

基 础 点 集 拓 扑

袁海荣

2024 年 9 月

说 明

1. 本书内容大多取材于所列参考文献, 添加了编者自己在学习、教学、研究中的一些体会, 目的是为本科生初次学习拓扑学提供一个内容相对简洁完整, 对概念、定理、证明及思想方法解说清晰透彻的教材. 全部内容可用 50 课时左右教完.

2. 本课程所需基础是朴素的集合论知识, 以及通过学习数学分析和高等代数所形成的良好直观和逻辑推理能力. 从数学学科层次角度讲, 这门课最好放在数学分析与高等代数之后, 而在常微分方程, 复变函数, 微分几何等其它分析或几何课程之前 (或与之平行). 这样读者就可以较好地体会拓扑在分析与几何中的基础地位, 方便这些课程的学习 (如复变函数中单连通性, 同伦的 Cauchy 积分定理, 最大模原理等的讲解就可以简化). 本教材包含的内容是数学与应用数学专业所有的本科生都应当熟练掌握的. 更加专门的代数拓扑和微分拓扑的入门课是点集拓扑的后续课程, 可以作为高年级的课程或讨论班内容供感兴趣的同学选学. 在当前本课程拓扑学课程教学中, 大都存在压缩点集拓扑的内容而侧重代数拓扑的情况, 这对后续学习实分析、泛函分析、微分方程等课程带来了一定困扰.

3. 拓扑学就其本身而言, 研究的是拓扑空间的构造, 以及按同胚分类的问题 (即一个拓扑空间是否可以连续变形为另外一个拓扑空间). 这本身当然是非常有意思的课题. 另一方面, 分析¹是建立在拓扑基础上的, 拓扑性质对分析结果是否整体地成立具有根本重要性. 例如有界闭区间上连续函数

¹这里主要指研究连续及可微函数的分析学. 实变函数论中的测度结构等与拓扑结构是平行的.

的介值定理 (极值定理) 能成立就依赖于定义区间的连通性 (紧性). 所以说“拓扑是分析从局部走向整体的桥梁”. 因此, 拓扑学不但是一门纯粹数学的学科, 而且广泛渗入其它学科, 具有诸多应用. 这方面可参考教材 [6].

4. 由于作者的研究背景, 本讲义选材较为偏重拓扑在分析中的应用, 所以对度量拓扑及相关结论做了较多介绍. 另一方面, 某些重要定理, 如 Urysohn 度量化定理, 单点紧化定理等, 我们只给出了定理陈述, 而对证明. 读者可以参考 [8]. [8] 是一本极好的拓扑学教材, 建议有志于学好拓扑学的同学在通过本课程了解了拓扑学的基础之后, 认真学习这本教材.

5. “拓扑”的英文是 “topology”, 由 J.B. Listing 于 1847 年引入数学. 该词源于希腊文 $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ (位置) 和 $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (学问). 中文“拓”是“扩展, 变大”的意思, “扑”有“挤压, 变小”的含义. 姜立夫先生在 1956 年版《数学名词》²中建议将 “topology” 翻译为 “拓扑”, 不但音近, 而且意思也与拓扑学研究图形连续变形密切相符, 被称为最佳中文数学名词翻译之一.

有关拓扑学历史发展的简要介绍, 读者可参考文献 [9] 中译本第四册第 50 章, 或 [10] 第 25 章第 2 节 (其中较详细地记录了点集拓扑学若干概念的背景和来由). [11] 中译本第 2 卷 IV.6 和 IV.7 两节介绍了代数拓扑和微分拓扑, 可为愿意进一步学习的读者提供一个简单的指南.

6. 本讲义内容包括三部分.

第一部分 (拓扑结构. 第一讲至第七讲): 介绍拓扑空间的基本概念, 以及在各类集合上给定拓扑结构的常用方法. 核心概念是拓扑及连续映射.

第二部分 (拓扑性质. 第八讲至第十六讲): 介绍可数性, 分离性, 以及连通性, 道路连通性, 各种紧性, 单连通性等拓扑性质以及映射和拓扑空间的同伦等重要概念. 拓扑性质本质上是附加在拓扑空间上的公理. 具有这些性质的拓扑空间往往具有较好的结构, 可以得到一些漂亮的定理. 这一部分的难点是概念较多, 而且概念之间存在较为复杂的联系. 其中最具创造性 (深刻) 的是 Urysohn 引理和同伦的概念.

第三部分 (专题选讲. 第十七讲和第十八讲): 介绍圆周 S^1 上连续映射的同伦分类定理的证明, 以及 Baire 空间和 Baire 纲定理. 前者本质是代数

²江泽涵: 我国数学名词的早期工作. 数学通报, 1980 年 12 期.

拓扑中用覆盖空间方法计算圆周的基本群, 后者在实变函数和泛函分析中是一种重要的存在性论证方法. 近年来 Baire 纲推理方法在双曲守恒律偏微分方程及不可压缩欧拉方程弱解的研究中有着非常重要的应用 [12], 有志于学习分析的同学都应当掌握.

7. 拓扑学与近世代数等课程类似, 强调公理化和概念, 抽象程度较高. 但是这里涉及的基本概念都源于分析学. 例如在数学分析课程中, 就有了欧氏空间中开集, 闭集, 连续映射, 连通性, 紧性等概念. 一些基本概念和思想在其它课程中也出现了, 比如商映射诱导的商空间与像空间的同胚, 就类似于代数同态基本定理. 所以学习这门课程既要注意公理化的体系, 概念的一般性, 也要联系具体实例, 注意和其它学科的学习融会贯通. 这就有助于发掘提出拓扑学中公理, 概念和重要定理的动机, 提高自己发现问题, 理解问题和解决问题的能力.

8. 限于本人学识水平, 本书中必然有不妥甚或谬误之处, 敬请读者不吝指出, 以便补正, 方便改进今后教学!

袁海荣

华东师范大学数学科学学院

E-mail: hryuan@math.ecnu.edu.cn

2024 年 9 月.

目录

第一部分 拓扑结构	1
第一讲 拓扑和开集、闭集	3
1.1 拓扑和开集	4
1.2 拓扑基	6
1.3 闭集, 豪斯多夫空间	7
1.4 度量空间	8
第二讲 拓扑空间中点集的结构	11
2.1 内部与闭包	11
2.2 极限点	13
2.3 收敛序列	14
2.4 边界	15
第三讲 拓扑子空间	17
3.1 子空间拓扑	17
3.2 拓扑子空间中的闭集	18
第四讲 连续映射	19
4.1 定义	20
4.2 连续映射的性质	21
4.3 连续映射的构造	21

第五讲 拓扑同胚	25
5.1 同胚映射	25
5.2 嵌入映射	27
5.3 拓扑性质	27
5.4 映射诱导拓扑	28
第六讲 乘积拓扑空间	33
6.1 积拓扑	33
6.2 积拓扑的性质	35
6.3 无限个集合的笛卡尔积及其积拓扑 [*]	38
第七讲 商空间	41
7.1 等价关系	41
7.2 粘合映射与商空间	42
7.3 商映射及其性质	43
7.4 商映射诱导的商空间同胚	46
第二部分 拓扑性质	49
第八讲 可数公理	51
8.1 可数邻域基和第一可数公理	51
8.2 第二可数公理	53
第九讲 分离公理	55
9.1 正则空间	55
9.2 正规空间	56
9.3 正规豪斯多夫空间	63
9.4 可度量化拓扑空间	64

目 录	vii
-----	-----

第十讲 连通性 局部连通性	67
---------------	----

10.1 拓扑空间的连通性	67
10.2 连通性的判定	68
10.3 连通分支	71
10.4 局部连通	72

第十一讲 道路连通性 局部道路连通性	75
--------------------	----

11.1 道路连通	75
11.2 道路连通性的判定	76
11.3 道路分支	77
11.4 局部道路连通	77

第十二讲 紧性 局部紧性	79
--------------	----

12.1 紧空间	79
12.2 紧性的判定	81
12.3 紧性的应用	83
12.4 局部紧性与单点紧化	84

第十三讲 序列紧 可数紧 聚点紧 伪紧 仿紧	87
------------------------	----

13.1 定义	87
13.2 可数紧与序列紧的关系	89
13.3 可数紧与聚点紧的关系	89
13.4 可数紧与伪紧的关系	90
13.5 仿紧	92

第十四讲 度量空间中的紧性	93
---------------	----

14.1 度量空间中各类紧性的等价性	93
14.2 紧度量空间的刻画	95
14.3 Ascoli-Arzelà 引理	96

第十五讲 同伦	101
15.1 映射的同伦	101
15.2 拓扑空间的同伦等价	103
15.3 可缩空间	104
15.4 形变收缩核	105
第十六讲 圆函数的同伦分类及其应用 单连通性	107
16.1 圆函数的同伦分类	107
16.2 应用	108
16.3 单连通性	110
16.4 Jordan 曲线定理	112
第三部分 专题选讲	115
第十七讲 圆函数同伦分类定理的证明	117
17.1 圆同伦	117
17.2 映射的提升	118
17.3 圆函数的提升	119
17.4 圆函数与标准旋转函数的同伦	119
17.5 度的唯一性	120
第十八讲 Baire 空间	123
18.1 Baire 空间	123
18.2 Baire 纲定理	125
18.3 应用	127
习题解答	134

第一部分

拓扑结构

第一讲 拓扑和开集、闭集

拓扑学是用来刻画“连续性”的一门数学语言. 连续映射就是把离得近的点映成离得近的点 (没有撕裂), 把离得远的点映成离得远的点 (没有粘合). 在数学分析中, 刻画两个点离得远近用的是距离的概念. 那么, 在一般情形下, 怎么刻画两个点离得远近呢?

早在 1679 年 (清朝康熙十八年), 莱布尼茨就提出了上述问题. 他指出, 需要一门数学学科, 它用定性 (依赖于公理) 而不是定量 (依赖于坐标) 的方法来研究有关图形的相对位置及其性质的问题. (他称之为 “Analysis Situs”, 中文翻译为 “位相分析” 或 “形势分析”).¹ 欧拉在 1736 年 (清朝乾隆元年) 解决的 “哥尼斯堡七桥问题” 和他在 1750 年 (清朝乾隆十五年) 发现的多面体顶点、棱、面之间关系的公式都属于这类问题. 黎曼在 1851 年 (清朝咸丰元年) 对椭圆积分的研究中发现, Abel 积分与某些曲面的亏格 (曲面的 “洞” 的个数) 密切相关, 说明了为了研究函数大范围的性质, 必须研究上述 “Analysis Situs”.

随着十九世纪七十年代 Cantor 对欧氏空间中点集的深入研究, Fréchet 在 1906 年左右对度量空间的一般研究, 经过数学家们两百多年的持续努力, 到了 1914 年, Hausdorff 提出了基于领域概念的拓扑学公理, 才真正从数学角度严格定义了最一般的 “连续” 的概念, 为我们对自然界有关 “连续” 的直观感受给了一个精确的数学翻译.

其实, 历史上数学家们遇到的困惑我们在学习数学时也必然碰到过. 在数学分析中学习多元函数积分学, 特别是 Green 公式、Gauss 公式、Stokes

¹数学大辞典, 第二版, 科学出版社, 2017 年. 第 689 页 “拓扑学” 词条 (邱瑞锋撰写).

公式时, 是否感觉到课本上讲的有些不清不楚? (定理条件的叙述有些啰嗦或模糊, 定理的证明不完整等等?) 类似的情形是否在复分析中学习 Cauchy 积分公式和 Cauchy 积分定理时再次出现? 这些模糊之处之所以出现, 就是因为缺乏适当的拓扑学的语言将定理所需条件严格化造成的.

下面, 我们就看一看数学家是如何定性的刻画集合中点的距离远近的.

1.1 拓扑和开集

定义 1 (拓扑). 设 X 是一个非空集合, $\mathcal{T}$ 是由 X 的一些子集组成的集族. 称 $\mathcal{T}$ 是 (X 上的) 一个**拓扑**, 如果成立

- 1) $\emptyset$ 和 X 在 $\mathcal{T}$ 中;
- 2) $\mathcal{T}$ 中有限个子集的交集仍在 $\mathcal{T}$ 中;
- 3) $\mathcal{T}$ 中任意个子集的并集仍在 $\mathcal{T}$ 中.

$(X, \mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间**, 而 $\mathcal{T}$ 中的元素被称作 (该拓扑空间中的)开集.²

用数学归纳法不难证明, 上述公理 2) 等价于“ $\mathcal{T}$ 中两个子集的交集仍在 $\mathcal{T}$ 中”. 注意到这点会给某些证明带来方便.

点集拓扑学的研究方法跟欧几里得《几何原本》类似, 都是基于公理化的定性的方法, 而非类似于解析几何的定量的方法. 拓扑从定性的角度刻画了集合中不同点之间的远近: 在给定的拓扑空间中, 包含两个不同点的开集越多, 那么这两个点越接近; 分别包含这两个点且不相交的开集越多, 那么这两个点就越远. 上述三条公理源于数学分析中学过的直线上开区间的性质.

²读者请注意, 不要因为名字相同, 就认为拓扑里的“开集”一定就是数学分析或实变函数中所讲的直线上的开区间, 或者由球组成的度量空间中的开集. 拓扑里的元素叫开集, 是把以前关于开集的概念大大推广了. 拓扑里的元素借用以前学过的“开集”的名字, 是因为以前学过的那些具体的开集也满足这三条公理.

例 1. 对任意集合 X , $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ 是一个拓扑, 称作平凡拓扑.

例 2. 对任意集合 X , 设 $\mathcal{T}$ 由 X 的全体子集组成, 则它是一个拓扑, 称作 X 上的离散拓扑.

我们可以认为, 在平凡拓扑下, X 中所有的点都很接近 (用拓扑这个工具其实无法区分); 在离散拓扑下, X 中所有的点都彼此远离 (拓扑工具太细致, 以致拓扑空间 X 和作为点集的 X 在区分点方面没有区别).

设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑. 如果成立 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, 就说 $\mathcal{T}_1$ 粗于 $\mathcal{T}_2$, 或者说 $\mathcal{T}_2$ 细于 $\mathcal{T}_1$. 显然平凡拓扑是最粗的拓扑 (开集最少), 而离散拓扑是最细的拓扑 (开集最多).

那么, 在给定集合 X 上给定拓扑, 是不是对点的分辨率越高, 即越细越好呢? 事实上并非如此. 我们知道自然界的运动规律是分层次的. 举例来说, 粒子物理学家研究基本粒子; 化学家研究由分子; 生物学家研究细胞; 植物学家研究植物种群分布; 天体物理学家研究星系、宇宙, 等等. 之所以如此, 是因为在不同层次的物质表现出很不相同的特性, 需要不同层次的研究工具. 让天文学家用电子显微镜来作研究, 必然导致“只见树木, 不见森林”的弊端. 所以给特定研究对象 X 赋予粗细适当的拓扑, 才能展现 X 的某些关键特质, 也往往是解决数学问题的重要一步.

例 3. 实直线 $\mathbb{R}$ 上的子集族 $\tau = \{(-\infty, a) : a \text{ 是实数或 } \pm\infty\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑.

例 4. 设 X 是无限集 (例如取 $X = \mathbb{R}$), $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ 是有限集}\}$. 容易验证 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑, 称为有限补拓扑.

习题 1. 设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的子集. 证明 A 是开集当且仅当对任意点 $x \in A$, 存在一个开集 U 使得 $x \in U \subset A$.

请读者注意这个结论: 开集一方面是通过拓扑的公理“整体”地定义的, 这里又说明开集可以通过“局部”的小的开集来刻画. 这体现了拓扑学中“局部”与“整体”的关系, 在后续学习中要引起注意.

1.2 拓扑基

指定 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 就需要列出 $\mathcal{T}$ 中所有元素 (开集), 这往往比较麻烦甚或困难. 为此人们引入拓扑基的概念, 可用较少开集就确定一个拓扑.

定义 2 (拓扑基). 设 X 是一个集合, $\mathcal{B}$ 是 X 的一个子集族. 称 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基, 如果成立

- a) $\forall x \in X$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$;
- b) 若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 且 $x \in B_1 \cap B_2$, 则存在 $B_3 \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$.

定理 1 (由拓扑基生成的拓扑). 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 上的一个拓扑基, 则

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{B} \text{ 中任意元素的并集}\}$$

是 X 上的一个拓扑, 称作由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑.

这个定理表明, 可以把拓扑基中的元素看作某种基本原件, 将这些原件拼接组合 (允许互相重叠), 就得到各式各样的开集了.

证明. 1. 已知 $\emptyset \in \mathcal{T}$. 又根据拓扑基定义, 对任意 $x \in X$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x$. 由此可得 $X = \bigcup_{x \in X} B_x$, 从而 $X \in \mathcal{T}$.

2. 设 $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, 要证 $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. 这当 $V = \emptyset$ 时是显然的; 若 $V \neq \emptyset$, 则对任意 $x \in V$, 成立 $x \in U_k, k = 1, 2$. 因为 U_k 都不是空集, 根据 $\mathcal{T}$ 中元素的定义, 存在 $B_k \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_k \subset U_k$. 于是 $x \in B_1 \cap B_2$. 由拓扑基的公理 b), 存在 $B'_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B'_x \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = V$. 对所有 $x \in V$ 取并集, 就得到 $V = \bigcup_{x \in V} B'_x$, 从而 $V \in \mathcal{T}$.

3. 最后, 对 $U_\alpha \in \mathcal{T}$ (其中 $\alpha \in J$, 而 J 是一个指标集), 要证明 $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$. 这是显然的, 因为每个 U_α 都是 $\mathcal{B}$ 中若干元素的并, 从而 $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ 也是 $\mathcal{B}$ 中若干元素的并. $\square$

例 5. 设 X 是一个集合, 则 $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ 是一个拓扑基. 它生成的就是 X 的离散拓扑.

例 6. $\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑基. 这种利用实数的序关系生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.

习题 2.(利用拓扑基判定开集) 设 X 是一个拓扑空间, 其拓扑由一个拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成. 那么 X 的子集 U 是开集的充分必要条件是对任意 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$.

定理 2 (给定拓扑的拓扑基的判定). 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{C}$ 是 X 的一个开集族. 如果对于 X 中任意开集 U 和点 $x \in U$, 存在 $\mathcal{C}$ 中的一个开集 V 使得 $x \in V \subset U$, 则 $\mathcal{C}$ 是生成 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基.

证明. 1. 对任意点 $x \in X$, 由于 X 是开集, 从而由定理条件得到 $\mathcal{C}$ 中元素 V 使得 $x \in V$. 其次, 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ 且 $x \in C_1 \cap C_2$, 由于 $C_1 \cap C_2$ 仍是开集, 由定理条件, 存在 $V \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in V \subset (C_1 \cap C_2)$. 这就证明了 $\mathcal{C}$ 是一个拓扑基.

2. 记 $\mathcal{C}$ 生成的拓扑是 $\mathcal{T}'$, 我们要证明 $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

设 $V \in \mathcal{T}'$. 若 $V = \emptyset$, 则显然 $V \in \mathcal{T}$. 若 $V \neq \emptyset$, 则它是 $\mathcal{C}$ 中若干元素 (它们是 $(X, \mathcal{T})$ 中开集) 的并集, 而根据 $\mathcal{T}$ 的公理, 这个并集仍在 $\mathcal{T}$ 中. 从而 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

反之, 设 $U \in \mathcal{T}$. 对 $x \in U$, 由 $\mathcal{C}$ 的性质, 存在 $C_x \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C_x \subset U$. 于是得到 $U = \bigcup_{x \in U} C_x$, 从而 $U \in \mathcal{T}'$. 这就证明了 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. 证毕. $\square$

习题 3. 对欧氏平面 $\mathbb{R}^2$, 证明

- 1) $\mathcal{B}_1 = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ 是一个拓扑基. 这里 $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < r\}$;
- 2) $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 : a < b, c < d\}$ 也是一个拓扑基;
- 3) $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 生成 $\mathbb{R}^2$ 上同一个拓扑, 称作标准拓扑.

1.3 闭集, 豪斯多夫空间

定义 3 (闭集). 设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的子集. 称 A 是 X 中的闭集, 如果 $X \setminus A$ 是 X 中的开集.

习题 4. 证明闭球 $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \leq r\}$ 和闭矩形 $\{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y_1 \leq b, c \leq y_2 \leq d\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 在标准拓扑下的闭集.

利用集合论中的 De Morgan 法则, 容易证明成立如下定理.

定理 3. 设 X 是拓扑空间, 则成立:

- 1) $\emptyset$ 和 X 都是闭集;
- 2) 有限个闭集的并集是闭集;
- 3) 任意个闭集的交集是闭集.

注意一般拓扑空间中的单点集不一定是闭集. 例如, 考虑 $\mathbb{R}$ 上由拓扑基 $\{[n, n+1) \subset \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$ 生成的拓扑, 则 $\mathbb{R}$ 中任何单点集都不是闭集. 所以为了保证单点集是闭集, 就需要对拓扑空间加额外的公理.

定义 4 (豪斯多夫空间). 称拓扑空间 X 是豪斯多夫空间, 如果对于任意不同的两点 x, y , 存在互不相交的开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V$.

例 7. $\mathbb{R}$ 和带离散拓扑的拓扑空间都是豪斯多夫空间.

习题 5. $\mathbb{R}$ 在有限补拓扑下不是豪斯多夫空间.

定理 4. 豪斯多夫空间 X 中的单点集都是闭集.

证明. 对任意点 $x \in X$, 由豪斯多夫空间的定义, 对任意 $y \in X \setminus \{x\}$, 存在开集 $V_y \subset X \setminus \{x\}$, 且 $y \in V_y$. 由开集的局部刻画可知 $X \setminus \{x\}$ 是开集. $\square$

1.4 度量空间

度量空间是一类重要的拓扑空间, 它是欧氏空间的一种推广.

定义 5 (度量空间). 对非空集合 X , 如果存在一个映射 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 满足以下性质:

- 对称性: 对任意 $x, y \in X$, 成立 $d(x, y) = d(y, x)$;
- 正定性: 对任意 $x, y \in X$, 成立 $d(x, y) \geq 0$, 且等号当且仅当 $x = y$ 时成立;
- 三角不等式: 对任意 $x, y, z \in X$, 成立 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

则称 d 是 X 上的一个度量, (X, d) 是一个度量空间.

设 X 是个度量空间, 对 $x \in X$ 和 $r > 0$, 定义开球

$$B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\},$$

利用三角不等式, 不难发现 X 中所有的开球组成的集族就是 X 上的一个拓扑基. 由此产生的 X 上的拓扑称作 X 的度量拓扑. 这是构造拓扑的一种常用方法.

不难看出, (X, d) 中点列 $\{x_k\}$ 按度量拓扑收敛到 x , 当且仅当

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0.$$

定义 6 (赋范线性空间). 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间, 如果存在 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 记作 $\|\cdot\|$, 使得成立

- 齐次性: 对任意 $k \in \mathbb{R}, x \in X$, 成立 $\|kx\| = |k|\|x\|$;
- 正定性: 对任意 $x \in X$, 成立 $\|x\| \geq 0$, 且等号当且仅当 $x = 0$ 时成立;
- 三角不等式: 对任意 $x, y \in X$, 成立 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

那么 $\|\cdot\|$ 称作 X 上的一个范数, $(X, \|\cdot\|)$ 称作一个赋范线性空间.

线性代数中的欧氏空间和泛函分析中的 Banach 空间都是赋范线性空间. 利用范数, 可以定义 X 上度量 $d(x, y) = \|x - y\|$. 所以赋范线性空间是度量空间.

习题 6. 设 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $d(x, x) = 0$, 且 $x \neq y$ 时 $d(x, y) = 1$. 证明: d 是 X 上的度量, 且生成 X 上的离散拓扑.

习题 7. 度量空间都是豪斯多夫空间.

拓扑学早期的一个重要课题, 就是判定什么样的拓扑空间其实是度量空间.

第二讲 拓扑空间中点集的结构

集合 X 上有了拓扑后, X 中的子集以及子集中的点的地位就不平等了, 从而有了研究拓扑空间中点集的组成及其结构的问题. 这一节把数学分析中遇到的诸多欧氏空间上点集的概念推广到一般拓扑空间. 读者可以发现, 这里的推广其实是非常自然的.

2.1 内部与闭包

定义 1 (内部与闭包). 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 包含在 A 中的所有开集的并集称作 A 的 内部, 记为 $\text{Int}(A)$; 包含 A 的所有闭集的交集称作 A 的 闭包, 记作 $\text{Cl}(A)$. A 的内部的元素称为 A 的 内点.

根据定义, 不难证明

定理 1. 设 A, B 是拓扑空间 X 的子集, 则

- 1) 若 $A \subset B$, 则 $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$, $\text{Cl}(A) \subset \text{Cl}(B)$;
- 2) A 是开集当且仅当 $A = \text{Int}(A)$; A 是闭集当且仅当 $A = \text{Cl}(A)$.

定义 2 (稠密、可分). 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 称 A 在 X 中 稠密, 如果 $\text{Cl}(A) = X$. 如果 A 在 X 中稠密, 且 A 是可列集, 则称 X 是 可分 的.

由定义可知, 若 A 不在 X 中稠密, 那么存在 X 的一个非空开集, 与 A 不相交.

例 1. 在 $\mathbb{R}$ 上给有限补拓扑, $A = [0, 1)$. 则 $\text{Int}(A) = \emptyset$, $\text{Cl}(A) = \mathbb{R}$. 注意在此拓扑下, 闭集或是有限集, 或是 $\mathbb{R}$. 所以任意无限集都稠密.

例 2. 在 $\mathbb{R}$ 上给标准拓扑. 记 $\mathbb{Q}$ 为有理数集. 则 $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\text{Cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

习题 1. 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 点 $x \in X$. 则 $x \in \text{Int}(A)$ 的充分必要条件是存在开集 $U \subset A$ 且 U 包含 x .

定理 2 (内部/闭包与集合运算的关系). 设 A, B 是拓扑空间 X 的子集. 那么成立如下结论:

- 1) $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus (\text{Cl}(A));$
- 2) $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus (\text{Int}(A));$
- 3) $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B);$
- 4) $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B);$
- 5) $\text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B) = \text{Cl}(A \cup B);$
- 6) $\text{Cl}(A \cap B) \subset \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B);$
- 7) $\text{Int}(A \setminus B) = \text{Int}(A) \setminus \text{Cl}(B).$

注意性质 1)2), 4)5) 的相似性. 我们称开集/闭集, 内部/闭包是”对偶”的, 往往一个性质得证, 就可通过取补集的办法得到对应的性质. 这种”对偶”的思想在数学中应用非常广泛.

证明. 1) 对任意包含在 $X \setminus A$ 中的开集 U , 成立 $A \subset X \setminus U$, 而后者是闭集, 从而 $\text{Cl}(A) \subset X \setminus U$, 即得 $U \subset X \setminus \text{Cl}(A)$. 取 $U = \text{Int}(X \setminus A)$ 就得到 $\text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Cl}(A)$.

另一方面, 设 V 是包含 A 的任意一个闭集. 则 $X \setminus V \subset X \setminus A$, 而前者是开集, 从而 $X \setminus V \subset \text{Int}(X \setminus A)$, 即 $V \supset X \setminus (\text{Int}(X \setminus A))$. 取 $V = \text{Cl}(A)$, 得 $\text{Cl}(A) \supset X \setminus (\text{Int}(X \setminus A))$, 从而 $X \setminus \text{Cl}(A) \subset \text{Int}(X \setminus A)$.

2) 令 $C = X \setminus A$, 利用 1) 即可.

3) $\text{Int}(A) \subset A$, $\text{Int}(B) \subset B$, 从而 $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset (A \cup B)$. 由于左边是开集, 就得到 $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$.

4) 由于 $A \cap B \subset A$, 从而 $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A)$, $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(B)$, 于是 $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

另一方面, 由于 $\text{Int}(A) \subset A$, $\text{Int}(B) \subset B$, 成立 $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset A \cap B$, 从而由于前者是开集, $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cap B)$.

5) 由于 $A \subset \text{Cl}(A)$, $B \subset \text{Cl}(B)$, 从而 $A \cup B \subset \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$, 而后者是闭集, 故 $\text{Cl}(A \cup B) \subset \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$.

另一方面, 设 V 是包含 $A \cup B$ 的任意一个闭集, 则 V 包含 $\text{Cl}(A)$ 和 $\text{Cl}(B)$, 从而 $V \supset \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$. 对所有这样的 V 取交集, 就得到了 $\text{Cl}(A \cup B) \supset \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$.

6) 由于 $A \cap B \subset \text{Cl}(A) \cap B \subset \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$, 而后者是闭集, 根据闭包定义就得到 $\text{Cl}(A \cap B) \subset \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$.

7) 由于 $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$, 由 4) 和 1), 就有

$$\text{Int}(A \setminus B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(X \setminus B) = \text{Int}(A) \cap (X \setminus \text{Cl}(B)) = \text{Int}(A) \setminus \text{Cl}(B).$$

□

习题 2. 举例说明 3) 和 6) 中等号一般不成立.

习题 3. 证明无理数集在具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 上稠密.

2.2 极限点

定义 3 (邻域). 设 X 是拓扑空间, x 是 X 中的点. 称 X 中包含 x 的一个子集 A 是 x 的一个 邻域, 如果 x 是 A 的内点. (换句话说, 存在包含 x 的开集落在 A 中.)

定义 4 (集合的极限点). 设 A 是拓扑空间 X 中的一个非空子集. 称 X 中一点 x 是 A 的一个 极限点 (或聚点), 如果 x 的每个邻域都和 A 相交, 而且交集中有不同于 x 的点.

例 3. 在具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 上, 任何一点都是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的极限点.

习题 4. 确定具有标准拓扑的平面 $\mathbb{R}^2$ 上点集

$$S = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$$

的极限点集.

定理 3 (极限点与闭包). 设 A 是拓扑空间 X 的子集, A' 是 A 的极限点的集合 (称作 A 的导集). 则 $\text{Cl}(A) = A \cup A'$.

证明. 1. 首先证明 $A \cup A'$ 是闭集. 对任意 $x \in X \setminus (A \cup A')$, 由极限点定义, 存在 x 的一个开邻域 U , 使得其中不含 A 中的任何点, 从而在 U 中也不含有 A 的极限点 (否则 U 作为该极限点的一个邻域要含有 A 的点). 这就是说 $U \subset X \setminus (A \cup A')$, 从而 $X \setminus (A \cup A')$ 是开集. 于是 $A \cup A'$ 是闭集.

2. 设 B 是包含 A 的一个闭集, 则 $B \supset A'$. 否则, 存在 $x' \in A' \cap (X \setminus B)$, 那么由于 $X \setminus B$ 是开集, 也是 x' 的一个开邻域, 从而其中必有不同于 x' 的 A 中的点; 但是 $X \setminus B \subset X \setminus A$, 从而其中不可能有 A 的点, 矛盾! $\square$

推论 1. 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 则 A 是闭集当且仅当 A 包含它所有的极限点.

2.3 收敛序列

定义 5 (收敛序列). 设 $x_1, x_2, \dots$ 是拓扑空间 X 中的一个点列. 如果对点 $x \in X$ 的每个邻域 U , 都存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时成立 $x_n \in U$, 就称该点列 收敛, 而 x 是该点列的一个极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

在一般的拓扑空间中, 集合 $A \subset X$ 的极限点未必是 A 中一个序列的极限.

习题 5. 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集族, 由空集或其补集是可数集的子集组成. 证明:

- 1) $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑 (称作可数补拓扑);
- 2) 在该拓扑下, 点 0 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的一个极限点;
- 3) 在该拓扑下, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 中没有收敛到点 0 的序列.

此外注意, 在一般拓扑空间中, 若一个序列收敛, 其极限未必是唯一的.

习题 6. 考虑带有限补拓扑的 $\mathbb{R}$, 设 $x_1, x_2, \dots$ 是其中的一个序列, 且存在常数 M , 使得同一个点在该序列中重复出现的次数小于 M . (例如取 $1, 2, 3, \dots$ 就是这样的序列.) 那么该序列收敛于 $\mathbb{R}$ 中每个点.

定义 6 (豪斯多夫空间中序列极限的唯一性). 设 X 是一个豪斯多夫空间, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个收敛序列, 则该序列收敛于唯一的极限.

证明. 若该序列收敛于两个不同的极限 x 和 x' , 则存在互不相交的 x 的开邻域 U 和 x' 的开邻域 V . 由极限定义, 存在 $N > 0$ 使得 $n > N$ 时 $x_n \in U \cap V$, 与 $U \cap V = \emptyset$ 矛盾. $\square$

2.4 边界

定义 7 (边界). 设 A 是拓扑空间 X 的子集. A 的边界(记为 ∂A) 定义为

$$\partial A = \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A).$$

例 4. 在 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑下, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

习题 7. 集合 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的有限补拓扑下, 它的边界是什么?

习题 8. 集合 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的离散拓扑下, 它的边界是空集.

定理 4 (边界点的刻画). 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集, $x \in X$. 则 $x \in \partial A$ 当且仅当 x 的每个邻域都与 A 和 $X \setminus A$ 相交.

证明. 1. 设 $x \in \partial A = (A \cup A') \setminus \text{Int}(A)$ (其中 A' 是 A 的极限点集), U 是包含 x 的任意开集. 无论 $x \in A$ 或 $x \in A'$, 根据极限点定义, $U \cap A$ 都不是空集. 又若 $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, 那么 $U \subset A$, 这与 $x \notin \text{Int}(A)$ 矛盾. 故必要性得证.

2. 反之, 由 x 的任何邻域与 $X \setminus A$ 相交可知 x 一定不是 A 的内点. 若 $x \in A$, 就证明了 $x \in \partial A$. 若 $x \notin A$, 则由条件和极限点定义知道 x 是 A 的极限点, 于是 $x \in \partial A$ 仍旧成立. $\square$

定理 5 (边界的性质). 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集, 则成立如下结论:

- 1) ∂A 是闭集;
- 2) $\partial A = \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(X \setminus A)$
- 3) $\partial A \cap \text{Int}(A) = \emptyset$;
- 4) $\partial A \cup \text{Int}(A) = \text{Cl}(A)$;
- 5) $\partial A \subset A$ 当且仅当 A 是闭集;
- 6) $\partial A \cap A = \emptyset$ 当且仅当 A 是开集;
- 7) $\partial A = \emptyset$ 当且仅当 A 既是开集, 又是闭集.

证明. 1)-3) 是显然的.

4) 注意到 $\text{Int}(A) \subset \text{Cl}(A)$, 从而由边界 ∂A 的定义, 成立

$$\text{Cl}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A.$$

5) 由上式, $\partial A \subset A$ 导致 $\text{Cl}(A) \subset A$, 于是 $A = \text{Cl}(A)$ 是闭集. 反之, 利用上式, $A = \text{Cl}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A$, 从而必有 $\partial A \subset A$.

6) A 是开集当且仅当 $\text{Int}(A) = A$, 充分性由 3) 即得. 反之, 若 $\partial A \cap A = \emptyset$, 利用

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) &= \text{Cl}(A) \setminus \partial A = (A \cup A') \setminus \partial A \\ &= (A \setminus \partial A) \cup (A' \setminus \partial A) = A \cup (A' \setminus \partial A) \supset A \end{aligned}$$

即得 $\text{Int}A = A$. 这里 A' 是 A 的极限点集. $\square$

第三讲 拓扑子空间

从这一讲开始, 我们介绍如何用已知的拓扑结构在新的集合上构造拓扑. 这里新的集合主要是指三种情形: 原集合的子集, 原集合的笛卡尔积集, 以及原集合的商集 (对原集合划分所得等价类的集合). 这一讲我们介绍这三者中最简单的子空间拓扑.

3.1 子空间拓扑

定义 1 (子空间拓扑). 设 X 是具有拓扑 $\mathcal{T}$ 的拓扑空间, Y 是 X 的子集. 定义 $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$, 称为 Y 上的子空间拓扑. Y 在此拓扑下被称作 X 的一个拓扑子空间. 如果 V 是 Y 在子空间拓扑下的一个开集, 就称 $V \subset Y$ 相对 Y 是开的.

我们可以利用定义直接验证 $\mathcal{T}_Y$ 确实是集合 Y 上的一个拓扑. 所以上述定义是合理的.

例 1. 考虑带标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 的子集 $Y = [0, 1)$, 则 $[0, \frac{1}{2})$ 是 Y 的开集, $[\frac{1}{2}, 1)$ 是 Y 的闭集. 将整数集 $\mathbb{Z}$ 视作 $\mathbb{R}$ 的拓扑子空间, 则 $\mathbb{Z}$ 的子空间拓扑就是其离散拓扑, 因为 $\mathbb{Z}$ 中任何单点集都是开集.

定理 1 (子空间的拓扑基). 设 X 是一个拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是 X 上拓扑的一个拓扑基. 若 Y 是 X 的子集, 则 $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ 就是 Y 作为 X 的拓扑子空间的一个拓扑基.

证明. 我们用第一讲定理 2 证明.

