X(\log D)$.

设 $U = X - D$, $j : U \to X$ 是包含映射. 我们有 $\Omega_X^k(\log D) \subset j_*\Omega_X^k$. 另一方面, 又有复形的包含关系 $\Omega_U^{\cdot} \subset \mathcal{A}_U^{\cdot}$. 这就诱导了复形态射 $\Omega_X^{\cdot}(\log D) \hookrightarrow j_*\mathcal{A}_U^{\cdot}$.

定理 5.2.1 (Griffiths-Deligne)　复形态射 $\Omega_X^{\cdot}(\log D) \to j_*\mathcal{A}_U^{\cdot}$ 是拟同构的.

证明　不失一般性, 我们设 $D_i = \{z \mid |z| < \varepsilon_i\}$ 是小圆盘 $(i = 1, \cdots, n)$,

$$X = D_1 \times \cdots \times D_n,$$
$$D = \{(z_1, \cdots, z_n) \in X \mid z_1 \cdots z_r = 0\},$$
$$U = X - D = D_1^* \times \cdots \times D_r^* \times D_{r+1} \times \cdots \times D_n,$$
$$T_r = \partial D_1 \times \cdots \times \partial D_r.$$

设 $\omega_i = \frac{dz_i}{z_i} \in \Omega^1_U(\log D)$. 由 $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_j}\omega_i = \delta_{ij}$ 以及 $H^1(T_r,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^r$ 恰好诱导 $H^1(T_r,\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(H_1(T_r,\mathbb{Z}),\mathbb{C})$ 的一组基. 进一步, 由 Künneth 公式 (定理 2.5.1) 可知 $H^k(T_r,\mathbb{C}) = \bigwedge^k H^1(T_r,\mathbb{C})$ 恰好由如下 k-形式构成一组基: $\omega_I = \bigwedge_{i\in I}\omega_i \in \Omega^k_U(\log D)$ $(k=|I|)$, 因而也就给出了 $H^k(U,\mathbb{C})$ 的一组基 (注意 T_r 是由 U 收缩得到的). 因此我们有以下满射

$$H^k(\Gamma(U,\Omega^\cdot_U(\log D))) \longrightarrow H^k(U,\mathbb{C}) = H^k(\Gamma(j_*(\mathcal{A}^\cdot_U))).$$

为了证明上述态射是单的, 不妨将邻域限制在 0 附近, 并设 α 是对数极点落在 D 上的全纯闭形式. 我们要证明 α 在 $\Omega^\cdot_U(\log D)$ 的同调类中可以写为诸 ω_I $(I\subset\{1,\cdots,r\})$ 的常系数线性组合形式. 这显然导出了单射性.

为此, 我们对 r 施归纳法. $r=0$ 时是显然的. 今假设 $r-1$ 情形已证. 不妨写 $\alpha = \omega_r\wedge\beta+\gamma$, 此处 β 不含 z_r, dz_r, 而 γ 关于 z_r 是全纯的. 由 $d\alpha=0$ 可知 $\omega_r\wedge d\beta$ 在 $z_r=0$ 上没有极点, 从而由 β 的假设推知 $d\beta=0$. 注意到 β 的极点都在 $D'=\{z \mid z_1\cdots z_{r-1}=0\}$ 上, 因而由归纳假设可知 $\beta=\beta'+d\phi$, 这里 β' 是诸 ω_I $(I\subset\{1,\cdots,r-1\})$ 的常系数线性组合, 而 ϕ 的对数极点落在 D' 中.

由于 γ 关于 z_r 全纯, 因而 γ 的对数极点也落在 D' 中. 由上面计算可知 $d\gamma=0$, 因而利用归纳假设得到 $\gamma=\gamma'+d\psi$, 此处 γ' 是诸 ω_I $(I\subset\{1,\cdots,r-1\})$ 的常系数线性组合, 而 ψ 的对数极点落在 D' 中. 总之,

$$\alpha = \omega_r\wedge\beta'+\gamma'+d(\psi-\omega_r\wedge\phi).$$

这就证明了结论. ■

注 5.2.2 (1) 类似地, 我们可证明 $\Omega^\cdot_X(*D)\hookrightarrow j_*\mathcal{A}^\cdot_U$ 也是拟同构 (习题 5.5).
(2) 如果 D 是光滑的, 那么上述命题的证明实际上可以推出对数 de Rham 复形在次数 ≥ 2 的项上都是局部正合的. ■

推论 5.2.1 *存在典范同构*

$$H^k(U,\mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^k(X,\Omega^\cdot_X(\log D)).$$

证明 由命题 1.5.1 及定理 5.2.1, 我们有

$$\mathbb{H}^k(X,\Omega^\cdot_X(\log D)) = \mathbb{H}^k(X,j_*\mathcal{A}^\cdot_U).$$

$\mathcal{A}^\cdot_U$ 是 $\mathcal{C}^\infty_U$-模层, 且在 U 上构成 $\mathbb{C}$ 的析解, 从而其整体截面的同调等于 $H^k(U,\mathbb{C})$. 进一步, $j_*\mathcal{A}^\cdot_U$ 是 $\mathcal{C}^\infty_X$-模层, 因此是零调的. 由抽象 de Rham 定理 1.5.2, 我们有

$$\mathbb{H}^k(X,j_*\mathcal{A}^\cdot_U) = H^k(\Gamma(X,j_*\mathcal{A}^\cdot_U)) = H^k(\Gamma(U,\mathcal{A}^\cdot_U)) = H^k(U,\mathbb{C}).$$

这就证明了所要的结论. ■

我们引进对数 de Rham 复形的 Hodge 滤过 $F^p\Omega^\cdot_X(\log D)$:

$$0\longrightarrow\Omega^p_X(\log D)\longrightarrow\Omega^{p+1}_X(\log D)\longrightarrow\cdots$$

有时也记作 $\Omega^{\geq p}_X(\log D)$. 这样, 由命题 1.5.1 及推论 5.2.1, 即可诱导 $H^k(U,\mathbb{C})$ 的 Hodge 滤过

$$F^pH^k(U,\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(\mathbb{H}^k(X,\Omega^{\geq p}_X(\log D))\longrightarrow\mathbb{H}^k(X,\Omega^\cdot_X(\log D))).$$

此外, 还可诱导 $\Omega^{\cdot}_X(\log D)$ 的权滤过

$$W_l\Omega^{\cdot}_X(\log D) := \bigwedge^l \Omega^1_X(\log D) \wedge \Omega^{\cdot-l}_X \subset \Omega^{\cdot}_X(\log D).$$

设 $D = \cup_{i\in I} D_i$ 是正常交除子, 每个分支 D_i 是光滑的. 对任何指标子集 $K \subset I$, 定义 $D_K := \cap_{i\in K} D_i$. 考虑坐标邻域 $V \subset X$, D 的局部方程 $z_1 \cdots z_r = 0$. 设

$$\alpha = \sum_K \alpha_{K,L} dz_L \wedge \frac{dz_K}{z_K} \in \Gamma(V, W_k\Omega^{\cdot}_X(\log D)), \qquad K \subset \{1, \cdots, r\}, |K| \le k.$$

我们定义 α 在 D_M $(|M| = k)$ 上的留数 (Residue)

$$\mathrm{Res}\alpha = (2i\pi)^k \sum_L \alpha_{M,L} dz_{L|D_M \cap V}.$$

引理 5.2.2 上述留数定义不依赖于坐标选取, 且 $W_{k-1}\Omega^{\cdot}_X(\log D) \subset W_k\Omega^{\cdot}_X(\log D)$ 中截面的留数为零.

证明 命题后半部分是显然的. 我们改变 D_i 的局部定义方程, 即设 $z'_i = f_i z_i$ $(i \le r)$, f_i 是局部可逆全纯函数, 则 $\frac{dz'_i}{z'_i} = \frac{dz_i}{z_i} + \frac{df_i}{f_i}$. 注意到 $\frac{df_i}{f_i}$ 是全纯的, 因而

$$\frac{dz'_K}{z_K} = \frac{dz_K}{z_K} \mod W_{k-1}\Omega^{\cdot}_X(\log D).$$

这就推出 $\mathrm{Res}\alpha$ 不依赖于 z_i $(i \le r)$ 的选取. 另一方面, 由定义也可以知道该留数不依赖于 z_j $(j > r)$. ■

命题 5.2.1 设 $D^{(k)}$ 是所有 D_K $(|K| = k)$ 的无交并. $j_k : D^{(k)} \to X$ 是自然态射, 则

$$W_k\Omega^{\cdot}_X(\log D)/W_{k-1}\Omega^{\cdot}_X(\log D) \cong j_{k*}\Omega^{\cdot-k}_{D^{(k)}}. \tag{5-6}$$

证明 由引理 5.2.2, 我们得到上述留数诱导的态射. 从局部定义上, 容易检验这是同构 (留给读者验证). ■

根据上面的讨论, $\Omega^{\cdot}$ 有两套滤过. 一个是朴素的 Hodge 滤过, 它诱导的谱序列第一项是 ${}_FE_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D))$, 其复形映射由 ∂ 诱导. 第二个是权滤过. 由于 $W.$ 是递增的, 为了方便讨论其对应的谱序列, 我们设 $W^k := W_{-k}$, 让其变为地递减序列.

引理 5.2.3 对上述递减滤过 $W^{\cdot}$, 其相应的谱序列 ${}_WE$ 的第一项为

$${}_WE_1^{p,q} \cong H^{2p+q}(D(-p), \mathbb{C}).$$

证明 由推论 1.5.1 及命题 5.2.1,

$${}_WE_1^{p,q} \cong \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathrm{Gr}^p_W\Omega^{\cdot}_X(\log D)) = \mathbb{H}^{2p+q}(X, (j_{-p})_*\Omega^{\cdot}_{D^{(-p)}}).$$

注意到, j_{-p} 是有限正常态射, 我们可以使用以下事实: 即对 $D^{(-p)}$ 上任何复形 $\mathcal{F}^{\cdot}$, 总有

$$\mathbb{H}^i(D^{(-p)}, \mathcal{F}^{\cdot}) = \mathbb{H}^i(X, (j_{-p})_*\mathcal{F}^{\cdot}).$$

这样,

$$\mathbb{H}^{2p+q}(X, (j_{-p})_*\Omega^{\cdot}_{D^{(-p)}}) = \mathbb{H}^{2p+q}(D^{(-p)}, \Omega^{\cdot}_{D^{(-p)}}) = H^{2p+q}(D^{(-p)}, \mathbb{C}),$$

最后一个等式来自抽象 de Rham 定理 1.5.2 ■

现在考虑 ${}_WE_1$ 上的映射 d_1,

$$\begin{array}{cccc} d_1: & H^{2p+q}(D^{(-p)},\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2p+q}(D^{(-p-1)},\mathbb{C}) \\ & \| & & \| \\ \{d_{1K}^L\}: & \bigoplus_{|K|=-p} H^{2p+q}(D_K,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \bigoplus_{|L|=-p-1} H^{2p+q+2}(D_L,\mathbb{C}). \end{array}$$

如果 $L\subset K$, 我们就记 $j_K^L: D_K\to D_L$ 是包含映射, j_{K*}^L 是相应地 Gysin 态射.

命题 5.2.2 (1) 如果 $L\not\subset K$, 那么 d_{1K}^L 是零态射;
(2) 如果 $L\subset K$, 设 $K=\{i_1<\cdots<i_p\}$, $L=K-\{i_s\}$, 那么 $d_{1K}^L=(-1)^{q+s}j_{K*}^L$.

该命题的证明较为复杂, 我们此处略去. 事实上, 它是证明下面的 Deligne 定理的关键一步.

现在我们看到, 谱序列项 ${}_WE_2^{p,q}$ 是一个由带有 Hodge 结构的项及 Hodge 结构态射构成的复形的上同调. 因而 ${}_WE_2^{p,q}$ 带有权 $2p+q$ $(p\le 0)$ 的 Hodge 结构. 有时为方便起见, 我们通过双次映射 $(-p,-p)$ 将它视为权 q 结构.

定理 5.2.2 (Deligne **定理**) 设 X 是紧 Kähler 流形, $D\subset X$ 是正常交除子. 那么
(1) 权滤过对应的谱序列在 E_2 处退化;
(2) Hodge 滤过对应的谱序列在 E_1 处退化;
(3) $\mathbb{H}^k(X,\Omega_X(\log D))$ 上的 Hodge 滤过诱导了 ${}_WE_2^{p,q}=\mathrm{Gr}_{-p}^W H^k(U,\mathbb{C})$ 上的 Hodge 滤过.

