调和分析与偏微分方程讲　义

袁海荣

2014年3月

序　言

一 编写说明

本书是为华东师范大学数学系研究生《调和分析与偏微分方程》课程编写的讲义, 侧重介绍调和分析方法及其在偏微分方程中的应用. 讲义所含内容除极少部分来自作者自己的研究工作外, 均来自参考文献所列文献. 作者根据自己的理解和教学实践, 对与偏微分方程相关的调和分析的若干内容作了一些调整或重新组织, 对部分证明添加了细节或解读. 除此之外, 本书内容的原创性均来自参考文献的作者.

目前已经有许多关于调和分析的优秀教材和专著. 但在教学和学习中, 我们遇到的一个问题就是这些教材或专著所含材料非常丰富, 体系和内容庞大. 这是优点, 但对于调和分析初学者而言, 对于教学而言, 也是一种极大的挑战. 例如对学生而言, 在学习中就难以确定为了证明一个重要结论, 到底需要哪些预备知识(是不是这本书这个定理证明以前的所有知识?). 实际上, 调和分析毕竟不像数学分析那样是基础课, 往往并不需要(或很难)把整本书从头到尾都搞清楚. 研究生阶段的教材, 既要方便学习, 又要为进入科研前沿服务, 必须要体现出学习与创新能力的结合. 所以本书为了方便教和学, 没有采用传统的章节式, 而是结合课堂教学时数的需要, 按着学科的主要内容及其必然的逻辑顺序, 分若干讲(一讲约合每周四课时, 即三个小时), 每一讲集中就一个专题介绍一个或几个大定理的证明. 此外, 我们还给出了各讲内容之间的关系图, 以方便同学们就自己感兴趣的课题迅速切入, 抓住要点, 避免被与之无直接关系的内容分散精力. 事实上, 作者认为, 从自己的基础出发, 围绕一个个重要问题及其主要结论学习, 更符合科研的实际, 学习效果也要好得多.

本书假定同学们较好地掌握了数学分析和高等代数, 并学习了实变函数和泛函分析的一些基础知识, 如可测函数, L^p空间, Banach空间, 连续线性算子保范延拓等. 在偏微分方程方面不需要预备知识. 我们较为详细地介绍了所需的广义函数知识.

2010级和2011级硕士生李琳、曾勇、郝黎阳、赵秋菊、章志兵、曹磊、邵付松、郑国杰、陈晨曦、高明月等将课堂笔记转化为tex 文件. 他们的无私付出构成了本书电子版的部分基础, 在此表示感谢!

二 调和分析介绍

"调和分析"的主要思想是利用对函数、算子、空间等的各种分解和表示来研究问题. 本课程旨在介绍欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 上的调和分析中常用的若干复变方法、实变方法及其在偏微分方程中的应用, 主要包括以下几方面的内容 : (一) 卷积型与非卷积型奇异积分算子理论; 包括 Fourier 变换, Fourier 乘子及相关实变方法; (二) Littlewood–Paley 分解与函数空间; (三) 拟微分算子和仿微分算子.

(一) 卷积型与非卷积型奇异积分算子理论

Fourier 变换和Fourier乘子是处理线性常系数偏微分方程极其有力的工具. 记 $\hat{u}(\xi)$ (或 $\check{u}(\xi)$)为函数 $u(x)$ 的 Fourier 变换(或 Fourier 逆变换). 给定适当函数 $a(\xi), \xi \in \mathbb{R}^d$, 称为 Fourier 乘子, 定义映射 $(Tu)(x) = (a(\xi)\hat{u}(\xi))^\vee$. 用 Plancherel 定理可知若 $a(\xi)$ 是有界可测函数, 则 $T : L^2 \to L^2$ 为有界线性算子. 在实际问题中也常需要证明(在关于 $a(\xi)$ 的适当假设下) T 是 $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ 上的有界算子. 为此, 常通过卷积, 将T直接写成某种卷积型奇异积分算子, 再用实变方法来证明. 此外, 拟微分算子等也可表示为非卷积型积分算子. 这些理论对于深入研究偏微分方程有着重要意义. 这个理论的要点是如何通过积分核的函数性质刻画出相对应积分算子的连续性性质.