首先注意 $\mathcal{B}_Y$ 是 Y 中的一族开集. 设 V 是 Y 中的任意一个开集, 则根据子拓扑定义, 存在 X 中开集 U 使得 $V = U \cap Y$. 对 V 中任意一点 x , (从而 $x \in U$), 由拓扑基的性质, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$, 从而 $x \in B \cap Y \subset V$. 由于 $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, 这就证明了 $\mathcal{B}_Y$ 是 Y 的一个拓扑基. $\square$

例 2. 设 S 是具有标准拓扑的 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面, 那么由 $\mathbb{R}^3$ 中的开球与 S 相交所得到的 S 的开“补丁”构成的集族就是拓扑子空间 S 的一个拓扑基.

3.2 拓扑子空间中的闭集

定义 2 (拓扑子空间中的闭集). 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 称 Y 的子集 A 是相对于 Y 的闭集, 如果它是 Y 的子空间拓扑下的闭集.

定理 2 (相对闭集刻画). C 是拓扑空间 X 中相对于拓扑子空间 Y 的闭集, 当且仅当存在 X 的闭集 D , 使得 $C = D \cap Y$.

证明. 必要性. 设 C 是相对于 Y 的闭集, 则 $Y \setminus C$ 是相对于 Y 的开集, 从而有 X 中开集 U 使得 $Y \setminus C = U \cap Y$. 注意 $C \subset Y$, 于是 $C = Y \setminus (U \cap Y) = Y \setminus U = Y \cap (X \setminus U)$, 所以取 $D = X \setminus U$ 即可.

充分性. $Y \setminus C = Y \setminus (D \cap Y) = Y \setminus D = Y \cap (X \setminus D)$, 而 $X \setminus D$ 是 X 中开集, 从而 $Y \setminus C$ 是 Y 中开集, 于是 C 是 Y 中闭集. $\square$

习题 1. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间, U 是 A 的子集. 证明: 1) U 相对于 A 的闭包就是 U 相对于 X 的闭包与 A 的交集; 2) U 相对于 A 的内部就是 U 相对于 X 的内部与 A 的交集.

习题 2. 证明: 一个豪斯多夫空间的拓扑子空间仍是豪斯多夫空间.

习题 3. 证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 作为具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 的拓扑子空间的拓扑不是其离散拓扑.

第四讲 连续映射

设 X, Y 是两个集合, f 是定义在 X 上, 取值在 Y 中的一个映射,¹ 即对任意的 $x \in X$, 在 Y 中存在唯一的一点 y . 由于 y 被 x 按对应法则 f 唯一确定, 故记 $y = f(x)$. 设 A, B 是 X 的子集, 则利用集合论知识, 不难验证

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), & f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\ f(A) \setminus f(B) &\subset f(A \setminus B). \end{aligned}$$

又设 Λ 是个指标集, V_λ ($\lambda \in \Lambda$) 是 Y 的子集, 则

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda), & \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda) &= f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right), \\ f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(W) &= f^{-1}(V \setminus W). \end{aligned} \tag{4.1}$$

这里 $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ 是 V 的原像.

这一讲我们严格定义什么是连续映射, 介绍其基本性质, 以及构造连续映射的基本方法.

¹注意: 映射包括定义域 X , 像集 Y , 以及对应法则 f 三要素. 三者有一个不同, 对应的就是不同的映射. 例如, $f: X \rightarrow Y$ 和 $f: X \rightarrow f(X) \subsetneq Y$ 是两个不同的映射. 这里虽然定义域和对应法则相同, 但像集不同: 由于假设 $f(X)$ 是 Y 的真子集, 前一个映射不是满射, 而后一个是满射.

4.1 定义

定义 1 (连续映射的开集定义). 设 X, Y 是拓扑空间, f 是 X 到 Y 的映射. 称 f 是连续的, 如果对于 Y 中任意开集 U , 其原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

利用公式(4.1), 我们有

定理 1 (连续映射的闭集定义). 设 X, Y 是拓扑空间, f 是 X 到 Y 的映射. 则 f 是连续的, 当且仅当对于 Y 中任意闭集 V , 其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的闭集.

例 1. X 上的恒等映射 $x \mapsto x$ 是连续映射.

例 2. 取定 Y 中一点 y_0 , 则常值映射 $x \mapsto y_0$ 是连续映射.

注意, 很容易举例说明连续映射一般来说未必将开集映为开集, 或闭集映为闭集.

定理 2 (连续性的拓扑基判定). 设 X, Y 是拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是 Y 上拓扑的一个拓扑基, 则 $f: X \rightarrow Y$ 连续当且仅当对任意 $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

证明. 必要性: 显然. 充分性: 设 V 是 Y 上任意开集, 则它可以表示为拓扑基中开集的并集: $V = \bigcup_{j \in J} U_j$, 其中 $U_j \in \mathcal{B}$, J 是一个指标集. 那么 $f^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$ 是 X 上的开集. $\square$

以上关于连续映射的定义都是整体的. 为了和数学分析中学过的连续函数建立联系, 我们给出如下重要的定理.

定理 3 (连续性的局部刻画). 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的, 当且仅当对任意点 $x \in X$, 以及对 $f(x)$ 的任一邻域 U , 存在 x 的邻域 V 使得 $f(V) \subset U$.

证明. 必要性. 设 f 是连续映射. 不妨设 U 是 $f(x)$ 在 Y 中的一个开邻域, 则 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集且包含 x . 取 $V = f^{-1}(U)$ 即可.

充分性. 对于 Y 中任意开集 U , 考虑其原像 $f^{-1}(U)$. 对任意 $x \in f^{-1}(U)$, 由条件, 存在开集 $V \ni x$ 使得 $V \subset f^{-1}(U)$. 这就表明 $f^{-1}(U)$ 是开集. $\square$

点 x 的邻域中的点可以看作是和 x 接近的点. 这个定理表明, 连续映射确实把与 x 接近的点映到与 $f(x)$ 接近的点, 没有出现“撕裂”, 与我们对“连续”的直观感受相符.

4.2 连续映射的性质

定理 4 (闭包性质). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的, $A \subset X$. 则 $f(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(f(A))$.

证明. 若 $x \in A$, 则显然 $f(x) \in \text{Cl}(f(A))$. 现设 $x \in \text{Cl}(A) \setminus A$, 则 x 是 A 的极限点. 对 $f(x)$ 的任意邻域 U , $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域. 由极限点的定义, 其中有 A 中的不同于 x 的点, 记作 x' . 如果 $f(x') = f(x)$, 则 $f(x) \in f(A)$, 从而定理成立. 如果 $f(x') \neq f(x)$, 则 U 中有不同于 $f(x)$ 的 $f(A)$ 的点, 所以 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的极限点, 也得到 $f(x) \in \text{Cl}(f(A))$. $\square$

习题 1. 证明该定理的逆命题也成立, 即: 如果对任意 $A \subset X$, 成立 $f(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(f(A))$, 则 f 连续.

定理 5 (序列性质). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射. 如果 X 中的一个点列 $x_1, x_2, \dots$ 收敛到 x , 则 Y 中的点列 $f(x_1), f(x_2), \dots$ 收敛到 $f(x)$.

证明. 对 Y 中 $f(x)$ 的任意邻域 U , $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域, 从而存在 N 使得当 $n > N$ 是 $x_n \in f^{-1}(U)$, 即 $f(x_n) \in U$, 从而 $f(x_n)$ 收敛到 $f(x)$. $\square$

4.3 连续映射的构造

通过连续映射研究拓扑空间的性质是一个重要的行之有效的方法. 实际问题中构造连续映射需要结合具体情况, 往往需要有相当强的技巧. 不过从宏观策略来讲, 以下几种化繁为简的方法具有一般性, 需要掌握.

首先不难直接证明如下结果.

定理 6 (复合映射的连续性). 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 都是连续映射, 则复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也是连续的.

定理 7 (粘接引理). 设 X 是拓扑空间, A 和 B 是闭集, 且 $A \cup B = X$. 将 A, B 看作 X 的拓扑子空间. 如果 $f: A \rightarrow V$ 和 $g: B \rightarrow V$ 是连续映射, 且对于 $A \cap B$ 中所有点 x , 成立 $f(x) = g(x)$, 则由

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

定义的映射 $h: X \rightarrow Y$ 是连续的.

证明. 设 C 是 Y 中闭集, 则 $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. 由 f 的连续性, $f^{-1}(C)$ 在 A 中闭, 从而有 X 的闭集 D , 使得 $f^{-1}(C) = D \cap A$. 注意到 A 是 X 中的闭集, 从而 $f^{-1}(C)$ 是 X 中闭集. 类似的可证明 $g^{-1}(C)$ 也在 X 中闭, 从而 $h^{-1}(C)$ 是 X 中的闭集. 这就得到了 h 的连续性. $\square$

定理 8 (限制). 设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 而 A 是 X 的拓扑子空间, 则 $f|_A: A \rightarrow Y$ 是连续的.

证明. 设 U 是 Y 的开集, 则 $f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$. 根据拓扑子空间的定义, 这也是 A 的开集. $\square$

习题 2. 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑, 那么从 $(X, \mathcal{T}_1)$ 到 $(X, \mathcal{T}_2)$ 的恒等映射是连续的充要条件是 $\mathcal{T}_1$ 细于 $\mathcal{T}_2$.

定义 2 (一致收敛). 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是从集合 X 到度量空间 (Y, d) 的映射序列. 称该序列 $\{f_n\}$ 一致收敛 到映射 $f: X \rightarrow Y$, 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 对于 $n > N$ 以及任意的 $x \in X$, 都成立

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

定理 9 (一致收敛的极限定理). 设 $\{f_n\}$ 是从拓扑空间 X 到度量空间 Y 的连续映射的一个序列. 若 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f: X \rightarrow Y$, 则 f 连续.

证明. 1. 设 V 是 Y 的一个开集, $x_0 \in f^{-1}(V)$. 要找到 x_0 的一个邻域 U , 使得 $f(U) \subset V$.

2. 令 $y_0 = f(x_0)$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得球 $B(y_0, \varepsilon) \subset V$. 应用一致收敛性, 可找到 N 使得对 $n \geq N$, 及任意 $x \in X$, 成立

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3.$$

3. 由 f_N 的连续性, 存在 x_0 的一个邻域 U , 使得 $f_N(U) \subset B(f_N(x_0), \varepsilon/3)$.

下面证明 $f(U) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset V$. 为此, 当 $x \in U$ 时, 成立

$$\begin{aligned} d(f(x), f_N(x)) &< \varepsilon/3, \quad \text{依据 } N \text{ 的选取,} \\ d(f_N(x), f_N(x_0)) &< \varepsilon/3, \quad \text{依据 } U \text{ 的选取,} \\ d(f_N(x_0), f(x_0)) &< \varepsilon/3, \quad \text{依据 } N \text{ 的选取.} \end{aligned}$$

于是由三角不等式, 即得 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. $\square$

例 3. 设 A 是度量空间 (X, d) 的子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

证明: f 是连续映射.

证明. 显然 f 是个函数. 对任意 $x \in X$, 由下确界定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $a \in A$ 使得 $f(x) \leq d(x, a) \leq f(x) + \varepsilon$. 对任意 $x' \in X$, 成立 $f(x') \leq d(x', a)$. 此式与 $-f(x) - \varepsilon \leq -d(x, a) \leq -f(x)$ 相加, 得到 $f(x') - f(x) - \varepsilon \leq d(x', a) - d(x, a) \leq d(x, x')$. (最后不等号利用了三角不等式.) 于是 $f(x') - f(x) \leq d(x, x') + \varepsilon$. 由 ε 的任意性, 即得 $f(x') - f(x) \leq d(x, x')$. 再由 x, x' 的任意性及该式的对称性, 成立 $f(x) - f(x') \leq d(x, x')$. 于是得到 $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$. 由此不难用连续性在度量空间情形的 $\varepsilon - \delta$ 语言说明 f 的连续性. $\square$

习题 3. 设 X 是拓扑空间, Y 是度量空间, $f_n: X \rightarrow Y$ 是一致收敛到 f 的连续映射序列, 且 x_n 是 X 中收敛到 x 的点列. 证明: $f_n(x_n)$ 收敛到 $f(x)$.

习题 4. 设 X 是拓扑空间, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 证明: $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 也是 $X \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续函数.

第五讲 拓扑同胚

拓扑学研究图形等对象在连续变换下的不变性质. 这里连续变化指既不出现“撕裂”, 也不出现“粘合”. 前者要求映射是连续的, 后者实质上要求映射的逆映射存在, 而且也是连续的. 这种双连续映射就是拓扑同胚映射. 这一讲我们介绍拓扑同胚的基本性质和一些具体例子.

5.1 同胚映射

定义 1 (同胚). 设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 且其逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 存在. 如果 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 是一个同胚. 如果 X 和 Y 间存在一个同胚, 就称 X 和 Y 是同胚的 (或拓扑等价), 记作 $X \cong Y$.

由定义可见在同胚 f 作用下, 开集的像和原像都是开集. 同胚映射建立了 X 和 Y 上拓扑之间的且与集合交、并、补运算关系兼容的对应. 这个概念和代数结构间的同构 (如线性空间同构) 是类似的. 所以从拓扑学角度讲, 同胚的拓扑空间是一样的: 虽然它们可能由不同的元素构成, 从集合论角度讲绝不相同, 但在刻画其中点的远近时, 两个拓扑的功能是完全一样的.

拓扑等价是所有拓扑空间构成的集合中的一个等价关系, 即满足

- $X \cong X$: 同胚是恒等映射 $\text{id}: X \rightarrow X$;
- 若 $X \cong Y$, 则 $Y \cong X$: 设 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚, 则 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是同胚;
- 若 $X \cong Y, Y \cong Z$, 则 $X \cong Z$: 设 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚, $g: Y \rightarrow Z$ 是同胚, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是同胚.

对拓扑空间按该等价关系分类, 是拓扑学的核心问题.

例 1. 回忆在复变函数课程中, 称复平面上的两个子集 U, V 是共形等价的, 如果存在全纯函数 $h: U \rightarrow V$, 且它的逆 $h^{-1}: V \rightarrow U$ 存在, 并且 h^{-1} 也是全纯函数. 由于全纯函数是连续函数, 所以共形等价的 U 和 V 作为平面的拓扑子空间也是拓扑等价的. 由黎曼映射定理, 复平面上不等同于复平面的任意单连通区域都与单位圆共形等价. 所以开半平面和单位圆是同胚的 (可通过分式线性变换直接构造双全纯映射). 但由刘维尔定理 (有界整函数必为常数), 全平面和单位圆并不共形等价.

例 2 (全平面与半开平面及开圆盘同胚). 设 $X = \mathbb{R}^2$ 带标准拓扑, 半平面 $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ 和开圆盘 $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 分别是 $X = \mathbb{R}^2$ 的拓扑子空间. 那么 $f(x, y) = (e^x, y)$ 是 X 和 Y 的同胚; $g(r, \theta) = (\frac{r}{1+r}, \theta)$ 是 X 到 Z 的同胚, 这里 (r, θ) 是极坐标.

例 3. 记 $X = [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ 和单位圆周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 分别是具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑子空间. 记 S^1 上点为 p_θ , 其极坐标下的幅角是 θ . 考虑映射 $f: X \rightarrow S^1$, $f(\theta) = p_\theta$. 不难验证 f 存在逆映射, 且 f 是连续的. 但是 f^{-1} 并不连续, 因为 $f([0, 1))$ 不是 S^1 上的开集, 而 $[0, 1)$ 却是 X 的开集. 事实上我们将利用下文的定理 2 证明 X 与 S^1 并不同胚.

例 4. 复分析中学过的球极平面投影是去掉一点的球面到平面的同胚.

例 5. 通过构造可逆仿射线性变换, 可证明任意三角形都同胚; 通过适当的三角剖分, 构造分片的可逆仿射线性变换, 可知平面上任意凸多边形都和三角形同胚.

例 6. 平面上第一象限由 x -轴、 y -轴和直线 $x + y = 1$ 围成的三角形与单位圆和第一象限相交形成的扇形同胚, 同胚映射是 $(x, y) \mapsto (\sqrt{x}, \sqrt{y})$. 由此可知任意长方形、三角形都与圆同胚;

习题 1. 证明标准拓扑下 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚; 进一步, $\mathbb{R}$ 上任意两个开区间都同胚.

5.2 嵌入映射

定义 2 (嵌入). 拓扑空间 X 在 Y 中的嵌入 是一个单连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 它把 X 同胚地映到 Y 的拓扑子空间 $f(X)$.

定义 3. 设 X 是一个拓扑空间, $f: [-1, 1] \rightarrow X$ 是一个嵌入. f 的像集称作 X 中的一段曲线. 如果 $f: S^1 \rightarrow X$ 是一个嵌入, 其像集称作 X 中的一条简单闭曲线.

嵌入 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 就被称作一个纽结.

例 7. 如下 $\mathbb{R}^3$ 中参数曲面 A 叫做平环:

$$A = \{(\cos \theta, \sin \theta, t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\epsilon \leq t \leq \epsilon\},$$

其中 $\epsilon > 0$ 是个非常小的参数. A 和如下扭转 n 次的曲面 A_n 是同胚的 (将 A 中参数 (θ, t) 对应的点映到 A_n 中具有相同参数的点)

$$\begin{aligned} A_n = \{ & ((1 + t \sin(n\theta)) \cos \theta, (1 + t \sin(n\theta)) \sin \theta, t \cos(n\theta)) : \\ & 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\epsilon \leq t \leq \epsilon \}. \end{aligned}$$

习题 2. 构造一个 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的嵌入.

5.3 拓扑性质

定义 4. 在同胚下不变的性质 (概念, 量) 称作拓扑性质 (概念, 不变量).

对拓扑性质的研究是拓扑学的关键性的课题. 拓扑性质是判断两个空间是否同胚的必要条件.

上一节的例子告诉我们, 有界性、光滑性等都不是拓扑性质.

定理 1. 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一个同胚, X 是一个豪斯多夫空间, 则 Y 也是一个豪斯多夫空间.

证明. 设 y_1, y_2 是 Y 中不同两点, 则 $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ 是 X 中不同两点, 从而存在 X 中不相交的开集 U_1, U_2 分别包含 $f^{-1}(y_1)$ 和 $f^{-1}(y_2)$. 那么 $f(U_1)$ 和 $f(U_2)$ 均为 Y 中开集且互不相交, 并且 $y_1 \in f(U_1), y_2 \in f(U_2)$. $\square$

由此我们推断具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 和具有有限补拓扑的 $\mathbb{R}$ 绝不同胚.

定理 2 (不动点性质). 设 X 是拓扑空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续映射. 如果存在点 $x^* \in X$ 使得 $f(x^*) = x^*$, 则称 x^* 是 f 的一个不动点. 如果 X 到自身的连续映射均有不动点, 则称拓扑空间 X 具有不动点性质. 不动点性质是拓扑性质.

证明. 设 X 与 Y 拓扑等价, X 有不动点性质, $h: X \rightarrow Y$ 是同胚映射, ψ 是 Y 上的连续映射. 则 $\varphi = h^{-1} \circ \psi \circ h$ 是 X 上的连续映射. 设其不动点是 x^* , 则 $h(x^*)$ 就是 ψ 的不动点. 所以 Y 也有不动点性质. $\square$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xleftarrow{h^{-1}} & Y \end{array}$$

例 8. 区间 $I = [0, 1]$ 具有不动点性质, 而单位圆周 S^1 没有不动点性质.

证明. 1. 对任意连续映射 $f: I \rightarrow I$, 如果 $0, 1$ 都不是不动点, 必有 $f(0) > 0, f(1) < 1$, 从而对函数 $g(x) = f(x) - x$ 在 $[0, 1]$ 上利用介值定理, 必有一点 $x^* \in (0, 1)$ 使得 $f(x^*) = x^*$.

2. 记 $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$. 作映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 其中 $f(z) = -z$. 它没有不动点. $\square$

习题 3. 利用适当的拓扑性质证明 $\mathbb{R}$ 和它的子空间 $\mathbb{Q}$ 不同胚.

5.4 映射诱导拓扑

设有映射 $f: X \rightarrow Y$, 其中 Y 是拓扑空间, 具有拓扑 $\mathcal{T}_Y$, 而 X 还没有给定拓扑. 显然, 如果在 X 上给离散拓扑, 那么 f 就必然连续. 但这个拓扑太细了. 如果 X 上给平凡拓扑, 则 f 一般都不会连续.

但我们可以利用 f 把拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 转移成 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(U) \subset X : U \in \mathcal{T}_Y\}$. 利用第四讲 (4.1) 式, 不难知道这确实是 X 上的一个拓扑. 显然, 这是使得 $f: X \rightarrow Y$ 连续的最小 (最粗) 的拓扑.

一般来说, 考虑一族映射 $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$, 那么也类似地可以建立所谓 X 上的“弱拓扑”, 这是保证所有 f_λ 均连续的最粗的拓扑.

1. 拓扑子基

为构造弱拓扑, 我们先引入如下较拓扑基更加简单的概念.

定义 5 (拓扑子基). 设 $\mathcal{C}$ 是非空集合 X 的某些子集构成的集族. 称 $\mathcal{C}$ 是 X 的一个覆盖, 如果 $\mathcal{C}$ 中子集的并集就是 X . 定义 X 的子集族

$$\mathcal{B} = \{B : B \text{ 是 } \mathcal{C} \text{ 中有限个元素的交集}\}.$$

则容易验证 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基, 称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个拓扑子基.

我们可以认为拓扑子基中的元素是一些原材料, 通过有限次剪裁 (即有限交运算), 就得到了可拼装出任意开集的基本原件, 即拓扑基.

2. 弱拓扑与函数列的点态收敛

定义 6 (弱拓扑). 设 X 是一个集合, Λ 是一个指标集, 并且对任意 $\lambda \in \Lambda$, 存在一个拓扑空间 $(Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, 以及一个映射 $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$. 称 X 上使得每个 f_λ 都连续的最粗 (即最小) 的拓扑 $\mathcal{T}$ 为由映射族 $\{f_\lambda\}$ 确定的弱拓扑.

定理 3 (弱拓扑的存在性). 记 $\mathcal{N} = \{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda\}$,

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{N} \text{ 中有限个元素的交集}\},$$

则 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基, 它生成 X 上由 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 确定的弱拓扑.

证明. 1. 显然 $\mathcal{N}$ 是生成 $\mathcal{B}$ 的拓扑子基. 它生成的 X 上的拓扑记作 $\mathcal{T}$.

2. 由于 $\mathcal{N}$ 中元素都是 $\mathcal{T}$ 的开集, 从而 $f_\lambda: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ 都是连续的.

3. 设 $\mathcal{T}'$ 是 X 上使得 f_λ 都连续的一个拓扑 (例如离散拓扑). 为使 f_λ 连续, 所有 $\mathcal{N}$ 的元素都必须是开集, 即 $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}'$. 于是 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, 从而 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
□

例 9. 设 X 是个集合, $(Y, \mathcal{T})$ 是个拓扑空间. 考虑 $X \rightarrow Y$ 的所有映射的集合 Y^X . 对任意 $x \in X$, 考虑 $Y^X \rightarrow Y$ 的赋值映射 $e_x(f) = f(x)$. 则所有 e_x 确定了由映射构成的集合 Y^X 上的一个弱拓扑.

设 $\{f_n\}$ 是 Y^X 中一系列按弱拓扑收敛的映射, 则对任意 $x \in X$, 根据连续映射 e_x 的序列性质, 点列 $e_x(f_n) = f_n(x)$ 要按 Y 的拓扑收敛到 $e_x(f) = f(x)$. 所以映射空间 Y^X 中的映射序列的弱收敛就是普通函数列点态收敛的一种推广.

特别地, 取 X 是个赋范线性空间, 考虑 X 上所有连续线性泛函 (即取值为带标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 的连续线性映射) 构成的集合 X^* . 对任意 $x \in X$, 定义赋值映射 $e_x: X^* \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $e_x(f) = f(x)$. 为保证所有赋值映射连续, 我们可确定 X^* 上的一个弱拓扑. 称序列 $\{f_n\}$ 弱收敛 到 f , 按上述对弱拓扑的说明, 就是对任意 $x \in X$, 在 $\mathbb{R}$ 上成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. 这就是泛函分析中的泛函序列弱收敛的概念. 泛函分析及其应用中的一个重要的问题就是判断给定弱拓扑的映射空间 Y^X 中的什么样的子集具有序列紧性. ——我们发现分析中的许多问题的根其实是扎在拓扑之中的.

3. 弱拓扑与子空间拓扑

定理 4 (子空间拓扑). 设 A 是拓扑空间, $A \subset X$. 映射 $i: A \rightarrow X$, $i(x) = x$ 称为 包含映射. A 上由 i 决定的弱拓扑就是子空间拓扑.

证明. 注意到对于 X 中开集 U , $i^{-1}(U) = A \cap U$, 而后者根据子空间拓扑的定义, 就是子空间中的开集. □

4. 强拓扑

对某些映射 $f: X \rightarrow Y$, 其中 X 上已有拓扑结构而 Y 上没有 (显然 Y 上拓扑越粗容易保证 f 连续性), 则有可能借助 f 把 X 上的拓扑转移到 Y 上, 使得 f 连续. 这是 Y 上使 f 连续的最细的拓扑, 称为 Y 上的“强拓扑”(强是指开集多, 从而判别点是否临近的要求要强一些). 除了上述子空间拓扑, 强、弱拓扑的观点还有助于我们理解下面两讲中介绍的乘积空间和商空间上拓扑的构造.

定义 7 (强拓扑). 设有一族拓扑空间 $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$. Y 上使得每个 $f_\lambda: (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ 都连续的最细 (最大) 的拓扑 $\mathcal{T}$ 称作由 $\{f_\lambda\}$ 确定的强拓扑.

定理 5 (强拓扑的存在性). 设有一族拓扑空间 $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ 及映射 $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$. 则 Y 上由 $\{f_\lambda\}$ 确定的强拓扑是

$$\mathcal{T} = \{U \subset Y: \text{每个 } f_\lambda^{-1}(U) \text{ 都是 } X_\lambda \text{ 中的开集}\}.$$

证明. 1. 先证明 $\mathcal{T}$ 是个拓扑. 显然 $\emptyset \in \mathcal{T}$. 又 $f_\lambda^{-1}(Y) = X_\lambda$ 是开集, 从而 $Y \in \mathcal{T}$.

再设 $U, V \in \mathcal{T}$, 则 $f_\lambda^{-1}(U \cap V) = f_\lambda^{-1}(U) \cap f_\lambda^{-1}(V)$ 也是 X_λ 中开集. 从而 $\mathcal{T}$ 中有限个元素的交集仍在 $\mathcal{T}$ 中.

又对于指标集 J , 对任意 $j \in J$, 设 $U_j \in \mathcal{T}$, 则

$$f_\lambda^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f_\lambda^{-1}(U_j)$$

也是 X_λ 中的开集. 这就证明了 $\mathcal{T}$ 是 Y 上的拓扑.

2. 显然对于拓扑 $\mathcal{T}$, 所有映射 f_λ 都是连续的.

3. 记 $\mathcal{T}'$ 是使得每个 f_λ 都连续的 Y 上的一个拓扑 (例如取平凡拓扑), 我们要证明 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. 事实上, 对任意 $U \in \mathcal{T}'$, 根据连续映射的定义, 对任意 λ , $f_\lambda^{-1}(U)$ 都是 X_λ 上开集. 从而 $U \in \mathcal{T}$. $\square$

习题 4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 是一一映射, 且对 X 的任意子集 A , 均成立 $f(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(f(A))$. 证明 f 是同胚.

第六讲 乘积拓扑空间

这一讲我们介绍如何在拓扑空间的笛卡尔积上建立有用的拓扑结构.

6.1 积拓扑

定义 1 (积拓扑). 设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间. 则

$$\mathcal{T}_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda) : U_\lambda \in \mathcal{T}_X, V_\lambda \in \mathcal{T}_Y, \Lambda \text{ 是任意指标集} \right\}$$

是 $X \times Y$ 上的一个拓扑, 称为 $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$ 的 积拓扑. 拓扑空间 $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ 则被称为拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 的 乘积拓扑空间, 记为 $(X, \mathcal{T}_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$.

习题 1. 证明 $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ 是生成 $\mathcal{T}_{X \times Y}$ 的一个拓扑基. 这里 $\mathcal{B}_X$ 和 $\mathcal{B}_Y$ 分别是 X 和 Y 的拓扑基.

我们看到, 形如 $U \times Y, X \times V$ (其中 $U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y$) 的“带形”子集构成乘积拓扑空间 $X \times Y$ 的一个拓扑子基. 这些元素的有限交构成 $X \times Y$ 的若干“长方体”子集, 这些长方体子集就构成 $X \times Y$ 的一个拓扑基. $X \times Y$ 中的开集就是这些大大小小的长方体子集拼凑出来的 (允许互相有重叠).

定理 1 (乘积拓扑与弱拓扑). 设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间. 在 $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ 上定义投影映射:

$$j_X : X \times Y \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x;$$

$$j_Y : X \times Y \rightarrow Y, \quad (x, y) \mapsto y.$$

则 $X \times Y$ 上由 j_X, j_Y 决定的弱拓扑就是乘积拓扑.

证明. 1. 对任意 $U \in \mathcal{T}_X$ 和 $V \in \mathcal{T}_Y$, 成立 $j_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$, $j_Y^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{T}_{X \times Y}$, 从而 j_X, j_Y 在乘积拓扑下连续. 于是, 如果设 $X \times Y$ 上由 j_X, j_Y 决定的弱拓扑是 $\mathcal{T}$, 则 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{X \times Y}$.

2. 现在设 $U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y$. 利用公式

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

成立

$$U \times V = (U \cap X) \times (Y \cap V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = j_X^{-1}(U) \cap j_Y^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

于是对任意 $U_\lambda \in \mathcal{T}_X, V_\lambda \in \mathcal{T}_Y$,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda) \in \mathcal{T}.$$

这就证明了 $\mathcal{T}_{X \times Y} \subset \mathcal{T}$. $\square$

定理 2 (度量空间上的乘积拓扑). 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个度量空间. 在 $X \times Y$ 上可定义度量 d 为

$$d(p, q) = \max(d_X(p_x, q_x), d_Y(p_y, q_y)), \quad \forall p = (p_x, p_y), \quad q = (q_x, q_y) \in X \times Y.$$

该度量决定的 $X \times Y$ 上的拓扑就是 $X \times Y$ 上的乘积拓扑.

证明. 1. 不难验证 d 确实是 $X \times Y$ 上的度量.

2. 设 A 是乘积空间 $X \times Y$ 中的一个开集, 则由乘积拓扑开集的定义, 对任意点 $p \in A$, 存在 X 的开集 U 和 Y 的开集 V 使得 $p \in U \times V \subset A$. 于是 $p_x \in U$ 且 $p_y \in V$. 利用度量空间中开球构成拓扑基, 存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得 $B(p_x, \varepsilon) \subset U$, $B(p_y, \delta) \subset V$. 于是 $B(p_x, \min(\varepsilon, \delta)) \subset U$, $B(p_y, \min(\varepsilon, \delta)) \subset V$. 根据 d 的定义, 这就意味着 $B(p, \min(\varepsilon, \delta)) \subset (U \times V) \subset A$. 由 $p \in A$ 的任意性, 得到 $A = \bigcup_{p \in A} B(p, r_p)$. 于是 A 是度量 d 确定的拓扑下的开集.

3. 反之, 设 $B(p, r)$ 是度量空间 $(X \times Y, d)$ 中的一个开球 (实际上是开正方形). 利用等式

$$B(p_x, r) \times B(p_y, r) = B(p, r),$$

而 $B(p_x, r)$ 和 $B(p_y, r)$ 分别是 X, Y 中的开集, 即 $B(p_x, r) \times B(p_y, r)$ 是乘积空间中的开集, 于是 $B(p, r)$ 也是乘积空间中的开集. 利用 $\{B(p, r)\}$ 是度量拓扑的一个拓扑基, 就知道度量拓扑中的开集也是乘积空间中的开集. $\square$

6.2 积拓扑的性质

定理 3 (映射的分量及其连续性). 对于一个映射 $f: A \rightarrow X \times Y$, 称 $f_X = j_X \circ f, f_Y = j_Y \circ f$ 是 f 的分量. 映射 f 连续的充分必要条件是 its 分量都连续.

证明. 如果 f 连续, 则由复合映射的连续性, 各个分量都是连续的. 反之, 对任意指标集 Λ 和 $\lambda \in \Lambda$, 设 U_λ 是 X 中开集, V_λ 是 Y 中开集, 则

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times V_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda \times V_\lambda) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}((U_\lambda \times Y) \cap (X \times V_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (f^{-1}(U_\lambda \times Y) \cap f^{-1}(X \times V_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (f_X^{-1}(U_\lambda) \cap f_Y^{-1}(V_\lambda)) \end{aligned}$$

是 A 中开集. $\square$

例 1. 对固定的 $a \in Y$, 定义映射 $i_a: X \rightarrow X \times Y$. 则 i_a 是个嵌入映射.

证明. 显然 i_a 是单射. 由于其分量映射 $j_X \circ i_a$ 和 $j_Y \circ i_a$ 分别是 X 上恒等映射和 $X \rightarrow Y$ 的常值映射, 故都连续, 从而 i_a 连续. 最后, 由于 $i_a^{-1} = j_X|_{X \times \{a\}}$, 而连续映射 j_X 限制在其拓扑子空间上仍然连续, 故 $i_a^{-1}: X \times \{a\} \rightarrow X$ 连续. 这就证明了 i_a 是个嵌入. $\square$

定理 4 (子空间与乘积拓扑). 设 X, Y 是拓扑空间, 且 $A \subset X, B \subset Y$, 则 $A \times B$ 作为 $X \times Y$ 子空间的拓扑和作为拓扑子空间 A, B 的乘积拓扑是一样的. 这里 A 是 X 的拓扑子空间, B 是 Y 的拓扑子空间.

证明. 1. 记 $A \times B$ 作为 $X \times Y$ 的子空间的拓扑是 $\mathcal{T}_1$, 作为拓扑子空间的乘积拓扑是 $\mathcal{T}_2$.

2. 回忆形如 $U \times V$ (U, V 分别是 X, Y 的开集) 构成 $X \times Y$ 的一个拓扑基, 从而 $\{(U \times V) \cap (A \times B)\}$ 是生成 $\mathcal{T}_1$ 的一个拓扑基. 注意到

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B), \quad (6.1)$$

而后者在 $\mathcal{T}_2$ 中, 故 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

3. 反之, 由于 $(U \cap A) \times (V \cap B)$ 是生成 $\mathcal{T}_2$ 的一个拓扑基, 由(6.1) 知它也是 $\mathcal{T}_1$ 中的元素. 从而 $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. 证毕. $\square$

定理 5 (乘积拓扑下的点集结构). 设 A, B 分别是拓扑空间 X, Y 的子集, 则

$$\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B), \quad \text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B).$$

证明. 1. 由于 $\text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$ 是开解, 且包含在 $A \times B$ 中, 则根据内部的定义, $\text{Int}(A \times B) \supset \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$.

2. 设 U 是 $A \times B$ 的开子集, 则对任意 $p \in U$, 存在 X 和 Y 的开子集 V 和 W 使得 $p \in V \times W \subset U \subset A \times B$. 于是 $V \subset \text{Int}(A)$ 且 $W \subset \text{Int}(B)$. 对 $p \in U$ 取并集, 得到 $U \subset \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$, 从而 $\text{Int}(A \times B) \subset \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$.

3. 设 A, B 分别是 X, Y 的闭子集, 则 $A \times B$ 也是乘积空间的闭集. 这是因为

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = [(X \setminus A) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus B)].$$

因为 $A \times B \subset \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$, 而 $\text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$ 是闭集, 所以 $\text{Cl}(A \times B) \subset \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$ 是显然的.

4. 记 A' 和 B' 分别为 A 和 B 的极限点集, 回忆 $\text{Cl}(A) = A \cup A'$, 从而 $\text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B) = (A \times B) \cup (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$. 显然 $(A \times B) \subset \text{Cl}(A \times B)$.

对任意点 $(x, y) \in A' \times B$, 考虑它的任意邻域 $U \times V$, 其中 U, V 分别是 X, Y 的开集. 注意到 x 是 A 的极限点, 从而 $U \cap A \neq \emptyset$ 且其中含有不同于 x 的 A 中的点, 不妨记作 x' . 于是 $U \times V$ 总与 $A \times B$ 相交, 且至少有一个公共点 (x', y) 不同于 (x, y) . 于是 (x, y) 也是 $A \times B$ 的极限点. 由此推出 $(A' \times B) \subset \text{Cl}(A \times B)$. 类似地成立 $(A \times B') \subset \text{Cl}(A \times B)$, $(A' \times B') \subset \text{Cl}(A \times B)$. 证毕. $\square$

例 2. 如下 $\mathbb{R}^3$ 中旋转面 T^2 称为环面:

$$T^2 = \{((2 + \cos \theta) \cos \varphi, (2 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta) : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

证明它同胚于 $S^1 \times S^1$.