Deligne 定理保证了 $H^k(U,\mathbb{C})$ 上的混合 Hodge 结构的存在性. 特别地, 我们可以要求权滤过满足 $W_iH^k(U,\mathbb{Q})=0$ $(i<0)$ 及

$$W_0H^k(U,\mathbb{Q})=\mathrm{Im}(j^*: H^k(X,\mathbb{Q})\to H^k(U,\mathbb{Q})).$$

此外, 我们还能进一步证明该结构只依赖于 U, 而和 U 的紧化 X 无关.

以下我们考虑特殊情形, 即 D 是光滑超曲面, f 是局部定义方程. 此时留数映射

$$\mathrm{Res}: \Omega^{\cdot}(\log D)\longrightarrow \Omega_D^{\cdot-1},\qquad \alpha\wedge\frac{df}{f}\to 2i\pi\alpha|_D.$$

由命题 1.5.1 及推论 5.2.1, 诱导上同调的留数映射

$$\mathrm{Res}: H^k(U,\mathbb{C})\longrightarrow H^{k-1}(D,\mathbb{C}).$$

实际上, 它也可以用相对上同调映射诱导

$$H^k(U,\mathbb{C})\longrightarrow H^{k+1}(X,U,\mathbb{C})\cong H^{k+1}(T,\partial T,\mathbb{C})\cong H^{k-1}(D,\mathbb{C}),$$

这里 T 是 D 的管状邻域. 另一方面, 由包含态射 $\Omega_X^{\cdot}\hookrightarrow\Omega_X^{\cdot}(\log D)$ 可诱导限制

$$H^k(X,\mathbb{C})\longrightarrow H^k(U,\mathbb{C}).$$

综合这些映射, 我们可以很好地解释相对上同调长正合列中的每个态射

$$\cdots\longrightarrow H^k(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{|_U} H^k(U,\mathbb{Z})\xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{k-1}(D,\mathbb{C})\xrightarrow{l_*} H^{k+1}(X,\mathbb{Z}), \tag{5-7}$$

这里 l_* 是 Gysin 态射 ($l: D\hookrightarrow X$ 是包含映射).

引理 5.2.4 设 $D\subset X$ 是 ample 的光滑超曲面.
(1) 作为 $\mathcal{O}_X(D)$ 对应的极化, 我们有

$$H^n(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}=H^n(X,\mathbb{Q})/l_*H^{n-2}(D,\mathbb{Q}).$$

(2) 以下序列正合

$$0 \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}} \xrightarrow{j^*} H^n(U,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{n-1}(D,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}} \longrightarrow 0.$$

证明 (1) 由弱 Lefschetz 定理, $l_*H^{n-2}(D,\mathbb{Q}) = l_*l^*H^{n-2}(X,\mathbb{Q}) = LH^{n-2}(X,\mathbb{Q})$, 这里 L 是 D 对应的 Lefschetz 算子. 再由 Lefschetz 分解即得结论.

(2) 注意到

$$H^{n-1}(D,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}} := \mathrm{Ker}(l_* : H^{n-1}(D,\mathbb{Q}) \to H^{n+1}(X,\mathbb{Q})),$$

上述结论 (1) 以及 长正合列 (5-7), 立得所需的短正合列. ■

注意到 (第一项来自上述引理)

$$W_0H^n(U,\mathbb{Q}) = j^*H^n(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}}, \qquad W_1H^n(U,\mathbb{Q}) = H^n(U,\mathbb{Q}),$$

由定理 5.1.1 可知 j_* 和 Res 是严格相容于 Hodge 滤过的.

5.3 混合 Hodge 层

设 X 是仿紧 (Paracompact) 拓扑空间, 即 X 是 Hausdorff, 并且它的任何开覆盖都有局部有限加细的开覆盖. 我们要在 X 上定义权 m 的 Hodge 层, 它是一个四元组 $(K^\cdot_{\mathbb{Z}}, K^\cdot_{\mathbb{C}}, F, \alpha)$, 其中

(1) $K^\cdot_{\mathbb{Z}}$ 是 X 上的 Abel 群层的复形 (左边有界), 使得群 $\mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{Z}})$ 是有限生成的;

(2) $K^\cdot_{\mathbb{C}}$ 是 X 上的复向量空间层的复形 (左边有界);

(3) F 是 $K^\cdot_{\mathbb{C}}$ 的递降滤过;

(4) α 是 $K^\cdot_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ 与 $K^\cdot_{\mathbb{C}}$ 的一个等价;

(5) 对任何 k, p, 自然态射 $\mathbb{H}^k(X, F^pK^\cdot_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{C}})$ 是单射;

(6) 令 $F^p\mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{C}}) := \mathrm{Im}(\mathbb{H}^k(X, F^pK^\cdot_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{C}}))$. 通过 α 将 $\mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{C}$ 与 $\mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{C}})$ 等同起来, 则 $\mathbb{H}^k(X, K^\cdot_{\mathbb{Z}})$ 上有权 $m+k$ 的 Hodge 结构 $(k \in \mathbb{Z})$.

类似地, 我们也可以定义 $\mathbb{Q}$-Hodge 层.

例 5.3.1 设 X 是光滑完备紧代数簇, $K^\cdot_X := (\mathbb{Z}_X, \Omega^\cdot_X, F, \alpha)$ 是 X 上的权 0 的 Hodge 层, 其中 $\alpha : \mathbb{C}_X \to \Omega^\cdot_X$ 是自然的包含映射 (见例 1.5.2). ■

例 5.3.2 设 $K^\cdot := (K^\cdot_{\mathbb{Z}}, K^\cdot_{\mathbb{C}}, F, \alpha)$ 是 X 上的权 m 的 Hodge 层. 我们定义权 $m+2r$ 的 Hodge 层

$$K^\cdot(-r) = (K^\cdot_{\mathbb{Z}}, K^\cdot_{\mathbb{C}}, F[r], (2\pi i)^{-r}\alpha),$$

此处 $F[r]^pK^\cdot_{\mathbb{C}} := F^{p+r}K^\cdot_{\mathbb{C}}$. 我们有

$$\mathbb{H}^k(X, K^\cdot(-r)) \cong \mathbb{H}^k(X, K^\cdot) \otimes \mathbb{Z}(-r).$$

例 5.3.3 设 $K^\cdot := (K^\cdot_{\mathbb{Z}}, K^\cdot_{\mathbb{C}}, F, \alpha)$ 是 X 上的权 m 的 Hodge 层. 我们定义权 $m+r$ 的 Hodge 层

$$K^\cdot[r] = (K^\cdot_{\mathbb{Z}}[r], K^\cdot_{\mathbb{C}}[r], F_[r], \alpha[r]),$$

此处 $K^\cdot_{\mathbb{Z}}[r]^p = K^{p+r}_{\mathbb{Z}}$, $K^\cdot_{\mathbb{C}}[r] = K^{p+r}_{\mathbb{C}}$, $F^p_{[r]}K[r]^\cdot := (F^pK)[r]^\cdot$. 我们有

$$\mathbb{H}^k(X, K^\cdot[r]) \cong \mathbb{H}^{k+r}(X, K^\cdot).$$

在仿紧空间 X 上也可以定义混合 Hodge 层, 它是多元组 $(K_{\mathbb{Z}}^{\cdot}, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}, W_{\mathbb{Q}}, \alpha, K_{\mathbb{C}}^{\cdot}, W_{\mathbb{C}}, F, \beta)$, 其中

(1) $K_{\mathbb{Z}}^{\cdot}$ (相应地, , $K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}, K_{\mathbb{C}}^{\cdot}$) 是 $\mathbb{Z}$ (相应地, $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$)-模层的复形 (左边有界), 使得 $\mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Z}}^{\cdot})$ 有限生成;

(2) $W_{\mathbb{Q}}$ (相应地, $W_{\mathbb{C}}$) 是 $K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}$ (相应地, $K_{\mathbb{C}}^{\cdot}$) 的递增滤过 (有时都简记为 W);

(3) F 是 $K_{\mathbb{C}}^{\cdot}$ 上的递降滤过;

(4) α 是 $K_{\mathbb{Z}}^{\cdot} \otimes \mathbb{Q}$ 与 $K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}$ 的等价;

(5) β 是 $(K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} \otimes \mathbb{C}, W_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C})$ 与 $(K_{\mathbb{C}}^{\cdot}, W_{\mathbb{C}})$ 的滤子化等价;

(6) 令

$$F^p \mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{C}}^{\cdot} = \mathrm{Im}\left(F^p K_{\mathbb{C}}^{\cdot} \cap W_m K_{\mathbb{C}}^{\cdot} + W_{m-1} K_{\mathbb{C}}^{\cdot} \to \mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{C}}^{\cdot}\right)$$

为 F 在 $\mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{C}}^{\cdot}$ 上的滤过;

(7) 设 $\mathrm{Gr}_m^W \beta$ 为由 β 确定的 $\mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} \otimes \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{C}}^{\cdot}$ 的等价. 这样, 对任何 m,

$$(\mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}, \mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{C}}^{\cdot}, F, \mathrm{Gr}_m^W \beta)$$

是权 m 的 $\mathbb{Q}$-Hodge 层.

尽管混合 Hodge 层的定义看上去很复杂, 但是通过下面的 Deligne 定理, 这一概念将成为构造混合 Hodge 结构的有力工具.

定理 5.3.1 (Deligne **定理**) 设 X 是仿紧 (Paracompact) 拓扑空间, $K^{\cdot}$ 是 X 上的混合 Hodge 层, 那么超上同调群 $\mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Z}}^{\cdot})$ 带有一个自然的混合 Hodge 结构. 精确言之, 我们定义

$$W_m \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}) := \mathrm{Im}\left(\mathbb{H}^k(X, W_{m-k} K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}) \to \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot})\right),$$
$$F^p \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{C}}^{\cdot}) := \mathrm{Im}\left(\mathbb{H}^k(X, F^p K_{\mathbb{C}}^{\cdot}) \to \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{C}}^{\cdot})\right).$$

并由 α 及 β 得到同构

$$\mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Z}}^{\cdot}) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}),$$
$$\mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{C}}^{\cdot}).$$

那么我们有

(1) W 和 F 确定了 $\mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Z}}^{\cdot})$ 的混合 Hodge 结构;

(2) 自然态射

$$\mathbb{H}^k(X, F^p K_{\mathbb{C}}^{\cdot}) \longrightarrow \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{C}}^{\cdot})$$

是单射, 因而有

$$\mathrm{Gr}_F^p \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{C}}^{\cdot}) \cong \mathbb{H}^k(X, \mathrm{Gr}_F^p K_{\mathbb{C}}^{\cdot}).$$

(3) 设

$$\delta_{m,k} : \mathbb{H}^k(X, \mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}) \longrightarrow \mathbb{H}^{k+1}(X, \mathrm{Gr}_{m-1}^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot})$$

是由如下复形正合列诱导的超上同调正合列中的连接同态

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_{m-1}^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} \longrightarrow W_m K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} / W_{m-2} K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} \longrightarrow \mathrm{Gr}_m^W K_{\mathbb{Q}}^{\cdot} \longrightarrow 0.$$

于是 $\mathrm{Gr}_{m+k}^W \mathbb{H}^k(X, K_{\mathbb{Q}}^{\cdot}) \cong \mathrm{Ker}\delta_{m,k} / \mathrm{Im}\delta_{m+1,k-1}$.

例 5.3.4 设 X 是紧 Kähler 流形, $D \subset X$ 是正常交除子, $j: U = X - D \to X$ 是包含映射. 由第 5.2 节的讨论, 我们有 X 上的混合 Hodge 层

$$(K^{\cdot}_{\mathbb{Z}}, K^{\cdot}_{\mathbb{Q}}, W_{\mathbb{Q}}, \alpha, K^{\cdot}_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}, F, \beta),$$

它满足 $\mathbb{H}^k(X, K^{\cdot}_{\mathbb{Z}}) \cong H^k(U, \mathbb{Z})$. ■

本章习题

习题 5.1 证明例 5.1.1 中的式 (5-1).

习题 5.2 证明式 (5-2).

习题 5.3 设 V, V' 是混合 Hodge 结构, 请具体验证 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 及 $V \otimes V'$ 上诱导的混合 Hodge 结构, 并验证式 (5-3).

习题 5.4 请从式 (5-5) 具体验证式 (5-4).

习题 5.5 设 X 是复射影簇, D 是正常交除子, $j: U = X - D \hookrightarrow X$ 是包含映射. 证明: $\Omega^{\cdot}_X(*D) \hookrightarrow j_*\mathcal{A}_U$ 也是拟同构.

习题 5.6 试具体验证态射 (5-6) 是同构.

