

2009年4月7日



偏微分方程学科 与数学物理方程课程 介绍

袁海荣

华东师范大学 数学系

hryuan@math.ecnu.edu.cn

Home Page

Title Page



Page 1 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit

常微分方程、偏微分方程

- 微分方程: 含有未知函数的导数或偏导数的方程
- 常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程
- 偏微分方程: 未知函数是多元函数且出现对不同自变量偏导数的微分方程

• 例: (1) $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = A(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t);$

(2) $\frac{du}{dx} + xu^2 + 3x = \sin x;$

(3) Laplace方程 $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0;$

(4) 热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0;$

(5) 波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0;$

(6) Monge-Ampère方程 $\det(D^2u) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$

- 注意: 未知函数可以是向量值的, 方程也可以是不止一个.

例: 空气动力学方程组(可压缩完全Euler方程组) 含有五个未知函数(气压, 气体密度, 气体速度), 五个方程(质量守恒, 能量守恒, 动量守恒), 每个未知函数均依赖于四个自变量(时间, 三个空间坐标).



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit

可压缩完全Euler方程组、Navier—Stokes方程组

- 可压缩完全Euler方程组

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) + \partial_z(\rho w) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) + \partial_z(\rho uw) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) + \partial_z(\rho vw) &= 0, \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho uw) + \partial_y(\rho vw) + \partial_z(\rho w^2 + p) &= 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho Eu) + \partial_y(\rho Ev) + \partial_z(\rho Ew) &= 0. \\ E &= \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}, \quad \gamma > 1.\end{aligned}$$

- 不可压缩Navier—Stokes方程组

$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u + \partial_x p &= \nu \Delta u, \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v + \partial_y p &= \nu \Delta v, \\ \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w + \partial_z p &= \nu \Delta w, \\ \nu > 0 &\text{表征流体的粘性.}\end{aligned}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 3 of 13](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



偏微分方程的来源(1) 纯粹数学

- 复分析

例: Cauchy-Riemann方程组

复函数 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ 关于 $z = x + iy$ 是全纯函数, 若其实部 u 与虚部 v 满足

$$\begin{aligned}\partial_x u - \partial_y v &= 0, \\ \partial_x v + \partial_y u &= 0.\end{aligned}$$

注: 椭圆型方程(代表: Laplace方程)

- 几何分析

例: Riemann流形上的Ricci流方程

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$$

用来解决三维流形的拓扑分类(Poincaré猜想)

注: 抛物型方程组(代表: 热传导方程)

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit

偏微分方程的来源(2) 物理学与力学

- 理论物理

例: Einstein引力场方程

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 8\pi\kappa T_{ij}$$

宇宙的起源与演化: 星系的形成, 黑洞的存在性...

注: 双曲型方程组(代表: 波动方程)

- 量子力学

例: 线性Schrödinger方程

$$i\partial_t u - \Delta u + V(x)u = 0$$

氢原子中电子的运动; 非线性Schrödinger方程

$$i\partial_t u - \Delta u + V(x)|u|^{p-1}u = 0$$

激光

注: 这里 u 是复数值函数. 线性Schrödinger方程是四类基本方程之一.

- 流体力学



Home Page

Title Page



Page 5 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit

偏微分方程的来源(3) 生物学、经济学、图像处理...

- 生物学

例: 神经传导的FitzHugh–Nagumo方程组

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \partial_{xx} u + u(1-u)(u-a) - w, \\ \partial_t w &= bu - \gamma w.\end{aligned}$$

- 金融学、概率论

例: Kolmogorov倒向抛物型方程($x \in \mathbb{R}, s < t$)

$$-\partial_s f = a(s, x) \partial_x f + \frac{1}{2} b^2(s, x) \partial_{xx} f$$

Kolmogorov正向抛物型方程($y \in \mathbb{R}, t > s$)

$$\partial_t f = -\partial_y(a(t, y)f) + \frac{1}{2} \partial_{yy}(b^2(t, y)f)$$

- 图像处理

例: 中值曲率驱动方程

$$\partial_t u = C|Du|\text{curv}(u)$$

求解其初值问题($u(0, x) = u_0(x)$)用来由原图像 $u_0(x)$ 得到更清晰的图像 $u(t, x)$.