证明. 1. 根据定理 4, $S^1 \times S^1$ 和作为 $\mathbb{R}^4$ 的拓扑子空间的

$$X = \{((\cos \theta, \sin \theta), (\cos \varphi, \sin \varphi)) : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

是同胚的.

2. 构造映射 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 如下:

$$f((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = ((2 + u_1)u_2, (2 + u_1)v_2, v_1).$$

由于每个分量都连续, 它显然是连续的. 令 $h = f|_X$, 则 h 是 X 到 T^2 的映射, 而且由限制性质, 它还是连续的.

3. 另一方面, 做映射 $g: \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ 如下:

$$g(u, v, w) = \left((\sqrt{u^2 + v^2} - 2, w), \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \right),$$

它当 $u^2 + v^2 \neq 0$ 时连续, 所以限制在 T^2 上是连续的. 不难验证 $g|_{T^2} = h^{-1}$. 所以 h 就是所需的同胚映射. $\square$

习题 2. 证明豪斯多夫空间的乘积空间是豪斯多夫空间.

习题 3. 设 (X, d) 是个度量空间. 证明 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数.

习题 4. 设 X, Y, Z 是三个拓扑空间. 证明乘积拓扑空间 $(X \times Y) \times Z$ 和 $X \times (Y \times Z)$ 是拓扑等价的.

6.3 无限个集合的笛卡尔积及其积拓扑 *

这一段是为理解第十二讲介绍的 Tychonoff 定理所作的预备知识, 初学时可以略去.

为了解方程等数学问题的需要, 需要研究集合之间的某些映射的性质. 集合的笛卡尔积的概念使得我们可以把对映射的研究纳入集合论的框架. 例如把 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射写作数列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

那么所有这样的映射和笛卡尔积 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是一样的. 类比一下, $\mathbb{R}$ 上的所有实值函数的集合和 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 可以等价. 一般的, 集合 X 到 Y 的所有映射组成的集合就是笛卡尔积 Y^X . 下面我们就解决如何恰当的定义集合 Y^X 的问题.

定义 2 (J-串). 设 J 是一个指标集. 对于给定的集合 X , X 的元素的 J-串 (J-tuple) 是指一个映射 $x: J \rightarrow X$. 若 $\alpha \in J$, 我们用 x_α 表示 x 在 α 点的值, 称为 x 的第 α 个坐标. 我们用记号

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$$

表示函数 x 本身, 用 X^J 表示 X 中元素的 J -串的全体.

定义 3 (集合族的笛卡尔积). 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是一个用指标集 J 标注的集族 (简称为加标集族), $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 的笛卡尔积定义为使得对于每个 $\alpha \in J$, 有 $x_\alpha \in A_\alpha$ 的 X 的元素的所有 J -串 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ 的集合, 用

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

表示. 也就是说, 它是所有这样的函数

$$x: J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

的集合, 这些函数要满足条件: 对每个 $\alpha \in J$, 成立 $x_\alpha \in A_\alpha$. 如果 A_α 都等于 X , 则 $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ 恰恰就是 X 的元素的 J -串的集合 X^J .

下面定义拓扑空间 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 的笛卡儿积上的积拓扑. 考虑映射

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta, \quad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta.$$

这被称作关于指标 β 的投影.

定义 4 (积拓扑). 令 $\mathcal{S}_\beta$ 表示集族

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ 是 } X_\beta \text{ 中的开集}\},$$

而 $\mathcal{S}$ 是所有 $\mathcal{S}_\beta$ 中的元素的并:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta.$$

这是一个拓扑子基. 由 $\mathcal{S}$ 中任意有限个元素的交集构成的集族 $\mathcal{B}$ 是 $\prod_{\beta \in J} X_\beta$ 上的一个拓扑基, 它生成的拓扑称作 $\prod_{\beta \in J} X_\beta$ 上的积拓扑.

积拓扑是使得所有投影 $\{\pi_\beta\}_{\beta \in J}$ 都连续的最粗的拓扑. 正是这个性质, 使得积拓扑在研究函数空间等问题中较其它拓扑更为有用.

第七讲 商空间

本讲介绍如何用商映射和粘合技术构造拓扑空间, 比如平环, Mobius 带, 球面, 环面, 射影平面等. 这些拓扑空间有丰富的分析、几何和拓扑性质, 在数学研究以及物理和工程应用中都很重要.

7.1 等价关系

等价关系本质是对集合 X 的一个划分.

定义 1 (等价关系). 设 $\mathcal{R}$ 是由集合 X 的非空子集构成的集合族, 满足对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $A \in \mathcal{R}$ 使得 $x \in A$, 则称 $\mathcal{R}$ 在 X 上定义了一个等价关系 $\sim$. $\mathcal{R}$ 的每个元素称为一个等价类. 每个点 x 所在的等价类记为 $\langle x \rangle_{\mathcal{R}}$. 若 x 和 y 在同一等价类, 则称 x 和 y 等价, 记作 $x \sim y$.

例 1. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射. 则

$$\mathcal{R}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$$

在 X 上定义了一个等价关系 $\sim$. 显然 $x \sim x'$ 当且仅当 $f(x) = f(x')$. 换个说法, 就是 $\langle x \rangle = f^{-1}(\{f(x)\})$.

很容易证明

定理 1 (等价关系的性质). 设 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个等价关系, 则

反身性 $x \sim x$;

对称性 若 $x \sim^{\mathcal{R}} x'$, 则 $x' \sim^{\mathcal{R}} x$;

传递性 若 $x \sim^{\mathcal{R}} y, y \sim^{\mathcal{R}} z$, 则 $x \sim^{\mathcal{R}} z$.

7.2 粘合映射与商空间

定义 2 (商空间). 设 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系, 则所有的等价类构成的集合 $\mathcal{R}$ 称为 X 关于 $\sim$ 的 商集, 记作 $X/\sim$. 称映射

$$p: X \rightarrow \mathcal{R}, x \mapsto \langle x \rangle_{\mathcal{R}}$$

为粘合映射. 若 X 上有拓扑 $\mathcal{T}$, 则称 p 在 $\mathcal{R}$ 上决定的相应的强拓扑为商拓扑, 记作 $\mathcal{T}/\sim$. 称拓扑空间 $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 的商空间, 记作 $(X, \mathcal{T})/\sim$.

由强拓扑的定义, 我们立即知道商空间中的子集是开集当且仅当其关于粘合映射的原像是开集.

利用粘合映射可以严格描述对拓扑空间做“粘合”手术的过程, 证明许多拓扑空间的等价性, 所以在构造拓扑空间, 证明拓扑空间同胚等方面有许多应用.

例 2. 设 A 是拓扑空间 X 的闭子集. 将 X 按如下规则分为等价类: A 中所有点属于一类, $X \setminus A$ 中每一点自成一类. 这样得到的商空间称作把 A 捏成一点所得的空间. 例如对平面上的单位闭圆盘 $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, 取 $A = \partial X$, 证明所得商空间 X/A 就是球面, 且商拓扑就是球面作为 $\mathbb{R}^3$ 子集的子空间拓扑.

解. 1. 上述手术过程其实就是厨师“用面皮包包子”的过程. 取平面的极坐标 (r, θ) 表示, 可以把上述过程描述为函数 $f: X \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$f(r, \theta) = (2\sqrt{r(1-r)}\cos\theta, 2\sqrt{r(1-r)}\sin\theta, 2r-1).$$

显然这是一个连续映射.

2. 记 $p: X \rightarrow X \setminus A$ 是粘合映射. 由定义, 这是一个连续的满映射. 以后我们学习了紧性后, 知道 X 是紧集, 从而 $X \setminus A$ 是紧集. 注意 f 诱导了 $X \setminus A \rightarrow S^2$ 的映射 $g: \langle x \rangle \rightarrow f(x)$. 这是个一一对应, 且由强拓扑的定义, 它是连续的 (参见下文定理 5 的证明). 由于 S^2 是豪斯多夫空间, g 是个同构 (第 12 讲定理 9).¹ 这就完成了证明. $\square$

我们注意上述论证具有重要启发意义. 一方面, 粘合映射和商空间是构造新拓扑空间的在数学上非常方便的方法, 不受直观的约束. 另一方面, 从简单例子看出, 这种构造方法在简单情形又和我们的直观相符. 所以这种方法具有极大的推广价值.

例 3 (平环和莫比乌斯带). 考虑 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 的子集族:

$$\mathcal{R}_M = \{ \{(0, y), (1, 1 - y)\} : y \in [0, 1] \} \cup \{ \{(x, y)\} : x \in (0, 1), y \in [0, 1] \},$$

则 $\mathcal{R}_M$ 决定了 X 上的一个等价关系 $\sim_M$. 商空间 $X / \sim_M$ 称为莫比乌斯带. 它是一个不可定向曲面.

如果考虑子集族

$$\mathcal{R}_A = \{ \{(0, y), (1, y)\} : y \in [0, 1] \} \cup \{ \{(x, y)\} : x \in (0, 1), y \in [0, 1] \},$$

则 $\mathcal{R}_A$ 决定了 X 上的一个等价关系 $\sim_A$. 商空间 $X / \sim_A$ 就是平环 $S^1 \times [0, 1]$.

7.3 商映射及其性质

定义 3 (商映射). 设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个满射, 并且 $\mathcal{T}_Y$ 是由 f 确定的强拓扑, (即 $V \subset Y$ 是开集当且仅当 $f^{-1}(V) \subset X$ 是 X 中的开集), 则称 f 是一个商映射.

注意粘合映射是商映射. 商映射之所以重要, 是因为对这类连续映射,

¹可直接用定义证明.

成立类似代数同态基本定理²的结论(下文定理 9): 空间 X 按 f 像点的原像作等价类之后得到的商空间与 f 的像空间 Y 拓扑同胚. 所以从一个商映射就可以得到一个对应的粘合映射.

下面是商映射的一些性质.

定理 2. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个满射, 则 f 是商映射的充分必要条件是: V 是闭集当且仅当 $f^{-1}(V)$ 是闭集.

证明. 利用集合关系式 $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. $\square$

定理 3. 两个商映射的复合映射还是商映射.

证明. 如果 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 都是商映射, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是满射. 设 $W \subset Z$ 是开集, 则 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中开集, 从而 $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 中的开集. 得证. $\square$

定理 4. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是个连续的满射, 则如下条件都是“ f 是商映射”的充分条件.

- 1) f 是开映射, 即任意开集 $U \subset X$ 在 f 下的像集 $f(U)$ 是 Y 中开集;
- 2) f 是闭映射, 即任意闭集 $U \subset X$ 在 f 下的像集 $f(U)$ 是 Y 中闭集.

²群同态基本定理: 设 f 是群 G_1 到 G_2 的满的同态映射, 则 $\ker(f)$ 是 G_1 的正规子群, 且 f 诱导出商群 $G_1/\ker(f)$ 到 G_2 的同构 $\tilde{f}$, 其中 $\tilde{f}(\langle a \rangle) = f(a)$, $\forall a \in G_1$.

此外回忆对线性空间之间的线性映射, 也存在类似结论, 即线性映射基本定理: 设有数域 F 上的线性空间 V_1 和 V_2 , 以及线性映射 $T: V_1 \rightarrow V_2$, 则 T 确定了同构

$$\tilde{T}: V_1/\ker(T) \rightarrow T(V_1), \quad \langle v \rangle \mapsto T(v).$$

商映射由其强拓扑的定义, 可以看作保开集的“同态”, 虽未必是单射, 但把临近的点映到临近的点(连续映射), 邻近的点的原像也比较近(开映射), 所以可以通过“粘合”定义域中若干子集而使之与像集同胚. 请将上述两定理的条件和结论与下面的定理 9 作对比, 以更好地理解定理 9 及商映射的意义.

证明. 1. 设 $U \subset Y$ 是开集, 因为 f 连续, 从而 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集. 又若 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集, 则由开映射性质, $f(f^{-1}(U)) = U$ 是 Y 中开集. 从而 f 是商映射.

2. 类似证明. $\square$

习题 1. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, U 是 Y 的开子集, 则限制映射 $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$ 是商映射.

例 4. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 并且 X 有一个有限闭覆盖 $\{C_1, \dots, C_n\}$ 使得每个 $f(C_k)$ 都是闭集而且 $f|_{C_k}$ 是嵌入. 则 $g: X \rightarrow f(X), x \mapsto f(x)$ 是商映射.

证明. 1. 显然 g 是满射.

2. 设 A 是 X 中闭集, 则 $A \cap C_k$ 都是闭集而且 $A = \bigcup_{k=1}^n (A \cap C_k)$, 从而 $g(A) = f(A) = \bigcup_{k=1}^n f(A \cap C_k)$. 又 $f|_{C_k}$ 是嵌入, 而 $A \cap C_k$ 是 C_k 的闭子集, 则 $f(A \cap C_k)$ 是 $f(C_k)$ 的闭子集. 由已知条件, $f(C_k)$ 是闭集, 从而 $f(A \cap C_k)$ 是 Y 中闭集. 于是 $g(A)$ 是 Y 中闭集. (特别地, 取 $A = X$, 得到 $f(X)$ 是 Y 的闭子集.) 于是 $g(A) \subset f(X)$ 是 $f(X)$ 的闭子集. 这说明 g 是闭映射.

3 设 V 是 $f(X)$ (作为 Y 的拓扑子空间) 的闭集, 则 V 也是 Y 的闭集, 于是根据 f 的连续性, $g^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ 是 X 的闭子集. 这说明 g 是连续的. 于是 g 是商映射. $\square$

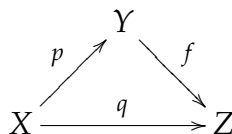
定理 5. 设 $p: X \rightarrow Y$ 是商映射, 则对任意映射 $f: Y \rightarrow Z$, f 连续当且仅当 $f \circ p: X \rightarrow Z$ 连续.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow f \circ p & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

证明. 1. 由于 p 是连续的, 必要性显然成立.

2. 充分性. 设 U 是 Z 中开集, 则 $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U))$ 是 X 中开集. 由于 p 是商映射, 则 $p((f \circ p)^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. 从而 f 连续. $\square$

定理 6. 如果 $p: X \rightarrow Y$ 和 $q: X \rightarrow Z$ 都是商映射, 并且 $p(x) = p(x')$ 当且仅当 $q(x) = q(x')$, 则 Y 和 Z 同胚.



证明. 1. 定义映射 $f: Y \rightarrow Z$ 为: 对 $y \in Y$, 设 $x \in X$ 使得 $p(x) = y$, 则 $f(y) = q(x)$; 即 $f(y) = q \circ p^{-1}(y)$. 这个定义是合理的: 如果另有 $x' \in X$ 使得 $p(x') = y = p(x)$, 则由已知条件, $q(x) = q(x')$. 所以 y 在 f 下的像是唯一确定的.

2. f 是单射. 设存在 y, y' 使得 $f(y) = f(y')$. 记 $x, x' \in X$ 使得 $p(x) = y, p(x') = y'$. 则由于 $q(x) = f(y) = f(y') = q(x')$, 于是必须成立 $p(x) = p(x')$, 即 $y = y'$.

3. f 是满射. 由于商映射是满射, 对任意 $z \in Z$, 存在 $x \in X$ 使得 $q(x) = z$. 设 $p(x) = y$, 则 $f(y) = z$. 所以 f 存在逆映射.

4. $f: Y \rightarrow Z$ 是连续的. 利用定理 7. (注意 q 是连续的, 而 p 是商映射.)

5. 根据 p 和 q 的对称性, 可证 f^{-1} 的连续性. 所以 f 是 Y 和 Z 间的同胚. $\square$

习题 2. 设 $A \subset X, i: A \rightarrow X$ 是包含映射, 而连续映射 $r: X \rightarrow A$ 满足 $r \circ i = \text{id}_A$ 是 A 上恒等映射. 这样的映射称为 X 到 A 的收缩映射. 证明: r 是一个商映射.

7.4 商映射诱导的商空间同胚

下面这个定理与代数中的同态基本定理类似, 在判定两个拓扑空间同胚时很有用.

定理 7. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, $\sim^f$ 是 X 上的等价关系, 满足 $x \sim^f x'$ 当且仅当 $f(x) = f(x')$. 则商空间 $X / \sim^f$ 与 Y 同胚, 且同胚映射是 $f^*(\langle x \rangle) = f(x)$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 p \downarrow & \searrow f & \\
 (X/\sim) & \xrightarrow{f^*} & Y
 \end{array}$$

证明. 因为 f 和粘合映射 p 都是商映射, 而且由等价关系 $\sim$ 的定义, $f(x) = f(x')$ (即 x 与 x' 在同一等价类) 当且仅当 $p(x) = p(x')$. 所以根据定理 7, Y 和 $X/\sim$ 是同胚, 且同胚映射是 $f^*(\langle x \rangle) = f \circ p^{-1}(\langle x \rangle) = f(x)$. $\square$

我们注意到, 由定理 8 也很容易证明定理 7.

习题 3. 在 $\mathbb{R}$ 上规定等价关系 $\sim$, 使得 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y$ 是整数. 证明: $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$.

定义 4 (实射影空间). 称一个向量空间中的一维子空间为一条中心直线. 在 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ 中任取 $x = (x_0, \dots, x_n)$, 记其所在的中心直线为 $\ell_x = \{(tx_0, \dots, tx_n) : t \in \mathbb{R}\}$. 则集合族

$$\mathcal{R} = \{\ell_x \setminus \{O\} : x \in S^2\}$$

定义了 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$ 上的一个等价关系 $\sim$. 商空间

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\})/\sim$$

称作 n 维实射影空间. $\mathbb{RP}^2$ 称为实射影平面.

例 5. 实射影平面同胚于球面粘合对径点.

证明. 1. 利用定理 8, 只需要构造出商映射 $p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, 且说明 p 在 S^2 上确定的商空间就是粘合对径点所得的空间.

为此, 记 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 到 $\mathbb{RP}^2$ 的粘合映射为 ℓ , 对 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, $\ell(x) = \ell_x \setminus \{O\}$. 定义映射

$$p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad p(x) \mapsto \ell_x \setminus \{O\}.$$

显然 p 是满射. 又如果 $p(x) = p(x')$, 则 $\ell_x = \ell_{x'}$, 而 $x, x' \in S^2$, 所以 $x' = -x$. 于是由 $\sim$ 确定的 S^2 上的等价类就是 $\langle x \rangle = \{x, -x\}$. 换句话说, 我们证明了 p 在 S^2 上确定的商空间就是粘合对径点所得的空间.

2. 下面再证明 p 是商映射. 记 i 为 $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 的包含映射, 它是连续的. 由于 $p = \ell \circ i$, 从而 p 是连续的.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} & \\ i \nearrow & & \searrow \ell \\ S^2 & \xrightarrow{p} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

3. 设 V 是 S^2 中开集, 还要证明 $p(V)$ 是开集. 可直接验证不含顶点且以 V 及 $-V$ 为截面的锥体 $C(V) = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} : x/|x| \in V \text{ 或 } -x/|x| \in V\}$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 中的开集, 从而 $\ell(C(V))$ 是 $\mathbb{RP}^2$ 中开集. 由于 $p(V) = \ell(C(V))$, 所以 $p(V)$ 是开集. 于是 p 是个开映射. 这就证明了 p 是商映射. $\square$

可以定义射影平面上的度量为两条过原点的直线之间的夹角 (在 0 到 $\pi/2$ 之间). 容易验证这确实是一个度量. 利用定义, 可以证明 $\mathbb{RP}^2$ 的商拓扑与上述度量拓扑同胚.

用上述论证方法, 可以证明 $\mathbb{RP}^2$ 同胚于将上半闭球面 S_+^2 按内点和边界上的对径点做等价类得到的商空间. 利用映射 $f: D^2 \rightarrow S_+^2, f(x, y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, 可证明 $\mathbb{RP}^2$ 同胚于将闭圆盘按内点和边界上的对径点做等价类得到的商空间. 这几个例子可以详细讲, 已说明商映射对构造新拓扑空间的用处.

例 6. 豪斯多夫空间的商空间未必是豪斯多夫空间.

解. 取 X 为乘积空间 $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$, 定义等价关系

$$\mathcal{R} = \{ \{(0, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(x, 0), (x, 1)\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}.$$

(形象地讲, 就是把两根面条中除了代表原点的两点外其余点均一一粘在一起.) 这样得到的商空间 $X/\sim_{\mathcal{R}}$ 不是豪斯多夫空间, 因为点 $\langle(0, 0)\rangle$ 和 $\langle(0, 1)\rangle$ 不能用 (商空间中的) 开集分离. $\square$

第二部分

拓扑性质

第八讲 可数公理

拓扑是研究集合中的点离得远近的工具. 仅仅依靠拓扑, 如前所学, 已经可以定义很多我们熟悉的概念了 (例如闭集, 收敛点列, 极限点, 连续性等). 但是如果拓扑缺乏适当的性质, 会导致一些病态的现象出现, 如单点集不是闭集, 收敛点列极限不唯一, 极限点未必是点列的极限等. 所以为了将我们熟知的度量空间的与拓扑有关的结论尽可能加以推广, 就需要对拓扑附加一些新的要求. 这就是接下来我们要介绍的若干重要拓扑性质. 它们本质上仍是一些公理, 而其之所以有用, 正如所有好的数学一样, 是因为这种推广达到了某种困难而精妙的平衡: 一方面所涵盖的范围尽量广泛, 可以找到大量的例子满足这些公理的要求, 另一方面, 即使对这样大量具体形态各异的例子, 它们仍然具有某些共同的良好性质, 能得到与度量空间中相类似的定理.

这一讲我们先介绍可数性. 它要求拓扑中的开集要组织有序.

8.1 可数邻域基和第一可数公理

定义 1 (邻域基). 拓扑空间 X 中点 x 的一个邻域基 是由 x 的若干邻域¹ 构成的一个子集族 $\mathcal{N}_x$, 使得 x 的任何邻域均包含 $\mathcal{N}_x$ 中的某个元素.

定义 2 (可数邻域基). 如果点 x 的一个邻域基 $\mathcal{N}_x$ 只含可数多个成员, 则称之为 x 的可数邻域基.

¹回忆点 x 的一个邻域就是内部包含 x 的一个子集.

定理 1 (标准可数邻域基). 若 x 有一个可数邻域基, 则 x 有一个标准邻域基 $\{V_1, V_2, \dots\}$, 它们都是包含 x 的开集, 而且当 $m \geq n$ 时 $V_m \subset V_n$.

证明. 设 $\{U_1, U_2, \dots\}$ 是 x 的一个可数邻域基, 而且不妨可假设它们都是开集. 令 $V_n = \bigcap_{k=1}^n U_k$, 则 V_n 仍是 x 的开邻域, 且 $m \geq n$ 时 $V_m \subset V_n$.

再证 $\{V_n\}$ 是 x 的一个邻域基. 设 W 是 x 的一个邻域, 则存在 $U_j \subset W$. 于是 $V_j \subset U_j \subset W$. 证毕. $\square$

下面介绍“可数邻域基”性质的一些应用——例如它可以帮助我们构造序列.

定理 2. 设 $x \in X$ 具有可数邻域基, $A \subset X$. 则 x 是 A 的极限点当且仅当存在 $A \setminus \{x\}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 以 x 为极限.

证明. 充分性. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 和极限点的定义即得.

必要性. 取 x 的标准邻域基 $\{V_n\}$, 则对任意 V_k , $A \cap V_k \neq \emptyset$ 且包含不同于 x 的一个点, 记为 x_k . 这就得到了 A 中的一个点列 $\{x_k\}$. 对 x 的任意邻域 V , 存在 N 使得 $V_N \subset V$. 利用集列 $\{V_n\}$ 的单调递减性, 对所有 $k > N$, 成立 $x_k \in V_k \subset V_N \subset V$. 这就证明了 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. $\square$

定义 3 (映射在一点的连续性). 考虑映射 $f: X \rightarrow Y$, 设 $f(x_0) = y_0$, 且 $\mathcal{N}_{y_0}$ 是 $y_0 \in Y$ 的一个邻域基. 称 f 在 x_0 点连续, 如果对任意 $V \in \mathcal{N}_{y_0}$, $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的一个邻域.

习题 1. 证明: 映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续当且仅当在任意一点 $x \in X$ 连续. (参考第四讲定理 3.)

定理 3 (连续映射的序列刻画). 设 $x \in X$ 有可数邻域基, 则映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 点连续的充分必要条件是: 任取以 x 为极限的点列 $\{x_n\}$, 点列 $f(x_n)$ 都以 $f(x)$ 为极限.

证明. 1. 必要性. 设 f 在 x 点连续, $\mathcal{N}_{f(x)}$ 是 $f(x)$ 的一个邻域基, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 对 $f(x)$ 的任意邻域 U , 存在 $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ 且 $V \subset U$. 由

于 $f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域, 从而存在 N 使得 $n > N$ 时 $x_n \in f^{-1}(V)$, 即 $f(x_n) \in V \subset U$. 于是 $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

2. 充分性. 设 $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 x 的一个标准邻域基, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是任一收敛到 x 的序列, 且 $f(x_n) \rightarrow f(x)$. 要证明 f 在 x 点连续, 即, 对于任一 $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$, $f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域.

假设不然, 则存在 $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$, $f^{-1}(V)$ 并非 x 的邻域. 也就是说, x 不是 $f^{-1}(V)$ 的内点. 这表明, 对于任意 W_k , 存在 $x_k \in W_k$ 使得 $x_k \notin f^{-1}(V)$, 即 $f(x_k) \notin V$.

对 x 的任意邻域 W , 存在 $W_k \subset W$. 由 $\{W_k\}$ 单调递减性可知 $x_k \rightarrow x$. 但显然 $f(x_k)$ 并不收敛到 $f(x)$, 矛盾! $\square$

定义 4 (第一可数公理). 条件 “ (C_1) 拓扑空间 X 的每个点都拥有一个可数邻域基” 称为 第一可数公理. 满足该公理的拓扑空间称为 第一可数空间.

习题 2. 度量拓扑空间是第一可数空间.

习题 3. $\mathbb{R}$ 上离散拓扑满足第一可数公理.

习题 4. 带有限补拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 不满足第一可数公理.

8.2 第二可数公理

定义 5 (可数拓扑基和第二可数公理). 设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的一个拓扑基. 如果它只含有可数个成员, 则称为 可数拓扑基. 条件 “ (C_2) 拓扑空间 X 存在可数拓扑基” 称为 第二可数公理. 满足该条件的拓扑空间称为 第二可数空间.

习题 5. n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是第二可数空间.

习题 6. 证明第二可数空间必是第一可数空间.

习题 7. $\mathbb{R}$ 上离散拓扑不满足第二可数公理.

注意到离散拓扑空间一定是度量空间 (见第一讲习题), 这个习题的结论表明第二可数公理是个很强的要求, 以至于并非所有度量空间都满足该性质.

定理 4 (第二可数空间可分). 第二可数空间 X 可分. 也就是说, 存在一个仅具有可数个点的子集 A , 它在 X 中稠密 (即 $\text{Cl}(A) = X$).

证明. 设 $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \dots\}$ 是 X 的一个可数拓扑基. 取 $x_k \in U_k$, 并置 $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. 则 $\text{Cl}(A) = X$. 否则, 存在 X 中开集 $V = X \setminus \text{Cl}(A)$, 且 $A \cap V = \emptyset$. 于是对所有 k , $x_k \notin V$. 但由拓扑基性质, V 是某些 U_l 的并集, 从而 V 中至少含有 x_l . 矛盾! $\square$

定理 5. 可分度量空间是第二可数空间.

证明. 设 A 是可分度量空间 (X, d) 的一个可数稠密子集. 定义开球族

$$\mathcal{B} = \left\{ B(a, \frac{1}{n}) : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\},$$

它含有可数个成员. 另一方面, 对于 X 中任一开集 U 和任意 $x \in U$, 存在充分大的 n 使得 $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. 由于 A 在 X 中稠密, 存在 $a \in A$ 使得 $d(x, a) < 1/(4n)$, 从而由三角不等式, $x \in B(a, 1/(3n)) \subset B(x, 1/n) \subset U$. 由第一讲定理 2, $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基. $\square$

习题 8. 证明第二可数空间的子空间和乘积空间都是第二可数空间.

第九讲 分离公理

我们前面已经介绍了豪斯多夫空间及其诸多性质. 豪斯多夫空间即所谓满足 (T_2) 公理“空间中任意不同两点均有分别包含它们且不交的邻域”的拓扑空间. 这一节我们主要介绍满足 (T_3) 公理的正则空间, 满足 (T_4) 公理的正规空间, 以及同时满足 (T_2) 和 (T_4) 公理的正规豪斯多夫空间.

我们有时也会提到所谓 (T_1) 公理, 即条件“拓扑空间中每个单点集都是闭集”. 分离公理本质上要求拓扑中含有足够多的开集来辨别不同的闭集.

9.1 正则空间

在给定拓扑空间 X 中, 称子集 U 是子集 A 的邻域, 如果 $\text{Int}(U) \supset A$.

定义 1 (正则空间). 对拓扑空间 X , 如果对于任意给定的点 $x \in X$ 和不包含这点的一个闭子集 B , 都存在不相交的两个开集, 分别包含 x 和 B , 则称 X 为正则的, 或满足 (T_3) 公理.

定理 1. 拓扑空间 X 是正则的当且仅当对任意点 $x \in X$ 及 x 的任意邻域 U , 存在 x 的一个邻域 V 使得 $V \subset \text{Cl}(V) \subset U$.

证明. 1. 必要性. 不妨取 U 是 x 的开邻域. 对闭集 $B = X \setminus U$, 利用正则性的定义, 存在 x 的开邻域 V 和 B 的开邻域 W , 使得 $V \cap W = \emptyset$. 于是 $V \subset X \setminus W$, 后者是闭集, 从而 $\text{Cl}(V) \subset X \setminus W \subset X \setminus B = U$.

2. 充分性. 设 B 是与 $\{x\}$ 不相交的闭集. 取 x 的邻域 $U = X \setminus B$, 则存在 x 的开邻域 V 使得 $\text{Cl}(V) \subset U$. 那么 $W = X \setminus \text{Cl}(V)$ 是 B 的一个开邻域, 且

$$V \cap W = \emptyset. \square$$

9.2 正规空间

1. 定义

定义 2 (正规空间). 条件 “ (T_4) 任取闭集 A, B 使得 $A \cap B = \emptyset$, 则存在开集 U, V 使得 $A \subset U, B \subset V$, 且 $U \cap V = \emptyset$ ” 称作 (T_4) 公理. 满足 (T_4) 公理的拓扑空间称作 正规空间, 或 (T_4) 空间.

定理 2. 拓扑空间 X 是正规的, 当且仅当对任意闭集 A 及包含 A 的任意开集 U , 存在一个开集 V 使得 $A \subset V \subset \text{Cl}(V) \subset U$.

证明与定理 1 的类似, 留作习题.

2. Urysohn 引理

正规空间可以用定义在其上的连续函数的性质刻画, 即成立如下在分析学中有重要应用的 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理. 这反映了数学中一个重要的思想: 建立在一个空间上的附加结构, 例如连续函数全体, 往往能反映这个空间本身的许多性质.

定理 3 (Urysohn 引理). 拓扑空间 X 满足 (T_4) 公理的充分必要条件是: 任取不相交的闭子集 A, B , 存在连续函数 $f: X \rightarrow [a, b]$ ($a < b$) 使得成立 $f|_A = a, f|_B = b$.

在微分几何、测度论、偏微分方程等理论中常常需要一些在 A 上取值为 1, A 的一个开邻域外为 0 的连续函数做测试函数. Urysohn 引理保证了这些函数的存在性, 因而在理论中具有基本的重要性.

证明. 以下证明中不妨取 $a = 0, b = 1$.

充分性. 记 $I = [0, 1]$. 设 A 和 B 是 X 的不相交的两个闭子集. 若存在连续函数 $f: X \rightarrow I$ 使得 $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$, 则

$$U = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \quad \text{和} \quad V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

都是 X 的开子集, 且 $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. 所以 X 是正规空间.

必要性. 记 P 为 I 中有理数的全体, 可表示为 $P = \{r_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, 其中 $r_0 = 0, r_1 = 1$. 我们归纳地构造一系列以 $r \in P$ 为指标的 X 的开子集 U_r , 它们应当是要构造的函数 f 的下水平集 $\{f^{-1}((-\infty, r))\}$. 这些下水平集随着 r 的变大而变大. 由此观察, 不难猜出这些开集 U_r 应当满足

- a) 当 $r, s \in P$ 且 $r < s$ 时, $U_r \subset \text{Cl}(U_r) \subset U_s$;
- b) 对所有 $r \in P$, ($r \neq 1$), $A \subset U_r \subset \text{Cl}(U_r) \subset X \setminus B$.

1. 首先, 令 $U_{r_1} = X \setminus B$. 由正规性, 存在开集 U_{r_0} , 使得

$$A \subset U_{r_0} \subset \text{Cl}(U_{r_0}) \subset U_{r_1}.$$

继续用正规性, 知存在开集 U_{r_2} , 使得

$$U_{r_0} \subset \text{Cl}(U_{r_0}) \subset U_{r_2} \subset \text{Cl}(U_{r_2}) \subset U_{r_1}.$$

显然 $U_{r_0}, U_{r_1}, U_{r_2}$ 满足上述要求 a) 和 b).

2. 设开集 $U_{r_0}, U_{r_1}, U_{r_2}, \dots, U_{r_{k-1}}$ 已经作出. 对 r_k , 我们要构造的开集 U_{r_k} 应当适当地排在前面这些开集队列里: 将 $r_0, r_1, \dots, r_k$ 按照大小顺序排队, 得到

$$0, \dots, r, r_k, s, \dots, 1,$$

也即

$$r = \max\{r_j : j < k, r_j < r_k\}, \quad s = \min\{r_j : j < k, r_j > r_k\},$$

则 U_{r_k} 应当插在 U_r 与 U_s 之间. 因为 $r < s$, 成立归纳假设 a), 于是用正规性, 知存在开集 U_{r_k} 使得

$$\text{Cl}(U_r) \subset U_{r_k} \subset \text{Cl}(U_{r_k}) \subset U_s.$$

按照这样的办法就构造出了满足 a) 和 b) 的开集 $\{U_r\}_{r \in P}$.

3. 现在定义函数 $f: X \rightarrow I$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in P : x \in U_r\}, & x \notin B, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

注意当 $x \notin B$ 时, 至少有 $x \in U_{r_1}$. 从而上述定义中的下确界是对有界的非空集取的, 一定存在. 所以该定义合理.

4. 函数 f 具有如下性质:

1) 因为对任意 $r \in P$, 都有 $A \subset U_{r_0} \subset U_r$, 所以 $f(A) = \{0\}$; 显然 $f(B) = \{1\}$.

2) 对任意 $0 < \rho \leq 1$, $f(x) < \rho$ 等价于: 存在 $r \in P$, $r < \rho$, 使得 $x \in U_r$. 由此可知

$$f^{-1}([0, \rho)) = \{x \in X : f(x) < \rho\} = \bigcup_{r \in P: r < \rho} U_r$$

是开集.

3) 对任意 $0 \leq \sigma < 1$, $f(x) > \sigma$ 当且仅当存在 $s \in P$, $s > \sigma$, 使得 $x \notin \text{Cl}(U_s)$.

(必要性. 否则, 对任意 $s \in P$ 且 $s > \sigma$, 成立 $x \in \text{Cl}(U_s) \subset U_{s'}$, 其中 $s' \in P$ 且 $s' > s$. 所以 $x \in U_{s'}$ 对任意 $s' \in P$ 且 $s' > \sigma$ 成立. 那么 $f(x) \leq \sigma$.)

(充分性. 设存在 $s \in P$, $s > \sigma$, 使得 $x \notin \text{Cl}(U_s)$. 则对于任意 $s_* \in P$ 且 $s_* < s$, $x \notin U_{s_*}$. 于是 $f(x) \geq s > \sigma$.)

这样, 我们得到

$$f^{-1}((\sigma, 1]) = \bigcup_{s \in P: s > \sigma} X \setminus \text{Cl}(U_s)$$

是开集.

5. 注意到对任意 $0 < a < b < 1$, 成立 $(a, b) = [0, b) \cap (a, 1]$, 于是 $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}([0, b)) \cap f^{-1}((a, 1])$ 也是 X 上的开集; 而形如 $[0, a), (a, b), (a, 1]$ 的区间构成了 I 的一个拓扑基, 所以 f 是连续的. $\square$

近年来, 已有人提出了基于 Urysohn 引理的机器学习方法, 用于对复杂数据分类, 参见 [7].

3. Tietze 扩张定理

令 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射, A 是 X 的子空间, 则可定义唯一的一个连续映射 $g: A \rightarrow Y$, 使得对任意 $x \in A$, 成立 $g(x) = f(x)$. 我们称 g 是 f 在 A 上的限制, 记作 $f|_A$; 反过来, 我们也称 f 是 g 到 X 的扩张. (注意, f 和 g 的值域是一样的, 都是 Y .) 限制和扩张是构造映射的重要办法.