第六章　Hodge 结构变分 (II)

6.1　单值表示

设 X 是拓扑空间, A 是一个环, H 是 A 模. 我们曾经定义以 H 为茎的局部系 $\mathcal{H}$, 它局部上同构于以 H 为茎的常层. 设 $\mathcal{A}_H$ 是所有这样的二元组 $(\mathcal{H},\alpha)$ 构成的集合: $\mathcal{H}$ 是茎为 H 的任一局部系, $\alpha : \mathcal{H}_x \cong H$ 是一个同构映射. 设 $x \in X$, $\mathcal{B}_H$ 是所有的表示

$$\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$$

构成的集合. 我们有以下经典结论.

命题 6.1.1　*设 X 道路连通且局部单连通拓扑空间, $x \in X$, 那么存在双射 $\mathcal{A}_H \to \mathcal{B}_H$.*

证明　设 $(\mathcal{H},\alpha) \in \mathcal{A}_H$, $\pi : \widetilde{X} \to X$ 是万有覆盖. 局部系 $\pi^{-1}\mathcal{H}$ 实际上是 $\widetilde{X}$ 上的常层 (见习题 6.2). 取定一点 $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, 由复合同构

$$\pi^{-1}(\mathcal{H})_{\tilde{x}} \overset{\mu_{\tilde{x}}}{\cong} \mathcal{H}_x \overset{\alpha}{\cong} H$$

我们诱导了局部常层之间的同构 $\beta : \pi^{-1}(\mathcal{H}) \cong H$.

今取 $\gamma \in \pi_1(X,x)$. γ 可以提升到 $\widetilde{X}$ 上, 它从 $\tilde{x}$ 出发并终止于另一点 $y = \gamma\cdot\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. 这样, 我们诱导了一个复合同构

$$\rho(\gamma) := \alpha \circ \mu_y \circ \beta_y^{-1} : H \to H,$$

此处 $\mu_y : \pi^{-1}(\mathcal{H})_y \cong \mathcal{H}_x$ 是自然同构. $\rho(\gamma)$ 也可以用另一种方式说明. 事实上, γ 的提升诱导了同构 $\pi^{-1}(\mathcal{H})_{\tilde{x}} \cong \pi^{-1}(\mathcal{H})_y$, 因而也诱导同构 $\gamma^* : H_x \cong H_y$. 这样, $\rho(\gamma) = \alpha \circ \gamma^* \circ \alpha$. 这也说明 $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(H)$ 确实是群同态.

反过来, 假设给定群表示 $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(H)$, 我们构造层如下:

$$\Gamma(U,\mathcal{H}) = \left\{\sigma : \pi^{-1}(U) \to H \mid \sigma(\gamma\cdot u) = \rho(\gamma)\cdot\sigma(u), \forall u \in \pi^{-1}(U), \gamma \in \pi_1(X,x)\right\},$$

这里的 $\sigma : \pi^{-1}(U) \to H$ 是常函数, X 看作 $\widetilde{X}$ 在 $\pi_1(X,x)$ 作用下的商. 由于万有覆盖限制在任一单连通开集下是平凡的覆盖, 因此上面定义的层是局部常层. 由对于包含 x 的开邻域 U, 由映射 $\Gamma(U,\mathcal{H}) \to H$, $\sigma \to \sigma(\tilde{x})$, 取正向极限即可诱导同构 $\alpha_x : \mathcal{H}_x \cong H$.

上述讨论给出了集合 $\mathcal{A}_H$ 和 $\mathcal{B}_H$ 之间的一一对应

$$\phi : \mathcal{A}_H \longrightarrow \mathcal{B}_H, \qquad (\mathcal{H},\alpha) \to (\rho : \gamma \to \alpha \circ \gamma^* \circ \alpha). \tag{6-1}$$

我们留给读者具体验证之. ■

我们把对应于一个局部系 $\mathcal{H}$ 的表示 $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}\mathcal{H}_x = \mathrm{Aut}H$ 称作单值表示 (Monodromy representation). 上面的结论告诉我们, 局部系对应唯一对应一个单值表示 (模掉 $\mathrm{Aut}(G)$ 上的共轭作用).

推论 6.1.1 设 X 是道路连通空间, $x \in X$, $\mathcal{L}$ 是 X 上的局部系, 那么整体截面空间 $\Gamma(X,\mathcal{L})$ 可以视作单值作用 $\rho : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}\mathcal{L}_x$ 下的不变子空间

$$\mathcal{L}_x^{\mathrm{inv}} = \{\alpha \in \mathcal{L}_x \mid \rho(\gamma)(\alpha) = \alpha, \forall \gamma \in \pi_1(X,x)\}.$$

证明 $\mathcal{L}$ 的非零截面等价于局部系的非零态射 $\mathbb{Z} \to \mathcal{L}$. 限制到 x 上, 这就等价于给出一个茎同态 $\mathbb{Z}_x \to \mathcal{L}_x$ 使得它在单值作用下不变. 注意到 $\mathbb{Z}$ 是平凡的局部系, 其单值也是平凡的, 因此上述茎映射等价于给出一个在单值 ρ 下不变的元素. ■

例 6.1.1 设 $\phi : X \to B$ 是微分流形的正常浸没映射, B 局部可缩. 设 $\gamma \in \pi_1(B,b)$, 并写作 $\gamma : [0,1] \to B$. 这样我们诱导纤维化 $\phi_\gamma : X_\gamma \to [0,1]$. 由 Ehresmann 定理, 我们得到平凡化

$$T = (T_0, \phi_X) : X_\gamma \cong \phi_\gamma^{-1}(0) \times [0,1].$$

这就诱导同胚 $\psi : \phi_\gamma^{-1}(1) \cong \phi_\gamma^{-1}(0)$, 它们本身都同胚于纤维 X_b. 因此我们得到单值表示

$$\rho(\gamma)(\eta) = \psi^*\eta, \qquad \eta \in H^k(X_b, A),$$

这里 A 是一个系数环 (比如 $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \cdots$). 这一单值表示对应了高次正像层 $R^k\phi_*A$. ■

设 $X \to B$ 是复流形间的全纯正常浸没态射. 我们进一步假设该态射是射影的, 即存在全纯浸入 $i : X \hookrightarrow B \times \mathbb{P}^N$ 使得 $\mathrm{pr}_1 \circ i = \phi$. 由例 6.1.1, 我们有单值表示

$$\rho : \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}H^k(X_b, \mathbb{Z}).$$

一般说来, 单值表示受到纤维 Hodge 结构很强的限制. 我们在这里叙述两个重要结果来说明这一点.

命题 6.1.2 (**推论** 6.2.1) 设 B 是拟射影的, 那么单值表示的不变子空间

$$H^k(X_b,\mathbb{Z})^\rho = \{\alpha \in H^k(X_b,\mathbb{Z}) \mid \rho(\gamma)(\alpha) = \alpha, \quad \forall \gamma \in \pi_1(B,b)\}$$

是 $H^k(X_b,\mathbb{Z})$ 的 Hodge 子结构.

如取 $B = \Delta^*$ 为空心圆盘, 则 $\pi_1(B,b) \cong \mathbb{Z}$. $\mathrm{Im}\rho$ 的生成元记为 T.

命题 6.1.3 T 是拟幺幂的 (Quasi-unipotent), 即存在整数 N, M 使得

$$(T^N - 1)^M = 0.$$

进一步, 我们可以要求 $M \leq k+1$.

单值计算通常并不容易. 在曲面纤维化情形, 我们已有较多的了解; 对一般的情形, 则所知甚少. 不过对于 Lefschetz 退化, 我们可以清楚地描述其单值表示.

定理 6.1.1 (Picard-Lefschetz **公式**) 设 X 是 n 维光滑复簇, $f : X \to \Delta$ 是 Lefschetz 退化, T 是 $\pi_1(\Delta^*, \mathbb{Z})$ 的生成元在 $H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})$ 中单值表示的像. 对任何 $\alpha \in H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})$, 我们有

$$T(\alpha) = \alpha + \epsilon_n \langle \alpha, \delta \rangle \delta,$$

这里零化闭链

$$\delta \in \mathrm{Ker}\left(H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(X_t,\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(X,\mathbb{Z})\right)$$

是零化球面 S_t^{n-1} 对应的类; $\langle , \rangle$ 是 $H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})$ 上的相交型; $\epsilon_n = \pm 1$, 其符号取决于 n. 特别地, 当 $n-1$ 是偶数时, $\epsilon_n = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

推论 6.1.2 在上述命题条件下, 若 $n-1$ 是偶数, 那么单值算子 T 是对合的; 若 $n-1$ 是奇数并且 δ 不是挠元, 那么 T 是无限阶的.

证明 若 n 是偶数, 则 $H^{n-1}(X_t,\mathbb{Z})$ 上的相交型是反对称的, 从而 $\langle\delta,\delta\rangle=0$. 结合 Picard-Lefschetz 公式与上述结论, 立得

$$T^k(\alpha)=\alpha+k\epsilon_n\langle\alpha,\delta\rangle.$$

因此是无限阶的.

若 n 是奇数, 则相交型 $\langle,\rangle$ 是对称的. 由于 T 保相交型, 即 $\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$, 因而代入 Picard-Lefschetz 公式得

$$(2\epsilon_n+\langle\delta,\delta\rangle)\langle\alpha,\delta\rangle\langle\beta,\delta\rangle=0.$$

因为 $\delta\neq 0$, 所以 $2\epsilon_n+\langle\delta,\delta\rangle=0$. 这样,

$$T^2(\alpha)=\alpha+(2\epsilon_n+\langle\delta,\delta\rangle)\langle\alpha,\delta\rangle\delta=\alpha.$$

这就证明结论. ■

T 对应的 X_t 上单值同胚被称为 Dehn 扭转 (Dehn twist).

注 6.1.1 在曲面纤维化情形, 我们已经知道, 任何伪周期映射都同痕于一些 Dehn 扭转的符合, 因此计算 $H^1(X_t,\mathbb{Z})$ 上的 Picard-Lefschetz 单值矩阵等价于计算一系列 Dehn 扭转对应单值矩阵的乘积. 一个未解决的问题是, 如何给出周期映射的 Dehn 扭转正表示. 在超椭圆纤维化情形, 人们已经得到了完美的解答. ■

上面我们讨论了局部 Lefschetz 退化的零化闭链与单值表示的关系. 现在我们希望研究 Lefschetz 线束上单值的性质. 为此需要做一些准备工作. 设 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ 是非退化光滑连通簇. 回顾判别式簇 $\mathcal{D}_X\subset(\mathbb{P}^N)^*$, 它是 X 的所有奇异超平面截口构成的集合, 并且是不可约的. 设 $U:=(\mathbb{P}^N)^*-\mathcal{D}_X$,

$$\mathcal{X}_U:=\{(x,H)\in X\times U\mid x\in X_H\}.$$

这样, 我们有浸没 $\phi:\mathcal{X}_U\to U$, 且纤维 X_H 是光滑的. 不妨设 $0\in U$, 我们要研究单值表示

$$\rho:\pi_1(U,0)\longrightarrow\mathrm{Aut}(H^k(X_0,\mathbb{Z})).$$

另一方面, 命题 4.5.1 给出了线束 $\Delta\subset(\mathbb{P}^N)^*$ 是否为 Lefschetz 线束的判定条件: 要么 $\dim\mathcal{D}_X\leq N-2$; 要么 $\dim\mathcal{D}_X=N-1$ 并且 Δ 与 $\mathcal{D}_X$ 横截相交. 前一情形中, 由于 $\pi_1(U,0)=0$, 因此单值是平凡的. 我们现在考虑后一情形. 以下经典结论使我们可以将单值计算归结到 Lefschetz 线束上.

定理 6.1.2 (Zariski 定理) 设 $S\subset\mathbb{P}^r$ 是超曲面, $0\in U=\mathbb{P}^r-S$, $\Delta\subset\mathbb{P}^r$ 是横截相交于 S 的光滑部分且过 0 的射影直线. 那么我们有满射 $\pi_1(\Delta-\Delta\cap S,0)\to\pi_1(U,0)$.

证明 设 W 是所有横截相交于 S 的光滑部分且过 0 的射影直线构成的集合. 设

$$P=\{(x,t)\in\mathbb{P}^r\times W\mid x\in\Delta_t\}.$$

显见投影 $\pi:P\to W$ 是 $\mathbb{P}^1$-丛. 考虑第一分量投影 $\mathrm{pr}_1:P\to W$, 并设 $U'=\mathrm{pr}_1^{-1}(U)$, $\pi'=\pi|_{U'}$. 对任何 $t\in W$, 纤维 $\pi'^{-1}(t)$ 可以看成 $\Delta_t-\Delta_t\cap S$. U' 有一个特殊的截面 $W'=\{(0,t)\mid t\in W\}$.