在实变方法中, 主要涉及

- Hady-Littlewood 极大算子(弱 1.1 型)、各种空间的覆盖引理和函数及空间的分解引理;
- 插值定理: 常用的有 Riesz 插值定理和 Marcinkiewicz 插值定理. 它们是证明算子有界性的强有力工具;
- BMO空间和$\mathcal{H}^1$空间等;
- A_p权理论.

作为预备知识, 我们还需要介绍广义函数理论.

(二) Littlewood–Paley分解(L-P分解)和函数空间

Fourier变换不仅是研究偏微分算子的强有力工具, 而且在刻画函数光滑性及函数空间的构造方面有着得天独厚的优势. 我们将通过一系列特殊的 Fourier 乘子引入频率空间内广义函数的环形分解; 利用其衰减性方便地给出Sobolev空间、Hölder空间等常用函数空间的定义、性质. 由于 Fourier 变换可以同时渗透在算子和算子所作用空间的定义中, 所以许多微分方程问题往往可以利用调和分析方法较方便地予以精细地研究.

(三) 拟微分算子和仿微分算子

拟微分算子是基于 Fourier 乘子发展起来的用来解决系数不是常数但光滑的线性偏微分方程的工具. 此时 Fourier 乘子被推广为象征, 例如关于 x,ξ 均 C^∞ 光滑的函数 $a(x,\xi)$, 且满足条件 $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{m-\beta}$. 由此可定义算子: $(T_a u)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(a(x,\xi)\hat{u}(\xi))$, 称为象征 $a(x,\xi)$ 对应的拟微分算子.

例如, 对一阶偏微分方程 $A_1(x)\partial_{x_1}u + A_2(x)\partial_{x_2}u + \cdots + A_d(x)\partial_{x_d}u = f$, 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_d \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^n$, 则 $a(x,\xi) = \Sigma_{j=1}^d A_j(x)\xi_j$.

一类拟微分算子的L^p有界性对应着一类非卷积型奇异积分算子的L^p有界性.

仿微分算子是在拟微分算子和L-P分解基础上发展的用于解决具有低正则性 ($W^{1,\infty}$ 或 $W^{2,\infty}$) 系数线性偏微分方程问题的理论. 设一拟线性双曲方程为: $A_1(u)\partial_{x_1}u + A_2(u)\partial_{x_2}u + \cdots + A_d(u)\partial_{x_d}u = f$. 利用 Picard 迭代: $A_1(v)\partial_{x_1}u + A_2(v)\partial_{x_2}u + \cdots + A_d(v)\partial_{x_d}u = f$, 该拟线性方程求解可转变成线性问题的求解(适定性理论), 及利用线性问题适定性理论构造的映射 $N: v \to u$ 的不动点 $v = u$ 的存在性问题. 由于从许多特例已经知道一般情况下拟线性双曲方程的解不会是光滑的, 故v 不应当是 C^∞ 函数, 从而上述线性方程象征 $a(x,\xi)$ 虽然关于 ξ 光滑, 但关于 x 仅可能有限次可微(例如 $a(\cdot,\xi) \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$). 通过一种特殊的光滑化算子 R^χ , 这种象征转变成 $(R^\chi a)(x,\xi)$, 它关于 x,ξ 均 C^∞ 光滑, 从而转化为一类特殊拟微分算子的问题.

与Fourier变换和Fourier乘子类似, 拟微分算子和仿微分算子的理论使得可以把关于算子的复合及共轭等运算化简为关于象征的乘法及转置等代数运算, 从而为解决问题带来极大方便.

本讲义主要内容是有关卷积型和非卷积型奇异积分算子在L^p空间上的连续性的理论.

三 结构安排

本书共二十二讲, 主要包括三部分. 第一讲至第第八讲属于基础知识; 第九讲至第十二讲介绍卷积型奇异积分算子理论; 第十三讲至第二十二讲介绍非卷积型奇异积分算子理论. 其中第三部分从内容而言又分四部分: 第十三讲至第十五讲介绍关于BMO空间和$\mathcal{H}^1$空间的基础知识, 是为证明奇异积分算子的$(\mathcal{H}^1, L^1)$和(L^∞, BMO)有界性服务的; 第十六讲和十七讲介绍Calderón–Zygmend 算子及其极大算子的L^p $(p \neq 2)$理论; 第十八讲至第二十一讲证明了$T(1)$定理, 给出了Calderón–Zygmend 算子L^2有界的充分必要条件. 最后第二十二讲介绍了拟微分算子的基本概念及其与非卷积型奇异积分算子的联系.