对上述给定的连续映射 g , 是否一定存在它的一个到 X 的扩张呢? 一般来说答案是否定的. 例如, 布劳威尔不动点定理就说, 欧氏空间中球面到自己的恒等映射就不存在到闭球体的扩张. 回答这类问题一般来说需要同伦的概念, 以及代数拓扑的工具. 然而, 我们有如下 Tietze 扩张定理.

定理 4 (Tietze 扩张定理). 拓扑空间 X 满足 (T_4) 公理的充分必要条件是: 对 X 的任意闭子集 A 和任意连续函数 $f: A \rightarrow [a, b]$, 都存在连续函数 $g: X \rightarrow [a, b]$ 使得 $g|_A = f$. 函数 g 称作函数 f 的一个扩张.

证明. 充分性. 由 Urysohn 引理, 要证明 X 是正规空间, 只需对 X 的两个不相交的闭子集 F_1 和 F_2 , 说明存在连续映射 $f: X \rightarrow [a, b]$, 使得 $f(F_1) = \{a\}$, $f(F_2) = \{b\}$. 为此, 取 $A = F_1 \cup F_2$, 定义映射 $f_0: A \rightarrow [a, b]$ 如下: $f_0(F_1) = \{a\}$, $f_0(F_2) = \{b\}$. 易知 f_0 连续, 从而由所给条件, 存在 f_0 的扩张 $f: X \rightarrow [a, b]$, 满足前述要求.

必要性. 以下不妨设 $[a, b] = [-1, 1]$. 思路是利用 Urysohn 引理构造一个函数列 $f_n: X \rightarrow [-1, 1]$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 一致收敛到一个函数 $g: X \rightarrow [-1, 1]$, 且 $g|_A = f$.

1. 记

$$A_{-1} = f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}]), \quad A_{+1} = f^{-1}([\frac{1}{3}, 1]).$$

它们是 A 的不相交的闭子集, 从而由于 A 是闭集, 也是 X 的不相交的闭子集. 由 Urysohn 引理, 存在连续映射

$$f_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}],$$

使得 $f_1(A_{-1}) = \{-\frac{1}{3}\}$, $f_1(A_{+1}) = \{\frac{1}{3}\}$. 此外容易验证, 对任意 $x \in A$, 成立

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

2. 对连续映射 $f - f_1 : A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, 记

$$A_{-2} = (f - f_1)^{-1}([-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3^2}]), \quad A_{+2} = (f - f_1)^{-1}([\frac{2}{3^2}, \frac{2}{3}]).$$

再由 Urysohn 引理, 存在映射 $f_2 : X \rightarrow [-\frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^2}]$, 使得

$$f_2(A_{-2}) = \{-\frac{2}{3^2}\}, \quad f_2(A_{+2}) = \{\frac{2}{3^2}\}.$$

同样, 对任意 $x \in A$, 成立

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{2^2}{3^2}.$$

3. 重复用 Urysohn 引理, 依次对 $n \in \mathbb{N}$, 可作出 $f_n : X \rightarrow [-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$, 使得对任意 $x \in A$, 有

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

(利用了关系式 $(\frac{2}{3})^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$.)

由于对任意的 $x \in X$ 都成立 $|f_k(x)| \leq \frac{2^{k-1}}{3^k}$, 用优级数判别法可知级数 $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ 一致收敛. 由 $\mathbb{R}$ 的完备性, 该级数收敛到一个函数 $g : X \rightarrow [-1, 1]$. (注意 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$.) 由第四讲定理 9, g 是连续的. 此外, 从上面式子可知在 A 上成立

$$|f(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0,$$

故 $g|_A = f$. $\square$

推论 2. 设 X 是正规空间, A 是 X 的闭子集. 则对任意连续函数 $f : A \rightarrow \mathbb{E}^1$, 存在扩张 $g : X \rightarrow \mathbb{E}^1$ 使得 $g|_A = f$.

证明. 任取同胚映射 $h : \mathbb{E}^1 \rightarrow (0, 1)$, 则存在连续函数 $g_1 : X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $g_1|_A = h \circ f$. 为了消掉 h , 需要抹掉使 g_1 取值为 0, 1 的点.

为此, 由于 A 和 $g_1^{-1}(\{0,1\})$ 都是闭集, 而它们不交 (A 在 g_1 下的像集是 $(-1,1)$), 利用 Urysohn 引理, 存在连续函数 $g_2: X \rightarrow [0,1]$ 使得 $g_2(A) = \{1\}$, $g_2(g_1^{-1}(\{0,1\})) = \{0\}$.

定义连续函数

$$g_3: X \rightarrow (0,1), \quad x \mapsto (g_1(x) - \frac{1}{2})g_2(x) + \frac{1}{2}.$$

则 $g_3|_A = g_1|_A = h \circ f$. 于是 $g = h^{-1} \circ g_3: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ 就是所需延拓. $\square$

例 1. 设 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面, X 是个 T_4 空间, $A \subset X$ 是闭集, f 是 A 到 S^n 的连续映射. 证明: f 可扩张到 A 的一个开邻域上.

证明. f 可以视作 A 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的连续映射. 将 Tietze 扩张定理应用于该映射的所有分量, 得到连续映射 $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, 满足要求 $\tilde{f}|_A = f$. 注意到 $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$ 是与 A 不交的闭集, 于是由正规性, 存在 A 的开邻域 U 使得 $\text{Cl}(U)$ 与 $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$ 不交, 于是 $\tilde{f}|_U$ 的像集不含 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点. 映射 $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x)/|\tilde{f}(x)|$ 就是所需的扩张. $\square$

4. 单位分解

下面我们介绍在几何和分析中非常重要的一种从整体过渡到局部的工具, 称为单位分解.

定义 3 (支集). 设 X 是拓扑空间, $f: X \rightarrow \mathbb{E}$ 是连续函数. X 中使得 $f(x) \neq 0$ 的点所成集合的闭包 $\text{Cl}(\{x \in X: f(x) \neq 0\})$ 称为 f 的支集, 记作 $\text{supp } f$.

定义 4 (单位分解). 设 $\mathcal{U} = \{U_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑空间的一个开覆盖 (即 U_λ 都是开集且 $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset X$), $\{f_\lambda: X \rightarrow I = [0,1]\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族连续函数. 如果成立

- 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 有 $\text{supp } f_\lambda \subset U_\lambda$;
- $\{\text{supp}(f_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$ 局部有限, 即对任意的 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U , 使得 U 仅与有限个 $\text{supp}(f_\lambda)$ 相交;

- 对任意的 $x \in X$, 成立 $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$ (对固定的 x , 上面性质表明和式中仅有有限项不为零),

就称 $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是从属于 $\mathcal{U}$ 的一个单位分解.

定理 5 (单位分解的存在性). 设 $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 是正规空间 X 的一个有限开覆盖, 则存在从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解.

证明. 1. 用归纳法将 $\mathcal{U}$ 收缩成开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_k : k = 1, \dots, n\}$, 使得对任意 k , $\text{Cl}(V_k) \subset U_k$.

令 $A_1 = X \setminus \bigcup_{i=2}^n U_i$, 则 A_1 是闭集. 由于 $\mathcal{U}$ 覆盖 X , 故 $A_1 \subset U_1$. 利用 X 的正规性, 存在开集 V_1 使得 $A_1 \subset V_1 \subset \text{Cl}(V_1) \subset U_1$. 开集族 $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ 仍然覆盖 X .

一般地, 设已作出开集 $V_1, \dots, V_{k-1}$ 使得 $\{V_1, \dots, V_{k-1}, U_k, \dots, U_n\}$ 仍然覆盖 X , 且对 $1 \leq i \leq k-1$, $\text{Cl}(V_i) \subset U_i$. 令

$$A_k = X \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^n U_i \right) \right].$$

利用正规性, 存在开集 V_k , 使得 $A_k \subset V_k \subset \text{Cl}(V_k) \subset U_k$. 于是开集族 $\{V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$ 仍然覆盖 X , 且 $\text{Cl}(V_k) \subset U_k$. 归纳到第 n 步就得到所需的开覆盖 $\mathcal{V}$.

2. 再将 $\mathcal{V}$ 收缩为开覆盖 $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, \dots, n\}$, 使得 $\text{Cl}(W_i) \subset V_i$.

3. 由 Urysohn 引理, 对任意 i 存在连续函数 $g_i : X \rightarrow I$ 使得 $g_i(\text{Cl}(W_i)) = \{1\}$, $g_i(X \setminus V_i) = \{0\}$, 即 $g_i^{-1}(\mathbb{E} \setminus \{0\}) \subset V_i$, 从而

$$\text{supp}(g_i) \subset \text{Cl}(V_i) \subset U_i.$$

因为 $\mathcal{W}$ 覆盖 X , 所以对任意 $x \in X$, $\sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$. 最后, 置 $f_i : X \rightarrow I$ 为

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)},$$

则不难验证 $\{f_1, \dots, f_n\}$ 即所求的从属于 $\mathcal{U}$ 的单位分解. $\square$

9.3 正规豪斯多夫空间

例 2. 单点集都是闭集的正规空间是正规豪斯多夫空间.

定理 6. 度量空间是正规豪斯多夫空间.

证明. 只需证明度量空间 X 满足 (T_4) 公理.

1. 设 C 是 X 的子集. 定义函数

$$f_C : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \inf\{d(x, c) : c \in C\}.$$

利用下确界定义和三角不等式可以证明 f_C 是连续函数 (见第四讲例题). 此外, 当 C 是闭集时, $f_C(x) = 0$ 当且仅当 $x \in C$.

2. 任取两个不相交的闭集 $A, B \subset X$. 由于 f_A 和 f_B 不会同时为零, 从而对任意 $x \in X$, $f_A(x) + f_B(x) > 0$, 可以定义

$$h(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)},$$

它也是 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数, 且 $h(A) = \{0\}, h(B) = \{1\}$. 于是 $U = h^{-1}((-\infty, 1/2))$ 和 $V = h^{-1}((1/2, +\infty))$ 就是 A 和 B 不相交的开邻域. $\square$

定理 7 (Lindelöf 定理). 设 X 是个第二可数拓扑空间, 其单点集是闭集, 且是正则空间. 则 X 是正规空间.

这个定理表明第二可数的正则豪斯多夫空间是正规豪斯多夫空间, 显示了可数性对分离性的影响.

证明. 1. 取定 X 的一个可数拓扑基 $\mathcal{B}$, F, F' 是 X 中不相交的两个闭集. 我们要利用单点集是闭集, 以及正则性来构造分离 F, F' 的开集 U 和 V .

2. 任取 $x \in F$, 注意到 x 不在 F' 中, 则存在它的开邻域 W 和 F' 的一个开邻域, 它们不相交. 于是 $\text{Cl}(W)$ 与 F' 不交. 由拓扑基的性质, 存在某个 $B \in \mathcal{B}$ 包含 x 且 $B \subset W$, 于是也成立 $\text{Cl}(B)$ 与 F' 不交. 这意味着 F 包含在拓扑基中的某些开集 $B_1, B_2, \dots$ 之中: $F \subset B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 而且每个 B_k 的闭包都和 F' 不相交—利用 $\text{Cl}(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Cl}(B_k)$ 可知 $\text{Cl}(B)$ 和 F' 也不相交.

类似的, 令 $B'_1, B'_2, \dots$ 是拓扑基中那些闭包和 F 不相交的开集, 则 $F' \subset B' = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k$. (因为如前一段所属, 对每个 $x' \in F'$, 都可以找到这样的 B'_k). 注意 B' 是开集, 其闭包也和 F 不交.

但是 B 和 B' 有可能相交. 我们下面对其做一些修改.

3. 令 $U_n = B_n \setminus (\bigcup_{k=1}^n \text{Cl}(B'_k))$, $V_n = B'_n \setminus (\bigcup_{k=1}^n \text{Cl}(B_k))$, 则它们都是开集, 而且对任意 $m \neq n$, 成立 $U_n \cap V_m = \emptyset$. 置 $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$, 它们也都是开集, 而且 $U \cap V = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_m \cap V_n = \emptyset$.

余下只要说明 $F \subset U$, $F' \subset V$. 以前者为例, 设 $x \in F$, 则存在某个 B_n 包含 x . 由于所有 $\text{Cl}(B'_k)$ 都和 F 不交, 故 $x \notin B'_k$. 这就意味着 $x \in U_n \subset U$. $\square$

9.4 可度量化拓扑空间

定义 5 (可度量化拓扑). 如果在拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 上可定义度量 d , 使得它诱导的度量拓扑就是 $\mathcal{T}$, 则称 $(X, \mathcal{T})$ 可度量化.

例 3. 度量空间的子空间可度量化. 设 X 可嵌入一个度量空间, 则 X 可度量化.

例 4. 带平凡拓扑的 $\mathbb{R}$ 不可度量化 (不是豪斯多夫空间).

定理 8 (Urysohn 度量化定理). 一个第二可数空间可度量化当且仅当它是正则豪斯多夫空间.

证明. 充分性由前面定理 6 给出. 由 Lindelöf 定理, 满足第二可数公理的正则豪斯多夫空间 X 是正规的. 所以下面用正规性来证明必要性. 基本想法是通过 Urysohn 引理, 构造 X 到实 l^2 空间的嵌入. 这里 l^2 是形如 $a = (a_1, a_2, \dots)$ 的无穷序列构成的, 其中每个 a_i 都是实数, 且满足条件 $|a| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} < \infty$. 这是一个 Hilbert 空间, 即完备的无限维的实数域上的内积线性空间. 它是一个度量空间, 度量由上述范数 $|\cdot|$ 给出.

1. 取 X 的可数拓扑基 $\mathcal{B}$. 称 $\mathcal{B}$ 中一对开集 B, B' 构成一个典型对, 如果成立 $\text{Cl}(B) \subset B'$. 显然典型对的个数是可列个. 将所有典型对排序, 写作

$\{(B_n, B'_n)\}$. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_n: X \rightarrow [0, 1]$, 使得 $f_n(\text{Cl}(B_n)) = 1$, $f_n(X \setminus B'_n) = 0$. 如果只有 N 个典型对, 那么对所有 $n > N$, 取 $f_n(x) \equiv 0$.

定义映射 $f: X \rightarrow l^2$ 如下:

$$f(x) = (f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \dots, \frac{1}{n}f_n(x), \dots).$$

因为 $|f(x)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, 显然右端确实是 l^2 中元素.

2. 下面只需证明 f 是个嵌入. 首先说明 f 是单射. 对不相同的 $x, y \in X$, 因为 X 是豪斯多夫空间, 存在 $B' \in \mathcal{B}$ 包含 x 而不包含 y . 由正则性和拓扑基的性质和, 必有 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset \text{Cl}(B) \subset B'$. 于是 (B, B') 是个典型对. 设它排在第 n 个位置, 那么就有 $f_n(x) = 1$. 由于 y 在 B' 之外, 那么 $f_n(y) = 0$. 这就表明 $f(x) \neq f(y)$, 因为它们至少第 n 个坐标就不一样.

3. 继续证明 f 的连续性. 由于 X 是 C^2 空间, 可以利用我们已经证明过的序列收敛性质来判断映射的连续性: f 连续当且仅当对任意 $x_j \rightarrow x$, 成立 $f(x_j) \rightarrow f(x)$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 由级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 的收敛性, 存在 $N > 0$, 使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. 对指标 $n = 1, 2, \dots, N$, 由 $f_n: X \rightarrow [0, 1]$ 的连续性, 存在 K (依赖于 N), 当 $j \geq K$ 时 $|f_n(x_j) - f_n(x)| \leq \sqrt{\varepsilon/N}$. 于是

$$|f(x_j) - f(x)|^2 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} |f_n(x_j) - f_n(x)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

所以 f 是连续的.

4. 最后要证明 f^{-1} 限制在 $f(X)$ 上的时候是连续的. 仍然用上述序列性质. 只要证明: 若 $x_j \rightarrow x$, 就有 $f(x_j) \rightarrow f(x)$.

由于 $x_j \rightarrow x$, 存在 x 的邻域, 其中不含无限个 x_j . 由正则性和拓扑基的性质, 不妨取 x 的这样的邻域是某个 $B' \in \mathcal{B}$. 于是有 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset \text{Cl}(B) \subset B'$, 即 (B, B') 是个典型对. 设它排在第 n 个位置. 那么 $f_n(x) = 1$. 由于无限多个 x_j 都在 B' 外, 从而有无限多个 x_j 使得 $f_n(x_j) = 0$. 这样一来, $|f(x) - f(x_j)| \geq \frac{1}{n} |f_n(x) - f_n(x_j)| \geq 1/n$, 即 $f(x_j)$ 不会收敛到 $f(x)$. $\square$

这一讲介绍的几个重要定理的证明是我们学习拓扑学以来遇到的真正有难度的证明 (此前的困难主要是如何提出合理的概念并记住大量的概念和具体例子), 需要仔细体会其中的技巧思想方法.

例 5. 设 A 是 (T_1) 空间的子集. 证明: (1) 如果 $x \in A'$, 则它的任意一个邻域中含有 A 中无穷多个点; (2) A 的导集是闭集.

证明. 回忆 (T_1) 空间是单点集皆为闭集的拓扑空间. 如果 $x \in A'$, 由极限点的定义, 对 x 的任何邻域, 其中必含有 A 中不同于 x 的点.

(1) 对 x 的任意一个邻域, 其中含有 A 中不同于 x 的无穷多个点. 否则, 存在 x 的某个邻域, 其中只含有 A 中有限个点. 由于现在有限点集是闭集, 在邻域中挖掉不同于 x 的这有限个 A 中点之后所得集合仍然是 x 的邻域, 且不含 A 中与 x 不同的点, 与极限点的定义矛盾.

(2) 如果 $y \in X \setminus A'$, 那么存在 y 的一个开邻域 U , 其中不含有 A 中除 y 之外任一点. 注意 $U \setminus \{y\}$ 依旧是开集, 且其中的点也都不在 A 中, 从而也不在 A' 中. 所以, 如果 y 不是极限点, 则它有一个开邻域中的点都不是极限点. 这就证明了 $X \setminus A'$, 从而 A' 是闭集. $\square$

习题 1. 设 X 是一个豪斯多夫空间, $f: X \rightarrow X$ 连续. 证明: f 的不动点构成的集合是 X 的闭子集.

习题 2. 证明: X 是豪斯多夫空间当且仅当对角线 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 的闭集.

习题 3. 设 X 是正规空间. 证明: 对任意两个不相交的闭集 A, B , 存在 A 的开邻域 U 和 B 的开邻域 V , 使得 $\text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V) = \emptyset$.

习题 4. 证明: 正规空间的闭子空间是正规的.

第十讲 连通性 局部连通性

连通性大致来说, 是要求拓扑空间中不存在完全独立的部分——没有子集与该空间中任意其它点都离得很远; 用分离性来说, 就是这个独立的子集和它的补集可以用不相交的开集分开. 稍稍一想, 不难发现这样的独立子集必然是既开又闭的. 连通性就是用来排除拓扑空间中存在非平凡的开的闭集的. 所以连通的拓扑空间是“整体一块”的, 它必然有些好的性质.

这一讲我们就来讨论连通性和局部连通性这两种不同的拓扑性质.

10.1 拓扑空间的连通性

定义 1 (连通). 如果一个拓扑空间 X 不能分为两个非空不相交开子集的并集, 则称 X 是 连通 的. X 的子集 A 如果取子空间拓扑后连通, 则称 A 是 X 的 连通子集.

例 1. 欧式直线 $\mathbb{R}^1$ 连通.

证明. 假设 $\mathbb{R}^1 = A \cup B$, A, B 是非空开集, 且不相交. 取 $a \in A, b \in B$, 不妨设 $a < b$. 记 $c = \sup\{x \in A : x < b\} \in \mathbb{R}^1$. 由实数完备性, c 存在且 $c \leq b$.

若 $c \in A$, 则 $c < b$, 且由于 A 是开集, 存在 c 的一个小邻域 $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$, 且当 ε 充分小时 $c + (\varepsilon/2) < b$, 从而与 c 是上确界矛盾.

于是 $c \in B$, 但由于 B 也是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset B$. 注意 c 是上确界, c 的任意邻域中都应有 A 中的点. 这就导致矛盾! $\square$

根据定义, 很容易证明如下结果.

定理 1 (连通的闭集刻画). 下列四个条件相互等价:

- (1) X 连通;
- (2) X 不能表示为两个非空不相交闭集的并集;
- (3) X 不含既开又闭的非空真子集;
- (4) X 的既开又闭的子集只有 $\emptyset$ 和 X ;
- (5) 不存在 $X \rightarrow \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^1$ 的连续满射.

定理 2. 连通是拓扑性质, 即如果拓扑空间 X 和 Y 等价, 则 X 连通当且仅当 Y 连通.

例 2. 圆周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^1$ 不同胚.

证明. 设存在同胚 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, 记 $x = (1, 0) \in S^1$, $f(x) = y$. 则 f 诱导了子空间 $S^1 \setminus \{x\}$ 到子空间 $\mathbb{R}^1 \setminus \{y\}$ 的同胚. 但 $S^1 \setminus \{x\} \cong (0, 2\pi) \cong \mathbb{R}^1$, 从而连通. 另一方面, $\mathbb{R}^1 \setminus \{y\} = (-\infty, y) \cup (y, +\infty)$ 不连通. 矛盾! $\square$

10.2 连通性的判定

定理 3. 连通空间在连续映射下的像集是连通集. 特别地, 连通空间的商空间是连通的.

证明. 设 X 连通, $f: X \rightarrow Y$ 连续. 视 $f(X)$ 为 Y 的子空间, 假设存在 Y 的非空开集 U, V 使得 $f(X) = (U \cap f(X)) \cup (V \cap f(X))$, 且 $(U \cap f(X)) \cap (V \cap f(X)) = \emptyset$. 那么 $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, 且 $f^{-1}(U)$ 和 $f^{-1}(V)$ 是不相交的开集. 由于 X 连通, 所以其中的一个, 比如 $f^{-1}(V)$, 应当是空集. 从而 $V \cap f(X) = \emptyset$. 所以 $f(X)$ 不能表示为两个不相交的非空开子集的并集, 即 $f(X)$ 连通. $\square$

例 3. $\mathbb{R}^1$ 的子空间 A 连通当且仅当 A 是开区间.

证明. 1. 充分性. $\mathbb{R}^1$ 中的区间包括

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], (-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty)$$

八种情形. 不难构造定义域是 $\mathbb{R}^1$, 而值域分别是这些区间的连续函数. 从而这些区间连通.

2. 回忆 $\mathbb{R}^1$ 的子集 A 是区间当且仅当对任意 $x, y \in A$, 所有 x, y 之间的数都在 A 中.

3. 必要性. 设 $A \subset \mathbb{R}^1$ 是连通集, 且不是区间或单点集. 那么存在 $a, b \in A$ 和 $c \in (a, b)$ 使得 $c \notin A$. 于是 $A = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap (c, +\infty))$, 即 A 按子空间拓扑可表示为两个非空不相交开子集的并, 则 A 不连通. 矛盾! $\square$

例 4 (介值定理). 设拓扑空间 X 连通, 且 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ 是连续函数. 则 $f(X)$ 是一个区间.

习题 1. 若拓扑空间 X 上的连续函数都具有介值性质, 则 X 连通.

引理 1. 若 X_0 是 X 的既开又闭的子集, A 是 X 的连通子集. 则或者 $X_0 \cap A = \emptyset$, 或者 $A \subset X_0$.

证明. 由于 $A = (A \cap X_0) \cup (A \setminus X_0)$, 而 X_0 既开又闭, 从而由子空间拓扑定义, $A \cap X_0$ 和 $A \setminus X_0$ 都是开集. 因为 A 连通, 则或者 $A \cap X_0 = \emptyset$, 或者 $A \setminus X_0 = \emptyset$, 即 $A \subset X_0$. $\square$

定理 4 (连通子集的连通扩张). 设 X 有一个连通覆盖 $\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{B}$ 是由连通子集构成的子集族, 并且 $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$. 如果 X 有一个连通子集 A , 它与每一个 $B \in \mathcal{B}$ 均相交 (交集不是空集), 则 X 连通.

这个定理也可以表述为: 若 A 是 X 的连通子集, $\mathcal{B}$ 是 X 的连通子集的一个族, 其中每个都与 A 相交. 那么 $(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \cup A$ 是连通集. 为此只需注意到若 $A \subset Y \subset X$, A 是 X 的连通子集, 那么 A 也是 Y 的连通子集.

证明. 设 $U \subset X$ 既开又闭, 则由上面引理 1, 或者 $A \cap U = \emptyset$, 或者 $A \subset U$.

现设 $A \subset U$. 再对 B 应用引理 1, 就有 $B \subset U$, 或者 $B \cap U = \emptyset$. 由于 A 和每个 $B \in \mathcal{B}$ 都相交, 所以必然对所有 $B \in \mathcal{B}$, 成立 $B \subset U$. 从而 $X = U$. 这就证明了 X 连通.

如果 $A \cap U = \emptyset$, 那么 $A \subset X \setminus U$, 而 $X \setminus U$ 是既开又闭的集合, 所以 $B \subset X \setminus U$, 或者 $B \subset U$. 由于 A, B 相交, 后一情形不可能. 于是对 $B \in \mathcal{B}$ 取并集得到 $X \subset X \setminus U$, 即 U 是空集. 这就证明了 X 连通. $\square$

定理 5. 两个非空连通空间的乘积空间连通.

证明. 设 X, Y 连通. 子集族 $\mathcal{B} = \{X \times \{y\} : y \in Y\}$ 是 $X \times Y$ 的连通覆盖. 另对 $x \in X$, $A = \{x\} \times Y$ 是 $X \times Y$ 的连通子集且满足定理 4 条件. 于是 $X \times Y$ 连通. $\square$

例 5. n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和环面 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 连通.

例 6. n 维球面 S^n 连通. 这是因为 $S^n \cong I^n / \partial I^n$, 其中 $I^n = ([0, 1])^n$. 或者利用归纳法, 取 A 是 S^n 的“赤道”, 则 $A \cong S^{n-1}$ 连通, 而北半闭球 A^+ 和南半闭球 A^- 均同胚于 I^n , 从而连通; 但 $A \cap A^+ \neq \emptyset, A \cap A^- \neq \emptyset$, 从而 S^n 连通.

例 7. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \cong S^1 \times (0, +\infty)$ 连通, 而 $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ 不连通. 所以通过同时挖去原点可知 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^1$ 不同胚.

定理 6. 设 A 是拓扑空间 X 的连通子集, $A \subset B \subset \text{Cl}(A)$, 则 B 连通. 特别地, 连通集的闭包是连通集; 具有稠密连通子集的拓扑空间连通.

证明. 设 $f: B \rightarrow \{-1, 1\}$ 是连续映射. 由于 A 连通, 从而 $f(A)$ 连通. 不妨设 $f(A) = 1$, 即 $A \subset f^{-1}(\{1\})$. 两边关于子空间 B 取闭包, 得到 $\text{Cl}_B(A) \subset \text{Cl}_B(f^{-1}(\{1\}))$. (设 $A \subset B$, $\text{Cl}_B(A)$ 是指 B 中包含 A 的最小闭子集, 从而 $\text{Cl}_B(A) = \text{Cl}(A) \cap B$.) 从而由于 $B \subset \text{Cl}(A)$, $\text{Cl}_B(A) = B$; 又 $f^{-1}(\{1\})$ 是 B 的闭子集, 从而 $\text{Cl}_B(f^{-1}(\{1\})) = f^{-1}(\{1\})$. 这就证明了 $B \subset f^{-1}(\{1\})$, 即 f 不可能是满射, 即得 B 连通. $\square$

10.3 连通分支

定义 2 (连通分支). 如果 X 的非空子集 A 连通, 且对 X 的任意连通子集 B , 若 $B \supset A$, 则 $B = A$, 那么称 A 为 X 的一个连通分支.

连通分支也就是拓扑空间中最大的连通子集, 是“独立的一部分”.

定理 7 (按连通分支分解拓扑空间). 任意拓扑空间 X 都可以表示为一些两两不交的连通分支的并集. 即 X 的每个非空连通子集都含于唯一一个连通分支之中.

证明. 1. 对任意 $x \in X$, 单点集 $\{x\}$ 是连通集, 于是 x 总包含在某个连通集之中.

2. 设 A 是 X 的连通子集. 取 X 的连通子集族 $\mathcal{B} = \{B \supset A : B \text{ 连通}\}$, 则 $Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ 连通 (利用定理 4). 任取包含 Y 的连通子集 C , 则 $C \supset A$, 从而 $C \in \mathcal{B}$, 于是 $C = Y$. 这就表明 Y 是包含 A 的一个连通分支.

3. 设 Y_1 和 Y_2 是包含 A 的两个连通分支, 则由定理 4, $Y_1 \cup Y_2$ 也是包含 A 的连通集. 由连通分支的极大性, $Y_1 \supset Y_1 \cup Y_2 \supset Y_2$, $Y_2 \supset Y_1 \cup Y_2 \supset Y_1$, 于是 $Y_1 = Y_2$. 这就证明了包含 A 的连通分支的唯一性.

4. 不同连通分支之间不相交. 这是由于若它们不同且相交, 则交集集中的点包含于两个不同的分支, 与前述唯一性矛盾. 所以 X 可表示为若干互不相交的连通分支的并集. $\square$

习题 2. X 到 Y 的同胚映射诱导 X 和 Y 连通分支之间的同胚. 所以连通分支个数是拓扑不变量.

例 8. 平面上交于一点的三条直线构成的拓扑子空间和交于一点的两条直线构成的拓扑子空间不同胚, 因为挖掉交点后它们的连通分支个数分别为 6 和 4.

例 9. 连通分支都是闭子集.

这是由于, 若 A 是连通集, 则根据定理 6, $\text{Cl}(A)$ 也是连通集. 从而由连通分支极大性, $A = \text{Cl}(A)$.

定理 8 (连通分支是开集的条件). 如果每个点 $x \in X$ 都有一个连通的邻域, 则 X 的连通分支是开集.

证明. 设 Y 是一个连通分支, 且对 $y \in Y$, y 有一个连通邻域 U_y . 那么 U_y 包含在一个连通分支 Y' 内. 根据 y 所在连通分支的唯一性, $Y' = Y$, 于是 $U_y \subset Y$. 这就表明 Y 是开集. $\square$

注意如果一个拓扑空间的连通分支只有有限个, 则每个连通分支都是既开又闭的; 但如果连通分支有无限个, 则就未必是开集了.

例 10. 将有理数集 $\mathbb{Q}$ 视作欧氏直线 $\mathbb{R}$ 的拓扑子空间, 则 $\mathbb{Q}$ 中任何两个点组成的集合都可以用无理数分开, 从而不连通; 也就是说 $\mathbb{Q}$ 中的连通分支就是单点集, 从而不是 $\mathbb{Q}$ 中的开集.

10.4 局部连通

定义 3 (局部连通). 如果任取 $x \in X$, x 都有由连通邻域组成的邻域基, 则称 X 是局部连通的拓扑空间.

很容易举例说明局部连通空间可以不连通. 此外, 连通空间也未必是局部连通的. 这一点要特别引起注意. 所以连通和局部连通是两个颇不相同的拓扑性质.

习题 3.[拓扑学家的正弦曲线] 取 $X = A \cup B$, 其中

$$A = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\}, \quad B = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}.$$

证明: 1) X 是连通的; 2) $(0, 0)$ 不是局部连通的.

例 11. 多于一个点的离散拓扑空间都是局部连通但不连通的; 欧氏空间中两个不交的开球构成的拓扑子空间是局部连通但不连通的.

定理 9. 拓扑空间 X 是局部连通的充分必要条件为: X 的任意开集的连通分支是 X 的开集.

证明. 1. 必要性就是重复定理 8 的证明. 设 X 局部连通, U 是 X 的开集, C 是 U 的一个连通分支. 对任意 $x \in C$, 由于 U 是包含 x 的开集, 从而存在 x 的连通邻域 U_x , 使得 $U_x \subset U$. 那么由连通分支的极大性, $U_x \subset C$. 于是 C 是开集.

2. 充分性. 设 $x \in X$, U 是包含 x 的一个开集, 而 C 是 U 的包含 x 的那个连通分支, 则 $C \subset U$ 是 x 的一个连通邻域. 由此得到的集族 $\mathcal{C}$ 就是 x 的一个连通邻域基. $\square$

定理 10. 局部连通空间的连续开 (闭) 映射的像集是局部连通的.

证明. 1. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续满射, U 是 Y 的开集, C 是 U 的一个连通分支. 要证 C 是开集.

2. 对任意 $x \in f^{-1}(C)$, 令 C_x 是包含 x 的开集 $f^{-1}(U)$ 的连通分支. 由 f 的连续性, $f(C_x) \subset U$ 是连通集, 且 $f(x) \in f(C_x) \cap C$. 那么 $f(C_x)$ 就是包含 $f(x)$ 的一个连通集, 而 C 是包含 $f(x)$ 的连通分支, 于是 $f(C_x) \subset C$, 即 $C_x \subset f^{-1}(C)$. 另一方面, 由于 X 局部连通, C_x 是开集. 从而 $f^{-1}(C)$ 是 X 的开子集.

3. 于是若 f 是开映射, 则 $C = f(f^{-1}(C))$ 是 Y 中开集.

4. 若 f 是闭映射, 则 $Y \setminus C = f(X \setminus f^{-1}(C))$ 是 Y 的闭子集. 从而 C 是开集. $\square$

习题 4. 证明局部连通性是拓扑性质.

习题 5. 证明闭圆盘 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 连通.

习题 6. 设 A 是连通空间 X 的闭子集, 且 ∂A 连通. 证明 A 连通.

习题 7. 设 X 是一个连通度量空间, 且至少含有两个点. 证明: X 一定包含不可数个点.

习题 8. [一维 Borsuk-Ulam 定理] 设 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 则存在一点 $z \in S^1$ 使得 $f(z) = f(-z)$.

第十一讲 道路连通性 局部道路连通性

这一讲我们介绍较连通性更直观的道路连通性.

11.1 道路连通

定义 1 (道路). 设 X 是拓扑空间, 连续映射 $\sigma: I = [0, 1] \rightarrow X$ 称为连结 $x_0 = \sigma(0)$ 和 $x_1 = \sigma(1)$ 的一条道路.

定义 2 (道路连通). 设 X 是拓扑空间. 如果对任意 $x_0, x_1 \in X$ 都存在 X 中连结它们的道路, 则称 X 是道路连通空间. 设 $A \subset X$, 若子空间 A 道路连通, 就称 A 是 X 的一个道路连通子集.

例 1. $\mathbb{R}^n$ 和 S^n 都是道路连通的. $\mathbb{R}^n$ 中的凸集, 星形集都是道路连通的.

定理 1 (连通与道路连通的关系). 道路连通空间是连通空间.

证明. 设 X 是道路连通空间, 且存在非空不相交开子集 U, V 使得 $U \cup V = X$. 取 $x_0 \in U, x_1 \in V$, 以及连结 x_0, x_1 的道路 $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$. 那么 $\sigma^{-1}(U)$ 和 $\sigma^{-1}(V)$ 是 $[0, 1]$ 的非空不相交开子集, 且 $[0, 1] = \sigma^{-1}(U) \cup \sigma^{-1}(V)$, 与 $[0, 1]$ 连通性矛盾. $\square$

例 2. 拓扑正弦曲线

$$S = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

连通但不道路连通.

证明. 1. 由于 $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ 是连通空间 $(0, 1]$ 的像, 从而连通; 而 $A \subset S \subset \text{Cl}(A)$, 则 S 是连通的 (见第十讲定理 6).

2. 下面证明: 在 S 中任意以 $(0, 0)$ 为起点的道路只能是 $\sigma(t) = (0, 0), \forall t \in [0, 1]$.

由 $\{(0, 0)\}$ 是闭集可知 $\sigma^{-1}((0, 0))$ 是 $[0, 1]$ 的闭子集. 另一方面, 取 $t_0 \in \sigma^{-1}((0, 0))$, 则由 σ 的连续性和 $[0, 1]$ 局部连通性, 存在 t_0 的连通开邻域 U 使得 $\sigma(U) \subset S \cap B((0, 0); 1/2)$. 由于 $(0, 0) \in \sigma(U)$, 且 $S \cap B((0, 0); 1/2)$ 包含 $(0, 0)$ 的连通分支只能是 $(0, 0)$ (注意 $S \cap B((0, 0); 1/2)$ 是 $(0, 0)$ 与无线条间断曲线的并集), 则 $\sigma(U) \subset \{(0, 0)\}$. 于是 $U \subset \sigma^{-1}((0, 0))$. 这就证明了 $\sigma^{-1}((0, 0))$ 是开集. 由 $[0, 1]$ 的连通性, 即得 $\sigma^{-1}((0, 0)) = [0, 1]$. $\square$

这个例子表明, 具有道路连通稠密子集的空间未必道路连通. 这是道路连通与连通性的一个重要区别.

习题 1. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的开集是连通的, 当且仅当它是道路连通的.

11.2 道路连通性的判定

利用连续映射的复合的连续性, 有

定理 2. 道路连通空间的连续像是道路连通的; 从而道路连通是拓扑性质.