设 $p=(0,o)\in W'$, $\Delta:=\Delta_o$. 我们有基本群正合列

$$\pi_1(\Delta-\Delta\cap S,0)\longrightarrow\pi_1(U',p)\longrightarrow\pi_1(W,o)\longrightarrow 1.$$

由于 $W'\subset U'$ 是 π' 的截面, 故 $\pi_1(W',p)\subset\pi_1(U',p)$ 也是上述正合列中满射 $\pi_1(U',p)\to\pi_1(W,o)$ 的截面. 这意味着, $\pi_1(U',p)$ 中的道路代表元都可以写为 W' 中的道路与 $\Delta-\Delta\cap S$ 中的道路的复合. 另一方面, pr_1 将 W' 收缩为 0. 因此对以上正合列作用 pr_{1*}, 即得同构

$$\mathrm{pr}_{1*}\pi_1(\Delta-\Delta\cap S,0)\cong\mathrm{pr}_{1*}\pi_1(U',p).$$

剩下只需证明 $\mathrm{pr}_{1*}:\pi_1(U',p)\to\pi_1(U,0)$ 是满射. 为了讨论方便, 不失一般性, 我们将基点 p 替换为一般点 p', 并设 $q=\mathrm{pr}_1p'$. 注意到 pr_1 是双有理的, 因此我们可以找到 U' 中包含 p' 的 Zariski 开集 U'', 使得它在 pr_1 下同构于 U 中的 Zariski 开集 (也记作 U''). 由于 $U-U''$ 在 U 中的实余维数至少是 2, 因此有满射

$$\pi_1(U'',p')\longrightarrow\pi_1(U,q).$$

这样, 结合以下交换图

$$\begin{tikzcd}\pi_1(U'',q) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U',p') \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \pi_1(U'',q) \arrow[r] & \pi_1(U,q)\end{tikzcd}$$

立得 $\mathrm{pr}_{1*}:\pi_1(U',p)\to\pi_1(U,0)$ 的满射性. ■

现在回到先前的问题上. 我们希望研究 $\phi:\mathcal{X}_U\to U$ 的单值表示

$$\rho:\pi_1(U,0)\longrightarrow\mathrm{Aut}(H^{n-1}(X_0,\mathbb{Z})),\qquad n=\dim X,\tag{6-2}$$

这里不妨设 $0\in U$. 回顾 $\mathcal{D}_X$ 的开子集 $\mathcal{D}_X^0$, 它是由那些恰有一个通常二重点作为奇点的超平面截口构成的集合. 任取 $y\in\mathcal{D}_X$, 我们构造一个以 y 为中心且与 $\mathcal{D}_X^0$ 横截相交的小圆盘 D_y, 并取 $y'\in D_y-\{y\}\subset U$. 我们可以选取零化闭链

$$\delta_y\in\mathrm{Ker}\left(H^{n-1}(X_{y'},\mathbb{Z})\cong H_{n-1}(X_{y'},\mathbb{Z})\to H_{n-1}(X_{D_y},\mathbb{Z})\right),$$

此处 $X_{y'}:=\phi^{-1}(y')$, $X_{D_y}=\phi^{-1}(D_y)$. 取一条从 y' 到 0 的道路 γ. ϕ 在 γ 上的平凡化给出了微分同胚 $\psi:X_{y'}\cong X_0$, 进而诱导零化闭链

$$\delta_\gamma=\psi_*(\delta_y)\in H_{n-1}(X_0,\mathbb{Z})\cong H^{n-1}(X_0,\mathbb{Z}).$$

尽管上述零化闭链依赖于道路选择, 但是它们 (在适当选取正负号后) 彼此之间相差一个单值作用, 有时也称做共轭的 (Conjugate). 更一般的结论如下.

命题 6.1.4 上述构造的所有零化闭链 $\delta_\gamma\in H^{n-1}(X_0,\mathbb{Z})$ 在单值作用 ρ 下都是彼此共轭的 (最多相差一个正负号).

证明 $\mathcal{D}_X$ 的不可约性蕴含 $\mathcal{D}_X^0$ 的道路连通性. 任取 $y_1\in\mathcal{D}_X^0$ 及从 y 到 y_1 的连接道路 l. 同样地, 取横截圆盘 $D_{y_1}-\{y_1\}$ 中一点 y_1'. 我们可以将 l 提升为从 y' 到 y_1' 的道路 l'. 显见 ϕ 在 l 上诱导的平凡化将零化闭链 $\delta_y\in H^{n-1}(X_{y'},\mathbb{Z})$ 变为 $\delta_{y_1}\in H^{n-1}(X_{y_1'},\mathbb{Z})$. 设 α 是从 0 到 y' 的道路, β 是从 0 到 y_1' 的道路. 我们得到以 0 为基点的环路 $\gamma=\beta^{-1}\cdot l'\cdot\alpha$. 这就得到 $\rho(\gamma)(\delta_\alpha)=\delta_\beta$. ■

推论 6.1.3 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 是 X 的超平面截口对应的 Lefschetz 线束, $p_1,\cdots,p_M$ 是临界点, $0\in\mathbb{P}^1$ 是正则点. 那么该线束的所有零化闭链 $\delta_i\in H^{n-1}(X_0,\mathbb{Z})$ 在单值表示

$$\rho:\pi_1(\mathbb{P}^1-\{p_1,\cdots,p_M\})\longrightarrow \mathrm{Aut}H^{n-1}(X_0,\mathbb{Z})$$

的作用下是彼此共轭的.

证明 结合 Zariski 定理与命题 6.1.4 立得结论. ∎

$\phi:\mathcal{X}_U\to U$ 可以扩展成 U 上纤维化之间的包含映射 $J:\mathcal{X}_U\to U\times X$. 这就诱导了局部系之间的态射

$$J_*:R^{n-1}\phi_*\mathbb{Q}\longrightarrow R^{n+1}\mathrm{pr}_{1*}\mathbb{Q}.$$

限制在茎上就是 $j_*:H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})\to H^{n+1}(X,\mathbb{Q})$, 这里 $j:X_0\to X$ 是包含映射. 回顾零化上同调

$$H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}=\mathrm{Ker}(j_*:H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})\to H^{n+1}(X,\mathbb{Q})).$$

回顾单值表示 (6-2), 通过庞加莱对偶, 我们可以看到 $H^(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$ 在单值作用 ρ 下是稳定子空间. 进一步, 我们将要证明 ρ 限制在该稳定子空间上是不可约表示, 即 $H^(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$ 中不存在单值作用下的非平凡稳定真子空间.

定理 6.1.3 单值表示

$$\rho:\pi_1(U,0)\to\mathrm{Aut}H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$$

是不可约的.

证明 我们采用推论 6.1.3 的记号与假设. 由 Zariski 定理, 我们只需要考虑 Lefschetz 线束 $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ 对应的单值表示

$$\pi_1(\mathbb{P}^1-\{p_1,\cdots,p_M\})\longrightarrow\mathrm{Aut}H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$$

是不可约的. 在每个临界值 p_i 的周围绕一小环路 l_i (以 t_i 为基点), 并连接从 0 到 t_i 的道路 γ_i. 考虑以 0 为基点的环路 $\tilde{\gamma}_i=\gamma_i^{-1}\cdot l_i\cdot\gamma_i$. 由 Picard-Lefschetz 公式, 我们有

$$\rho(\tilde{\gamma}_i)(\alpha)=\alpha\pm\langle\alpha,\delta_i\rangle\delta_i,\qquad\forall\alpha\in H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q}).$$

设 $F\subset H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$ 是 ρ 作用下的非平凡稳定子空间, $\alpha\in F$ 是非零元. 由引理 4.5.4, 零化上同调由该线束的诸零化闭链类 δ_i 生成. 由定理 4.5.2 可知 $H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$ 上的相交型 $\langle,\rangle$ 是非退化的. 因此存在某个零化闭链 δ_i 使得 $\langle\alpha,\delta_i\rangle\neq 0$. 由于 $\rho(\tilde{\gamma}_i)(\alpha)-\alpha\in F$, 所以这就推出 $\delta_i\in F$.

由推论 6.1.3, 所有零化闭链彼此共轭, 因此由 F 的稳定性可知, 所有零化闭链都必须落在 F 中. 再次由引理 4.5.4 可知, $F=H^{n-1}(X_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{van}}$. ∎

进一步, 由命题 6.1.1, 我们得到以下推论.

推论 6.1.4 $\phi:\mathcal{X}_U\to U$ 上的局部系 $R^{n-1}\phi_*\mathbb{Q}_{\mathrm{van}}$ 不包含任何非平凡局部子系.

6.2 Leray 谱序列

为了进一步研究局部系和单值, 我们将引进 Leray 谱序列这一有力工具. 这里罗列谱序列方面的几个重要结论.

定理 6.2.1 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴, F 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的左正合函子, 且 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象. 设 $(M^\cdot,d)$ 是 A 中对象的复形, $R^iF(M^\cdot)\in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ 是导出对象. 那么存在从 $E_2^{p,q}$ 起始的谱序列 $E_2^{p,q}\Rightarrow R^{p+q}F(M^\cdot)$ 以及 $R^{p+q}F(M^\cdot)$ 的滤过 F, 使得 $\mathrm{Gr}_F^pR^{p+q}F(M^\cdot)=E_\infty^{p,q}$, 并且 $E_2^{p,q}=R^pF(H^q(M^\cdot))$.

定理 6.2.2 (Grothendieck **谱序列**) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 有足够多内射对象. 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 和 $G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 都是左正合函子, 并且对 $\mathcal{A}$ 中任何内射对象 I, $F(I)$ 是 $\mathcal{B}$ 中的零调对象, 即 $R^nG(F(I))=0$ $(\forall n>0)$, 则对 $\mathcal{A}$ 中任意对象 M, 存在对象 $R^i(GF)(M)$ 上的典范滤过 L 以及从 $E_2^{p,q}$ 起始的谱序列 $E_2^{p,q}\Rightarrow R^{p+q}(GF)(M)$, 并且

$$E_2^{p,q}=(R^pG)(R^qF)(M),\qquad E_\infty^{p,q}=\mathrm{Gr}_L^pR^{p+q}(GF)(M).$$

由 Grothendieck 谱序列即可构造所谓的 Leray 谱序列.

定理 6.2.3 (Leray **谱序列**) 设 $\phi:X\to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射, $\mathcal{F}$ 是 X 上的层, 那么 $H^q(X,\mathcal{F})$ 上存在一个典范的滤过 L, 以及一个从 E_2 起始的谱序列 $E_2^{p,q}\Rightarrow H^{p+q}(X,\mathcal{F})$, 使得

$$E_2^{p,q}=H^p(Y,R^q\phi_*\mathcal{F}),\qquad E_\infty^{p,q}=\mathrm{Gr}_L^pH^{p+q}(X,\mathcal{F}).$$

该谱序列称作 Leray 谱序列, L 称作 Leray 滤过.

例 6.2.1 这里考虑微分流形正常浸没映射 $\phi:X\to Y$ 以及 X 上的常层 $\mathbb{R}$. 我们具体解释这一情形的 Leray 谱序列. 首先考虑正合列

$$0\longrightarrow\phi^*\Omega_{Y,\mathbb{R}}\longrightarrow\Omega_{X,\mathbb{R}}\longrightarrow\Omega_{X/Y,\mathbb{R}}\longrightarrow 0.$$

我们定义 $\Omega_{X,\mathbb{R}}^q$ 的滤过及分次部分

$$L^p\Omega_{X,\mathbb{R}}^q=\phi^*\Omega_{Y,\mathbb{R}}^p\wedge\Omega_{X,\mathbb{R}}^{q-p},\tag{6-3}$$

$$\mathrm{Gr}_L^p\Omega_{X,\mathbb{R}}^q=\phi^*\Omega_{Y,\mathbb{R}}^p\otimes\Omega_{X/Y,\mathbb{R}}^{q-p}.\tag{6-4}$$

这就得到 q 次截面空间 $A^q(X)$ 上的滤过. 对任意 $\alpha\in L^pA^q(A)$, 易知 $d\alpha\in L^pA^{q+1}(X)$. 这样, 复形 $(A^\cdot(X),d)$ 被 L 滤化, 因而得到谱序列 (参见定理 1.5.1)

$$E_2^{p,q}\Rightarrow H^{p+q}(A^\cdot(X),d)=H^{p+q}(X,\mathbb{R}).$$

可以证明该谱序列就是 X 上常层 $\mathbb{R}$ 关于 ϕ 的 Leray 谱序列 (证明并不容易). ■

Leray 谱序列与上同调的杯积映射有如下关系.