在教学安排上, 略去第二讲和第七讲(除7.1节)不影响后续内容学习. 在讲完第一部分后, 可直接讲第三部分, 其中只需在第十六讲中补充BCP原理及其证明(即第九讲定理4). 此外, 第二十讲与前面内容是独立的. 第二十二讲只依赖于第二十讲. 如果部分材料(例如第二部分)交由学生自学, 本书可在一学期(约60学时)教完.

欢迎各位同行和同学指出本书可能出现的各种错误或不妥之处, 以便修改完善!

袁海荣

E-mail: hryuan@math.ecnu.edu.cn

华东师范大学数学系

2014年3月23日

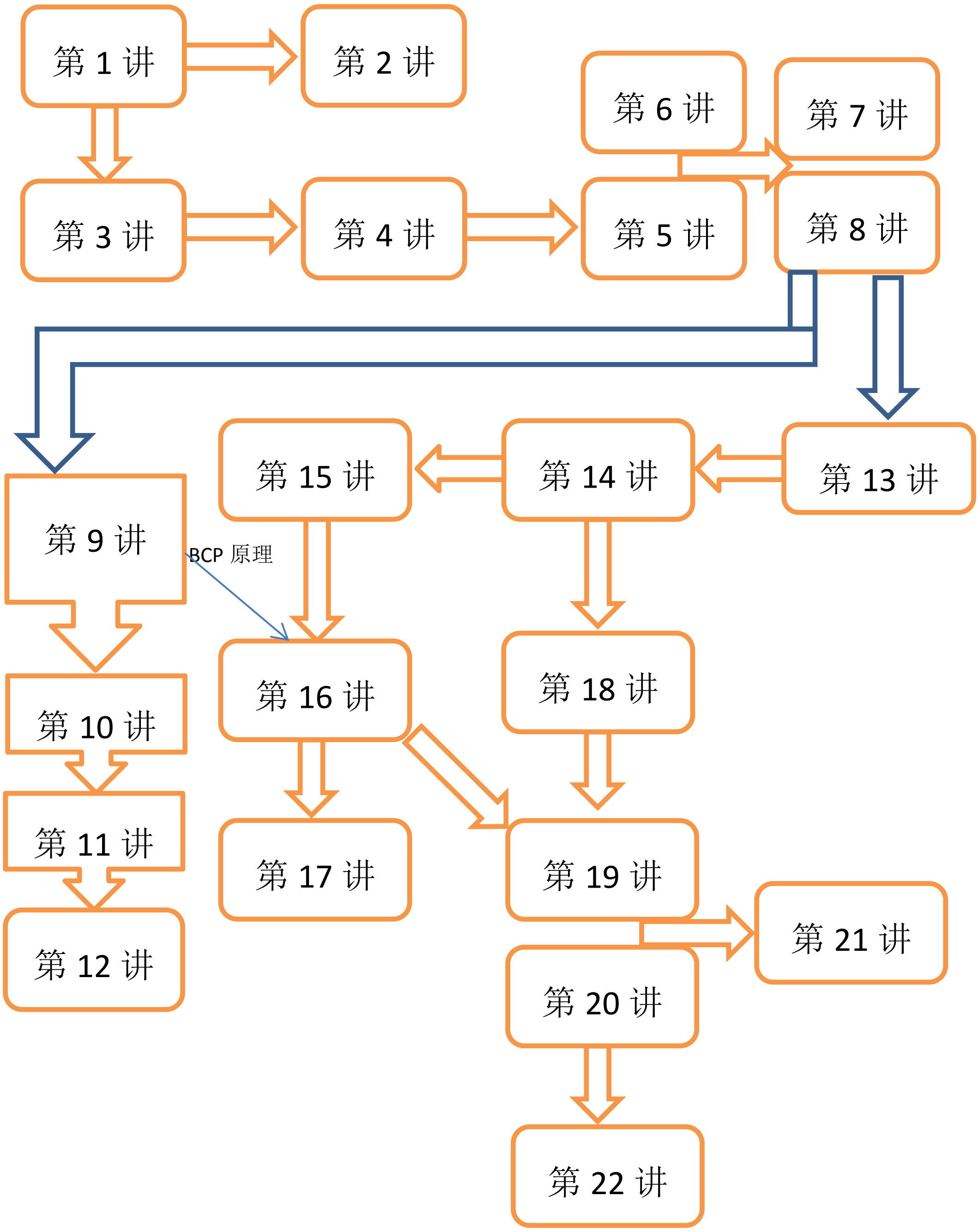
第 1 讲
第 2 讲
第 3 讲
第 4 讲
第 5 讲
第 6 讲
第 7 讲
第 8 讲
第 9 讲
BCP 原理
第 10 讲
第 11 讲
第 12 讲
第 13 讲
第 14 讲
第 15 讲
第 16 讲
第 17 讲
第 18 讲
第 19 讲
第 20 讲
第 21 讲
第 22 讲