定义 3 (乘积空间道路连通). 两个非空道路连通空间的乘积空间道路连通.

证明. 设 X, Y 道路连通, σ_1 和 σ_2 分别是在 X 和 Y 中连结点 x_0, x_1 (和 y_0, y_1) 的道路. 则

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t)), \quad t \in [0, 1]$$

就是连结 $X \times Y$ 中两点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 的道路. (由乘积拓扑的性质, $\sigma(t)$ 是连续的.) $\square$

定理 3. 设 X 有一个道路连通覆盖 $\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{B}$ 是由 X 的道路连通子集构成的族, 且 $\bigcup \mathcal{B} = X$. 如果 X 还有一个道路连通子集 A , 它与每个 $B \in \mathcal{B}$ 都相交, 则 X 道路连通.

证明. 对 X 中两点 x_0, x_1 , 存在 $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ 使得 $x_0 \in B_0, x_1 \in B_1$. 又设 $y_0 \in A \cap B_0, y_1 \in A \cap B_1$, 则由 A, B_0, B_1 的道路连通性, x_0, x_1 可用 X 中道路连结. $\square$

11.3 道路分支

定义 4 (道路分支). 设 X 是拓扑空间, C 是 X 的道路连通子集. 如果它不是 X 的某个道路连通子集的真子集, 就称 C 是 X 的一个道路连通分支.

习题 2. 一个拓扑空间的道路连通分支的个数是个拓扑不变量.

习题 3. 道路连通分支必包含在连通分支中; 但由拓扑正弦曲线, 说明连通分支未必包含在道路连通分支内.

定理 4 (道路连通分支的刻画). 任取 $x \in X$, 则等价类

$$\langle x \rangle = \{y \in X : \text{从 } x \text{ 到 } y \text{ 有道路相连}\}$$

就是包含 x 的道路连通分支.

证明. 显然 $\langle x \rangle$ 是道路连通集. 又若 C 是包含 x 的道路连通集, 则由定义, $C \subset \langle x \rangle$. $\square$

定理 5 (按道路分支分解拓扑空间). X 的每个非空道路连通子集都包含在唯一的一个道路连通分支内. 于是 X 可以分解为一些两两不相交的道路连通分支的并.

证明留作习题.

11.4 局部道路连通

定义 5 (局部道路连通). 设 X 是拓扑空间, $x \in X$. 如果对 x 的任意邻域 U , 存在 x 的道路连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 点局部道路连通. 每一点都是局部道路连通的拓扑空间称作局部道路连通空间.

习题 4. [梳子空间] 欧式平面的子集

$$C = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \text{ 或 } \frac{1}{n}, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}, x_2 \in [0, 1] \right\} \\ \cup \{ (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0, 1] \}$$

连通但不局部连通; 道路连通但不局部道路连通.

定理 6. 拓扑空间 X 是局部道路连通的充要条件是它的任意开集的道路连通分支都是 X 的开集.

证明留作习题.

定理 7. 连通且局部道路连通的拓扑空间是道路连通的.

证明. 设 X 是局部道路连通的拓扑空间, C 是它的任意一个道路连通分支. 由上一定理, C 是 X 的开集. 如果 X 有多于一个道路连通分支, 则它就可以表示为两个不相交非空开集的并集. 这与 X 的连通性矛盾. 所以 X 只有一个道路连通分支, 故 X 道路连通. $\square$

习题 5. 设 A 是道路连通空间的闭子集, 且 ∂A 道路连通. 证明: A 道路连通.

习题 6. A 是 X 的道路分支, B 是 Y 的道路分支, 则 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 的道路分支.

习题 7. 设 A, B 都是道路连通空间 X 的开子集, 且 $A \cup B = X$, $A \cap B$ 道路连通. 证明: A, B 道路连通.

习题 8. 设 X 是带可数补拓扑的实数集 $\mathbb{R}$, 而 $f: [0, 1] \rightarrow X$ 是连续映射. 若 $f(t) = x$, 证明 f 在 t 的某个邻域上恒等于 x . 进一步证明 X 的每个道路连通分支都是单点集.

第十二讲 紧性 局部紧性

紧性, 我们在数学分析中就经常遇到, 如欧氏空间中的紧集是有界闭集, 它保证一个点列有收敛子列, 从而帮助找到极限. 从拓扑角度来讲, 其实紧性有好多种, 从不同角度刻画某些拓扑空间小巧而精干的特性: 一方面其中的点都离得不太远, 另一方面接近的点都已那囊括其中. 这一讲我们介绍“覆盖紧”.

12.1 紧空间

定义 1 (覆盖). 设 $C = \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 X 的子集族, $A \subset X$. 如果 $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, 则称 C 是 A 的一个覆盖; 当所有 C_λ 是开集时, C 称为开覆盖; 当 Λ 是有限集时, C 称为有限覆盖; 设 $C' \subset C$, 且 C' 也是 A 的覆盖, 则称 C' 为 C 的子覆盖.

定义 2 (紧空间). 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称 X 是紧空间; 若 A 是 X 的子集, 而 X 的拓扑子空间 A 是紧空间, 则称 A 是 X 的紧子集.

由于紧性的定义只涉及开集, 所以不难验证紧性也是拓扑性质.

习题 1. 证明: A 是 X 的紧子集的充要条件是 A 在 X 中的任何开覆盖都有有限子覆盖.

例 1. 带有限补拓扑的 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_F)$ 是紧空间; 但带可数补拓扑的 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_C)$ 不是紧空间.

证明. 1. 设 $\mathcal{C}$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_F)$ 的一个开覆盖. 任取 $C_1 \in \mathcal{C}$, 则 $X \setminus C_1$ 只含有限个点 $\{x_k\}_{k=2}^N$. 再利用覆盖性质, 对 x_k 取 $C_k \in \mathcal{C}$, 使得 $x_k \in C_k$, 就得到有限子覆盖 $\{C_1, \dots, C_n\}$.

2. 子集族 $\mathcal{C} = \{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_C)$ 的一个开覆盖, 但没有有限子覆盖. $\square$

定义 3 (有限交性质). 设集合 X 的一列子集中任意有限个元素的交集非空, 则称该集族具有有限交性质.

定理 1 (紧空间的闭集刻画). 拓扑空间 X 是紧空间的充要条件是: 对于 X 的具有有限交性质的任意闭集族 $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 有

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset.$$

注意这里 Λ 可以是任意无限集. 该定理是数学分析中关于有界闭区间的海涅-博雷尔定理及闭区间套定理对一般拓扑空间情形的推广, 表明覆盖紧与完备性有关. 这个定理也表明了紧性对于解决存在问题是个重要的工具. 事实上, 在偏微分方程等学科中, 紧性方法是证明解的存在性最重要的方法之一.

证明. 1. 必要性. 反证法. 设 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$. 记 $\mathcal{C} = \{C_\lambda = X \setminus F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 则 $X \setminus (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcap (X \setminus C_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$, 于是 $\bigcup \mathcal{C} = X$, 即 $\mathcal{C}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{C_k\}_{k=1}^n$, 即 $\bigcup_{k=1}^n C_k = X$. 于是 $\emptyset = X \setminus (\bigcup_{k=1}^n C_k) = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus C_k) = \bigcap_{k=1}^n F_k$, 与 $\{F_\lambda\}$ 的有限交性质矛盾.

2. 充分性. 设 $\mathcal{C} = \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 的开覆盖. 则 $\{F_\lambda = X \setminus C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是闭集族, 且

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \right) = X \setminus X = \emptyset.$$

于是集族 $\{F_\lambda\}$ 不具有有限交性质, 即存在 $\{F_k\}_{k=1}^n$ 使得 $\bigcap_{k=1}^n F_k = \emptyset$. 于是 $\bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n (X \setminus F_k) = X \setminus (\bigcap_{k=1}^n F_k) = X$, 即 $\{C_k\}_{k=1}^n$ 就是 $\mathcal{C}$ 的一个有限子覆盖. $\square$

12.2 紧性的判定

定理 2. 紧空间的闭子空间是紧的.

证明. 设 X 是紧空间, A 是 X 的闭子集, $C = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 A 的一个开覆盖. 那么存在 X 的开集族 $\{U_\alpha\}$ 使得 $C_\alpha = A \cap U_\alpha$. 注意 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{X \setminus A\}$ 是 X 的一个开覆盖. 利用 X 的紧性, 存在 X 的有限子覆盖 $\{U_1, \dots, U_n, X \setminus A\}$. 于是 $A \subset A \cap (\bigcup_{k=1}^n U_k) = \bigcup_{k=1}^n C_k$, 即 A 是紧集. $\square$

定理 3. 1) 豪斯多夫空间的紧子集是闭的.

2) 紧的豪斯多夫空间的子集是紧集的充要条件是该子集是闭集.

证明. 只需证明 1). 2) 的充分性源自上一定理, 必要性出自 1).

1) 的证明. 设 X 是豪斯多夫空间, $A \subset X$ 是紧子集. 对任意固定的 $y \in X \setminus A$ 和任意的 $x \in A$, 利用豪斯多夫空间的定义, 存在 x 的邻域 U_x 和 y 的邻域 V_x 使得 $U_x \cap V_x = \emptyset$. 注意 $\{U_x : x \in A\}$ 是 A 的一个开覆盖. 由于 A 紧, 存在有限子覆盖 $\{U_{x_k}\}_{k=1}^n$. 置 $V_y = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$, 它仍是 y 的邻域, 且与 U_{x_k} 均不相交. 由于开集 $U_A \triangleq \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} \supset A$, V_y 与 U_A 不相交, 从而也不和 A 相交. 这就证明了 $X \setminus A$ 是开集, 从而 A 是闭集. $\square$

分析上面证明, 可知 (1) 的本质就是说豪斯多夫空间中的紧子集可以和不其中的点用开集分离. 仿照该证明, 可知豪斯多夫空间中不相交的紧子集可以分别包含在不相交的开集之中. (注意与 (T_4) 分离公理的区别: 分离公理分离的是不交闭集.)

定理 4. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集. 则 A 是紧集的充要条件是: A 是有界闭集.

证明. 1. 必要性. 由于 $\mathbb{R}$ 是豪斯多夫空间, 由上一定理, 若 A 是紧集, 则 A 是闭集. 另一方面, $C = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个开覆盖, 所以也是 A 的一个开覆盖. 由于 A 紧, 存在有限子覆盖, 故 A 必包含在某个区间 $(-N, N)$ 内, 从而有界.

2. 充分性. A 是有界的, 所以存在 N 使得 $A \subset [-N, N]$. 又 A 是闭集, 所以 A 是 $[-N, N]$ 的闭子集. 此外, 注意到紧性是拓扑性质, 而 $[-N, N] \cong [0, 1]$, 下面会证明 $[0, 1]$ 是紧集, 于是 A 是紧豪斯多夫空间的闭子集, 从而是紧集.

3. 下面证明 $[0,1]$ 是 $\mathbb{R}$ 中紧集.

任取 $[0,1]$ 的开覆盖 $\mathcal{U}$. 取

$$B = \{x \in [0,1] : \text{存在 } \mathcal{U} \text{ 的有限子覆盖覆盖 } [0,x]\}.$$

注意 $0 \in B$, 所以 B 不空. 下面证明 B 既开又闭, 从而根据连通性, $B = [0,1]$. 特别地, $[0,1]$ 有有限子覆盖, 从而是紧集.

4. 任取 $x \in B$, 有 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ 使得 $[0,x] \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$. 不妨设 $x \in U_k$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1] \subset U_k$. 任取 $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1]$, 则 $[0,y] \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$, 即 $y \in B$. 这说明 x 的一个邻域在 B 中, 从而 B 是开集.

5. 任取 $x \notin B$, 不妨设 $x \in U \subset \mathcal{U}$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1] \subset U$. 任取 $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, 则 $y \notin B$. (否则先取 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖 $[0,y]$, 然后添加 U 就得到 $[0,x]$ 的有限子覆盖, 于是 $x \in B$, 矛盾!) 这就证明了 $[0,1] \setminus B$ 是开集, 从而 B 是闭集. $\square$

定理 5. 紧空间的连续像是紧的. 特别地, 紧空间的商空间是紧空间.

证明. 设 X 是紧空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射. 设 $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $f(X)$ 的开覆盖, 则 $\{f^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(V_k) : k = 1, \dots, n\}$. 于是 $\{V_k : k = 1, \dots, n\}$ 就是 $f(X)$ 的有限子覆盖, 即 $f(X)$ 紧. $\square$

定理 6 (紧空间的积空间是紧空间). 两个紧空间的乘积拓扑空间是紧空间.

为了证明这个定理, 需要如下管状邻域引理.

引理 1 (管状邻域引理). 设 Y 紧致, W 是 $X \times Y$ 的开子集, 并且 $\{x\} \times Y \subset W$. 则存在 x 的邻域 U 使得 $U \times Y \subset W$.

证明. 任取 $y \in Y$, 由乘积空间拓扑基, 存在 X 的开子集 U_y 和 Y 的开子集 V_y , 使得 $(x,y) \in U_y \times V_y \subset W$. $\{U_y \times V_y : y \in Y\}$ 构成了 $\{x\} \times Y$ 的一个开覆盖. 因为 $\{x\} \times Y \cong Y$ 紧致, 所以有有限子覆盖 $\{U_{y_k} \times V_{y_k}\}_{k=1}^n$. 取 $U = \bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$,

则 $U \times Y \subset W$. 事实上, 对任意 $(u, y) \in U \times Y$, 则对所有 k , $u \in U_{y_k}$; 此外, 由覆盖性质, 存在 $V_{y_m} \ni y$. 于是 $(u, y) \in U_{y_m} \times V_{y_m} \subset W$. 证毕. $\square$

定理 6 的证明. 设 X, Y 是紧空间, $\mathcal{W}$ 是 $X \times Y$ 的一个开覆盖. 任取 $x \in X$, 则 $\{x\} \times Y \cong Y$ 紧致, 因此存在 $\mathcal{W}$ 的有限个子集的族 $\{\mathcal{W}_x\}$ 覆盖 $\{x\} \times Y$. 由引理 1 (取 $W = \cup \mathcal{W}_x$), 存在 x 的开邻域 U_x 使得 $\{\mathcal{W}_x\}$ 也覆盖 $U_x \times Y$. 这些 U_x 又构成 X 的一个开覆盖, 所以有有限子覆盖 $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. 于是 $\mathcal{W}_{x_1} \cup \mathcal{W}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{W}_{x_n}$ 就构成了 $X \times Y$ 的一个有限子覆盖. 证毕.

定理 6 可以推广为如下 Tychonoff 定理. 这是一个深刻的结论, 证明用到了选择公理, 对于研究函数空间具有重要意义. 证明可见 [8, 第 37 节].

定理 7 (Tychonoff 定理). 在积拓扑下, 任意个紧致空间的笛卡尔积还是紧致空间. 即, 对任意指标集 J , 若对任意 $\alpha \in J$, X_α 都是紧致空间, 则 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 仍是紧致空间.

由上述定理 3, 定理 4 和定理 6, 不难知道 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集是紧集的充分必要条件是它是有界闭集.

12.3 紧性的应用

定理 8. 紧致豪斯多夫空间是正规空间.

证明. 与定理 3 的 1) 的证明方法类似. 设 A 和 B 是紧致豪斯多夫空间 X 中两个不交的闭集, 则由定理 3 的 2), 它们都是紧集. 回忆定理 3 的 1) 的证明, 对任意固定的 $y \in B$, 已经得到 A 的邻域 U_A 和 y 的邻域 V_y , 它们不相交. 由于 $\{V_y : y \in B\}$ 是 B 的开覆盖, 由 B 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{V_{y_j}\}_{j=1}^m$, 每个 V_{y_j} 均不和 U_A 相交. 那么我们得到 B 的开邻域 $V_B = \bigcup_{j=1}^m V_{y_j}$, 它与 U_A 仍不相交. $\square$

定理 9. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, X 是紧的, Y 是豪斯多夫空间, 则 f 是闭映射. 特别地,

- 若 f 是满射, 则 f 是商映射;

- 当 f 是双射时, f 是同胚.

证明. 利用定理 5 和定理 3, 定理 2, 就可知 f 将闭集映为闭集, 所以是闭映射. 关于商映射, 参考第七讲定理 6. $\square$

设 $f: X \rightarrow Y$ 是紧空间 X 到豪斯多夫空间 Y 的连续满射, 则 f 是商映射. 由 f 给出 X 上的等价关系 $\sim_f$ ($x_1 \sim_f x_2$ 当且仅当 $f(x_1) = f(x_2)$). 根据第七讲定理 9, f 决定了同胚映射 $f^* = f \circ p^{-1}: X/\sim_f \rightarrow Y$. 这是构造同胚映射, 以及证明拓扑空间同胚的一个重要方法.

例 2. 从 $[0,1]$ 到 S^1 的连续满射都是商映射. 特别地,

$$f: [0,1] \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

是商映射. 于是 $[0,1]/\sim$ (粘合端点) 同胚与 S^1 .

定理 10 (极值定理). 设 X 是紧空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 那么 f 有界, 且在 X 上取到最大值和最小值.

证明. 由定理 5, $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 上紧集, 从而由定理 4, $f(X)$ 是有界闭集. 故 $m = \inf\{f(x) : x \in X\}$ 和 $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$ 均属于 $f(X)$, 即 f 可以取到最大值和最小值. $\square$

一个自然的问题是: 设 X 上的连续函数都有界而且在 X 上取到最大值和最小值, 是否可以保证 X 是紧集? 答案是未必的, 即还有与上述紧性不同的其他“紧性”条件来保证极值性质成立 (见下一讲).

12.4 局部紧性与单点紧化

1. 局部紧性

n 维欧式空间不是紧的, 但可以引入局部紧的概念, 并通过单点紧化转化为紧空间予以研究.

定义 4 (局部紧). 设 X 是拓扑空间, $x \in X$. 如果存在一个紧集, 它包含点 x 的一个邻域, 则称 X 在 x 点是局部紧 的. 每一点都局部紧的拓扑空间称为局部紧空间.

显然紧空间是局部紧的. 容易验证局部紧性是个拓扑性质.

习题 2. 局部紧空间的闭子集是局部紧的.

习题 3. 说明局部紧空间在连续映射下的像未必是局部紧的. 证明: 局部紧空间在开的连续映射下的像是局部紧的.

习题 4. 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间的有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的.

定理 11. 紧豪斯多夫空间的开子集是局部紧的.

证明. 设 X 是紧致豪斯多夫空间, 则它是正规空间. 设 A 是 X 的开子集. 对任意 $a \in A$, 存在开集 $V \subset A$ 使得 $a \in V$, 且 $\text{Cl}(V) \subset A$. 由定理 2, $\text{Cl}(V)$ 是紧的. 所以 A 局部紧. $\square$

定理 12. 局部紧的豪斯多夫空间是正则空间.

证明. 1. 设 X 是一个局部紧的豪斯多夫空间. 设 $x \in X$, U 是包含 x 的开集. 根据正则空间的等价定义 (第九讲定理 1), 我们需要找一个包含 x 的开集 W , 使得 $x \in W \subset \text{Cl}(W) \subset U$.

2. 由于 X 是局部紧的, 存在 X 的紧子集 F_1 使得 $x \in V_1 \subset F_1$, 其中 V_1 是个 X 的开子集. 记 $V = \text{Int}(F_1) \supset V_1$, 它仍是 x 的邻域. 由于豪斯多夫空间的紧子集是闭集, 所以 F_1 是个闭集. 于是还成立 $F_1 \supset \text{Cl}(\text{Int}(F_1)) = \text{Cl}(V)$. 那么 $F = \text{Cl}(V)$ 是紧致豪斯多夫空间 F_1 的闭子集, 所以是 F_1 的紧子集, 从而也是 X 的紧子集.

这样我们得到了 x 的邻域 V 使得 $F = \text{Cl}(V)$ 是个紧集.

3. 由于豪斯多夫空间的子空间仍是豪斯多夫空间, 所以 F 是紧致豪斯多夫空间, 从而是正规空间, 也是正则空间 (回忆豪斯多夫空间中单点集必是闭集).

4. 令 $G = U \cap V$, 它是 X 的包含点 x 的开子集. 又 $G \subset F$, 所以 G 是 F 的开子集. 根据子空间 F 的正则性, 存在 F 的开子集 W 使得 $x \in W \subset \text{Cl}_F(W) \subset G \subset U$.

5. 由于 W 是 F 的开子集, 存在 X 的开子集 A 使得 $W = F \cap A$; 而 $W \subset G \subset F$, 所以也成立 $W = G \cap A$; 即 W 相对于 G 开. 又 G 是 X 的开集, 所以 W 是 X 的开子集.

6. 此外, 由于 $W \subset G \subset V$, 所以 $\text{Cl}(W) \subset \text{Cl}(V)$. 于是成立

$$\text{Cl}_F(W) = \text{Cl}(W) \cap F = \text{Cl}(W) \cap \text{Cl}(V) = \text{Cl}(W).$$

所以上面找到的 W 是 X 的开集且满足所需条件 $x \in W \subset \text{Cl}(W) \subset U$. $\square$

2. 单点紧化

定理 13 (单点紧化). 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, ∞ 是个抽象的点. 令 $X^* = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus C : C \text{ 是 } X \text{ 的紧闭集}\}$, 则 $\mathcal{T}^*$ 是 X^* 上的一个拓扑. 拓扑空间 $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 称为 $(X, \mathcal{T})$ 的单点紧化空间, 具有如下性质:

- 1) $(X, \mathcal{T})$ 是 $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 的子空间, 且当 X 非紧时, X 在 X^* 中稠密;
- 2) $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 是紧空间;
- 3) $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 是紧豪斯多夫空间的充分必要条件是: $(X, \mathcal{T})$ 是局部紧的豪斯多夫空间.

证明可见 [8, 第 29 节], 我们略去.

习题 5. 证明从 $[0, 1]$ 到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的任何连续满射都不是单射.

习题 6. 设 A 是紧致空间 X 的一个包含无穷多个点的子集. 证明: A 必有聚点.

第十三讲 序列紧 可数紧 聚点 紧 伪紧 仿紧

这一讲介绍与覆盖紧类似的一些有关紧性的概念, 请注意辨别它们的区别及来源.

13.1 定义

1. 序列紧

序列紧性即 Bolzano-Weierstrass 定理所述“ $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列必有收敛子列”性质的推广. 这是分析学中常用的紧性方法的基础.

定义 1 (序列紧). 设 X 是拓扑空间, 如果它的任意序列均有收敛的子序列, 则称 X 为序列紧空间. 设 $A \subset X$, 如果 X 的子空间 A 是序列紧的, 就称 A 是 X 的序列紧子集.

例 1. 序列紧空间上的连续函数一定取到最小值和最大值.

证明. 下面以最小值为例证明. 设 X 是序列紧空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续映射. 取点列 $\{x_n\} \subset X$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf f(X).$$

先假设 $\inf f(X) > -\infty$. 由列紧性, 可找到 x_n 的收敛子列 x_{n_i} 以及 $x \in X$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x$. 由 f 的连续性, $f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \inf f(X)$. 所以 f 在 x 点取到最小值.

设 $\inf f(X) = -\infty$, 我们导出矛盾. 如果 $\inf f(X) = -\infty$, 则存在点列 $x_n \in X$ 使得 $f(x_n) < -n$. 由列紧性, 不妨设 $x_n \rightarrow x \in X$. 则 $f(x_n) \rightarrow f(x)$. 注意 $f(x)$ 是有限值, 于是 $f(x_n)$ 应当有界, 与 $f(x_n) < -n$ 矛盾. $\square$

习题 1. 证明: 序列紧空间的闭子空间是序列紧的; 序列紧空间的连续像是序列紧的.

2. 可数紧

定义 2 (可数紧). 设 X 是拓扑空间, 如果它的任意可数开覆盖均有有限子覆盖, 则称 X 是可数紧空间. 如果 X 的任意开覆盖均有可数开覆盖, 则称 X 是 Lindelöf 空间.

由定义, 紧空间必是可数紧的; 可数紧的 Lindelöf 空间是紧空间.

例 2. 空间 X 是可数紧的充要条件是: X 中任意具有有限交性质 (或下降) 的闭集序列 $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ 有非空的交集.

证明. 与上一讲定理 1 的证明类似.

1. 必要性. 设 $\bigcap_n F_n = \emptyset$, 则 $X = X \setminus (\bigcap_n F_n) = \bigcup_n X \setminus F_n$, 所以 $\{X \setminus F_n\}$ 是 X 的可数开覆盖. 所以它有有限子覆盖, $X = \bigcup_{n \in \Lambda} X \setminus F_n$, 其中 Λ 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集. 于是 $\bigcap_{n \in \Lambda} F_n = \emptyset$, 与 $\{F_n\}$ 的有限交性质矛盾.

2. 充分性. 设 $\{U_n\}$ 是 X 的可数开覆盖, 则 $\{F_n = X \setminus U_n\}$ 是闭集且

$$\bigcap_n F_n = X \setminus \left(\bigcup_n U_n \right) = \emptyset.$$

于是 $\{F_n\}$ 不具备有限交性质, 即存在 $\mathbb{N}$ 的有限子集 Λ 使得 $\bigcap_{n \in \Lambda} F_n = \emptyset$, 这意味着 $\{U_n\}_{n \in \Lambda}$ 是 X 的有限子覆盖. 所以 X 是可数紧的. $\square$

习题 2. 证明: 可数紧空间的闭子集是可数紧的.

习题 3. 第二可数空间是 Lindelöf 空间.

3. 聚点紧

定义 3 (聚点紧). 设 X 是拓扑空间, 如果它的任意无限子集均有极限点 (也叫聚点), 则称 X 是聚点紧空间.

4. 伪紧

定义 4 (伪紧). 如果拓扑空间 X 上的连续函数都是有界的, 则称 X 是伪紧的.

13.2 可数紧与序列紧的关系

定理 1. 序列紧空间是可数紧空间.

证明. 设 X 是序列紧空间, $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 中一列非空下降闭集. 任取 $x_n \in F_n$, 由 X 的序列紧性, $\{x_n\}$ 有收敛于某个 $x \in X$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$. 对任意 j , $x_{n_j}, x_{n_{j+1}}, \dots$ 均在 F_{n_j} 中, 且 $\{x_{n_k} : k \geq j\}$ 收敛于 x . 所以 $x \in \text{Cl}(F_{n_j}) = F_{n_j}$. (否则, 利用 $X \setminus \text{Cl}(F_{n_j})$ 是开集, 以及极限的定义导出矛盾.) 由于 $F_{n_j} \subset F_j$, 从而由 j 的任意性, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. 这就表明 X 是可数紧空间. $\square$

定理 2. 满足第一可数公理的可数紧空间是序列紧空间.

证明. 设 X 是满足第一可数公理的可数紧空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 令 $A_n = \{x_i : i \in \mathbb{N}, i \geq n\}$, 则 $\bar{A}_n \triangleq \text{Cl}(A_n)$ 是一列非空的下降的闭集. 由 X 的可数紧性, 存在 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$. 又 X 满足第一可数公理, x 点存在可数的邻域基 $\{U_n\}$, 且不妨设 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. 由 $x \in \bar{A}_1$, 存在 $x_{n_1} \in A_1 \cap U_1$. (若 $x \in A_1$, 取 $x_{n_1} = x$ 即可; 否则, 利用极限点的定义.) 由 $x \in \bar{A}_{n_1+1}$, 存在 $x_{n_2} \in U_2 \cap A_{n_1+1}$, $n_2 > n_1$. 如此继续, 得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$, 它收敛到 x , 即 X 是序列紧的. $\square$

13.3 可数紧与聚点紧的关系

定理 3. 可数紧空间必为聚点紧空间.

证明. 设 X 不是聚点紧的, 即 X 存在一个无聚点的无限子集. 我们在该集中取一个无限可数子集 $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 现在构造一个可数开覆盖, 它不存在有限子覆盖.

首先, 因为 A 没有聚点, 则 A 是闭集, $X \setminus A$ 是开集. 其次, 对任意 $x_n \in A$, 因为 x_n 不是 A 的聚点, 则存在包含 x_n 的开集 U_n , 使得 $U_n \cap (A \setminus \{x_n\}) = \emptyset$, 即 U_n 中只含 x_n 一点. 从而 $\{X \setminus A, U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个无限可数开覆盖. 显然, 它没有有限子覆盖, 从而不是可数紧空间. $\square$

定理 4. 满足 (T_1) 公理的聚点紧空间必是可数紧空间.

证明. 设 X 满足 (T_1) 公理 (即其中单点集都是闭集), 且不是可数紧空间, 即存在可数开覆盖 $C = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, C 没有有限子覆盖. 令 $V_1 = U_1$, 取 $x_1 \in V_1$. 归纳地, 当 $n > 1$ 时, 设 $V_1, \dots, V_{n-1}$ 已取定, 令 V_n 为不包含在 $\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$ 中的第一个 U_i . 因 $V_1, \dots, V_{n-1}$ 不能覆盖 X , 可知这样的 V_i 必然存在. 由此还知成立 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

此外, 任取 $x_n \in V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i)$, 我们证明无限集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 没有聚点, 从而 X 不是聚点紧的.

事实上, 若 x 是 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的一个聚点, 由 (T_1) 公理, x 的任意邻域应包含无限个 x_n . (否则, 若 x 有个邻域 U 只包含有限个 x_n , 先假设 x 和 x_n 都不同, 则这有限个 x_n 的集合是闭集, 记为 $\bar{V}$. 于是 $U \setminus \bar{V}$ 是开集, 且包含 x , 而其中再没有 x_n 的点, 与聚点定义矛盾. 又若 x 和某个 x_n 相同, 则去掉相同的点后照前论证即可.)

由 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ 知存在正整数 N 使 $x \in V_N$. 由上一段, V_n 中包含无限个 x_n . 另一方面, 由 $\{x_n\}$ 的取法, $V_N \cap \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} = \emptyset$, 即 V_n 中至多有限个 x_n . 这就得到矛盾. $\square$

13.4 可数紧与伪紧的关系

引理 1. 可数紧空间的连续像是可数紧的.

证明方法与紧性情形类似, 作为习题.

定理 5. 可数紧空间是伪紧的.

证明. 由上面引理, 可数紧空间上的任一连续函数的像集在 $\mathbb{R}$ 中是可数紧的. 设 Y 是 $\mathbb{R}$ 的可数紧子集, 则 $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 Y 的可数开覆盖. 它有有限子覆盖, 从而存在 N 使得 $Y \subset (-N, N)$. 于是 Y 必然有界. $\square$

定理 6. 伪紧的正规豪斯多夫空间是可数紧的.

证明. 1. 设 X 是伪紧的正规豪斯多夫空间. 注意 X 满足第一分离公理, 所以其可数紧性与聚点紧性等价. 如果 X 不是可数紧的, 则它也不是聚点紧的. 所以存在 X 的可数无限子集 $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使得 A 没有聚点. 于是 A 的每个子集 B 都没有聚点. 由于 $\text{Cl}(B)$ 由 B 和 B 的聚点构成, 所以 B 是闭集. 从而 A 作为子空间是离散的.

2. 作函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x_n) = n$. 由 A 是带离散拓扑的闭集, 这是一个连续函数. 由于 X 是正规空间, 根据 Tietze 扩张定理, 存在连续函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g|_A = f$. 显然 g 是无界的, 这与 X 伪紧矛盾. $\square$

几种紧性的关系见图 13.1.

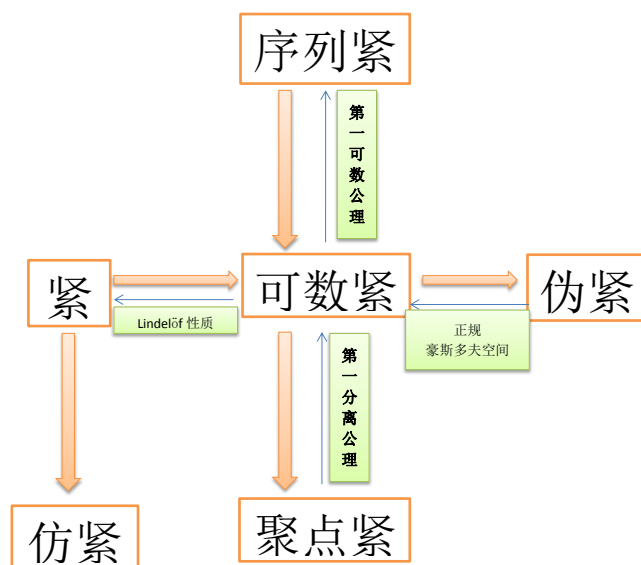


图 13.1: 各类紧性之间的关系.

13.5 仿紧

定义 5 (加细). 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 X 的覆盖, 如果对任意 $V \in \mathcal{V}$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $V \subset U$, 则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细.

定义 6 (仿紧). 设 X 是豪斯多夫空间. 如果它的任意开覆盖都有局部有限的加细, 则称 X 是仿紧空间.

仿紧性的重要应用之一是如下 Smirnov 度量化定理.

定理 7 (Smirnov 度量化定理). 空间 X 可度量化当且仅当 X 是可局部度量化的仿紧空间.

这里局部度量化是指每点都有一个邻域在子空间拓扑之下可度量化. 另外, 成立如下在微分流形中具有重要应用的单位分解定理.

定理 8 (单位分解定理). 设 X 是仿紧空间, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是 X 的一个加标开覆盖. 那么存在一个加标的连续函数族

$$\varphi_\alpha: X \rightarrow [0, 1],$$

使得

- 1) 对每个 α , φ_α 的支集在 U_α 中;
- 2) 加标族 $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}_\alpha$ 是局部有限的;
- 3) 对每个 x , 有 $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$.

以上及下列定理的证明可见 [8, 第 41, 42 节].

定理 9. 仿紧空间的闭子空间是仿紧的; 可度量化空间是仿紧的; 每一个满足 (T1) 公理的正则的 Lindelöf 空间是仿紧的.

定理 10. 仿紧空间是正规豪斯多夫空间.

第十四讲 度量空间中的紧性

度量空间是最常用的拓扑空间, 其中紧集的判定及性质在数学其它学科中应用十分广泛, 所以我们在这一讲作一介绍.

14.1 度量空间中各类紧性的等价性

1. Lebesgue 数引理

定义 1 (直径). 设 A 是度量空间 (X, d) 的子集, 称 $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ 为 A 的直径.

定理 1 (Lebesgue 覆盖引理). 设 $\mathcal{A}$ 是度量空间 (X, d) 的一个开覆盖. 若 X 是列紧的, 则存在 $\delta > 0$ 使得 X 的任意的直径小于 δ 的子集都包含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素中. δ 称为 $\mathcal{A}$ 的 Lebesgue 数.

证明. 1. 反证法. 假设不存在满足如下条件的 δ : X 的任意直径小于 δ 的子集都包含在 $\mathcal{A}$ 的某个元素中, 然后推出矛盾.

2. 由反证假设, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, X 中存在直径小于 $1/n$ 的子集 C_n , 它不包含于 $\mathcal{A}$ 的任意元素. 对于每一个 n , 选取一个 $x_n \in C_n$, 得到一个序列 $\{x_n\}$. 由列紧性, $\{x_n\}$ 有个子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到一点 $a \in X$. 由于 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖, a 应当包含在 $\mathcal{A}$ 的某个元素 A 中. 由于 A 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(a, \varepsilon) \subset A$. 只要 i 充分大, 就有 $1/n_i < \varepsilon/2$, 于是 $C_{n_i} \subset B(x_{n_i}, 1/n_i) \subset B(x_{n_i}, \varepsilon/2)$. 当 i 充分大时, 由于 x_{n_i} 收敛到 a , $d(x_{n_i}, a) < \varepsilon/2$, 从而 $C_{n_i} \subset B(a, \varepsilon) \subset A$. 这与假设矛盾! $\square$

2. 完全有界

定义 2 (ε -网和完全有界). 设 $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是度量空间 X 的有限子集. 如果

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon),$$

则称 F 是 X 的一个 ε -网 ($\varepsilon > 0$). 如果对任意 $\varepsilon > 0$, X 均存在 ε -网, 则称 X 是完全有界的.

引理 1. 序列紧的度量空间是完全有界的.

证明. 设度量空间 X 不是完全有界的, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得 X 无 ε -网. 任取 $x_1 \in X$, 因 $\{x_1\}$ 不是 ε -网, 故存在 $x_2 \in X$, 使得 $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. $\{x_1, x_2\}$ 也不是 ε -网, 所以存在 $x_3 \in X$, 使得 $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$, $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$. 如此继续, 可得序列 $\{x_n\}$, 使得当 $i \neq j$ 时 $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. 显然 $\{x_n\}$ 无收敛的子序列, X 也不是列紧的. $\square$

3. 度量空间中紧性等价

定理 2. 序列紧的度量空间是紧空间.

证明. 设 C 是序列紧的度量空间 X 的一个开覆盖, ε 是其 Lebesgue 数. X 又是完全有界的, 故存在 ε -网 $\{x_1, \dots, x_n\}$. 由 Lebesgue 覆盖引理, 对任意 i , $B(x_i, \varepsilon)$ 包含于 C 的某个开集, 不妨记为 C_i . 于是 $\{C_i : i = 1, \dots, n\}$ 是 C 的有限子覆盖, 即证 X 是紧的. $\square$

度量空间满足第一可数公理和 (T_1) 公理, 并且也是正规豪斯多夫空间, 所以由上一讲的定理, 可得如下结论.