命题 6.2.1 设 $\alpha\in H^k(X,\mathbb{Z})$, 则

(1) 杯积映射 $\alpha\cup:H^*(X,\mathbb{Z})\to H^{*+k}(X,\mathbb{Z})$ 可诱导态射

$$\alpha\cup:R^l\phi_*\mathbb{Z}\longrightarrow R^{l+k}\phi_*\mathbb{Z}.$$

(2) $\alpha\cup$ 诱导复形态射

$$\alpha_r\cup : (E_r^{p,q}, d_r) \longrightarrow (E_r^{p,q+k}, d_r).$$

(3) $\alpha\cup : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^{*+k}(X,\mathbb{Z})$ 与 Leray 滤过相容.

(4) 在 $H^{p+q}(X,\mathbb{Z})$ 的 Leray 滤过的分次部分 $E_\infty^{p,q}$ 上, 杯积映射 $\alpha\cup$ 就是 $\alpha_\infty\cup$.

注 6.2.1 上述命题中 (2)(3)(4) 有时也被统一说成: $\alpha\cup$ 诱导了 ϕ 的 Leray 谱序列的 k 次满同态. ■

设 $\phi : X \to Y$ 是复流形间的正常浸没. 进一步, 我们假设它是射影的, 即存在全纯嵌入 $i : X \to Y \times \mathbb{P}^N$, 使得 $\phi = \mathrm{pr}_1 \circ i$. 选取除子类

$$\omega = (\mathrm{pr}_2 \circ i)^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \in H^2(X,\mathbb{Z}).$$

对 ϕ 的纤维 X_t, 考虑限制类 $\omega_t := \omega|_{X_t} \in H^2(X_t,\mathbb{Z})$. 它是 Kähler 类, 诱导 Lefschetz 算子

$$\omega_t\cup : H^k(X_t,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{k+2}(X_t,\mathbb{Q}).$$

进一步诱导了局部系态射 (称作相对 Lefschetz 算子)

$$L := \omega\cup : R^*\phi_*\mathbb{Q} \longrightarrow R^{*+2}\phi_*\mathbb{Q},$$

其茎态射 L_t 就是 $\omega_t\cup$. X_t 上的强 Lefschetz 定理与 Lefschetz 分解定理可以推广为相对 Lefschetz 同构

$$L^{n-k} : R^k\phi_*\mathbb{Q} \cong R^{2n-k}\phi_*\mathbb{Q}$$

与相对 Lefschetz 分解

$$R^k\phi_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{2r\le k} L^r R^{k-2r}\phi_*\mathbb{Q}_{\mathrm{prim}}, \qquad k \le n.$$

由命题 6.2.1, L^k 诱导了 ϕ 的 Leray 谱序列的 $2k$ 次满同态 (见注记 6.2.1). 特别地, 当 $k \le n$, 复形 $(E_2^{p,q}, d_2)$ 上的诱导态射

$$L_2^{n-k} : H^l(Y, R^k\phi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow H^l(Y, R^{2n-k}\phi_*\mathbb{Q}) \tag{6-5}$$

是同构.

定理 6.2.4 (Deligne 退化定理) 设 $\phi : X \to Y$ 是浸没射影态射, 则 ϕ 的有理系数 Leray 谱序列在 E_2 处退化.

证明 我们首先证明 $d_2 = 0$. 当 $q \ge n$ 时, 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
E_2^{p,2n-q} \arrow[r, equal] & H^p(Y, R^{2n-q}\phi_*\mathbb{Q}) \arrow[r, "L_2^{q-n}"] \arrow[d, "d_2"] & H^p(Y, R^q\phi_*\mathbb{Q}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_2"] & E_2^{p,q} \\
E_2^{p+2,2n-q-1} \arrow[r, equal] & H^{p+2}(Y, R^{2n-q-1}\phi_*\mathbb{Q}) \arrow[r, "L_2^{q-n}"] & H^{p+2}(Y, R^{q-1}\phi_*\mathbb{Q}) \arrow[r, equal] & E_2^{p+2,q-1}
\end{tikzcd}$$

这样, 问题就归结为 $q \le n$ 的情形. 由相对 Lefschetz 分解,

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{2r\le q} L_2^r H^p(Y, R^{q-2r}\phi_*\mathbb{Q}_{\mathrm{prim}}).$$

另外注意到 L_2^r 与 d_2 可交换, 因此我们只需要证明在 $H^p(Y, R^{q-2r}\phi_*\mathbb{Q}_{\text{prim}}) \subset E_2^{p,q-2r}$ 上有 $d_2 = 0$. 令 $k = q - 2r$, 我们有交换图

$$\begin{array}{lccc} L_2^{n-k+1}: & H^p(Y, R^k\phi_*\mathbb{Q}_{\text{prim}}) & \longrightarrow & H^p(Y, R^{2n-k+2}\phi_*\mathbb{Q}) \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle d_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_2} \\ L_2^{n-k+1}: & H^{p+2}(Y, R^{k-1}\phi_*\mathbb{Q}_{\text{prim}}) & \longrightarrow & H^{p+2}(Y, R^{2n-k+1}\phi_*\mathbb{Q}) \end{array}$$

由本原上同调的定义, 上图第一行是零映射. 由同构 (6-5), 上图第二行是单射. 这就推出 $d_2 = 0$.

对于 d_r $(r \geq 2)$, 我们施归纳法. 如果 $d_s = 0$ $(2 \leq s < r)$, 那么 $E_r^{p,q} = E_2^{p,q}$. 将 Lefschetz 分解应用于 $E_r^{p,q}$, 并考虑谱序列态射 L_r^k, 完全类似前面的讨论即可得结论. ■

设 $\phi : X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射, $\mathcal{F}$ 是 X 上的层. 对开集 $U \subset Y$, 显然有限制映射 $H^k(X, \mathcal{F}) \to H^k(X_U, \mathcal{F}|_{X_U})$. 这就诱导了自然态射

$$H^k(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, R^k\phi_*\mathcal{F}). \tag{6-6}$$

这一映射也能用 $(\mathcal{F}, \phi)$ 的 Leray 谱序列来构造. 事实上, $E_\infty^{0,k}$ 是 $H^k(X, \mathcal{F})$ 在 Leray 滤过下的第一个商, 因而有以下复合映射

$$H^k(X, \mathcal{F}) \longrightarrow E_\infty^{0,k} \subset E_2^{0,k} = \Gamma(Y, R^k\phi_*\mathcal{F}).$$

作为一个重要的应用, 我们有以下结论.

命题 6.2.2 设 $\phi : X \to Y$ 是复流形的浸没射影映射, $y \in Y$, $X_y = \phi^{-1}(y)$. 设 $H^k(X_y, \mathbb{Q})^{\text{inv}}$ 是上同调 $H^k(X_y, \mathbb{Q})$ 中单值作用下不变元构成的子空间. 那么以下限制映射是满射

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X_y, \mathbb{Q})^{\text{inv}}.$$

证明 由 Deligne 退化定理, Leray 谱序列满足 $E_\infty^{0,k} = E_2^{0,k}$, 故得满射

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow \Gamma(Y, R^k\phi_*\mathbb{Q}).$$

又由推论 6.1.1, 即得结论. ■

定理 6.2.5 (Deligne **不变闭链定理**) 设 $\phi : X \to Y$ 是光滑射影簇间的正常支配态射, $U \subset Y$ 是一个 Zariski 开集, 使得 ϕ=0 在其上是浸没. 设 $t \in U$, $X_t = \phi^{-1}(t)$, 那么限制映射

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X_t, \mathbb{Q})$$

的像恰是在单值作用 $\pi_1(U, t) \to \text{Aut}H^k(X_t, \mathbb{Q})$ 下不变的上同调 $H^k(X_t, \mathbb{Q})^{\text{inv}}$.

证明 设 $X_U = \phi^{-1}(U) \subset X$. 由命题 6.2.2,

$$H^k(X_U, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(X_t, \mathbb{Q})$$

的像是 $H^k(X_t, \mathbb{Q})^{\text{inv}}$. 注意到 $X_t \subset X_U \subset X$, 故由推论 5.1.3 即得结论. ■

推论 6.2.1 设 $\phi : X \to Y$ 是光滑拟射影簇间的浸没射影态射, $y \in Y$, 那么 $H^k(X_y, \mathbb{Q})^{\text{inv}}$ 是 $H^k(X_y, \mathbb{Q})$ 的有理 Hodge 子结构.

我们还可以讨论全纯的 Leray 谱序列, 并且利用横截性进一步引入一类重要的复形, 然后我们将用它们定义某类 Dolbeault 上同调类的第一无限小变分.

设 Y 是微分流形 (相应地, 复流形), H 是 Y 上的 $\mathbb{R}$ (相应地, $\mathbb{C}$) 向量空间局部系. 考虑 $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-模 (相应地, $\mathcal{O}_Y$-模) 局部自由层 $\mathcal{H}=H\otimes\underline{\mathcal{C}}^\infty$ (相应地, $\mathcal{H}=H\otimes\mathcal{O}_Y$). $\mathcal{H}$ 带有 Gauss-Manin 联络 $\nabla:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}_Y^1$ (相应地, $\nabla:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\otimes\Omega_Y$). ∇ 可以扩张为

$$\nabla:\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}_Y^k\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}_Y^{k+1},\qquad \sigma\otimes\alpha\to\nabla(\sigma\otimes\alpha)=\sigma\otimes d\alpha+\nabla\sigma\wedge\alpha$$

(相应地, $\nabla:\mathcal{H}\otimes\Omega_Y^k\to\mathcal{H}\otimes\Omega_Y^{k+1}$). 这样, 我们可以构造局部系 H 的de Rham 复形 (相应地, 全纯 de Rham 复形) $\mathrm{DR}(H)$

$$0\longrightarrow\mathcal{H}\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}_Y^1\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}_Y^2\longrightarrow\cdots$$

(相应地,

$$0\longrightarrow\mathcal{H}\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}\otimes\Omega_Y^1\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}\otimes\Omega_Y^2\longrightarrow\cdots)$$

从局部平凡化上看, 上述复形相当于 Y 上 de Rham 复形的若干次直和所诱导.

命题 6.2.3 *H 的 de Rham 复形 DR(H) 是 H 的析解. 设 $A_Y^k(H)$ 是 $\mathcal{A}_Y^k(H):=\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}_Y^k$ 的整体截面空间. 我们有自然同构*

$$H^q(Y,H)=\frac{\mathrm{Ker}(\nabla:A_Y^q(H)\to A_Y^{q+1}(H))}{\mathrm{Im}(\nabla:A_Y^{q-1}(H)\to A_Y^q(H))}.$$

今考虑局部系 $H^p:=R^p\phi_*\mathbb{C}$ 的全纯 de Rham 复形 $\mathrm{DR}(H^p)$,

$$0\longrightarrow\mathcal{H}^p\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\nabla}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y^N\longrightarrow 0,\qquad N=\dim Y,$$

这里 $\mathcal{H}^p=H^p\otimes\emptyset_Y$. 由 Griffiths 横截性定理,

$$\nabla F^l\mathcal{H}^p\subset F^{l-1}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y.$$

这样, 我们可以构造上述 de Rham 复形的滤过

$$F^l\mathrm{DR}(H^p):=0\longrightarrow F^l\mathcal{H}^p\xrightarrow{\nabla}F^{l-1}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\nabla}F^{l-N}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y^N\longrightarrow 0.$$

进一步可定义 $\mathrm{DR}(H^p)$ 的分次复形 $\mathcal{K}_{l,p-l}^k := F^l\mathrm{DR}(H^p)/F^{l+1}\mathrm{DR}(H^p)$. 回顾映射 $\overline{\nabla}$ 及 $\mathcal{H}^{l,p-l}:=F^l\mathcal{H}^p/F^{l+1}\mathcal{H}^p$,

$$\begin{array}{lccc}
 & 0 & & 0\\
 & \downarrow & & \downarrow\\
\nabla: & F^{l+1}\mathcal{H}^p & \longrightarrow & F^l\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y\\
 & \downarrow & & \downarrow\\
\nabla: & F^l\mathcal{H}^p & \longrightarrow & F^{l-1}\mathcal{H}^p\otimes\Omega_Y\\
 & \downarrow & & \downarrow\\
\overline{\nabla}_l: & \mathcal{H}^{l,p-l} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{l-1,p-l+1}\otimes\Omega_Y
\end{array}$$

我们有

$$\mathcal{K}_{l,p-l}^k=(F^{l-k}\mathcal{H}^p/F^{l+1-k}\mathcal{H}^p)\otimes\Omega_Y^k=\mathcal{H}^{l-k,p-l+k}\otimes\Omega_Y^k.$$

进一步还有以下结论 (留给读者验证)

引理 6.2.1 $\overline{\nabla}^k_{l-k}:\mathcal{K}^k_{l,p-l}\to\mathcal{K}^{k+1}_{l,p-l}$ 是 $\mathcal{O}_Y$ 线性态射, 即满足

$$\overline{\nabla}^k_{l-k}(\sigma\otimes\alpha)=\overline{\nabla}_{l-k}(\sigma)\wedge\alpha,$$

这里 σ 是 $\mathcal{H}^{l-k,p-l+k}$ 的截面, α 是 Ω^k_Y 的截面.