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)[Page 6 of 13](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

偏微分方程的应用

我们以流体力学方程组为例来介绍偏微分方程对人们认识自然、改造自然的巨大价值.

- 为什么爆炸具有极大破坏力?

注意观察如下视频: 建筑物是被大风吹倒的吗?

[爆炸的破坏效应视频](#)

[Mach激波视频](#)

数学理论: 激波及其反射现象

最简单的模型: Burgers方程

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

- 如何设计飞行器?

传统方法: 设计→试制→实验→修正设计→试制...

缺点: 费时、费钱、容易出现事故

现代方法: 建立数学模型(偏微分方程)→数值计算与模拟达到设计最优化→试制→实验→修正设计→试制...

优点: 成本低、可靠性高. [图片](#)

为了数值计算的可靠性和高效性, 必须对相关偏微分方程的数学理论有更深入的理解.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit



偏微分方程学科的特点

- 强调所研究的方程要有背景, 不研究人为编造的方程. 主要研究来源于数学物理等学科的方程, 以及为研究这些方程所需要的一些理论工具
- 没有统一的理论体系, 但有已被证明颇有成效的一套思想方法
- 学科综合性强, 紧密结合微分几何、复分析、实分析、泛函分析、调和分析、非线性分析等其他学科, 特别是无限维空间的知识(对比常微分方程与线性代数)
- 学科应用面广. 很多完全不同的问题对应着相同的偏微分方程
例: Monge-Ampère方程

$$\det(D^2u) = f(x)$$

- (1) 给定Gauss曲率曲面在 $\mathbb{R}^3$ 中嵌入问题;
- (2) 控制论中最优化搬运问题

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 13](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



偏微分方程学科研究什么问题？

- 基本问题—边值问题的适定性：是否有解？解是否唯一？解关于方程形式及区域形状、边值条件等的微小扰动是否稳定？

例：设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域， $\partial\Omega$ 是其边界， f, g 为已知函数. 如下问题称为Poisson方程的Dirichlet问题：

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = g & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

- 其他问题

例：(1) 解的正则性 (解是否有更好的光滑性?)
(2) 解的渐近形态 (长时间后解是否有极限?)
(3) 不适定问题的正则化
(4) 解的定性研究 (解的图像或水平集是否有特别的性质?)

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#) [>>](#)[<](#) [>](#)[Page 9 of 13](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



常用研究方法

- 找出方程解的显式表达式
- 寻找方程的有意义的特解
- 调和分析方法(分离变量法、Fourier变换法)
- 双曲型方程的特征线法(化为常微分方程问题)
- 先验估计与紧性方法(逼近)
 - (1) 能量积分(方程两边乘适当函数作分部积分, 利用若干不等式得到关于解的某些不等式)
 - (2) 极值原理(构造辅助函数与解比较)

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 13

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



数学物理方程课程是偏微分方程学科的入门

在数学物理方程课程中，只介绍关于Laplace方程、热传导方程、波动方程这三类最简单的二阶线性方程的具有物理意义的一些边值问题的提法及其适定性。对更一般的线性方程及非线性方程的研究，需要在此基础上有更多实变函数与泛函分析的知识，将在更高级的后续课程中介绍。

- 数学建模：方程的导出
- 波动方程
- 热传导方程
- Laplace方程
- 值问题的提法及其适定性
- 常见解法、思想

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[▶](#)[Page 11 of 13](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



数学物理方程课程的学习要点

- 如何建立合理的偏微分方程模型
- 掌握三类方程的基本性质, 常见边值问题的提法及其适定性
- 初步掌握上节介绍的常用研究方法
- 能用偏微分方程的理论分析结果来认识、解释相关物理现象
- 及时复习数学分析中多元微积分及Fourier级数部分知识; 通过对数理方程的学习增进对泛函分析等其他学科的理解
- 注重对相关计算数学和数学软件的学习

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit



注意事项

- 期中考试 (0.2)
- 平时作业及表现 (0.2)
- 期末考试 (0.6)
- 课程网页 <http://math.ecnu.edu.cn/hryuan/upde2009/upde2009.htm>
- 答疑时间地点 周一晚6点—8点, 数学楼216 办公室
- 助教老师 康乐

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 13

Go Back

Full Screen

Close

Quit