定理 3. 对于度量空间, 如下条件等价:

- X 是紧的;
- X 是伪紧的;

- X 是序列紧的;
- X 是可数紧的;
- X 是聚点紧的.

14.2 紧度量空间的刻画

定义 3 (完备性). 设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $m, n \geq N$ 时

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列. 如果 X 的任意 Cauchy 列都收敛, 则称 X 是完备度量空间.

任何度量空间都可以完备化: 存在一个完备度量空间 (Y, D) 及等距嵌入 $h: X \rightarrow Y$. $h(X)$ 在 Y 中的闭包是一个完备度量空间, 称作 X 的完备化. 在等距同构意义下, 完备化还是唯一的. 细节可见 [8, 43 节].

定理 4. 度量空间是紧空间的充要条件是: 它是完全有界的完备空间.

证明. 必要性. 设 (X, d) 是紧度量空间. 由 X 序列紧, 可知它完全有界. 再证 X 完备. 设 $\{x_n\}$ 是 X 的 Cauchy 列, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N_1 > 0$ 使得当 $m, n \geq N_1$ 时

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 X 是序列紧的, $\{x_n\}$ 有收敛到某个 $x \in X$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$. 于是存在 N_2 使得当 $n_{i_0} \geq N_2$ 时

$$d(x_{n_0}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样, 当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$d(x_n, x) \leq d(x_{n_0}, x_n) + d(x_{n_0}, x) \leq \varepsilon,$$

从而 x_n 收敛到 x , 即 X 是完备的.

充分性. 设 (X, d) 是完全有界的完备度量空间. 我们证明 X 是序列紧的. 为此, 对 X 的任意序列 $\{x_n\}$, 构造其子列是 Cauchy 列. 于是由 X 的完备性知这个序列收敛, 从而 X 列紧.

首先, 由 X 的完全有界性, X 被有限个半径为 1 的开球所覆盖, 其中至少有一个球包含无限个 x_n : 即存在半径为 1 的球 B_1 及无限指标集 $J_1 \subset \mathbb{N}$ 使得

$$\{x_n : n \in J_1\} \subset B_1.$$

一般地, 设已取定 J_k ($k \geq 1$), 则存在半径为 $\frac{1}{k+1}$ 的球 B_{k+1} 和无限指标集 $J_{k+1} \subset J_k$, $\{x_n : n \in J_{k+1}\} \subset B_{k+1}$.

其次, 取 $n_1 \in J_1$. 对 $k \geq 1$, 设 n_k 已取定, 则取 $n_{k+1} \in J_{k+1}$ 且 $n_{k+1} > n_k$. 这时, 对 $i, j \geq k$, 有 $n_i, n_j \in J_k$. 于是 $x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k$, 即 $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2/k$. 从而 $\{x_{n_k}\}$ 是 Cauchy 列. $\square$

最后, 我们特别注意完全有界和完备性等都不是拓扑性质.

14.3 Ascoli-Arzelà 引理

定义 4 (致密集). 称度量空间 X 的一个子集 A 是致密集, 如果 A 中任意无限点列都有在 X 中收敛的子列.

致密性概念的好处是将 Cauchy 子列的存在性 (紧性) 与极限的存在性 (完备性) 作了分离, 便于在分析学中应用.

定理 5 (致密性与紧性). 设 X 是完备度量空间. 则: 1) 子集 A 是致密集当且仅当 A 的闭包是 X 的一个紧子集; 2) A 是致密集当且仅当 A 是完全有界的.

证明. 1. 充分性. 利用度量空间中紧性等价于序列紧性. 必要性. 设 $\{x_k\}$ 是 $\text{Cl}(A)$ 中点列. 置 $y_k = x_k$, 如果 $x_k \in A$; 否则, x_k 是 A 的聚点, 可取 $y_k \in A$ 使得 $d(x_k, y_k) < 1/k$. 由 $\{y_k\}$ 的致密性得到收敛子列 $\{y_{k_l}\}$, 由 X 的完备性, 设

它收敛到 y , 那么 $y \in \text{Cl}(A)$. 不难证明 $\{x_{k_l}\}$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时也收敛到 y . 所以 $\text{Cl}(A)$ 序列紧.

2. 必要性: 与引理 1 的证明相同. 充分性: 与定理 4 充分性的证明相同. $\square$

例 1. $A \subset \mathbb{R}^n$ 是致密集当且仅当它是有界集.

下面介绍连续函数空间中致密集的刻画. 这在微分方程, 复变函数等分析课程中常常用到.

考虑有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体构成的线性空间 $C([a, b])$. 赋予范数

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

则 $C([a, b])$ 就是个赋范线性空间. 它还是完备的, 因为函数列按该范数收敛等价于一致收敛, 而数学分析中已证明了连续函数列一致收敛的极限还是连续函数. (参见第四讲定理 9.) 所以 $C([a, b])$ 是个 Banach 空间.

定义 5 (有界). 称子集 $A \subset C[a, b]$ 是有界的, 如果存在常数 $M > 0$ 使得对任意 $f \in A$ 和任意 $x \in [a, b]$ 都成立 $|f(x)| \leq M$.

定义 6 (等度连续). 称子集 $A \subset C([a, b])$ 是等度连续的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta > 0$ 使得对任意 $f \in A$ 和任意 $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$, 都成立 $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

定理 6 (Ascoli-Arzelà 引理). $C([a, b])$ 的子集是致密集的充分必要条件是它是等度连续的有界集.

证明. 由定理 5 和 $C([a, b])$ 的完备性, A 是 $C([a, b])$ 的致密子集当且仅当 A 是完全有界的.

1. 必要性. 注意完全有界集必是有界集, 只需再证完全有界蕴含等度连续. 事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由 A 是完全有界的, 存在一个 ε -网 $f_1, f_2, \dots, f_n$. 对每个 f_k , 由 Cantor 定理 (一致连续性)(参见本讲习题 3), 存在 δ_k 使得当 $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta_k$ 时 $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$.

2. 对任意 $f \in A$, 存在 k 使得 $f \in B(f_k, \varepsilon)$. 那么当 $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ 时, 就成立

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

这就证明了等度连续性.

3. 充分性. 我们要证明 A 是完全有界的. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 根据等度连续性, 存在常数 $\delta > 0$ 使得对 $[a, b]$ 中的点 x, y , 只要 $|x - y| < \delta$, 则对 A 中每个 f , 都成立

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对这个确定的 δ , 由 $[a, b]$ 的紧性, 存在一个 δ -网 $x_1, \dots, x_n$. 因为 A 是有界集, 所以存在 M 使得对每个 $f \in A$, $\|f\| \leq M$. 于是点集

$$\tilde{A} = \{P_f \triangleq (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) : f \in A\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界集, 从而也是 $\mathbb{R}^n$ 中的致密集, 所以是完全有界的. 于是存在 $f_1, \dots, f_k \in A$ 使得

$$P_{f_\nu} = (f_\nu(x_1), f_\nu(x_2), \dots, f_\nu(x_n)), \quad \nu = 1, 2, \dots, k$$

是 $\tilde{A}$ 的一个 $\frac{\varepsilon}{3}$ -网.

4. 下面证明 $f_1, \dots, f_k$ 是 A 的 ε -网. 事实上, 任取 $f \in A$, 由 $P_f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \in \tilde{A}$, 存在 ν 使得 $|P_{f_\nu} - P_f| < \frac{\varepsilon}{3}$. 特别的, 成立

$$|f_\nu(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, \dots, n.$$

对 $[a, b]$ 中点 x , 设 $x \in B(x_k, \delta)$, 那么

$$|f(x) - f_\nu(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_\nu(x_k)| + |f_\nu(x_k) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

(第一项和第三项用等度连续性.) 这就表明 $f \in B(f_\nu, \varepsilon)$, 即证明了完全有界性. $\square$

不难检验, 上述定义和定理中的 $[a, b]$ 换作 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集或紧度量空间时, 定理结论仍然成立.

习题 1. 考虑定义在 $[0,1]$ 上的所有连续函数构成的空间 $C([0,1])$, 在其上定义度量

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

证明这个空间不紧致.

习题 2. 证明紧致度量空间可分.

习题 3.[一致连续性] 设 $X = (X, d)$ 和 $Y = (Y, d')$ 是度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in X$, $d(x_1, x_2) < \delta$ 时, 有 $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 则称 f 是一致连续的. 证明: 若 X 是紧度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 一致连续.

第十五讲 同伦

和同胚一样, 同伦是拓扑学的基本概念之一, 有着许多重要的应用. 本讲涉及的内容也是代数拓扑学的基础.

15.1 映射的同伦

1. 定义

设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 所谓两个连续映射 $f, g: X \rightarrow Y$ 是同伦的, 是指可以在 Y 中将 f 连续地变形变成 g .

定义 1 (映射同伦). 设 $f, g: X \rightarrow Y$ 是连续映射, $I = [0, 1]$ 是 $\mathbb{R}$ 的拓扑子空间. 如果存在连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$, 使得对任意 $x \in X$, 成立 $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, 则称 f 和 g 是同伦的映射, 记作 $f \simeq g: X \rightarrow Y$. H 称作连接 f 和 g 的一个同伦, 记作 $H: f \simeq g$.

例 1. 设 $X = \{O\}$ 是只含有一个点的空间 (单点空间), 则拓扑空间 Y 是道路连通的充分必要条件是 X 到 Y 的任意两个映射都同伦.

同伦实际上给出了对 $X \rightarrow Y$ 的所有连续映射的集合 $C(X, Y)$ 作划分的一个标准, 即同伦是一个等价关系. 与常值映射同伦的连续映射称作是零伦的.

定理 1. 设 $f, g, h \in C(X, Y)$, 则

- 1) $f \simeq f$;
- 2) 若 $f \simeq g$, 则 $g \simeq f$;
- 3) 若 $f \simeq g, g \simeq h$, 则 $f \simeq h$.

证明. 1. 作同伦 $H(x, t) = f(x)$.

2. 设 $H: f \simeq g$, 则 $H(x, 1-t)$ 就是连接 g 和 f 的同伦.

3. 设 $H_1: f \simeq g, H_2: g \simeq h$, 则

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2(t - \frac{1}{2})), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

就是连接 f 和 h 的同伦. 这里 H 的连续性是用了第四讲中的粘接引理 (定理 7). $\square$

2. 同伦的判定

判定两个连续映射是否同伦是拓扑学中的重要课题之一. 下一讲我们将介绍单位圆周 S^1 到自身的连续映射的同伦分类. 下面先介绍如下简单的结果.

例 2 (直线同伦). 设 Y 是实赋范线性空间, $f, g: X \rightarrow Y$ 是连续映射. 若对任意 $x \in X$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 可在 Y 中用直线连接, 那么 $f \simeq g$.

证明. 作同伦 $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. (由 Y 中加法和数乘运算的连续性, 可知 H 是连续的.) $\square$

定理 2 (同伦的映射的复合是同伦的). 设 X, Y, Z 是拓扑空间, 若 $f \simeq f': X \rightarrow Y, g \simeq g': Y \rightarrow Z$, 则 $g \circ f \simeq g' \circ f': X \rightarrow Z$.

证明. 设 $H_1: f \simeq f', H_2: g \simeq g'$, 则不难验证 $H(x, t) = H_2(H_1(x, t), t)$ 就是连接 gf 和 $g'f'$ 的同伦. $\square$

15.2 拓扑空间的同伦等价

利用同伦可以给出拓扑空间的不同于同胚等价的一种分类, 这在代数拓扑中是很重要的.

1. 拓扑空间同伦等价的定义

定义 2 (同伦等价). 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射. 如果存在连续映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得 $gf \simeq 1_X: X \rightarrow X$ 且 $fg \simeq 1_Y: Y \rightarrow Y$, 其中 1_X 和 1_Y 分别是 X 和 Y 上的恒等映射, 则称 X 和 Y 是同伦等价的, 或具有相同伦型, 记作 $X \simeq Y$. 映射 f 称作同伦等价, 而 g 叫作 f 的同伦逆.

例 3. $\mathbb{R}^n$ 和 I^n , 以及单点空间具有相同伦型.

证明. 设 $X = \{x\}$ 是单点空间. 任作 $f: X \rightarrow I^n$, 以及常值映射 $g: I^n \rightarrow X$. 那么 $gf = 1_X$, 而 $fg(y) = a$, 其中 $f(x) = a$ 是 I^n 中固定一点. 所以只需证明 I^n 中恒等映射与常值映射同伦. 为此, 作直线同伦 $H(y, t) = (1-t)y + ta$ 即可. 这就证明了 $X \simeq I^n$. 类似可证 $X \simeq \mathbb{R}^n$. $\square$

定理 3. 同伦等价是拓扑空间族中的一个等价关系.

证明. 显然任一拓扑空间 X 与自己同伦等价. 设 $X \simeq Y$, 而 f 是同伦等价, g 是其同伦逆, 则 g 就是 Y 到 X 的同伦等价, 所以 $Y \simeq X$. 最后, 设 $X \simeq Y$, $Y \simeq Z$, 而 f_1 和 f_2 分别是同伦等价, 则 $f_2 f_1$ 就是 X 到 Z 的同伦等价, 即 $X \simeq Z$. $\square$

2. 同伦等价与同胚等价的关系

根据定义, 拓扑等价的拓扑空间必定同伦等价. 但是反之并不成立.

例 4. 取 $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 是标准圆周, $Y = S^1 \cup L$ 是带把的标准圆周, 其中 $L = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2\}$ 是线段. 则 $X \simeq Y$ 但并不拓扑等价.

证明. X 和 Y 不同胚, 是因为挖去 $P = (0, 1)$ 点后, $X \setminus \{P\}$ 是连通的, 而 $Y \setminus \{P\}$ 不连通.

作映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$ 如下:

$$f(x) = x, \quad x \in X,$$

$$g(y) = \begin{cases} y, & y \in S^1, \\ (1, 0), & y \in L. \end{cases}$$

显然 f 和 g 都连续, 且 $gf = 1_X$. 又

$$h(y) \triangleq (fg)(y) = \begin{cases} y, & y \in S^1, \\ (1, 0), & y \in L, \end{cases}$$

可以构造直线同伦 $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y, H(y, t) = (1-t)h(y) + ty$. (注意验证 $H(y, t) \in Y$ 确实成立.) 所以 $fg \simeq 1_Y$. 这就证明了 $X \simeq Y$. $\square$

所以拓扑空间按同伦分类要比按同胚分类“粗”. 伦型相同的拓扑空间共有的性质称作伦型不变性, 它一定是拓扑性质, 但反之未必. 例如紧性就不是伦型不变性 (回忆 $\mathbb{R}^n$ 和 I^n 同伦等价). 同伦等价概念的重要性在于代数拓扑所引入的不变量实际上都是伦型不变量.

15.3 可缩空间

定义 3 (可缩空间). 和单点空间具有相同伦型的拓扑空间称作可缩空间.

显然可缩空间是从同伦角度而言最简单的空间.

定理 4. 拓扑空间 X 是可缩空间的充分必要条件是恒等映射 $1_X: X \rightarrow X$ 零伦 (即与常值映射同伦).

证明. 设 P 是单点空间, 其中的点也记作 P .

必要性. 设 X 可缩, 则有同伦等价 $f: X \rightarrow P$ 及其同伦逆 $g: P \rightarrow X$. 显然 $gf: X \rightarrow X$ 是常值映射. 于是 $1_X \simeq gf: X \rightarrow X$ 表明 1_X 是零伦的.

充分性. 设 $1_X \simeq c: X \rightarrow X$, 其中 c 是常值映射. 对任意 $x \in X$, 记 $c(x) = x_0 \in X$. 令 $f: X \rightarrow P$, $g: P \rightarrow X$ 为

$$f(x) = P, \quad g(P) = x_0,$$

则 $gf = c \simeq 1_X: X \rightarrow X$, $fg = 1_P: P \rightarrow P$, 即 f 是同伦等价, 所以 $X \simeq P$. $\square$

$\mathbb{R}^n$ 中凸子集都是可缩的. 但是 S^n 并不可缩 (需要用代数拓扑中的同调论证明).

15.4 形变收缩核

形变收缩核的概念有时有助于我们寻找一个与给定空间同伦等价的较简单的空间.

定义 4 (收缩核). 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$, 如果存在连续映射 $r: X \rightarrow A$, 使得 $r|_A = 1_A: A \rightarrow A$, 则称 A 是 X 的收缩核, r 称为收缩映射.

例 5. 不存在 $[0,1]$ 到 $\{0,1\}$ 的收缩.

这是因为收缩映射是连续的, 所以由 $[0,1]$ 的连续性, 它的像集必须连通.

定义 5 (形变收缩核). 如果存在收缩映射 $r: X \rightarrow A$, 使得 $ir \simeq 1_X: X \rightarrow X$, 其中 $i: A \rightarrow X$ 是包含映射, 则称 A 为 X 的形变收缩核, 连接 ir 和 1_X 的同伦称为收缩形变.

定义 6 (强形变收缩核). 设 A 是 X 的形变收缩核, $H: X \times I \rightarrow X$ 是收缩形变. 如果对每个 $x \in A$ 和 $t \in I$ 都有 $H(x, t) = x$, 则称 A 为 X 的强形变收缩核.

根据上述定义, 形变收缩核 A 与 X 同伦等价, 即 X 可以连续地形变为 A ; 而 A 是强形变收缩核是指在形变过程中 A 还保持不动.

例 6. 圆周 S^1 是平环 $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2\}$ 的强形变收缩核.

证明. 取收缩映射 $r: A \rightarrow S^1$ 和收缩形变 $H: A \times I \rightarrow A$ 为

$$r(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in A,$$

$$H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{|x|}, \quad x \in A, t \in I.$$

□

类似可证 D^n (n 维闭单位球体) 是 $\mathbb{R}^n$ 的强形变收缩核, S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 的强形变收缩核.

习题 1. 记 $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - q| = 1\}$, $C_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - p| = 1\}$. $\mathbb{R}^2$ 的拓扑子空间 $C_{-1} \cup C_1$ 称作 8 字形空间, 记作 $S^1 \vee S^1$. 则 $S^1 \vee S^1$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ 的强形变收缩核.

习题 2. 设 $f, g: X \rightarrow S^n$ 是连续映射, $f(x)$ 和 $g(x)$ 恒不成为对径点, 即不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = -g(x)$. 证明: f 和 g 同伦.

习题 3. 设 $f: X \rightarrow S^n$ 是非满的连续映射. 证明: f 零伦.

习题 4. 设 $f: S^n \rightarrow X$ ($n \geq 1$) 是连续映射. 证明下列陈述等价:

- 1) f 零伦;
- 2) f 可扩张成连续映射 $\bar{f}: D^{n+1} \rightarrow X$;
- 3) f 相对于 $\bar{1} \in S^n$ 零伦, 其中 $\bar{1} = (1, 0, \dots, 0)$.

习题 5. 证明可缩空间必道路连通.

习题 6. 证明可缩空间的收缩核是可缩空间.

习题 7. 证明: 豪斯多夫空间的收缩核必是闭子集.

第十六讲 圆函数的同伦分类及其 应用 单连通性

我们介绍圆函数的同伦分类及其应用, 以及单连通性. 这部分内容实际上和代数拓扑中 (圆周的) 基本群及覆盖空间理论密切相关.

16.1 圆函数的同伦分类

圆周 S^1 到自身的连续映射称作圆函数. 设 θ 是圆周上点与 x 轴正方向的夹角 (即复平面圆周上点对应的幅角), 我们用 θ 表示圆周上点. 如果 θ_1 与 θ_2 相差 2π 的整数倍, 那么它们代表圆周上同一点.

考虑圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1, \varphi = f(\theta)$. 当 θ 在圆周上绕一圈之后, 像 φ 应当在圆周上绕若干圈. 例如, 我们可以规定恒等映射 $\varphi = \theta$ 绕的圈数是 1, 而 $\varphi = -\theta$ 绕的圈数是 -1, 而常值映射的绕圈数是 0. 这个圈数就称作该圆函数的度. 更一般地, 对 $c_n(\theta) = n\theta$, 其度就是 $n, n \in \mathbb{Z}$. 当然, 一般的圆函数可以非常复杂, 但我么有如下基本的同伦分类定理.

定理 1 (圆函数同伦分类和度). 对任一圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 存在唯一的整数 n , 使得 f 与 $c_n(\theta) = n\theta$ 同伦. 数 n 称作 f 的度, 记作 $\deg(f)$.

该定理留在下一讲证明.

由于同伦是个等价关系, 所以由该定理, 我们知道两个圆函数同伦当且仅当它们的度相同. 所以仅仅通过“度”这样一个简单的数字指标, 就可以刻画圆函数的同伦分类了.

习题 1. 设 $F: S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1$ 是连续映射. 对 $r \in [a, b]$, 记 $F_r: S^1 \rightarrow S^1$ 是由 $F_r(\theta) = F(\theta, r)$ 确定的圆函数. 那么 $\deg(F_r)$ 与 r 无关.

16.2 应用

1. 映射扩张

下面定理特别指出, 并不是任意圆函数都可以延拓为 $D \rightarrow S^1$ 的连续函数. 与 Tietze 扩张定理对比, 我们发现映射像集的非平凡拓扑与映射扩张之间有着微妙关系.

定理 2 (圆函数扩张定理). 圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 可以延拓为圆盘 D 上的连续函数 (即存在连续函数 $F: D \rightarrow S^1$ 使得对任意 $x \in S^1$, 成立 $F(x) = f(x)$) 的充分必要条件是 $\deg(f) = 0$.

证明. 我们将圆盘中心用极坐标 (r, θ) 表示.

必要性. 设 f 可以延拓成 $F: D \rightarrow S^1$, 且 F 将原点映到 $x_0 \in S^1$. 定义 $H(\theta, r) = F(r, \theta)$, 则 $H(\theta, r): S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 就是连接常值映射 $F(0, \theta) = x_0$ 和 $F(1, \theta) = f(\theta)$ 的同伦. 所以 $\deg(f) = 0$.

充分性. 设 $\deg(f) = 0$, 则存在一个同伦 $H(\theta, r): S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 使得 $H(\theta, 1) = f(\theta)$, $H(\theta, 0) = \theta_0 \in [0, 2\pi]$. 所以可定义 $F(r, \theta) = H(\theta, r): D \rightarrow S^1$, 它就是 f 的一个连续延拓. $\square$

习题 2. 如果圆函数 f 的度不是零, 则 f 必是满射.

2. 二维非收缩定理

定理 3 (二维非收缩定理). 从圆盘 D 到它的边界 S^1 的收缩不存在.

证明. 反证法. 设存在连续映射 $r: D \rightarrow S^1$ 使得 $r(\theta) = \theta$, 对 $\theta \in S^1$ 都成立. 那么 r 可看作 S^1 上恒等映射到 $D \rightarrow S^1$ 的一个延拓. 注意恒等映射的度是 1, 这与定理 1 矛盾. $\square$

习题 3. 证明 $\mathbb{R}^2$ 到 S^1 的收缩不存在.

请将二维非收缩定理与下面结果做对比. 注意弧和圆周的拓扑是不一样的.

定理 4. 设 D 是圆盘, 并设 $A \subset D$ 是一条弧. 那么 A 是 D 的一个收缩核.

证明. 由于 A 是一条弧, 所以存在到 A 上的一个嵌入映射 $f: [-1, 1] \rightarrow D$. 由于 $[-1, 1]$ 是紧集, 所以 A 是紧集. 又 D 是豪斯多夫空间, 所以 A 是闭集. 根据 Tietze 扩张定理, 函数 $f^{-1}: A \rightarrow [-1, 1]$ 有一个连续延拓 $g: D \rightarrow [-1, 1]$. 函数 $fg: D \rightarrow A$ 就是从 D 到 A 的一个收缩. $\square$

3. 二维 Brouwer 不动点定理

定理 5 (二维 Brouwer 不动点定理). 把圆盘 D 映到自身的连续映射 $f: D \rightarrow D$ 都至少有一个不动点. 即 D 具有不动点性质.

该定理其实对任意维数的闭单位球体都成立. 它是如下 (可推广到高维的) 定理的推论.

定理 6 (非收缩与不动点). 圆盘 D 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间, 具有不动点性质的充分必要条件是存在 D 到它的边界 S^1 的收缩.

证明. 1. 假定存在一个收缩 $r: D \rightarrow S^1$, 考虑由 $q(x) = -x$ 定义的映射 $q: S^1 \rightarrow D$, 则函数 $q \circ r: D \rightarrow D$ 是连续的, 且没有不动点. 必要性得证.

2. 假定连续函数 $f: D \rightarrow D$ 没有不动点, 我们证明存在一个收缩 $r: D \rightarrow S^1$. 定义 r 如下: 在 $\mathbb{R}^2$ 中作从 $f(x)$ 出发连接 x 的射线, 此射线与 S^1 的交点就是 $r(x)$. 显然 $r(x)$ 有定义, 而且 r 把 D 映到 S^1 , 且对 $x \in S^1$, 成立 $r(x) = x$.

3. 下面只需再证 r 连续. 设 $U \subset S^1$ 是开集, 且 $x \in r^{-1}(U)$. 那么只要证明存在包含 x 的开集 $V \subset D$ 使得 $r(V) \subset U$.

为此, 可分别选取中心在 $f(x)$ 和 x 的小开球 O_1, O_2 , 使得以 O_1 中点为起点, 经过 O_2 中点的射线与 U 相交. 由 f 的连续性, 可以找到一个包含 x

的且包含在 O_2 内的开集 V , 使得 $f(V) \subset O_1$. 由此, 对任一 $v \in V$, 以 $f(v)$ 为起点经过 v 的射线与 U 相交. 所以 $r(V) \subset U$. 所以 r 连续. $\square$

4. 代数基本定理的拓扑证明

定理 7 (代数基本定理). 设 $a_k \in \mathbb{C}, k=0, 1, \dots, n$ 且 $a_n \neq 0$. 则多项式 $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ 至少有一个复数根.

证明. 1. 通过将 z 换成 cz , 且取 $|c|$ 充分大, 可将方程 $\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$ 化作

$$F(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k = 0,$$

其中系数满足 $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| < 1$.

2. 用反证法. 设 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 没有零点. 作函数 $G(z) = \frac{F(z)}{|F(z)|}$, 则 $G: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow S^1$ 是连续函数. 特别地, 它在 S^1 上的限制 $g(z) = \frac{F(z)}{|F(z)|}, z \in S^1$ 是圆函数. 于是 $\deg(g) = 0$.

3. 另一方面, 我们证明 $g(z)$ 与 $c_n(z) = z^n$ 同伦, 所以 $\deg(g) = n$, 导致矛盾.

事实上, 对 $t \in [0, 1]$ 和 $z \in S^1$, 利用

$$\left| z^n + t \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| \geq |z|^n - t \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| \geq 1 - t \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \geq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| > 0,$$

可以构造同伦

$$H(z, t) = \frac{z^n + t \sum_{k=0}^{n-1} z^k}{|z^n + t \sum_{k=0}^{n-1} z^k|},$$

则 $H(z, 0) = z^n, H(z, 1) = g(z)$. 注意 $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 确实是连续映射. $\square$

16.3 单连通性

我们已用连通性证明了 $\mathbb{R}^1$ 和 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 不同胚. 那么怎么证明 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 不同胚呢? 这就需要用到我们在数学分析, 复变函数等课程中多次用到

的单连通性.

1. 定义

定义 1 (单连通). 一个道路连通的拓扑空间称作单连通的, 如果任意连续映射 $f: S^1 \rightarrow X$ 是零伦的 (与常值映射同伦).

直观地说, 单连通集就是其中闭合曲线可以在该集合中连续地收缩成该集合中的一个点. 利用直线同伦, 容易知道 $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 都是单连通的.

习题 4. 证明单连通是一种伦型不变性, 从而也是拓扑性质.

2. 非单连通集

定理 8. 圆周 S^1 不是单连通的.

由圆函数同伦分类定理, 这是显然的.

例 1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 不是单连通的.

证明. $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 的强形变收缩核是 S^1 , 所以与 S^1 同伦, 从而也不是单连通的. $\square$

3. 单连通集

定理 9. 对于任意一点 $a \in \mathbb{R}^3$, 子空间 $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ 是单连通的.

证明. 我们要证明: 如果 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ 是连续映射, 则它与一个常值映射同伦. 证明思路是先说明 f 与一个分段直线映射同伦, 后者再通过直线同伦与一个常值映射同伦.

1. 以直代曲. 由于 S^1 是紧集, 所以 $f(S^1)$ 也是紧集, 因而是闭集. 由于 $a \notin f(S^1)$, 所以 $d(a, S^1) > 0$. 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得中心在 a , 半径为 ε 的球与 S^1 不相交. 由于 $f(S^1)$ 的紧性, 不难找到有限个半径为 $\varepsilon/2$ 的开球覆盖 $f(S^1)$. 注意这些开球都不包含 a .

2. 考虑这些开球在 f 下的原像, 结果得到 S^1 的有限个开覆盖. 根据覆盖的 Lebesgue 数引理 (第 14 讲定理 1), 存在

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m = 2\pi$$

来分割 S^1 , 使得对于任意 $i = 0, 1, \dots, m-1$, 区间 $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ 包含在 S^1 的上述开覆盖中的一个开集之内. 因此, 集合 $f([\theta_i, \theta_{i+1}])$ 包含在前述的某个覆盖 $f(S^1)$ 的开球之内. 我们把这个开球记作 B_i . 记 S_i 是 $\mathbb{R}^3$ 中连接 $f(\theta_i)$ 与 $f(\theta_{i+1})$ 的线段 (注意这也可能是一个点), 则由球的凸性, S_i 也落在 B_i 内. 我们把 B_i 内每个曲线 $f([\theta_i, \theta_{i+1}])$ 通过直线同伦变形为 S_i . 由于每个 B_i 都不包含 a , 所以由此同伦, $f(S^1)$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ 中变形为一条由线段组成的闭曲线 P , 其节点为 $s_i = f(\theta_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

3. 对任一 $i = 0, 1, \dots, m-1$, 设 A_i 是通过 a, s_i, s_{i+1} 的平面 (或是通过 a, s_i, s_{i+1} 的直线, 如果它们共线). 显然这有限个平面 (直线) A_i 的并仍是 $\mathbb{R}^3$ 的真子集. 所以可取 $\beta \in \mathbb{R}^3$, 使得 β 不落于任一平面 A_i 内. 于是, a 不位于以 β, s_i, s_{i+1} 为顶点的三角形 T_i 内 (这三角形也可能退化为线段).

4. 在三角形 T_i 内可以把每条线段 S_i 直线同伦变形为点 β . 于是我们得知闭曲线 P 可以在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ 内同伦到点 β . 证毕. $\square$

定理 10. $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 同伦, 但不同胚.

证明. $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 都是可缩的, 故同伦. 假设他们还同胚, 则 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 和 $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$ 和同胚, 从而同伦, 这与单连通是同伦型不变性矛盾. $\square$

注意, 两个同胚的空间挖掉对应的点后还是同胚的; 但两个同伦的空间挖掉对应的两个点后未必同伦.

16.4 Jordan 曲线定理

在常微分方程讨论平面上向量场时, 以及复变函数课程中, 常要用到如下 Jordan 曲线定理.

定理 11 (Jordan 曲线定理). 设 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单闭曲线, 那么 $\mathbb{R}^2 \setminus S$ 由两个 (道路连通) 分支组成, 且 S 是每一分支的边界.

这里所谓简单闭曲线就是同胚与单位圆周 S^1 的拓扑空间. 该定理利用我们前面的准备知识就可以证明了, 细节可见 [6] 第 11.2 节 (231-235 页).

习题 5. 证明单连通空间的收缩核也是单连通的.

习题 6. 证明单连通空间的乘积拓扑空间是单连通的.

习题 7. 证明: $X \times Y$ 是单连通的, 当且仅当 X, Y 都是单连通的.

习题 8. 证明: 拓扑空间 X 是单连通的, 当且仅当任一连续映射 $f: S^1 \rightarrow X$ 都可以延拓为一个连续映射 $F: D \rightarrow X$, 其中 D 是平面上单位圆盘.

第三部分

专题选讲

第十七讲 圆函数同伦分类定理的证明

我们要证明: 对任一圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 存在唯一的 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 f 与由 $c_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ 定义的圆函数 $c_n: S^1 \rightarrow S^1$ 同伦.¹ 证明的基本思想是所谓覆盖空间方法, 即对商空间 S^1 上的问题, 转化到原拓扑空间 $\mathbb{R}$ 去考虑. 例如, 由 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 可以得到连续函数 $f^*: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, 由 c_n 可以得到 $c_n^*: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, c_n^*(\theta) = n\theta$. 我们证明 f^* 可以直线同伦与 c_n^* . 由此同伦就可以得到圆函数间的同伦.

17.1 圆同伦

任一圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 可以看作是满足 $f(0) = f(2\pi)$ 的连续映射 $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$. 反之, 满足 $f(0) = f(2\pi)$ 的连续映射 $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ 也对应唯一一个圆函数 $f: S^1 \rightarrow S^1$. 所以我们也称满足 $f(0) = f(2\pi)$ 的连续映射 $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ 为圆函数.

定义 1 (圆同伦). 圆函数 $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ 称作是圆同伦的, 如果存在一个连接 f, g 的同伦 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 使得对任意 $t \in [0, 1]$, 都有 $H(0, t) = H(2\pi, t)$. H 称作一个圆同伦.

圆同伦 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 当然定义了一个以 S^1 为定义域的圆函

¹这个定理本质上就是说 S^1 的基本群是整数群 $\mathbb{Z}$.

数之间的同伦 $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$. 反之同伦 $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 也确定了一个圆同伦.

17.2 映射的提升

考虑由 $p(\theta) = e^{i\theta}$ 确定的映射 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. 函数 p 把任一区间 $[r, r+2\pi)$ 一一映成圆周, 而把 $\mathbb{R}$ 无限次卷绕成圆周. 这是一个典型的覆盖映射.

若把 p 限定在区间 (a, b) 上, 其中 $b-a \leq 2\pi$, 所得映射 $p|_{(a,b)}$ 是到它的像集的一个同胚. 对任意 $r \in \mathbb{R}$, 设 q_r 是同胚 $p|_{(r, r+2\pi)}$ 的逆. q_r 把 $S^1 \setminus \{e^{ir}\}$ 同胚地映到区间 $(r, r+2\pi)$.

定义 2 (提升). 设 $f: X \rightarrow S^1$ 是连续的映射. 如果连续函数 $f^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足条件 $p \circ f^* = f$, 则称 f^* 是 f 的一个提升.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow f^* & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

定理 1 (提升的存在性). 设 $f: X \rightarrow S^1$ 是连续的, 且 $f(X)$ 是 S^1 的一个真子集. 此外还设 $x_0 \in X$ 且 $r_0 = p^{-1}(f(x_0))$. 那么存在 f 的一个提升 $f^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $f^*(x_0) = r_0$.

证明. 存在 $s \in S^1$ 使得 $s \notin f(X)$. 可取 $r \in p^{-1}(s)$, 使得 $r_0 \in (r, r+2\pi)$. 设 q_r 是前述同胚, 则 $f^*(x) = q_r(f(x))$ 就定义了 f 的一个提升 f^* , 且 $f^*(x_0) = r_0$. $\square$

定理 2 (提升的唯一性). 设 $f: X \rightarrow S^1$ 是连续的, 且 X 是连通的. 如果 $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是 f 的提升. 那么存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得对任意 $x \in X$, 都有 $g(x) - h(x) = 2\pi n$. 特别地, 如果存在 $x_0 \in X$ 使得 $g(x_0) = h(x_0)$, 则 $g = h$.

证明. 对任意 $x \in X$, 成立 $p(g(x)) = f(x) = p(h(x))$, 因而存在整数 n_x 使得 $g(x) - h(x) = 2\pi n_x$. 由 $k(x) = g(x) - h(x)$ 定义连续函数 $k: X \rightarrow \mathbb{R}$. k 的像集

是 $\{2\pi n_x : x \in X\}$, 而 X 是连通的, 所以此像集也必须是连通的, 即对任意 $x, y \in X$, 要成立 $n_x = n_y = n$. 于是存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $k(x) = 2\pi n$. $\square$

17.3 圆函数的提升

定理 3 (圆函数的提升). 设 $f: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ 是圆函数. 那么它存在一个提升 $f^*: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

证明. 1. 设 $U = S^1 \setminus \{1\}, V = S^1 \setminus \{-1\}$, 则 $\{U, V\}$ 是 S^1 的一个开覆盖, 所以 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ 是 $[0, 2\pi]$ 的一个开覆盖. 所以根据覆盖的 Lebesgue 数引理, 存在 $[0, 2\pi]$ 的一个划分 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_m = 2\pi$ 使得对任意 $j = 1, \cdots, m$, $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ 包含在 $f^{-1}(U)$ 或 $f^{-1}(V)$ 之中. 对任意 $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, 限制映射 $f|_{[\theta_{j-1}, \theta_j]}$ 不是满射, 于是由定理 1, 存在 $f|_{[\theta_{j-1}, \theta_j]}$ 的一个提升.