设 $\phi:X\to Y$ 是全纯浸没射影态射. 回顾 Ω^k_X 的 Leray 滤过 $L^{\cdot}\Omega^k_X$ (见式 (6-3)). Y 上的凝聚层 $R^p\phi_*\Omega^k_X$ 也配有对应的滤过

$$L^lR^p\phi_*\Omega^k_X:=\mathrm{Im}(R^p\phi_*L^l\Omega^k_X\to R^p\phi_*\Omega^k_X).$$

我们可以构造谱序列 $(E^{l,q}_r\Rightarrow R^{l+q}\phi_*\Omega^k_X)$, 其中

$$E^{l,q}_1=R^{l+q}\phi_*(\mathrm{Gr}^l_L\Omega^k_X)=\Omega^l_Y\otimes R^{l+q}\phi_*(\Omega^{k-1}_{X/Y})=\Omega^l_Y\otimes\mathcal{H}^{k-l,l+q}=\mathcal{K}^l_{k,q},$$

$d_1:E^{l,q}_1\to E^{l+1,q}_1$ 恰好是以下正合列的连接同态 (参见推论 1.5.1)

$$0\longrightarrow\mathrm{Gr}^{l+1}_L\Omega^k_X\longrightarrow L^l\Omega^k_X/L^{l+2}\Omega^k_X\longrightarrow\mathrm{Gr}^l_L\Omega^k_X\longrightarrow 0.$$

进一步, 我们有 (证略)

命题 6.2.4 对固定的 q, 复形 $(E^{l,q}_1,d_1)$ 可以视作复形 $(\mathcal{K}^l_{k,q},\overline{\nabla})$.

应用上述结论, 我们可以定义整体空间上 Dolbeault 上同调类的无限小不变量. 首先考虑复合映射

$$\psi:H^p(X,\Omega^k_X)\longrightarrow H^0(Y,R^p\phi_*\Omega^k_X)\longrightarrow H^0(Y,R^p\phi_*\Omega^k_{X/Y}),$$

其中第一部分映射来自于式 (6-6), 第二部分映射来自于由正合列

$$0\longrightarrow L^1\Omega^k_X\longrightarrow\Omega^k_X\longrightarrow\Omega^k_{X/Y}\longrightarrow 0$$

所诱导的长正合列

$$\cdots\longrightarrow R^p\phi_*L^1\Omega^k_X\longrightarrow R^p\phi_*\Omega^k_X\longrightarrow R^p\phi_*\Omega^k_{X/Y}\longrightarrow\cdots. \tag{6-7}$$

由式 (6-7) 的正合性及 $R^p\phi_*\Omega^k_X$ 上的滤过 $L^{\cdot}$ 定义, 我们有

$$L^1R^p\phi_*\Omega^k_X=\mathrm{Im}(R^p\phi_*L^1\Omega^k_X\to R^p\phi_*\Omega^k_X)=\mathrm{Ker}(R^p\phi_*\Omega^k_X\to R^p\phi_*\Omega^k_{X/Y}). \tag{6-8}$$

另一方面, 由谱序列可知,

$$\begin{aligned}E^{p,q}_\infty&=L^1R^p\phi_*\Omega^k_X/L^2R^p\phi_*\Omega^k_X,\\ E^{1,p-1}_2&=\mathrm{Ker}(d_1:E^{1,p-1}_1\to E^{2,p-1}_1)/\mathrm{Im}(d_1:E^{0,p-1}_1\to E^{1,p-1}).\end{aligned}$$

注意到不存在非零 d_r $(r>1)$ 映入 $E^{1,p-1}_r$ (因为第一个上标是 1), 因而 $E^{1,p-1}_\infty\subset E^{1,p-1}_2$. 这样, 由命题 6.2.4 即得自然的包含映射

$$g:L^1R^p\phi_*\Omega^k_X/L^2R^p\phi_*\Omega^k_X\hookrightarrow\frac{\mathrm{Ker}\left(\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k-1,p}\otimes\Omega_Y\to\mathcal{H}^{k-2,p+1}\otimes\Omega^2_Y\right)}{\mathrm{Im}\left(\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k,p-1}\to\mathcal{H}^{k-1,p}\otimes\Omega_Y\right)}=H^1(\mathcal{K}^{\cdot}_{k,p-1}).$$

今考虑类

$$\alpha\in\mathrm{Ker}(\psi:H^p(X,\Omega^k_X)\to H^0(Y,R^p\phi_*\Omega^k_{X/Y})).$$

由式 (6-8), α 在 $H^0(Y,R^p\phi_*\Omega^k_{X/Y})$ 中的像落在 $H^0(Y,L^1R^p\phi_*\Omega^k_X)$ 中, 因而可以考虑 α 在 $H^0(Y,L^1R^p\phi_*\Omega^k_X/L^2R^p\phi_*\Omega^k_X)$ 中的像. 这样, α 通过映射 g 对应上同调层 $H^1(\mathcal{K}^{\cdot}_{k,p-1})$ 的截面

空间中的某个元, 记作 $\delta\alpha$, 称为 α 的第一无限小不变量 (The first infinitesimal invariant).

6.3 超曲面的无限小变分

设 X 是 n 维射影簇, $Y\subset X$ 是光滑超曲面, 记 $\Omega_X^j(kY):=\Omega_X^j\otimes\mathcal{O}_X(Y)^{\otimes k}$. 这一节中, 如无特别声明, 我们总假设 Y 满足以下条件

$$H^i(X,\Omega_X^j(kY))=0,\qquad \forall k>0,\ i>0,\ j\geq 0.$$

任何 $\eta\in H^0(X,K_X(pY))$ 都可以视作 X 上 n 次半纯闭形式, 在 U 上全纯, 且沿着 Y 有一个阶数不超过 p 的极点. 更一般的, 我们可以考虑层 $\Omega_X^{k,c}(pY)$, 它由那些在 U 上全纯, 且沿着 Y 上有一个阶数不超过 p 的极点的 k 次半纯闭形式构成. 显然 $K_X(pY)=\Omega_X^{n,c}(pY)$, $\Omega_X^{k,c}(\log Y)=\Omega_X^{1,c}(pY)$. 我们首先对这类半纯形式作局部考察.

引理 6.3.1 设 α 是开邻域 $V\subset X$ 上的 k 次半纯闭形式, 在 $V\cap Y$ 之外全纯, 且沿着 $V\cap Y$ 有一个 l 阶极点.
(1) 如果 $l\geq 2$, 那么 α 可写成 $\alpha=d\beta+\gamma$, 此处 β,γ 是半纯的, 在 $V\cap Y$ 之外全纯, 且沿着 $V\cap Y$ 有一个阶数不超过 $l-1$ 的极点.
(2) 若 $l=1$, 那么 α 是对数形式.

证明 (2) 由对数极点定义即得. 今证 (1). 假设 Y 的局部方程 $z_1=0$. 我们将 α 写为

$$\alpha=\frac{dz_1\wedge\alpha}{z_1^l}+\frac{\alpha''}{z_1^l},$$

其中 α',α'' 是全纯的, 且不含 dz_1. 注意 $d\alpha=0$, 由极点阶数的考察可知, α'' 必须沿着 $z_1=0$ 恒为零, 因此 $\frac{\alpha''}{z_1^l}$ 沿着 Y 的极点阶数最多是 $l-1$. 今取 $\beta=\frac{\alpha'}{(1-l)z_1^{l-1}}$. 由此即得结论. ■

推论 6.3.1 在上述引理条件下, 如果 α 的次数 $k\geq 2$, 那么局部上可写为 $\alpha=d\beta$, 这里 是半纯的, 在 $V\cap Y$ 之外全纯, 且沿着 $V\cap Y$ 有一个阶数不超过 $l-1$ 的极点. 特别地, 当 $l\geq 2$, $k\geq 2$ 时, 我们有正合列

$$0\longrightarrow\Omega_X^{k-1,c}((l-1)Y)\longrightarrow\Omega_X^{k-1}((l-1)Y)\xrightarrow{d}\Omega_X^{k,c}(lY)\longrightarrow 0. \tag{6-9}$$

证明 由引理 6.3.1, 我们可以对 l 施归纳法, 最终证明 α 可写为 $\alpha=d\beta+\alpha'$, 这里 β 是 $k-1$ 次半纯闭形式, 沿着 Y 有一个阶数不超过 $l-1$ 的极点; α' 沿着 Y 有对数极点. 由注记 5.2.2, 我们已知 $\alpha'=d\gamma$, 此处 γ 沿着 Y 有对数极点. ■

推论 6.3.2 设 $2\leq i\leq p\leq n$, 则

$$H^{i-2}(X,\Omega_X^{n-i+2,c}((p-i)Y))\longrightarrow H^{i-1}(X,\Omega_X^{n-i+1,c}((p-i)Y))$$

是满射. 特别地, $H^0(X,K_X(pY))\to H^{p-1}(X,\Omega_X^{n-p+1,c}(\log Y))$ 是满射.

证明 由式 (6-9) 诱导张正合列, 并考虑连接同态即得结论. ■

定理 6.3.1 (Griffiths **定理**) 设 $1\leq p\leq n$ 自然态射

$$H^0(X,K_X(pY))\longrightarrow H^n(U,\mathbb{C})$$

将任一在 U 上全纯且沿着 Y 有一个阶数为 p 的极点的 n 次半纯形式映入 $F^{n-p+1}H^n(U,\mathbb{C})$ 中.

换言之, 对任何截面 $\eta \in H^0(X, K_X(pY))$, 留数 $\mathrm{Res}\eta/f^p$ 生成了 $F^{n-p}H^{n-1}(Y)_{\mathrm{van}}$, 此处 f 是 Y 的局部方程.

证明 命题后半部分只是引理 5.2.4 的推论. 今证前半部分. 由推论 6.3.2, 我们只需证明

$$H^{p-1}(X, \Omega_X^{n-p+1,c}(\log Y)) = F^{n-p+1}H^n(U,\mathbb{C}).$$

此时对数 de Rham 复形从在次数 ≥ 2 的项上都是正合的, 因此滤过复形

$$F^k\Omega_X^{\cdot}(\log Y) := 0 \longrightarrow \Omega_X^k(\log Y) \longrightarrow \Omega_X^{k+1}(\log Y) \longrightarrow \cdots$$

实际上是 $\Omega_X^{k,c}(\log Y)$ 的析解, 从而由抽象 de Rham 定理有

$$H^{p-1}(X, \Omega_X^{n-p+1,c}(\log Y)) = \mathbb{H}^n(F^{n-p+1}\Omega_X^{\cdot}(\log Y)).$$

另一方面, 由定义知

$$F^{n-p+1}H^n(U,\mathbb{C})) = \mathrm{Im}(\mathbb{H}^n(F^{n-p+1}\Omega_X^{\cdot}(\log Y)) \to \mathbb{H}^n(\Omega_X^{\cdot}(\log Y))).$$

请注意上述右边映射是单射, 这是因为由 Deligne 定理, 此时 Frölicher 谱序列在 E_1 处退化. ■

现在我们将以上的讨论应用于 $X = \mathbb{P}^n$ 的情形. 设 Y 是 d 次光滑超曲面, $f = 0$ 是定义方程, $[X_0, \cdots, X_n]$ 是齐次坐标. 我们已知 $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$, 因此可以选取 $H^0(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n}(n+1))$ 的生成元

$$\Omega = X_0 \cdots X_n \sum_i (-1)^i \frac{dX_0}{X_0} \wedge \cdots \frac{\widehat{dX_i}}{X_i} \wedge \cdots \frac{dX_n}{X_n}.$$

由推论 2.2.7 可知 $H^n(\mathbb{P}^n,\mathbb{C})_{\mathrm{prim}} = 0$. 由定理 6.3.1 及引理 5.2.4, 我们有满射

$$\alpha_p : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(pd-n-1)) \longrightarrow F^{n-p+1}H^n(U,\mathbb{C}) \cong F^{n-p}H^{n-1}(Y,\mathbb{C})_{\mathrm{van}}, \qquad P \to \mathrm{Res}\frac{P\Omega}{f^p}.$$

注意到

$$F^{n-p}H^{n-1}(Y,\mathbb{C})_{\mathrm{van}}/F^{n-p+1}H^{n-1}(Y,\mathbb{C})_{\mathrm{van}} = H^{n-p,n-1}(Y)_{\mathrm{van}},$$

我们也可以定义诱导态射

$$\bar{\alpha}_p : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(pd-n-1)) \longrightarrow F^{n-p}H^{n-1}(Y,\mathbb{C})_{\mathrm{van}} \longrightarrow H^{n-p,n-1}(Y)_{\mathrm{van}}.$$

考虑齐次多项式环,

$$S = \bigoplus_l S^l, \qquad S^l = \mathrm{Sym}^l S^1 = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)).$$

我们定义 f 的 Jacobi 理想 $J_f = \oplus_l J_f^l$, 它是由诸导数 $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ $(i = 0, \cdots, n)$ 生成. 设 $R_f^l := S^l/J_f^l$, 它是 Jacobi 环 $R_f = S/J_f$ 的第 l 个分支.

定理 6.3.2 (Griffiths **定理**) $\mathrm{Ker}\bar{\alpha}_p = J_f^{pd-n-1}$. 特别地, 我们有自然同构.

$$R_f^{pd-n-1} \cong H^{n-p,p-1}(Y)_{\mathrm{van}}.$$

(证略)

Griffiths 定理的一个重要应用是刻画超曲面的 Hodge 结构的无限小变分. 今设 X 是 n 维射影簇, $Y\subset X$ 是满足本节开头假设条件的光滑超曲面. 我们考虑空间 $H^0(X,\mathcal{O}_X(Y))$ 中的一个 Zariski 开集 B, 它是由所有与 Y 线性等价的光滑超曲面组成. 有时我们也可将 B 中的元素用多项式 f 来表示. 这样我们显然可以得到一个光滑超曲面族

$$\pi:\mathcal{Y}\to B.$$

对每个 $f\in B$, 我们考虑 $H^{n-1}(Y,\mathbb{C})_{\mathrm{van}}$ 的 Hodge 结构的无限小变分

$$\overline{\nabla}_{l,f}:H^{l,n-1-l}(Y)_{\mathrm{van}}\longrightarrow \mathrm{Hom}(T_{B,f},H^{l-1,n-l}(Y)_{\mathrm{van}}),$$

这里切空间 $T_{B,f}=H^0(X,\mathcal{O}_X(Y))$. 另一方面, 定理 6.3.1 表明

$$\bar{\alpha}_p:H^0(X,K_X(pY))\to H^{n-p,p-1}(Y)_{\mathrm{van}}.$$

下面的结果将两者联系了起来.

定理 6.3.3 (Carlson-Griffths **定理**) 设 $P\in H^0(X,K_X(pY))$, $H\in T_{B,f}$. 考虑无限小变分

$$\overline{\nabla}_{n-p,f}:H^{n-p,p-1}(Y)_{\mathrm{van}}\longrightarrow \mathrm{Hom}(T_{B,f},H^{n-p-1,p}).$$

我们有

$$\overline{\nabla}_{n-p,f}(\bar{\alpha}_p(P))(H)=-p\bar{\alpha}_{p+1}(PH).$$

换言之, 以下图交换

$$\begin{array}{lccc} & H^0(X,K_X(pY)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H^0(X,\mathcal{O}_X(Y)),H^0(X,K_X((p+1)Y))) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\nabla}: & H^{n-p,p-1}(Y)_{\mathrm{van}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(T_{B,f},H^{n-p-1,p}(Y)_{\mathrm{van}}) \end{array}$$

图中第一行映射相当于给出乘积, 两竖行映射由 $\bar{\alpha}_p,\bar{\alpha}_{p+1}$ 给出.

证明 考虑开集族

$$\pi_U:\mathcal{U}\to B,\qquad \mathcal{U}=X\times B-\mathcal{Y}$$

及平坦丛 $\mathcal{H}_U^n=(R^n\pi_U)_*\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{van}}^{n-1}=R^{n-1}\pi_*\mathbb{Z}_{\mathrm{van}}$. 由引理 5.2.4, 有局部系的满态射

$$\mathrm{Res}:\mathcal{H}_U^n\longrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{van}}^{n-1}.$$

为方便讨论, 我们用 ∇_U,∇ 分别表示 $\mathcal{H}_U^n,\mathcal{H}_{\mathrm{van}}^{n-1}$ 上的 Gasuss-Manin 联络. 上述态射与 Gasuss-Manin 联络可交换.

给定 $P\in H^0(X,K_X(pY))$. 对任何 $g\in B$, $\frac{P}{g}$ 可以看成 n 次半纯闭形式, 它沿着 Y 有一个 p 阶极点. 这样, 我们可构造 $\mathcal{H}_{\mathrm{van}}^{n-1}$ 的一个截面

$$g\to \mathrm{Res}_{Y_g}\left[\frac{P}{g^p}\right],$$

此处方括号表示 de Rham 上同调类. 由定理 6.3.1, 它也是 $F^{n-p}\mathcal{H}_{\mathrm{van}}^{n-1}$ 的截面, 它限制在 f 上就是 $\bar{\alpha}_p(P)$. 这样,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_f(\bar{\alpha}_p(P))(H)&=\nabla\left(\mathrm{Res}_{Y_g}\left[\frac{P}{g^p}\right]\right)\quad \mathrm{mod}\ F^{n-p}H^{n-1}(Y)_{\mathrm{van}}\\&=\mathrm{Res}_Y\nabla_{U,H}\left(\left[\frac{P}{g^p}\right]\right)\quad \mathrm{mod}\ F^{n-p}H^{n-1}(Y)_{\mathrm{van}}.\end{aligned}$$

另一方面,
$$\mathrm{Res}_Y\left[d_H\frac{P}{g^p}\right]=\mathrm{Res}_Y\left[\frac{-pPH}{f^{p+1}}\right]\quad \mathrm{mod}\ F^{n-p}H^{n-1}(Y)_{\mathrm{van}}.$$
这样, 我们只要证明以下等式
$$\mathrm{Res}_Y\nabla_{U,H}\left(\left[\frac{P}{g^p}\right]\right)=\mathrm{Res}_Y\left[d_H\frac{P}{g^p}\right]\quad \mathrm{mod}\ F^{n-p}H^{n-1}(Y)_{\mathrm{van}}.$$

我们可以证明更一般的结论: 设 $\omega=(\omega_g)_{g\in B}$ 是一族 X 上奇异微分闭形式, ω_g 在 U_g 上是 $\mathcal{C}^\infty$ 的, 并且关于 g 是全纯变化的. 它对应 $\mathcal{H}_U^n$ 上的全纯截面 σ, 即 $\sigma_g=[\omega_g]$. 那么
$$\nabla_{U,H}\sigma=[d_H\omega].$$

由于这是局部问题, 不妨假设 B 是 f 的小邻域. 找 Y 的一个管状邻域 T, 使得 T 可以形变收缩成 Y_g, $\forall g\in B$. 这样. $X-T$ 同伦于 $U_g=X-Y_g$. 进一步, 由局部平坦性, 我们不妨将 π_U 替换为 $\pi_U:(X-T)\times B\to B$. 在此情形下, 显然有
$$d_H([\omega_g])=[d_H\omega_g].$$
这就证明了结论. ■

6.4 正规函数

在第 4.3 节中, 我们对权 $2k-1$ 的整 Hodge 结构 $(H_{\mathbb{Z}}^{2k-1},F^{\cdot}H_{\mathbb{C}}^{2k-1})$ 引入了中间 Jacobi 簇
$$J^{2k-1}=\frac{H_{\mathbb{C}}^{2k-1}}{F^kH_{\mathbb{C}}^{2k-1}\oplus H_{\mathbb{Z}}^{2k-1}}.$$
这一概念也可以推广到复流形 Y 上的权 $2k-1$ 整 Hodge 结构变分 $(H_{\mathbb{Z}}^{2k-1},F^{\cdot}\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{2k-1})$. 考虑全纯向量丛 $\mathcal{E}=\mathcal{H}^{2k-1}/F^k\mathcal{H}^{2k-1}$ 及包含态射 $H_{\mathbb{Z}}^{2k-1}\to\mathcal{E}$. 这一态射的商记作 $\mathcal{J}$. 进一步, 考虑 Jacobi 簇纤维化 $J\to Y$, 其茎为
$$J_y=J_y^{2k-1}=\mathcal{E}_y/H_{\mathbb{Z},y}^{2k-1}.$$
它带有自然的复结构, 其全纯截面构成的层恰好就是 $\mathcal{J}$.

设 $\nu\in\mathcal{J}$ 是 $J\to Y$ 的全纯截面. 由 $\mathcal{J}$ 的定义, ν 可以局部提升为 $\mathcal{H}^{2k-1}$ 上的全纯截面 $\tilde{\nu}$. 显然这一提升最多相差一个截面形式 $\eta_F+\eta_{\mathbb{Z}}$, 这里 η_F 是 $F^k\mathcal{H}^{2k-1}$ 的截面, $\eta_{\mathbb{Z}}$ 是 $H_{\mathbb{Z}}^{2k-1}$ 的截面. 注意到 $\nabla H_{\mathbb{Z}}^{2k-1}=0$ 及 $\nabla F^k\mathcal{H}^{2k-1}\subset F^{k-1}\mathcal{H}^{2k-1}\otimes\Omega_Y$, 所以
$$\nabla\tilde{\nu}\in\mathcal{H}^{2k-1}\otimes\Omega_Y$$
在模掉 $F^{k-1}\mathcal{H}^{2k-1}\otimes\Omega_Y$ 后是唯一确定的. 如果 $\nabla\tilde{\nu}\in F^{k-1}\mathcal{H}^{2k-1}\otimes\Omega_Y$, 我们就称 ν 为水平的 (Horizontal). $J\to Y$ 的全纯水平截面称作*正规函数* (Normal function)

设 $\nu\in\mathcal{J}$ 是正规函数. 我们考虑 $\nabla\tilde{\nu}$ 的投影
$$\overline{\nabla\tilde{\nu}}\in(F^{k-1}\mathcal{H}^{2k-1}/F^k\mathcal{H}^{2k-1})\otimes\Omega_Y=\mathcal{H}^{k-1,k}\otimes\Omega_Y.$$

引理 6.4.1 *$\overline{\nabla\tilde{\nu}}$ 在由复形 $\mathcal{K}^{\cdot}_{k,k-1}$ 诱导的态射*
$$\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k-1,k}\otimes\Omega_Y\longrightarrow\mathcal{H}^{k-2,k+1}\otimes\Omega_Y^2.$$

下的像为零. 进一步, $\overline{\nabla\tilde{\nu}}$ 在模掉

$$\mathrm{Im}\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k,k-1}\longrightarrow\mathcal{H}^{k-1,k}\otimes\Omega_Y$$

后, 不依赖提升的选取, 而只和 ν 有关.

证明 第一部分直接来自于 $\overline{\nabla}(\overline{\nabla\tilde{\nu}})=\nabla\circ\nabla\tilde{\nu}=0$.

今设 $\tilde{\nu}=\tilde{\nu}+\eta_F+\eta_{\mathbb{Z}}$, 这里 η_F 是 $F^k\mathcal{H}^{2k-1}$ 的截面, $\eta_{\mathbb{Z}}$ 是 $H_{\mathbb{Z}}^{2k-1}$ 的截面. 因为 $\nabla\eta_{\mathbb{Z}}=0$, 所以 $\nabla\tilde{\nu}'=\nabla\tilde{\nu}+\nabla\eta_F$. 设 $\bar{\eta}$ 是 η_F 在 $\mathcal{H}^{k,k-1}$ 中的投影. 于是

$$\overline{\nabla}(\bar{\eta})=\nabla\eta_F\mod F^k\mathcal{H}^{2k-1}\otimes\Omega_Y,$$

因而 $\overline{\nabla\tilde{\nu}'}-\overline{\nabla\tilde{\nu}}=\overline{\nabla}(\bar{\eta})$. 这就证明了结论. ■

上述引理也可以如下叙述:

$$\overline{\nabla\tilde{\nu}}\in H^1(\mathcal{K}^{\cdot}_{k,k-1})=\frac{\mathrm{Ker}(\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k-1,k}\otimes\Omega_Y\to\mathcal{H}^{k-2,k+1}\otimes\Omega_Y^2)}{\mathrm{Im}(\overline{\nabla}:\mathcal{H}^{k,k-1}\to\mathcal{H}^{k-1,k}\otimes\Omega_Y)}$$

只依赖于 ν 本身. 因此我们将上述 $\overline{\nabla\tilde{\nu}}$ 的类称为 ν 的无限小不变量, 记作 $\delta\nu$. 限制在 $y\in Y$ 上, 也可以定义 $\delta\nu_y$ 为 $\overline{\nabla\tilde{\nu}_y}\in\mathcal{H}_y^{k-1,k}\otimes\Omega_{Y,y}$ 的类.