下面将这些提升做适当修改后缝合, 得到 f 的提升 f^* .

2. 假定 $g_1: [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $f|_{[\theta_0, \theta_1]}$ 的一个提升. 注意到 $p(g_1(\theta_1)) = f(\theta_1)$, 所以 $g_1(\theta_1) \in p^{-1}(\{f(\theta_1)\})$. 由定理 1, 存在 $f|_{[\theta_1, \theta_2]}$ 的一个提升 $g_2: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g_2(\theta_1) = g_1(\theta_1)$. 利用连续映射的粘合引理, 可以粘合 g_1, g_2 得到 $f|_{[\theta_0, \theta_2]}$ 的一个提升 $f_2^*: [\theta_0, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$. 继续上述过程, 在第 m 步后就得到 f 的提升 f^* . $\square$

注意作为圆函数, f 满足 $f(0) = f(2\pi)$, 但对其提升 f^* , 下面将证明 $f^*(2\pi) - f^*(0)$ 是 2π 的倍数, 而该倍数就是 f 的度数 $\deg(f)$.

17.4 圆函数与标准旋转函数的同伦

设 $c_n: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ 是由 $c_n(\theta) = e^{in\theta}$ 定义的一个标准旋转函数. 它的一个提升是 $c_n^*(\theta) = n\theta$.

定理 4 (n 的存在性). 设 f 是一个圆函数, 则存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 f 是 c_n 的同伦.

证明. 1. 设 f^* 是 f 的一个提升. 由于 $f(0) = f(2\pi)$, 得出 $p(f^*(0)) = p(f^*(2\pi))$, 因而存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $f^*(2\pi) - f^*(0) = 2n\pi$.

2. 考虑由 $H(\theta, t) = (1-t)f^*(\theta) + tn\theta$ 定义的连接 f^* 与 $c_n^*(\theta) = n\theta$ 的直线同伦 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. 那么

$$G(\theta, t) = p(H(\theta, t))$$

定义了 f 与 c_n 之间的一个圆同伦 $G: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$.

事实上, 对任意 $t \in [0, 1]$, 成立 $H(0, t) = (1-t)f^*(0)$, $H(2\pi, t) = (1-t)f^*(2\pi) + nt2\pi = (1-t)(f^*(0) + 2n\pi) + t2\pi n = (1-t)f^*(0) + 2\pi n$. 所以 $G(0, t) = G(2\pi, t)$, 即 G 确实是一个圆同伦.

3. 注意 $G(\theta, 0) = p(f^*(\theta)) = f(\theta)$, $G(\theta, 1) = p(c_n^*(\theta)) = e^{in\theta}$, 所以 G 是 f 与 c_n 间的同伦. $\square$

17.5 度的唯一性

定理 5 (同伦性的提升). 设 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 是连续的. 那么它存在一个提升 $H^*: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

证明. 这里与定理 3 的证明思路相同.

1. 设 $U = S^1 \setminus \{1\}$, $V = S^1 \setminus \{-1\}$, 则 $\{H^{-1}(U), H^{-1}(V)\}$ 是 $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ 的一个开覆盖. 所以可以用

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = 2\pi, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

来剖分 $[0, 2\pi] \times [0, 1]$, 使得每个矩形 $R_{ij} = [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ 包含于 $H^{-1}(U)$ 或 $H^{-1}(V)$ 二者之一. 由定理 1 可以得到限制在这些矩形上的 H 的一些提升.

2. 设 $G_{11}: R_{11} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $H|_{R_{11}}$ 的一个提升. 也记 G_{11} 为 H_{11}^* . 注意它满足 $G_{11}(\theta_1, t_0) \in p^{-1}(H(\theta_1, t_0))$. 再设 $G_{21}: R_{21} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $G_{21}(\theta_1, t_0) = G_{11}(\theta_1, t_0)$ 的 $H|_{R_{21}}$ 的一个提升. 下面证明 G_{21} 和 G_{11} 在整个 $R_{11} \cap R_{21}$ 上相同, 于是可以粘合 G_{11} 和 G_{21} 得到 H 在 $R_{11} \cup R_{21}$ 上的提升 H_{21}^* .

3. 交集 $R_{11} \cap R_{21}$ 就是 $S = \{\theta_1\} \times [t_0, t_1]$. $G_{11}|_S$ 和 $G_{21}|_S$ 都是 $H|_S$ 的提升, 而且在 (θ_1, t_0) 点取值相同. 定理 2 表明 $G_{11}|_S = G_{21}|_S$. 所以 G_{21} 和 G_{11} 在整个 $R_{11} \cap R_{21}$ 上相同.

4. 这样通过有限步, 我们可以得到 $H|_{[0, 2\pi] \times [0, t_1]}$ 的一个提升 H_{n1}^* . 再考虑 H 在 R_{12} 等矩形上的提升, 利用定理 2, 通过适当调整, 可以用粘合引理得到提升 H_{12}^* . 由此再经过有限步得到 H_{nm}^* , 就是所需 H 的提升. $\square$

定理 6 (度的唯一性). 如果 c_n 和 c_m 是圆同伦的, 则 $n = m$.

证明. 设 $G : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 是一个连接 $G(\theta, 0) = c_n$ 和 $G(\theta, 1) = c_m$ 的圆同伦. 由上一定理, 它存在一个提升 $G^* : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. 由定义不难知道 $G^*(\theta, 0)$ 是 c_n 的一个提升, 而 $c_n^*(\theta) = n\theta$ 也是 c_n 的一个提升. 所以根据定理 2, 存在 $d \in \mathbb{Z}$ 使得对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, 有 $G^*(\theta, 0) = n\theta + 2\pi d$. 所以

$$G^*(2\pi, 0) - G^*(0, 0) = 2\pi n + 2\pi d - 2\pi d = 2\pi n.$$

完全类似地, 可以得到

$$G^*(2\pi, 1) - G^*(0, 1) = 2\pi m.$$

由于 G 是一个圆同伦, 那么 $G|_{\{0\} \times [0, 1]}$ 和 $G|_{\{2\pi\} \times [0, 1]}$ 作为 $[0, 1]$ 到 S^1 的函数是完全相同的. 所以 $G^*|_{\{0\} \times [0, 1]}$ 和 $G^*|_{\{2\pi\} \times [0, 1]}$ 也是同一个函数的提升. 由定理 2, 存在整数 b 使得 $G^*(2\pi, t) - G^*(0, t) = 2\pi b$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 成立. 于是

$$G^*(2\pi, 1) - G^*(0, 1) = G^*(2\pi, 0) - G^*(0, 0).$$

这就证明了 $m = n$. $\square$

习题 1. 设 $f : S^1 \rightarrow S^1$ 是个同胚, 那么 $\deg(f) = \pm 1$.

第十八讲 Baire 空间

René-Louis Baire (1874–1932) 是法国数学家. 这一讲的主要内容都源于他在 1899 年完成的博士学位论文. 他发现了如下重要事实: 如果一个完备度量空间被表示为可列个闭集的并, 那么其中至少有一个闭集的内部不空, 即它要包含一个非空开集.

18.1 Baire 空间

定义 1 (空内部集或疏朗集或无处稠密集). 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 若 $\text{Int}(A) = \emptyset$, 就称 A 是空内部的 (或叫疏朗集, 无处稠密集). 这等价于 $\text{Cl}(X \setminus A) = X$, 即 A 的补集在 X 中稠密.

刻画一个集合的大小可以有很多不同的标准, 例如其元素个数, 测度大小等. 我们可以认为在给定拓扑空间中, 疏朗集是小的, 稠密集是大的. 这是一种定性的判别标准.

例 1. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 和无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的疏朗集.

定义 2 (第一纲集/第二纲集). 拓扑空间 X 的子集 A 称作 X 中的第一纲集, 如果它包含于具有空内部的 X 的可数个闭子集的并之中. 否则, A 称为 X 中的第二纲集.

第一纲集的补集也叫做剩余集 (residual set), 由开集/闭集, 疏朗集/稠密集这两对概念的对偶性, 可知剩余集必然包含 X 中可列个开的稠密子集的交集.

定义 3 (Baire 空间). 拓扑空间 X 称作是一个 Baire 空间, 如果对它的任意一个可数闭子集的族 $\{A_n\}$, 如果其中每一个 A_n 在 X 中都是空内部的, 那么它们的并集 $\bigcup_n A_n$ 在 X 中也是空内部的.

例 2. 有理数空间 $\mathbb{Q}$ 不是 Baire 空间, 因为 $\mathbb{Q}$ 的单点集是闭集, 并且在 $\mathbb{Q}$ 中有空内部. 但是 $\mathbb{Q}$ 是它的 (可数个) 单点集的并集, 而 $\mathbb{Q}$ 本身是个开集. 注意这里 $\mathbb{Q}$ 的拓扑不是作为 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑, 所以结论和例 1 并不矛盾.

定理 1 (Baire 空间的开集刻画). X 是一个 Baire 空间当且仅当对 X 中开集的任意可数族 $\{U_n\}$, 若每一个 U_n 在 X 中稠密, 则交集 $\bigcap_n U_n$ 也在 X 中稠密.

证明. 利用对偶性: 开集 U_n 在 X 中稠密当且仅当闭集 $A_n = X \setminus U_n$ 在 X 中疏朗 (空内部), 而 $\bigcap U_n = X \setminus (\bigcup (A_n))$. $\square$

上述开集刻画表明 Baire 空间 X 中的剩余集是稠密的, 所以如果 X 有无限个元素, 则剩余集必有无限个元素. 由此可解决许多存在性问题, 所以在应用中很重要; 但在证明 Baire 空间本身很多性质时, 似乎定义 3 更方便些.

此外, 由定义, 在 Baire 空间中, 第一纲集必是空内部的. 我们有如下简单结论:

定理 2. X 是一个 Baire 空间当且仅当 X 中的任意非空开集都是第二纲集.

证明. 1. 必要性. 设 U 是 Baire 空间 X 的一个非空开集, 它是第一纲集, 即存在可数个疏朗闭集 $\{F_n\}$, 使得 $U \subset \bigcup_n F_n$. 那么 $\text{Int}(\bigcup_n F_n)$ 包含 U , 与 Baire 空间的定义矛盾.

2. 充分性. 设 X 不是 Baire 空间, 那么存在可数个疏朗闭集 $\{F_n\}$, 使得 $U = \text{Int}(\bigcup_n F_n)$ 非空. 于是非空开集 U 包含在可数个疏朗闭集的并集之中, 从而是第一纲集, 与条件矛盾. $\square$

定理 3. Baire 空间的任意开子空间是一个 Baire 空间.

证明. 1. 设 X 是 Baire 空间, $Y \subset X$ 是个开集. 设 $\{A_n\}$ 是 Y 中有空内部的闭集的一个可数族, 要证明 $\cup A_n$ 在 Y 中是空内部的.

2. 设 $\bar{A}_n$ 是 A_n 在 X 中的闭包, 我们说明 $\bar{A}_n$ 是 X 中内部空的闭集.

由于 A_n 是 Y 的闭子集, 成立 $\bar{A}_n \cap Y = A_n$. 假设 U 是 X 中的非空开子集且 $U \subset \bar{A}_n$, 则 U 与 A_n 相交 (否则 $A_n \subset X \setminus U$, 从而 $\bar{A}_n \subset X \setminus U$, 即 U 与 $\bar{A}_n$ 不相交), 且 $U \cap Y \subset \bar{A}_n \cap Y = A_n$, 而 A_n 在 Y 中有空内部, 所以 $U \cap Y$ 必须是空集. 但 U 与 A_n 相交, 而 $A_n \subset Y$, 从而 $U \cap Y \neq \emptyset$, 矛盾! 所以 U 只能是空集, 即 $\bar{A}_n$ 是 X 中内部空的闭集.

3. 若 $\cup A_n$ 在 Y 中包含一个开集 W , 则由于 Y 是开子空间, W 也是 X 中开集. 从而 $(\cup \bar{A}_n) \supset (\cup A_n) \supset W$. 但是 X 是 Baire 空间, 从而 $\cup \bar{A}_n$ 是内部空的, 那么 W 必是空集! 所以 $\cup A_n$ 是内部空的. 证毕. $\square$

18.2 Baire 纲定理

定理 4 (Baire 纲定理). 若 $X \neq \emptyset$ 是一个紧致的豪斯多夫 (Hausdorff) 空间, 或者是一个完备的度量空间, 则 X 是一个 Baire 空间.

证明. 1. 给定 X 的一个可数闭集族 A_n , 其中每个都是空内部的, 我们要证明它们的并集在 X 中也是空内部的. 为此, 任意给定 X 的一个非空开子集 U_0 , 要证 $U_0 \not\subset \cup_n A_n$. 所以我们必须找到一点 x_0 , 它属于 U_0 , 但不属于任何一个 A_n . 这就把证明转化为一个存在性的问题. (从这个证明也可窥见为什么 Baire 定理可用来解决很多困难的存在性问题.)

2. 首先考虑集合 A_1 . 根据假设, A_1 空内部, 从而不包含 U_0 , 因而可以找到一点 $y \in U_0 \setminus A_1$. 由于 A_1 是闭集 (从而 $U_0 \setminus A_1$ 是 y 的开邻域), 而 X 是正则的, 可以选取 y 的一个邻域 U_1 , 使得 $\text{Cl}(U_1) \subset U_0 \setminus A_1$, 即

$$\text{Cl}(U_1) \cap A_1 = \emptyset, \quad \text{Cl}(U_1) \subset U_0.$$

如果 X 是一个度量空间, 还可以取 U_1 充分小使得其直径小于 1.

3. 一般地, 给定非空开集 U_{n-1} , 与上一步推理完全相同, 可以选取 U_{n-1} 的一个点, 使它不在闭集 A_n 中. 然后选取这个点的一个邻域 U_n , 使得

$$\text{Cl}(U_n) \cap A_n = \emptyset, \quad \text{Cl}(U_n) \subset U_{n-1},$$

且当 X 是度量空间时, $\text{diam}(U_n) < 1/n$.

4. 我们断言 $\cap_n \text{Cl}(U_n)$ 非空. 根据这一论断, 若 $x \in \cap_n \text{Cl}(U_n)$, 则由于 $\text{Cl}(U_1) \subset U_0$, x 属于 U_0 . 另一方面, 对任意 n , 由于 $\text{Cl}(U_n)$ 与 A_n 不交, 所以 x 不属于任何 A_n . 定理得证.

5. 先对 X 是紧致 Hausdorff 空间的情形证明 $\cap \text{Cl}(U_n)$ 非空. 考虑 X 中非空子集的一个下降序列 $\text{Cl}(U_1) \supset \text{Cl}(U_2) \supset \cdots$, 则族 $\{\text{Cl}(U_n)\}$ 满足有限交性质. 由于 X 紧, $\cap \text{Cl}(U_n)$ 必然非空.

6. 对于 X 是完备度量空间的情形, 利用下面引理 1. 它是闭区间套定理的一个推广. (这两步的关键就是完备性. 注意紧性蕴含某种完备性.) $\square$

引理 1. 设 $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ 是完备度量空间 X 中的一个非空闭集的下降序列. 若 $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$, 则 $\cap C_n \neq \emptyset$.

证明. 对任意 n , 取 $x_n \in C_n$. 由于 $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$, $\{x_n\}$ 是个 Cauchy 列. 由 X 的完备性, 存在 $x \in X$ 使得 $\lim x_n = x$. 用反证法易证 $x \in \cap C_n$. $\square$

习题 1. 设 X 是紧致豪斯多夫空间或完备度量空间, Y 是 X 的一个 G_δ 集, 即存在 X 的一族开子集 $\{W_n\}$ 使得 $Y = \bigcap_n W_n$. 证明: Y 在子空间拓扑下是一个 Baire 空间.

习题 2. 证明 $\mathbb{R}$ 中无理数集是个 Baire 空间.

不难证明下面的推论, 它用起来往往比较方便.

推论 3. 非空的完备的度量空间, 或它的具有非空内部的子集, 都是第二纲集, 即不能表示为可列个闭的空内部集的并. 换句话说, 如果一个非空的完备的度量空间是可列个闭集的并集, 则其中至少有一个闭集的内部非空.

18.3 应用

定理 5 (连续函数列点态收敛极限函数的连续点集的稠密性). 设 X 是一个拓扑空间, (Y, d) 是一个度量空间. 设 $\{f_n: X \rightarrow Y\}$ 是一个连续函数列, 使得对所有 $x \in X$, 有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 其中 $f: X \rightarrow Y$. 如果 X 是一个 Baire 空间, 则使得 f 连续的点构成的集合在 X 中稠密.

证明. 我们知道一致收敛的连续函数列的极限还是连续的. 这里证明的关键想法是: “点态收敛的连续函数列”几乎处处”(在稠密意义下)都是局部一致收敛的, 即每个点都有它的一个邻域, 函数列在该邻域内一致收敛.

1. 给定正整数 N 和正数 $\varepsilon > 0$, 定义集合

$$A_N(\varepsilon) = \bigcap_{n, m \geq N} \{x \in X : d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon\}.$$

则 $A_N(\varepsilon)$ 在 X 中是闭集. 这是因为, 对固定的 m, n , $\{x : d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon\}$ 是闭集 (利用 f_n, f_m 以及 $d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续性, 由于连续映射的复合映射依旧连续, 则 $d(f_m(\cdot), f_n(\cdot))$ 是 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数. 此外参考第六讲定理 4.) 所以 A_N 是闭集.

2. 对固定的 $\varepsilon > 0$, 考虑集合列 $A_1(\varepsilon) \subset A_2(\varepsilon) \subset \dots$. 它们的并集就是 X . 这是因为对任意 $x_0 \in X$, 由于 $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$, 所以 $\{f_n(x_0)\}$ 是个 Cauchy 列. 从而存在 N 使得 $x_0 \in A_N(\varepsilon)$.

这就把 X 分解成了可列个闭集的并集. 由推论 3 可知, 从某个 N 开始, $A_n(\varepsilon) (n \geq N)$ 的内部就是不空的了.

我们看到, $A_N(\varepsilon)$ 就是在给定误差标准 ε 时, 让序列 $\{f_n\}$ 中除前 N 个外余下函数都”一致收敛”的点集.

3. 注意 $\text{Int}(A_N(\varepsilon))$ 是逐渐变大的开集列. 现在记

$$U(\varepsilon) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}(A_N(\varepsilon)),$$

它是开集. 我们要证明

1) $U(\varepsilon)$ 是 X 中稠密集;

2) 函数 f 在集合

$$C = U(1) \cap U(\frac{1}{2}) \cap U(\frac{1}{3}) \cap \dots$$

的每一点都连续.

于是, 如果 X 是 Baire 空间, 则利用其开集定义, C 在 X 中稠密, 定理得证. 注意 C 就是使函数列 $\{f_n\}$ “局部一致收敛” 的点集, 所以第二个结论其实是容易证明的.

4. 现在证明 $U(\varepsilon)$ 在 X 中稠密, 即对于 X 的任意非空开集 V , $U(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$; 也就是说要证明存在 N , 使得 $V \cap \text{Int}(A_N(\varepsilon))$ 非空.

为此, 注意对于任意 N , $V \cap A_N(\varepsilon)$ 是 V 中闭集. 根据定理 2, V 是一个 Baire 空间, 而 $U(V \cap A_N(\varepsilon)) = V \cap X = V$ 内部不空, 所以至少有一集合, 例如 $V \cap A_M(\varepsilon)$, 它的 (相对于开子空间 V 的) 内部不空. 设 W 是 V 的非空开子集且 $W \subset V \cap A_M(\varepsilon)$, 则 W 也是 X 的开集, 且 $W \subset A_M(\varepsilon)$. 于是 $W \subset \text{Int}(A_M(\varepsilon))$, 又 $W \subset V$, 即我们得到 $V \cap \text{Int}(A_M(\varepsilon))$ 非空. 稠密性得证.

5. 现在证明, 若 $x_0 \in C$, 则 f 在 x_0 连续. 给定 $\varepsilon > 0$, 要找 x_0 的一个邻域 W 使得对于 $x \in W$, 成立 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

首先, 取 k 使得 $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. 因为 $x_0 \in C$, 所以 $x_0 \in U(\frac{1}{k})$. 因此存在自然数 N 使得 $x_0 \in \text{Int}(A_N(\frac{1}{k}))$. 由 f_N 的连续性, 可找到 x_0 的一个邻域 $\tilde{W}$ 使得

$$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3, \quad \forall x \in W = \tilde{W} \cap \text{Int}(A_N(\frac{1}{k})).$$

根据 $W \subset A_N(\frac{1}{k})$, 还成立

$$d(f_n(x), f_N(x)) \leq 1/k, \quad \forall n \geq N, x \in W.$$

(即 $\{f_n\}$ 在 W 上一致收敛, 或者说 $\{f_n\}$ 在点 x_0 “局部一致收敛”.) 已知 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 在 Y 中成立, 所以在上式中取 $n \rightarrow \infty$, 就得到

$$d(f(x), f_N(x)) \leq 1/k < \varepsilon/3, \quad \forall x \in W.$$

特别地, 由于 $x_0 \in W$, 成立

$$d(f(x_0), f_N(x_0)) \leq 1/k < \varepsilon/3.$$

最后, 利用三角不等式和上面的式子, 当 $x \in W$ 时就有

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon.$$

证毕. $\square$

习题 3. 证明如下一致有界原理: 设 X 是个完备度量空间, $\mathcal{F}$ 是 $C(X, \mathbb{R})$ (X 上连续函数的集合) 的一个子集, 使得对于任意 $a \in X$, 集合

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$$

有界, 则存在 X 的一个非空开集 U , 使得 $\mathcal{F}$ 中的函数在 U 上一致有界, 即存在一个常数 M , 使得对任意 $x \in U$ 和 $f \in \mathcal{F}$, 成立 $|f(x)| \leq M$.

参考文献

- [1] 包志强: 点集拓扑与代数拓扑引论. 北京大学出版社, 北京, 2013.
- [2] 陈肇姜: 点集拓扑学题解与反例. 南京大学出版社, 南京, 1997.
- [3] 李元熹, 张国樑: 拓扑学. 上海科学技术出版社, 上海, 1984.
- [4] 熊金城: 点集拓扑讲义. 第四版. 高等教育出版社, 2011.
- [5] 尤承业: 基础拓扑学讲义. 北京大学出版社, 上海, 1997.
- [6] C. Adams and R. Franzosa: Introduction to Topology: Pure and Applications. Pearson Education, 2008.
- [7] E. López Fune: Leveraging the Urysohn Lemma of Topology for an Enhanced Binary Classifier. arXiv:2312.11948, 2023.
- [8] J. R. Munkres: Topology. Second edition. Pearson Education, 2000.
- [9] M. Kline: Mathemaical Thoughts From Ancient to Modern Times. Oxford University Press, 1972. (中译本: 莫里斯 • 克莱因: 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 2002 年; 第 50 章, 江泽涵译.)
- [10] V. J. Katz: A History of Mathematics, An Introduction. 3rd Edition. Pearson Education Inc., 2009.

- [11] T. Gowers: The Princeton Companion to Mathematics. Princeton niversity Press, 2008. (中译本: 齐民友译, 普林斯顿数学指南, 科学出版社, 2014 年.)
- [12] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr.: The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. of Math. (2)* 170 (2009), no. 3, 1417–1436.

习题解答

第一讲

习题 1. 设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的子集. 证明 A 是开集当且仅当对任意点 $x \in A$, 存在一个开集 U 使得 $x \in U \subset A$.

必要性: 取 $U = A$ 即可. 充分性: 对任意 $x \in A$, 存在包含 x 的开集 $U_x \subset A$. 于是 $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$. 利用开集的公理, A 是开集.

习题 2. [利用拓扑基判定开集] 设 X 是一个拓扑空间, 其拓扑由一个拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成. 那么 X 的子集 U 是开集的充分必要条件是对任意 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$.

必要性: 利用 U 是拓扑基中若干元素的并找到 B . 充分性: 与习题 1 类似.

习题 3. 对 $\mathbb{R}^2$, 证明

- 1) $\mathcal{B}_1 = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ 是一个拓扑基. 这里 $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < r\}$;
- 2) $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 : a < b, c < d\}$ 也是一个拓扑基;
- 3) $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 生成 $\mathbb{R}^2$ 上同一个拓扑, 称作标准拓扑.

1) 和 2) 按照拓扑基定义直接验证. 3) 设 $\mathcal{B}_1$ 生成的拓扑为 $\mathcal{T}$. 首先证 $\mathcal{B}_2$ 中子集都是 $\mathcal{T}$ 的开集. 为此, 取定任意方形 $U \in \mathcal{B}_2$, 对任意点 $x \in U$, 由数学分析知识, 总可以找到包含 x 且在 U 中的开球. 所以根据习题 1, U 是

$\mathcal{T}$ 的开集. 其次, 对 $\mathcal{T}$ 中任意开集 V 和任意点 $v \in V$, 由拓扑基性质, 存在开球 $B_1 \in \mathcal{B}_1$ 包含 v , 且 $B_1 \subset V$. 可以作 B_1 内的包含 v 的方形 $B_2 \in \mathcal{B}_2$ 满足定理 2 的要求. 从而利用定理 2 得证.

习题 4. 证明闭球 $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \leq r\}$ 和闭矩形 $\{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y_1 \leq b, c \leq y_2 \leq d\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 在标准拓扑下的闭集.

利用定义.

习题 5. $\mathbb{R}$ 在有限补拓扑下不是豪斯多夫空间.

设 $x, y \in \mathbb{R}$. 若 U 是包含 x 的开集, 则其补集是有限集, 从而不可能有包含 y 的开集 V , 它与 U 必然相交.

习题 6. 设 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $d(x, x) = 0$, 且 $x \neq y$ 时 $d(x, y) = 1$. 证明 d 是 X 上度量, 且生成 X 上离散拓扑.

只需证明任何单点集都是开集. 事实上, $\{x\} = B(x, \frac{1}{2})$, 所以是开集.

习题 7. 度量空间都是豪斯多夫空间.

对任意不同两点 x, y , 设它们的距离为 l . 利用三角不等式, 球 $B(x, l/4)$ 和 $B(y, l/4)$ 就是所需分离 x, y 的不交开集.

第二讲

习题 1. 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 点 $x \in X$. 则 $x \in \text{Int}(A)$ 的充分必要条件是存在开集 $U \subset A$ 包含 x .

必要性. 取 $U = \text{Int}(A)$ 即可. 充分性: 注意根据定义, $U \subset \text{Int}(A)$, 所以 $x \in \text{Int}(A)$.

习题 2. 举例说明定理 2 中 3) 和 6) 中等号一般不成立.

略.

习题 3. 证明无理数集在具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 上稠密.

利用 $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, 得到 $\text{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \text{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

习题 4. 确定具有标准拓扑的平面 $\mathbb{R}^2$ 上点集

$$S = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$$

的极限点集.

令 $S' = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$, 则 $S' \cup S$ 就是 S 的极限点集.

习题 5. 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集族, 由空集或其补集是可数集的子集组成. 证明:

- 1) $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑 (称作可数补拓扑);
- 2) 在该拓扑下, 点 0 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的一个极限点;
- 3) 在该拓扑下, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 中没有收敛到点 0 的序列.

1) 显然 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{T}$ 中. 其次, 设 $U_k \in \mathcal{T}, k = 1, 2, \dots, n$. 若 $\bigcap_{k=1}^n U_k = \emptyset$, 则满足拓扑定义的要求. 若 $\bigcap_{k=1}^n U_k \neq \emptyset$, 则每个 U_k 都不是空集. 利用 $\mathbb{R} \setminus (\bigcap_{k=1}^n U_k) = \bigcup_{k=1}^n \mathbb{R} \setminus U_k$ 是有限个可数集的并集, 从而可数. 所以 $\bigcap_{k=1}^n U_k$ 是开集. 再次, 设 $U_\lambda \in \mathcal{T}, \lambda \in \Lambda$. 若每个 U_λ 都是空集, 显然它们的并集是空集, 从而是开集. 若至少有一个 U_λ 不空, 则 $\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \setminus U_\lambda)$ 是可数集的交集, 自然可数. 于是 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 是开集.

2) 设 U 是包含 0 的开集, 则 U 必然包含 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 中无限个点. 所以 0 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的聚点.

3) 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 中收敛到 0 的序列, 则 $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ 是个开集, 且包含 0 . 但该开集不包含任何序列中的点.

习题 6. 考虑带有限补拓扑的 $\mathbb{R}$, 设 $x_1, x_2, \dots$ 是其中的一个序列, 且存在常数 M , 使得同一个点在该序列中重复出现的次数小于 M . (例如取 $1, 2, 3, \dots$, 就是这样的序列.) 那么该序列收敛于 $\mathbb{R}$ 中每个点.

设 $a \in \mathbb{R}$. 考虑包含 a 的任意开集 U , 则 U 的补集是有限集. 根据对点列 $\{x_n\}$ 的要求, 它有无限个不同的点. 所以存在 N , 当 $n > N$ 时, 就有 $x_n \in U$. 即证 $x_n \rightarrow a$.

习题 7. 集合 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的有限补拓扑下, 它的边界是什么?

$\mathbb{R}$ 在有限补拓扑下, 闭集或是 $\mathbb{R}$, 或是有限集. 由于 $[0, 1]$ 是无限集, 从而其闭包是 $\mathbb{R}$. 又 $\mathbb{R}$ 在有限补拓扑下, 除空集外的任何开集的补集只含有限个点, 从而包含在 $[0, 1]$ 中的开集只能是空集. 所以 $\partial[0, 1] = \mathbb{R}$.

习题 8. 集合 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 的离散拓扑下, 它的边界是空集.

在离散拓扑下任何子集都是既开又闭的, 从而边界是空的.

第三讲

习题 1. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间, U 是 A 的子集. 证明: 1) U 相对于 A 的闭包就是 U 相对于 X 的闭包与 A 的交集; 2) U 相对于 A 的内部就是 U 相对于 X 的内部与 A 的交集.

记 U 相对于 A 的闭包为 $\text{Cl}_A(U)$, U 相对于 X 的闭包为 $\text{Cl}(U)$. 根据闭包的定义, $\text{Cl}_A(U)$ 是 A 中包含 U 的所有闭集的交集. 注意 $\text{Cl}(U) \cap A$ 是 A 的闭集, 且包含 $U \cap A = U$, 所以 $\text{Cl}(U) \cap A \supset \text{Cl}_A(U)$. 另一方面, 设 $V = \text{Cl}_A(U) \supset U$, 则存在 X 的闭集 B 使得 $V = B \cap A$, 从而 $B \supset U$, 即 $B \supset \text{Cl}(U)$. 从而 $V \supset \text{Cl}(U) \cap A$, 即得 $\text{Cl}(U) \cap A \subset \text{Cl}_A(U)$. 这就证明了 $\text{Cl}(U) \cap A = \text{Cl}_A(U)$. 对于内部的情形可类似证明.

习题 2. 证明: 一个豪斯多夫空间的拓扑子空间仍是豪斯多夫空间.

设 A 是豪斯多夫空间 X 的子空间, 对任意 $x, y \in A$, 存在 X 的非空不相交开集 U 和 V 使得 $x \in U, y \in V$. 于是 $x \in A \cap U, y \in A \cap V, A \cap U$ 和 $A \cap V$ 不相交, 且都是 A 的开子集.

习题 3. 证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 作为具有标准拓扑的 $\mathbb{R}$ 的拓扑子空间的拓扑不是其离散拓扑.

设 $x \in \mathbb{Q}$, 只要证明 $\{x\}$ 不是子空间拓扑下的开集. 否则, $\{x\} = \mathbb{Q} \cap U, U$ 是 $\mathbb{R}$ 的开集. 根据 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 的稠密性 (源于 $\mathbb{R}$ 的算术性质和序性质), 任意 $\mathbb{Q} \cap U$ 都包含无限个点, 矛盾.

第四讲

习题 1. 证明: 考虑映射 $f: X \rightarrow Y$, 如果对任意 $A \subset X$, 成立 $f(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(f(A))$, 则 f 连续.

设 V 是 Y 中闭集, 取 $A = f^{-1}(V)$. 利用 $V = f(A) \subset f(\text{Cl}(A)) \subset \text{Cl}(f(A)) = \text{Cl}(V) = V$, 推出 $f(\text{Cl}(A)) = V$. 于是由 A 的定义, $\text{Cl}(A) \subset A$, 从而 $A = \text{Cl}(A)$, A 是闭集.

习题 2. 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是 X 上两个拓扑, 那么从 $(X, \mathcal{T}_1)$ 到 $(X, \mathcal{T}_2)$ 的恒等映射是连续的充要条件是 $\mathcal{T}_1$ 细于 $\mathcal{T}_2$.

设 $V \in \mathcal{T}_2$, 则 $\text{id}^{-1}(V) = V \in \mathcal{T}_1$, 从而 $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

习题 3. 设 X 是拓扑空间, Y 是度量空间, $f_n: X \rightarrow Y$ 是一致收敛到 f 的连续映射序列, 且 x_n 是 X 中收敛到 x 的点列. 证明: $f_n(x_n)$ 收敛到 $f(x)$.

由于 $d(f_n(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x))$, 对于后一项利用 f 的连续性; 对于前一项利用 $\{f_n\}$ 的一致收敛性.

第五讲

习题 1. 证明标准拓扑下 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚.

作函数 $y = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 及 $x = (1 + z)/2$.

习题 2. 构造一个 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的嵌入.

作 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$.

习题 3. 利用适当的拓扑性质证明 $\mathbb{R}$ 和它的子空间 $\mathbb{Q}$ 不同胚.

利用集合的势在同胚下不变.

习题 4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 是一一映射, 且对 X 的任意子集 A , 均成立 $f(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(f(A))$. 证明 f 是同胚.

由 $f(\text{Cl}(A)) = \text{Cl}(f(A))$ 和第四讲习题 1, 可知 f 是连续的. 再证 f^{-1} 连续, 即 f 将闭集映为闭集. 设 A 是 X 中闭集, 则 $\text{Cl}(f(A)) = f(\text{Cl}(A)) = f(A) \subset \text{Cl}(f(A))$, 即 $f(A) = \text{Cl}(f(A))$, 从而 $f(A)$ 闭.

第六讲

习题 1. 证明 $\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V: U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ 是生成 $\mathcal{T}_{X \times Y}$ 的一个拓扑基. 这里 $\mathcal{B}_X$ 和 $\mathcal{B}_Y$ 分别是 X 和 Y 的拓扑基.

利用拓扑基定义直接验证.

习题 2. 证明豪斯多夫空间的乘积空间是豪斯多夫空间.

利用定义直接证明.

习题 3. 设 (X, d) 是个度量空间. 证明 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数.

设 $x, x' \in X$, $d(x, x') = r_0$, 而 (a, b) 是包含 r_0 的 $\mathbb{R}$ 的非空开区间. 利用连续映射的局部定义, 只要证明存在 (x, x') 的在 $X \times X$ 中的邻域 $U \times V$, 使得对任意 $(y, y') \in U \times V$, 成立 $d(y, y') \in (a, b)$ 即可.

由于 $r_0 \in (a, b)$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon) \cap [0, +\infty) \subset (a, b)$. 所以取 $U = B(x, \varepsilon/4)$, $V = B(x', \varepsilon/4)$, 则对任意 $(y, y') \in U \times V$, 根据三角不等式, 成立 $|d(y, y') - r_0| \leq \varepsilon/2$, 又 $d(y, y') \geq 0$, 于是 $d(y, y') \in (r_0 - \varepsilon/2, r_0 + \varepsilon/2) \cap [0, +\infty) \subset (a, b)$.

另一方面, 根据乘积拓扑定义, 上述 $U \times V$ 确实是 (x, x') 的一个邻域.

习题 4. 设 X, Y, Z 是三个拓扑空间. 证明乘积拓扑空间 $(X \times Y) \times Z$ 和 $X \times (Y \times Z)$ 是拓扑等价的.

$(X \times Y) \times Z$ 和 $X \times (Y \times Z)$ 在集合论角度是完全一样的. 现在做映射

$$f: (X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z), \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z).$$

显然这是一个一一对应. 现证 f 连续, f^{-1} 的连续性类似可证.

考虑分量映射

$$f_1: (X \times Y) \times Z \rightarrow X, \quad (x, y, z) \mapsto x;$$

$$f_2: (X \times Y) \times Z \rightarrow Y \times Z, \quad (x, y, z) \mapsto (y, z).$$

则对于 X 的任意开集 U , $f^{-1}(U) = (U \times Y) \times Z$ 是 $(X \times Y) \times Z$ 的开集. 所以 f_1 连续.

对于 f_2 , 考虑其分量

$$f_{21}: (X \times Y) \times Z \rightarrow Y, \quad (x, y, z) \mapsto y;$$

$$f_{22}: (X \times Y) \times Z \rightarrow Z, \quad (x, y, z) \mapsto z.$$

不难说明它们都是连续的. 所以由定理 4 就得到 f 的连续性.