细心的读者将会发现, 除了正规函数的无穷小不变量之外, 我们在第 6.2 节也曾定义过一类对象的无限小不变量. 两者之间的关系是什么? 下面我们讨论一类重要情形, 来回答这个问题.

设 $\pi:X\to Y$ 是相对维数 n 全纯射影纤维化, $J^{2k-1}\to Y$ 是 Jacobi 簇纤维化, $\mathcal{J}$ 是对应的层, 每点 $y\in Y$ 对应纤维 $J^{2k-1}(X_y)$. 设 $Z=\sum_i n_iZ_i\subset X$ 是余维数 k 的相对闭链, 其中 Z_i 不可约既约, 且在 Y 上平坦. 对每点 $y\in Y$, 定义 $Z_y:=\sum_i n_iZ_{i,y}$, $Z_{i,y}=Z_i\cap X_y$. 我们假设 $Z_{i,y}$ 是同调于 0. 在第 4.3 节中, 我们定义了 Abel-Jacobi 映射不变量

$$\Phi_{X_y}^k(Z_y)\in J^{2k-1}(X_y),\qquad y\in Y.$$

闭链族 $(Z_y)_{y\in Y}$ 给出了 Jacobi 簇纤维中的截面 $\nu_Z(y)=\Phi_{X_y}(Z_y)$.

定理 6.4.1 (Griffiths 正规函数定理) 上述定义的截面 ν_Z 是正规函数.

证明 由于这是个局部问题, 我们可以考虑局部平凡化情形. 类似定理 4.3.2 的讨论, 可以证明 ν_Z 的全纯性. 下面讨论水平性. 我们只考虑特殊情形: 每个 Z_i 皆光滑, 并且彼此不相交. 一般情形可以归结于此.

设 ν' 是 $\mathcal{H}^{2k-1}$ 的截面, $v\in T_{Y,0}$, $\nabla_v\nu'\in F^{k-1}H^{2k-1}(X_0)$ 等价于

$$\langle\nabla_v\nu',\eta\rangle=0,\qquad\forall\eta\in F^{n-k+2}H^{2n-2k+1}(X_0).$$

利用 $d_v\langle\nu',\eta\rangle=\langle\nu',\nabla_v\eta\rangle+\langle\nabla_v\nu',\eta\rangle$, 上述条件进一步等价于

$$d_v\langle\nu',\eta\rangle=\langle\nu',\nabla_v\eta\rangle,\qquad\forall\eta\in F^{n-k+2}H^{2n-2k+1}(X_0).$$

将 ν' 提升为 $\tilde{\nu}\in(F^{n-k+1}\mathcal{H}^{2n-2k+1})^*$, 于是

$$\langle\nu',\nabla_v\eta\rangle=\tilde{\nu}(\nabla_v\eta)=\int_{\Gamma_0}\nabla_v\eta.$$

结合推论 3.2.1, 问题归结为证明

$$\int_{\Gamma_0}\mathrm{int}(\tilde{\nu})(d\Omega)=\int_{\Gamma_0}\nabla_v\eta.$$

这里 $Z_y = \partial\Gamma_y$. 由平凡化假设, 我们只需注意到闭形式 $\mathrm{int}(\tilde{\nu})(d\Omega)|_{X_0}$ 落在 $F^{n-k+1}\mathcal{A}^{2n-2k+1}_{X_0}$, 且表示 $\nabla_v\eta$, 即可由 $\int_{\Gamma_0}$ 的定义直接推出上式. ■

以下我们进一步假设, 每个 Z_i 是不可约光滑代数子簇, 且 π 限制在 Z_i 上仍然是浸没. 由于 $[Z_i] \in H^k(X,\Omega^k_X)$, 故由映射 $H^k(X,\Omega^k_X) \to H^0(Y, R^k\pi_*\Omega^k_X)$, 我们可以它映入 $H^0(Y,R^k\pi_*\Omega^k_X)$ 中, 其像仍记作 $[Z_i]$. 令 $[Z] = \sum_i n_i[Z_i]$. 它在每点 $y \in Y$ 处的值 $[Z]_y$ 就是 $[Z]$ 在 $H^k(X_y, \Omega^k_{X|X_y})$ 中的像. 假设 Z_y 是零调的 ($\forall y \in Y$), $0 \in Y$, 那么

$$[Z]_0 \in \mathrm{Ker}(H^k(X_0,\Omega^k_{X|X_0}) \to H^k(X_0,\Omega^k_{X_0})).$$

因此由第 6.2 节的讨论, 可定义无限小不变量

$$\delta[Z]_0 \in H^1(K^\cdot_{k,k-1,0}) = \frac{\mathrm{Ker}(\overline{\nabla}: \mathcal{H}^{k-1,k}_0 \otimes \Omega_{Y,0} \to \mathcal{H}^{k-2,k+1}_0 \otimes \Omega^2_{Y,0})}{\mathrm{Im}(\overline{\nabla}: \mathcal{H}^{k,k-1}_0 \to \mathcal{H}^{k-1,k}_0 \otimes \Omega_{Y,0})}.$$

另一方面, 由定理 6.4.1, ν_Z 是正规函数, 因此也可以定义无限小不变量

$$\delta\nu_{Z,0} \in H^1(K^\cdot_{k,k-1,0}) = \frac{\mathrm{Ker}(\overline{\nabla}: \mathcal{H}^{k-1,k}_0 \otimes \Omega_{Y,0} \to \mathcal{H}^{k-2,k+1}_0 \otimes \Omega^2_{Y,0})}{\mathrm{Im}(\overline{\nabla}: \mathcal{H}^{k,k-1}_0 \to \mathcal{H}^{k-1,k}_0 \otimes \Omega_{Y,0})}.$$

定理 6.4.2 (Voisin **无限小不变量定理**) $\delta\nu_{Z,0} = \delta[Z]_0$.

(证略)

本章习题

习题 6.1 设 X 是局部连通空间, $\mathcal{H}$ 是 $X \times [0,1]$ 上的局部系.
(1) 证明: $\mathcal{H}$ 在 $X \times 0$ 上的任一截面 σ 可以唯一延拓成 $\mathcal{H}$ 的整体截面.
(2) 设 $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是 X 上局部系的态射, 使得 ϕ 限制在 X 的某邻域 U 上是同构, 那么 ϕ 在 $U \subset X$ 的连通分支上也是同构.
(3) 证明: $\mathcal{H} \cong {\mathrm{pr}_1}^{-1}(\mathcal{H}|_{X\times 0})$.

习题 6.2 试用第 6.1 题证明: 如果 X 是连通、局部道路连通、单连通的拓扑空间, 那么 X 上任何以 H 为茎的局部系都是常层 H.

习题 6.3 具体验证映射 (6-1) 是双射.

习题 6.4 设 $\phi: X \to Y$ 是 n 维球丛. 证明:
(1) 当 $l \neq 0, n$ 时, $R^l\phi_*\mathbb{Z} = 0$; 当 $l = 0, n$ 时, $R^l\phi_*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
(2) 在对应的 Leray 谱序列中, $E^{p,q}_2 = 0$, $q \neq 0, n$.
(3) $E^{p,q}_2 = \cdots = E^{p,q}_{n+1}$.
(4)

$$E^{p,q}_\infty = H^p(E^{\cdot,q}_{n+1}, d_{n+1}) = \begin{cases} \mathrm{Ker} d_{n+1}, & q = n, \\ \mathrm{Coker} d_{n+1}, & q = 0. \end{cases}$$

(5) 以下序列正合.

$$\cdots H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k-n}(Y, R^n\phi_*\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_{n+1}} H^{k+1}(Y, R^0\phi_*\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^*} H^{k+1}(X,\mathbb{Z}) \cdots$$

习题 6.5 证明引理 6.2.1 的结论.

习题 6.6 设 S 是 $\mathbb{P}^n$ 对应的齐次多项式环, f 是 d 次齐次多项式, 且定义了光滑超曲面. 设 $P \in S^{pd-n-1}$. 证明: $P \in J_f^{pd-n-1}$ 当且仅当存在 $Q \in S^{(p-1)d-n-1}$, 使得

$$\frac{P - fQ}{f^p}\Omega = d\gamma, \qquad \gamma \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^{n-1}((p-1)d)).$$

试用此结论证明定理 6.3.2.

参 考 文 献

[Ara71] S. Ju. Arakelov: Families of algebraic curves with fixed degeneracy, Math. USSR Izv., **5**(1971), 1277–1302.

[BPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven: Compact Complex Surfaces, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BT82] R. Bott, L. W. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology, GTM **82**, Springer-Verlag New York, 1982.

[Che01] 陈省身, 陈维桓: 微分几何讲义 (第二版). 北京大学出版社, 2001.

[CMP03] J. Carlson, S. Müller-Stach, C. Peters: Period mappings and period domains, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **85**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Dem10] J. P. Demailly: Analytic methods in algebraic geometry, Higher Education Press, 2010.

[EV90] H. Esnault, E. Viehweg: Effective bounds for semipositive sheaves and the height of points on curves over complex function fields, Compositio Mathematica **76**(1990), 69–85.

[EV92] H. Esnault, E. Viehweg: Lectures on Vanishing Theorems, DMV-Seminar **20**, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (1992).

[Fuj84] T. Fujita: On Kaehler fiber spaces over curves, J. Math. Soc. Japan. 30/4(1984), 779–794.

[GH94] P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry, Wiley Classics Library Edition Published (1994)

[Hat77] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math **52**, Springer-Verlag, (1977).

[Hir76] M. W. Hirsch: Differential Topology, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1976).

[Hir78] F. Hirzebruch: Topological Methods in Algebraic Geometry (2nd), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1978).

[Hou04] 侯伯元, 侯伯宇: 物理学家用微分几何 (第二版), 科学出版社, (2004).

[Huy05] D. Huybrechts: Complex Geometry: An Introduction, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (2005).

[Kob85] R. Kobayashi: Einstein-Kaehler metrics on open algebraic surfaces of general type, Tohuku Math. Journ. , **37**(1985), 43–77.

[Kod60] K. Kodaira: On complex analytic surfaces I: Ann. of Math., **71**(1960), 111–152; II: Ann. of Math., **77**(1963), 563–626; III: Ann. of Math., **78**(1963), 1–40.

[Kod64] K. Kodaira: On the structure of compact complex analytic surfaces I: Amer. J. Math., **86**(1964), 751–798; II: Amer. J. Math., **88**(1966), 682–721; III: Amer. J. Math., **90**(1969), 55–83; IV: ibid, 1048–1066.

[Liu96] K. F. Liu: Geometric height inequalities, Math. Research Letters, **3** (1996), 637–702.

[LTZ10] J. Lu, S. -L. Tan, K. Zuo: Canonical Class Inequality for Fibred Spaces. (Preprint 2010)

[LSZ09] J. Lu, M. Sheng, K. Zuo: An Arakelov inequality in characteristic p and upper bound of p-rank zero locus. Journal of Number Theory, **129**, 12 (2009), 3029-3045.

[Miy84] Y. Miyaoka: The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants, Math. Ann., **268**(1984), 159–171.

[Mor07] A. Moroianu: Lectures on Kähler Geometry, London Mathematical Society Student Texts, **69**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[MS74] J. W. Milnor, J. D. Stasheff: Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies **76**, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey (1974).

[Mun93] J. R. Munkres: Elements of Algebraic Topology, Princeton University Press, (1993).

[Rha84] G. de Rham: Differentiable Manifolds, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, (1984).

[Sak80] F. Sakai: Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps, Math. Ann., **254**(1980), no. **2**, 89–120.

[Vie82] E. Viehweg: Vanishing theorems, Journ. reine angew. Math., **335** (1982), 1–8.

[VZ01] E. Viehweg, K. Zuo: On the isotriviality of families of projective manifolds over curves, J. Alg. Geom., **10** (2001) 781–799.

[VZ06] E. Viehweg, K. Zuo: Numerical bounds for semi-stable families of curves or of certain higher dimensional manifolds, J. Alg. Geom., **15** (2006) 771–791.

[Voi02] C. Voisin: Hodge theory and complex algebraic geometry, I, Translated from the French by Leila Schneps, Reprint of the 2002 English edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **76**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Voi03] C. Voisin: Hodge theory and complex algebraic geometry, II, Translated from the French by Leila Schneps, Reprint of the 2003 English edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **77**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Voj88] P. Vojta: Diophantine inequalities and Arakelov theory. In: Lang, S., Introduction to Arakelov theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg -New York, 1988, pp. 155–178.

[Yau93] S. T. Yau: A splitting theorem and an algebraic geometric characterization of locally Hermitian symmetric spaces, Comm. Anal. Geom., **1** (1993), no. 3-4, 473–486.

索 引