第七讲

习题 1. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, U 是 Y 的开子集. 则限制映射 $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$ 是商映射.

显然 $f|_{f^{-1}(U)}$ 是满射. 又 f 是连续的, 从而限制映射 $f|_{f^{-1}(U)}$ 也是连续的. 又设 V 是 $f^{-1}(U)$ 的开子集, 注意 $f^{-1}(U)$ 是开集, 则 V 是 X 的开子集. 于是利用 f 是商映射, $f|_{f^{-1}(U)}(V) = f(V)$ 是 Y 的开集. 注意 $f|_{f^{-1}(U)}(V) \subset U$, 所以 $f|_{f^{-1}(U)}(V)$ 是 U 的开子集. 这就证明了限制映射是开映射.

习题 2. 设 $A \subset X$, $i: A \rightarrow X$ 是含入映射, 而连续映射 $r: X \rightarrow A$ 满足 $r \circ i = \text{id}_A$ 是 A 上恒等映射. 这样的映射称为 X 到 A 的收缩映射. 证明: r 是一个商映射.

显然 r 是个满射. 由 $r \circ i = \text{id}_A$, 若 U 是 A 的子集, 则可以证明等式 $r^{-1}(U) \cap A = U$. 所以若 $r^{-1}(U)$ 是 X 的开子集, 则 U 就是 A 的开子集. 另一方面, 由 r 的连续性, 就可知 U 是 A 的开子集当且仅当 $r^{-1}(U)$ 是 X 的开子集. 所以根据定义, r 是商映射.

习题 3. 在 $\mathbb{R}$ 上规定等价关系 $\sim$, 使得 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y$ 是整数. 证明: $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$.

定义函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto \exp(2\sqrt{-1}\pi x)$. 则 f 是连续的满射. 设 U 是 $\mathbb{R}$ 的开集. 由于 $\mathbb{R}$ 上开集就是若干不相交开区间的并, 所以不妨设 $U = (a, b)$. 若 $b - a > 1$, 则显然 $f(U) = S^1$ 是 (S^1 作为 $\mathbb{R}^2$ 子空间的) 开集. 若 $b - a = 1$, 则 $f(U)$ 就是 S^1 去掉一点 (单点集是闭集), 也是开集. 若 $0 < b - a < 1$, $f(U)$ 就是 S^1 上一段开弧, 不难验证也是开集. 所以 f 是开映射, 从而也是商映射. 利用定理 9 即可得到结论.

第八讲

习题 1. 证明: 映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续当且仅当在任意一点 $x \in X$ 连续.

证明. 必要性显然. 对于充分性, 若 U 是 Y 中开集, 不妨设 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. 对于任意一点 $x \in f^{-1}(U)$, 考虑 $f(x)$ 的任何一个给定的邻域基, 则存在该邻域

基中成员 U_x 使得 $U_x \subset U$, 且由 f 在 x 点连续性, 存在 x 的邻域 V_x 使得 $x \in V_x \subset f^{-1}(U_x) \subset f^{-1}(U)$. 于是对 $x \in f^{-1}(U)$ 取并集, 得到

$$f^{-1}(U) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} f^{-1}(U_x) \subset f^{-1}(U).$$

这就表明 $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$, 于是 $f^{-1}(U)$ 是开集. $\square$

习题 2. 度量拓扑空间都是第一可数空间.

对任意点 x , 开球族 $\{y \in X : d(y, x) < 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 x 的一个可数邻域基.

习题 3. $\mathbb{R}$ 上离散拓扑满足第一可数公理.

回忆带离散拓扑的 $\mathbb{R}$ 是度量空间.

习题 4. 带有限补拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 不满足第一可数公理

设 $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是点 0 的一个标准可数邻域基, 则 $\mathbb{R} \setminus U_k$ 只含有限个点, 于是 $\mathbb{R} \setminus (\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus U_k)$ 只含有可数多个点. 由于 $\mathbb{R}$ 是不可数集, 必有 $0 \neq a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$, 即对任意 $k, a \in U_k$. 现考虑 0 的邻域 $U = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, 则不存在 k 使得 $U_k \subset U$, 与 $\{U_k\}$ 是可数邻域基的假设矛盾.

习题 5. n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 是第二可数空间.

以坐标各分量都是有理数的点为心, 半径为 $1/n$ (n 是自然数) 为半径的开球全体就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可数拓扑基.

习题 6. $\mathbb{R}$ 上离散拓扑不满足第二可数公理.

离散拓扑的拓扑基就是单点集的全体构成的集族. 由于 $\mathbb{R}$ 不可数, 所以该空间不满足第二可数公理.

习题 7. 证明第二可数空间必是第一可数空间.

设 $\mathcal{B}$ 是第二可数空间 X 的一个可数拓扑基. 对任意点 $x \in X$, 集族 $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ 就是 x 的一个可数邻域集.

习题 8. 证明第二可数空间的子空间和乘积空间都是第二可数空间.

由于全空间的拓扑基限制到子集上就得到拓扑子空间的拓扑基, 所以第二可数空间的子空间是第二可数空间. 又设 X, Y 是第二可数空间, $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是它们的可数拓扑基. 回忆 $\{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ 是乘积空间的一个拓扑基, 它只含有可数个元素. (可数集的乘积集合仍是可数集.)

第九讲

习题 1. 设 X 是一个豪斯多夫空间, $f: X \rightarrow X$ 连续. 证明: f 的不动点构成的集合是 X 的闭子集.

设 $A = \{x \in X: f(x) = x\}$, 我们证明 $B = X \setminus A$ 是开集. 设 $y \in B$, 则 $f(y) \neq y$, 则存在不相交的开集 $U \ni y$ 和 $V \ni f(y)$. 注意由 f 的连续性, $f^{-1}(V)$ 是包含 y 的开集. 所以 $W = U \cap f^{-1}(V)$ 是包含 y 的开集. 对任意 $z \in W$, 则 $z \in U$, 且 $f(z) \in V$. 由于 $U \cap V = \emptyset$, 从而 $z \neq f(z)$. 于是 $W \subset B$. 这就证明了 B 是开集.

习题 2. 证明 X 是豪斯多夫空间当且仅当对角线 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X: x \in X\}$ 是 $X \times X$ 的闭集.

必要性. 记 $A = (X \times X) \setminus \Delta$, 要证明 A 是开集. 设 $(x, y) \in A$, 则 $x \neq y$. 于是存在不交开集 $U \ni x, V \ni y$. 那么 $(x, y) \in U \times V$ 且 $U \times V \subset A$, 即得 A 是开集.

充分性. 由于 Δ 是闭集, 则 A 是开集. 若 $x \neq y$, 则 $(x, y) \in A$, 所以存在开集 U 和 V 使得 $(x, y) \in U \times V \subset A$. 这还隐含着 $U \cap V = \emptyset$.

习题 3. 设 X 正规, 证明对任意两个不相交的闭集 A, B , 存在 A 的邻域 U 和 B 的邻域 V 使得 $\text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V) = \emptyset$.

由定理 2, 取 $U_1 = X \setminus B$, 则存在包含闭集 A 的开集 U 使得 $\text{Cl}(U) \subset U_1$; 又对开集 $V_1 = X \setminus \text{Cl}(U)$, 则 $V_1 \supset B$, 于是存在开集 V 包含 B 使得 $\text{Cl}(V) \subset V_1$. 注意 $\text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V) = \emptyset$.

习题 4. 证明正规空间的闭子空间正规.

设 Y 是正规空间 X 的闭子空间, A, B 是 Y 的闭子集. 则 A, B 是 X 的闭子集. 由正规性, 存在分别包含 A, B 的 X 的不相交的开集 U 和 V . 那么 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 也是分别包含 A, B 的 Y 的不相交的开集. 所以 Y 是正规的.

第十讲

习题 1. 若拓扑空间 X 上的连续函数都具有介值性质, 则 X 连通.

反证法. 利用定理 1 的 5).

习题 2. X 到 Y 的同胚映射诱导 X 和 Y 连通分支之间的同胚. 所以连通分支个数是拓扑不变量.

设 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚映射, 而 U 是 Y 的一个连通分支, 则由 f^{-1} 的连续性, $f^{-1}(U)$ 是 X 的连通子集, 而且若 X 的连通子集 V 包含 $f^{-1}(U)$, 那么 $f(V)$ 是包含 U 的 Y 的连通子集, 于是由 U 的极大性, $f(V) = U$, 即 $V \subset f^{-1}(U)$. 于是 $V = f^{-1}(U)$, 从而 $f^{-1}(U)$ 是 X 的连通分支. 类似地, f 把 X 的一个连通分支映到 Y 的一个连通分支.

习题 3. 取 $X = A \cup B$, 其中

$$A = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\}, \quad B = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}.$$

证明: 1) X 是连通的; 2) $(0, 0)$ 点不是局部连通的.

注意 A 作为连续映射 $T: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$ 的像集, 由 $[0, 1]$ 的连通性, 也是连通的; 且 $X = \text{Cl}(A)$, 所以 X 连通.

设 $B(0, \varepsilon)$ 是以原点为心, ε 为半径的圆. 那么 O 关于 X 的邻域由 $X \cap B(0, \varepsilon)$ 得到. 但显然对任意充分小的 $\varepsilon > 0$, 这种邻域都包含无线条分离的正弦曲线段, 从而不是连通邻域.

习题 4. 证明局部连通性是拓扑性质.

直接利用定理 9 即可, 因为那里涉及的连通分支, 开集等都是拓扑性质.

习题 5. 证明闭圆盘 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 连通.

D^2 和 I^2 同胚.

习题 6. 设 A 是连通空间 X 的闭子集, 且 ∂A 连通. 证明 A 连通.

设 $A = B_1 \cup B_2$, B_1, B_2 是 A 的不相交的闭子集. 由于 A 是 X 的闭子集, 所以 B_1, B_2 也是 X 的闭子集, 从而 $\partial A \subset A$, $\partial B_1 \subset B_1, \partial B_2 \subset B_2$.

若 $x \in \partial A$, 则不妨设 $x \in B_1$, 那么必有 $x \in \partial B_1$. 于是我们证明了 $\partial A \subset \partial B_1 \cup \partial B_2$. 反之, 亦必有 $\partial A \supset \partial B_1 \cup \partial B_2$. 否则, 不妨设 $x \in \partial B_1$ 但 $x \notin \partial A$. 由于 $x \in A$, 所以 x 只能是 A 的一个内点, 即存在 x 的一个邻域 U , $U \subset A$. 对任意 x 的邻域 $V \subset U$, 由于 $x \in \partial B_1$, 所以 V 包含 A 中不属于 B_1 的点, 即包含 B_2 中的点. 所以可证明 x 也是 B_2 的边界点, 从而 $\partial B_1 \cap \partial B_2$ 非空. 这

与 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ 矛盾! 这就证明了 $\partial A = \partial B_1 \cup \partial B_2$.

由于 ∂A 连通, 而 ∂B_1 和 ∂B_2 是不交的闭集, 所以其中之一必是空集. 设 ∂B_2 是空集, 则 B_2 是 X 的既开又闭的子集. 由于 X 连通, B_2 或是空集, 或是 X 本身. 若是后者, 则 $A = X$, 从而 A 连通; 若是前者, 则根据定义, A 也连通.

记 U 为 ∂A 所在的 A 的连通分支. 若 A 不连通, 则它至少含有另外一个连通分支 V . 那么由于连通分支都是闭集, $\partial V \subset V$. 但 ∂A 是各连通分支边界的并集, 不妨设 $\partial A \subset f^{-1}(\{1\})$. 那么 A 的闭子集 $f^{-1}(\{-1\})$ 将没有边界.

习题 7. 设 X 是一个连通度量空间, 且至少含有两个点. 证明 X 一定包含不可数个点.

设 $a, b \in X$. 作函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, a)$, 则 f 是连续映射. 由 $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, 以及 X 的连通性, 成立介值定理, 即 f 的值域包括 $[0, f(b)]$, 而该区间是个不可数集. 所以 X 必是不可数集.

习题 8. [一维 Borsuk-Ulam 定理] 设 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 则存在一点 $z \in S^1$ 使得 $f(z) = f(-z)$.

令 $g(z) = f(z) - f(-z)$, 则对 $z_0 \in S^1$, 若 $g(z_0) = 0$, 命题得证. 否则, 不妨设 $g(z_0) > 0$, 则 $g(-z_0) = -g(z_0) < 0$, 利用 S^1 的连通性和介值定理即可.

第十一讲

习题 1. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中的开集是连通的, 当且仅当它是道路连通的.

充分性见定理 1. 必要性. 设 p 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集 U 中的一点. 记 C_p 是 U 中可与 p 用道路相连的点的集合, N_p 是 U 中不能与 p 用道路相连的点的集合. 它们是 U 的不相交子集. 我们证明它们都是开集. 以 C_p 为例, 注意它不是空集 (至少包含点 p). 那么对 $q \in C_p$, 注意 $q \in U$, 所以存在开球 $B \subset U$ 包含 q . 注意 B 中任何点都可以与 q 用线段连接, 所以 $B \subset C_p$. 于是 C_p 是开集. 利用 U 的连通性, 就有 $U = C_p$.

习题 2. 一个拓扑空间的道路连通分支的个数是个拓扑不变量.

设 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚, $f(x) = y$, 则 f 将 x 所在的道路连通分支 U 映到 y

所在的道路连通分支 V . (有 $f(U)$ 的道路连通性, $f(U) \subset V$; 反之, 考虑 f^{-1} , 则 $f^{-1}(V) \subset U$, 即 $V \subset f(U)$, 所以 $f(U) = V$).

习题 3. 道路分支必包含在连通分支中; 但由拓扑正弦曲线, 说明连通分支未必包含在道路分支内.

道路分支必包含在连通分支中, 是因为道路连通必然连通. 对拓扑正弦曲线 S , $(0,0)$ 所在的道路分支是它自己, 而连通分支就是 S .

习题 4. [梳子空间] 欧式平面的子集

$$C = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \text{ 或 } \frac{1}{n}, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}, x_2 \in [0, 1] \right\} \cup \{ (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0, 1] \}$$

连通但不局部连通; 道路连通但不局部道路连通.

C 道路连通是显然的, 所以也连通. 取点 $(0, \frac{1}{2})$ 的充分小邻域 $B((0, \frac{1}{2}), \varepsilon) \cap C$, 该集合由无线条平行线段组成, 所以并不连通. 于是 C 并非局部连通; 当然更不会局部道路连通.

习题 5. 设 A 是道路连通空间的闭子集, 且 ∂A 道路连通. 证明 A 道路连通.

设有两个不同的点 $a, b \in A$. 若 $a, b \in \partial A$, 则由 ∂A 的道路连通性, 且 $\partial A \subset A$, 它们可以用 A 内道路连结. 现不妨设 $a \notin \partial A$. 则 a 是内点. 设 σ 是连结 a, b 的在 X 中的道路, 且假设此道路不全在 A 内. 那么取 $t_* = \sup\{t_1 : \sigma([0, t_1]) \subset A\}$, 则 $\sigma(t_*) \in \partial A$. 类似可找到 $t^* > t_*$ 使得 $\sigma(t^*) \in \partial A$ 且对 $t \in (t^*, 1]$, $\sigma(t) \in A$. $\sigma(t_*)$ 和 $\sigma(t^*)$ 可以在 ∂A 内连结. 于是将三段道路合并, 就可将 a, b 在 A 内连结.

习题 6. A 是 X 的道路分支, B 是 Y 的道路分支, 则 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 的道路分支.

首先, $A \times B$ 是道路连通的. 设 W 是包含 $A \times B$ 的道路连通集, 则由投影 $p_x : X \times Y \rightarrow X$ 的连续性, 集 $p_x(W)$ 是道路连通的, 所以 $p_x(W) \subset A$. 类似可证明 $p_y(W) \subset B$. 于是 $W \subset A \times B \subset W$.

习题 7. 设 A, B 都是道路连通空间 X 的开子集, 且 $A \cup B = X$, $A \cap B$ 道路连通. 证明 A, B 均道路连通.

设 $a_0, a_1 \in A$, 则存在 X 中道路 $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ 连结 a_1, a_2 . 由于 A, B 是开

集, 则 $\sigma^{-1}(A)$ 和 $\sigma^{-1}(B)$ 都是开集. 由于直线上开集就是若干区间的并, 可以找到 $\sigma^{-1}(A)$ 的包含 0 的最大区间 $[0, t_*)$ 和包含 1 的最大区间 $(t^*, 1]$. 由于 $\sigma^{-1}(A)$ 和 $\sigma^{-1}(B)$ 覆盖了 $[0, 1]$, $[0, t_*)$ 必然和开集 $\sigma^{-1}(B)$ 相交. 于是交集中存在点 t_1 , 使得 $\sigma(t_1) \in A \cap B$. 类似可找到 $t_2 \in (t^*, 1] \cap \sigma^{-1}(B)$, 即 $\sigma(t_2) \in A \cap B$. 由于 $A \cap B$ 道路连通, $\sigma(t_1)$ 和 $\sigma(t_2)$ 可以用 $A \cap B$ 中道路连结. 把这道路与 $\sigma([0, t_1]) \cup \sigma((t_1, 1])$ 合并, 就得到在 A 内连结 a_0, a_1 的道路. 所以 A 道路连通. 类似可证 B 道路连通.

习题 8. 设 X 是带可数补拓扑的实数集 $\mathbb{R}$, 而 $f: [0, 1] \rightarrow X$ 是连续映射. 若 $f(t) = x$, 证明 f 在 t 的某个邻域上恒等于 x . 进一步证明 X 的每个道路连通分支都是单点集.

设 $[0, 1]$ 中序列 t_n 收敛到 t , 且 $f(t_n) \neq x$. 注意到由 f 的连续性, $f(t_n)$ 当在 X 中收敛到 x . 但是根据有限补拓扑的定义, 取 x 的邻域 $X \setminus \{f(t_n) : n \in \mathbb{N}\}$, 可知 $f(t_n)$ 在 X 中并不收敛到 x . 矛盾! 所以 f 在 t 的某个邻域上恒等于 x . 又 $f^{-1}(x)$ 是闭集, 由 $[0, 1]$ 的连通性, $f(t) \equiv x$. 所以 X 的每个道路连通分支都是单点集.

我们顺便注意到 X 是连通的.

第十二讲

习题 1. 证明: A 是 X 的紧子集的充要条件是 A 在 X 中的任何开覆盖都有有限子覆盖.

用定义即可.

习题 2. 局部紧空间的闭子集是局部紧的.

设 X 是局部紧空间, $A \subset X$ 是闭集. 设 $a \in A$, U 是包含 a 的一个 X 中的邻域且 $U \subset C$, C 是紧集. 则 $U \cap A$ 是 a 在 A 中的一个邻域. 我们证明 $C \cap A$ 是 A 的紧子集.

设 $\{W_\alpha\}$ 是 X 的开集族, $\{W_\alpha \cap A\}$ 是 $C \cap A$ 的开覆盖. 则 $\{X \setminus A\} \cup \{W_\alpha\}$ 构成 $C = (C \setminus A) \cup (C \cap A)$ 的开覆盖, 所以存在有限子覆盖, 那么 $C \cap A$ 也有有限子覆盖, 其紧性得证.

习题 3. 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间的有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的.

设 x 是有理数, $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 且 U 是包含 $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ 的一个有理数集的子集. 要证明 $U \subset \mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{Q}$ 的紧子集. 事实上, 任取 (a, b) 中无理数 y , 则 $\{(-\infty, y - \frac{1}{n}), (y + \frac{1}{n}, +\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成 U 的一个开覆盖, 但它没有有限子覆盖. (否则, 存在 m, n 使得 $(-\infty, y - \frac{1}{m}) \cup (y + \frac{1}{n}, +\infty) \supset (a, b) \cap \mathbb{Q}$, 利用有理数在 y 的邻域中的稠密性, 这不可能!)

习题 4. 证明从 $[0, 1]$ 到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的任何连续满射都不是单射.

否则, 由定理 8, $[0, 1]$ 和 $[0, 1] \times [0, 1]$ 同胚; 而 $[0, 1]$ 挖掉一个内点后不连通, $[0, 1] \times [0, 1]$ 挖去一点后仍连通, 所以它们不可能同胚.

习题 5. 设 A 是紧致空间 X 的一个包含无穷多个点的子集. 证明: A 必有聚点.

反证法. 设 A 没有聚点, 则对任意点 $x \in X$, 存在一个邻域 U_x 使得它至多与有限个 A 中的点相交. 注意到 $\{U_x : x \in X\}$ 构成 X 的一个开覆盖. 所以根据 X 的紧性, 其中有限个就可以覆盖 X , 从而覆盖 A , 于是 A 至多含有有限个点.

第十三讲

习题 1. 证明: 序列紧空间的闭子空间是序列紧的; 序列紧空间的连续像是序列紧的.

在序列紧空间 X 的闭子空间 A 中任取点列 $\{x_n\}$, 由 $\{x_n\} \subset X$, 它存在子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛到某点 $x \in X$. 如果 $x \notin A$, 则由定义, x 就是 A 的一个极限点, 从而由 A 是闭子集, $x \in A$, 矛盾! 所以 $x \in A$. 所以 A 序列紧.

设 $f: X \rightarrow Y$ 连续. 对 $\{y_n\} \in f(X)$, 存在 $x_n \in X$ 使得 $f(x_n) = y_n$. 所以有子列 x_{n_j} 收敛到 $x \in X$. 于是根据 f 的连续性, $f(x_{n_j})$ 收敛到 $f(x) \in f(X)$. 于是 $f(X)$ 序列紧.

习题 2. 证明: 可数紧空间的闭子集是可数紧的.

证明方法与紧性情形类似.

习题 3. 第二可数空间是 Lindelöf 空间.

设 X 是第二可数空间, $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖. 我们要找它的一个可数子覆盖. 对任意 $x \in X$, 存在 $U_x \in \{U_\alpha\}$ 使得 $x \in U_x$. 这样得到了 $\{U_\alpha\}$ 的一个子覆盖. 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数拓扑基. 注意对每个 U_x , 都存在拓扑基中的某个元素 B_x 包含 x 且 $B_x \subset U_x$. 注意 $\{B_x\}$ 构成 X 的一个可数开覆盖, 记为 $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 那么包含 B_n 的相应的 U_n 的集合就是 $\{U_\alpha\}$ 的一个可数子覆盖.

第十四讲

习题 1. 考虑定义在 $[0,1]$ 上的所有连续函数构成的空间 $C([0,1])$, 在其上定义度量

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

证明这个空间不紧致.

$C([0,1])$ 在上述度量下是完备的, 因为连续函数列按该度量收敛就是一致收敛, 而连续函数列的一致收敛的极限是连续函数.

$C([0,1])$ 不是完全有界的. 它不能包含在有限个半径为 1 的球内. 否则, $C([0,1])$ 上函数必须一致有界. 这显然不成立.

习题 2. 证明紧致度量空间可分.

紧致度量空间是完全有界的, 所以对 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\frac{1}{n}$ -网, 相应球心记为 $x_n^k, k = 1, \dots, m_n$. 对所有 n , 这些球心的并集是个可数集, 它是稠密的.

习题 3.[一致连续性] 设 $X = (X, d)$ 和 $Y = (Y, d')$ 是度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in X$, $d(x_1, x_2) < \delta$ 时, 有 $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 则称 f 是一致连续的. 证明: 若 X 是紧度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 一致连续.

反证法. 假设存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $n > 0$, 存在 $x_n, x'_n \in X$, 且 $d(x_n, x'_n) < 1/n$, 但 $d'(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. 利用 X 的序列紧性, $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$ 分别有子列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $\{x'_{n_i}\}$ 分别收敛到 x 和 x' . 根据条件, $x = x'$. 再由 f 的连续性, $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x)$, $f(x'_{n_i}) \rightarrow f(x') = f(x)$, 于是 $d'(f(x_{n_i}), f(x'_{n_i})) \rightarrow 0$, 与 $d'(f(x_{n_i}), f(x'_{n_i})) \geq \varepsilon$ 矛盾.

第十五讲

习题 1. 记 $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - q| = 1\}$, $C_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - p| = 1\}$. $\mathbb{R}^2$ 的拓扑子空间 $C_{-1} \cup C_1$ 称作 8 字形空间, 记作 $S^1 \vee S^1$. 则 $S^1 \vee S^1$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ 的强形变收缩核.

首先将 $\mathbb{R}^2$ 强形变收缩到闭圆盘 $B(O, 4)$, 再将每个闭圆盘 $C_{\pm 1}$ 强形变收缩到 $C_{\pm 1}$; 最后将剩下的空间强形变收缩到 $S^1 \vee S^1$.

习题 2. 设 $f, g: X \rightarrow S^n$ 是连续映射, $f(x)$ 和 $g(x)$ 恒不成为对径点, 即不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = -g(x)$. 证明: f 和 g 同伦.

做同伦 $H(x, t) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{|tf(x) + (1-t)g(x)|}$, 由条件, 其分母不为零, 所以是连续的.

习题 3. 设 $f: X \rightarrow S^n$ 是非满的连续映射. 证明: f 零伦.

设 P 不在 $f(X)$ 中, 作 $g(x) = -P$. 由于 $g(x) \neq -f(x)$, 则由上一题, f, g 同伦.

习题 4. 设 $f: S^n \rightarrow X$ ($n \geq 1$) 是连续映射. 证明下列陈述等价:

- 1) f 零伦;
- 2) f 可扩张成连续映射 $\bar{f}: D^{n+1} \rightarrow X$;
- 3) f 相对于 $\bar{1} \in S^n$ 零伦, 其中 $\bar{1} = (1, 0, \dots, 0)$.

若 f 零伦, 则该同伦就是一个所需的连续扩张; 反之, 连续扩张也就是一个零伦. 1) 和 3) 的等价性可用上一习题结论.

习题 5. 证明可缩空间必道路连通.

设 X 是可缩空间, 则 1_X 与常值映射 c 同伦. 设 $c(x) = x_0$, 同伦为 $H(x, t)$. 则对任意 $x_1 \in X$, 作道路 $g(t) = H(x_1, t)$, 则 $g(0) = x_1, g(1) = x_0$. 所以任意点均可与 x_0 道路连结, 于是 X 道路连通.

习题 6. 证明可缩空间的收缩核是可缩空间.

设 $H(x, t)$ 是可缩空间 X 上恒等映射与常值映射间的同伦, A 是收缩核, r 是收缩映射, 则 $r(H(x, t))$ 就是 A 上恒等映射与常值映射间的同伦.

习题 7. 证明: 豪斯多夫空间的收缩核必是闭子集.

设 $x \notin A$, 由于 $r(x) \in A$, 所以 $r(x) \neq x$. 由于 X 是豪斯多夫空间, 存在不交开集 U_1 包含 x , U_2 包含 $r(x)$. 由 r 的连续性, 存在开集 $V_1 \subset U_1$ 包含 x 使得 $r(V_1) \subset U_2$. 我们说明 V_1 与 A 不交, 则 A 是闭集. 否则, 设 $y \in V_1 \cap A$, 则 $y = r(y) \in U_2$. 于是 $U_2 \cap U_1$ 不空, 与前面假设矛盾

第十六讲

习题 1. 设 $F: S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1$ 是连续映射. 对 $r \in [a, b]$, 记 $F_r: S^1 \rightarrow S^1$ 是由 $F_r(\theta) = F(\theta, r)$ 确定的圆函数. 那么 $\deg(F_r)$ 与 r 无关.

设 $\deg(F_a) = m$, $\deg(F_b) = n$, 则由同伦的传递性, 注意到 F_a 和 F_b 同伦, 则 c_m 与 c_n 同伦. 所以 $m = n$.

习题 2. 如果圆函数 f 的度不是零, 则 f 必是满射.

用圆周上点的幅角代表该点. 若 f 不是满射, 则通过旋转 (重新取极坐标), 不妨设 $0 \notin f(S^1)$. 设 $f(0) = \theta_0$, $\theta_0 \in (0, 2\pi)$. 由于 $f(2\pi)$ 要和 $f(0)$ 代表圆周上同一点, 必须要成立 $f(2\pi) = f(0)$; 否则, $f(2\pi) - f(0) = 2k\pi$, k 是非零整数 (不妨设 $k > 0$). 那么由介值性质, 必然存在 $\theta \in [0, 2\pi]$ 使得 $f(\theta) = 2\pi$; 注意 2π 代表的点与 0 代表的点相同, 所以与 f 值域不包含 0 矛盾.

作连续映射 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 如下: $H(\theta, t) = tf(\theta)$, 则 $H(0, t) = tf(0) = H(2\pi, t) = tf(2\pi)$ 对 $t \in [0, 1]$ 都成立. 所以 H 是 S^1 中连接 $f(\theta)$ 与常值映射 $c_0(\theta) = 0$ 的同伦. [我们要保证对任意 $t > 0$, $H(0, t)$ 和 $H(2\pi, t)$ 代表 S^1 上同一点, 即 $f(2\pi) = f(0)$; 否则, 若 $f(2\pi) - f(0) = 2k\pi$, 那么 $H(0, t)$ 和 $H(2\pi, t)$ 是圆周上不同点, 所以根本不是到圆周上映射, 更不是同伦. 这也是理解圆函数同伦的关键.] 所以 f 零伦.

习题 3. 证明 $\mathbb{R}^2$ 到 S^1 的收缩不存在.

注意 $\mathbb{R}^2$ 可缩到 D^2 .

习题 4. 证明单连通是一种伦型不变性, 从而也是拓扑性质.

设 Y 单连通, X 与 Y 同伦, 同伦映射为 h . 设 $f: S^1 \rightarrow X$, 则 $hf: S^1 \rightarrow Y$ 是零伦的. 设 g 为 h 的同伦逆, 则 $f \simeq ghf$, 同伦于 S^1 到 X 的常值映射.

习题 5. 证明单连通空间的收缩核也是单连通的.

设 A 是 X 的收缩核, i 是包含映射, r 是收缩映射. 对 $f: S^1 \rightarrow A$, $i \circ f$ 同伦于 $S^1 \rightarrow X$ 的常值映射, 所以 $f = r \circ (i \circ f)$ 同伦于 S^1 到 A 的常值映射.

习题 6. 证明单连通空间的乘积拓扑空间是单连通的.

设 $f: S^1 \rightarrow X \times Y$, 则 $\pi_x \circ f: S^1 \rightarrow X$ 和 $\pi_y \circ f: S^1 \rightarrow Y$ 都是零伦的. 记其同伦映射分别为 $H_x(\theta, t)$ 和 $H_y(\theta, t)$, 那么 $(H_x(\theta, t), H_y(\theta, t))$ 就是连接 f 和常值映射的同伦.

习题 7. 证明: $X \times Y$ 是单连通的, 当且仅当 X, Y 都是单连通的.

只需再证必要性. 设 $f: S^1 \rightarrow X$, 则 $g(\theta) = (f(\theta), y_0): S^1 \rightarrow X \times Y$. 由于 $X \times Y$ 是单连通的, 则 g 零伦, 所以 f 也零伦.

习题 8. 证明: 拓扑空间 X 是单连通的, 当且仅当任一连续映射 $f: S^1 \rightarrow X$ 都可以延拓为一个连续映射 $F: D \rightarrow X$, 其中 D 是平面上单位圆盘.

充分性. 设 f 可以扩张为连续映射 $F: D \rightarrow X$, 取 D 的极坐标表示, 则 $H(\theta, r) = F(r, \theta): S^1 \rightarrow X$ 就是连接常值映射 $F(0, \theta)$ 及 $f(\theta) = F(1, \theta)$ 的同伦, 所以 f 零伦, 从而 X 单连通.

必要性. X 是单连通的, 则任意连续映射 $f: S^1 \rightarrow X$ 都同伦于一个常值映射. 设此同伦为 $H(\theta, r)$, $r \in [0, 1]$, 则 $F(r, \theta) = H(\theta, r)$ 就给出了所要的 f 的开拓.

第十七讲

习题 1. 设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 是个同胚, 那么 $\deg(f) = \pm 1$.

设 f 同伦于 c_m , f^{-1} 同伦于 c_n , 则因为 $f \circ f^{-1} = 1_{S^1}$, 所以 $c_m \circ c_n$ 同伦于恒等映射, 即 c_{m+n} 同伦于恒等映射, 所以 $mn = 1$. 由于 $m, n \in \mathbb{Z}$, 得到 $m = \pm 1$.

第十八讲

习题 1. 设 X 是紧致豪斯多夫空间或完备度量空间, Y 是 X 的一个 G_δ 集, 即存在 X 的一族开子集 $\{W_n\}$ 使得 $Y = \bigcap_n W_n$. 证明: Y 在子空间拓扑下是

一个 Baire 空间.

设 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 是 Y 中一族疏朗闭集 (空内部的闭集), 要证明 $\cup B_n$ 在 Y 中依旧是空内部的, 即对于 Y 中任意开集 (表示为 $U_0 \cap V$, 其中 U_0 是 X 的开集), 都存在点 x 不包含在任意 B_n 中. 现在要找 X 中一系列开集 $\{U_n\}_{n \geq 1}$ 使得

$$U_n \cap Y \neq \emptyset, \quad \text{Cl}(U_n) \subset U_{n-1}, \quad \text{Cl}(U_n) \cap \text{Cl}(B_n) = \emptyset, \quad \text{Cl}(U_n) \subset W_n,$$

且如果 X 是完备度量空间, 还要求 $\text{diam } U_n < 1/n$. 如果这样的 $\{U_n\}$ 存在, 则若 X 是紧致豪斯多夫空间, 由 $\{U_n\}$ 满足有限交性质得出 $\cap U_n$ 不空; 若 X 是完备度量空间, 则有完备性得到 $\cap U_n$ 不空. 所以若 $x \in \cap U_n \subset \cap W_n$, 则 $x \in U_0 \cap Y$, 且 $x \notin \cap B_n$. 这就可以证明结论.

下面构造 U_n . 由于 B_1 内部空, 所以存在 $x_0 \in U_0 \cap Y$ 使得 $x_0 \notin B_1$. 注意 B_1 是 Y 的闭集, 所以 $B_1 = \text{Cl}(B_1) \cap Y$. 由 $x_0 \notin B_1$, 必有 $x_0 \notin \text{Cl}(B_1)$. 注意 $\text{Cl}(B_1)$ 是紧致豪斯多夫空间 (从而是正则空间) 的闭集, 所以可找到 X 的开子集 U_1 使得 $x_0 \in U_1 \subset \text{Cl}(U_1) \subset U_0 \cap W_1$ 且 $\text{Cl}(U_1) \cap \text{Cl}(B_1) = \emptyset$. 若 X 是度量空间, 还可要求 $\text{diam}(U_1) < 1$. 注意到 $x_0 \in Y$, 所以我们还有 $U_1 \cap Y \neq \emptyset$.

由于 B_2 内部空, 所以存在 $x_1 \in U_1 \cap Y$ 使得 $x_1 \notin B_2$. 注意 B_2 是 Y 的闭集, 所以 $B_2 = \text{Cl}(B_2) \cap Y$. 由 $x_1 \notin B_2$, 必有 $x_1 \notin \text{Cl}(B_2)$. 注意 $\text{Cl}(B_2)$ 是紧致豪斯多夫空间 (从而是正则空间) 的闭集, 所以可找到 X 的开子集 U_2 使得 $x_1 \in U_2 \subset \text{Cl}(U_2) \subset U_1 \cap W_2$ 且 $\text{Cl}(U_2) \cap \text{Cl}(B_2) = \emptyset$. 若 X 是度量空间, 还可要求 $\text{diam}(U_2) < 1/2$. 注意到 $x_1 \in Y$, 所以我们还有 $U_2 \cap Y \neq \emptyset$.

依次类推就可以得到 $\{U_n\}$.

习题 2. 证明 $\mathbb{R}$ 中无理数集是个 Baire 空间.

注意 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{r\}$ 是个 G_δ 集, 利用上面习题结论即得.

习题 3. 证明如下一致有界原理: 设 X 是个完备度量空间, $\mathcal{F}$ 是 $C(X, \mathbb{R})$ (X 上连续函数的集合) 的一个子集, 使得对于任意 $a \in X$, 集合

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$$

有界, 则存在 X 的一个非空开集 U , 使得 $\mathcal{F}$ 中的函数在 U 上一致有界, 即存在一个常数 M , 使得对任意 $x \in U$ 和 $f \in \mathcal{F}$, 成立 $|f(x)| \leq M$.

令 $A_N = \{x \in X : \text{对所有 } f \in \mathcal{F}, \text{ 成立 } |f(x)| \leq N\}$. 那么 $A_N = \bigcap_{f \in F} \{x : |f(x)| \leq N\}$ 是任意个闭集的交集, 所以还是闭集. 此外, 根据题目条件, 成立 $X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} A_N$. 由于 X 是 Baire 空间, $\{A_N\}$ 中至少有一个内部是不空的, 不妨设 $\text{Int}(A_M)$ 不空. 所以在开集 $\text{Int}(A_M)$ 上对任意 $f \in F$ 都成立 $|f(x)| \leq M$.