图 1 本书各讲之间关系.

目 录

第一部分

基础知识

第一讲　Fourier 变换

这一讲我们引入$L^1(\mathbb{R}^d)$与$L^2(\mathbb{R}^d)$ (d是正整数)函数的Fourier 变换的定义并介绍其重要性质, 分析其成为调和分析核心工具的一些原因.

一　$L^1(\mathbb{R}^d)$ 上的 Fourier 变换

定义1. 设 $u(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,称函数 $\mathcal{F}(u)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y} u(x)\mathrm{d}x$ 为其*Fourier*变换,简记为 $\hat{u}(y)$; 称 $\mathcal{F}^{-1}(u)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} u(x)\mathrm{d}x$ 为其*Fourier* 逆变换,简记为 $\check{u}(y)$.

注意定义中$x \cdot y$表示$\mathbb{R}^d$中两个向量x, y的内积. 由于$u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 上述积分是绝对收敛的,从而定义合理. 此外可见 $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^1}$, 即 Fourier (逆)变换是 L^1 到 L^∞ 的有界线性算子. 下面我们还将看到$\hat{u}$其实是一致连续的且在无穷远衰减到零的函数. 先看一个算例.

例1. 证明: 对任意$\epsilon > 0$, 成立$(e^{-\epsilon|x|^2})^\wedge(y) = (\frac{1}{2\epsilon})^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}}$.

证明. 1. 对任意$b > 0$, $a \in \mathbb{R}$, 首先计算$\int_{\mathbb{R}} e^{iax - bx^2}\mathrm{d}x$. 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{iax-bx^2}\,\mathrm{d}x &= e^{\frac{-a^2}{4b}} \int_{\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}z=\frac{-a}{2\sqrt{b}}\}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{b}}\mathrm{d}z \qquad (z = \sqrt{b}x - \frac{ia}{2\sqrt{b}}) \\
&= e^{\frac{-a^2}{4b}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \frac{1}{\sqrt{b}} \qquad (\text{复变函数 Cauchy 积分定理}) \\
&= e^{\frac{-a^2}{4b}} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

2. 从而, 对任意 $t > 0$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y - t|y|^2}\,\mathrm{d}y = \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_j y_j - t y_j^2}\,\mathrm{d}y_j = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

由此利用定义即知$(e^{-t|x|^2})^\wedge(y) = (\frac{1}{2t})^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$. □

下面的定理将在用Fourier分析方法证明Sobolev嵌入定理等时起着重要作用.

定理1. 设$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则$\hat{f}, \check{f}$均为$\mathbb{R}^d$上一致连续函数.

证明. 根据等式

$$\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(e^{-ih\cdot y} - 1\right) e^{-ix\cdot y}\,\mathrm{d}y$$

就有

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\le c_d \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||e^{-ih\cdot y} - 1|\,\mathrm{d}y \\
&\le C \int_{|y|\le r} |f(y)||e^{-ih\cdot y} - 1|\,\mathrm{d}y + 2C \int_{|y|>r} |f(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

对任意$\varepsilon > 0$, 可取r充分大使得第二项小于ε; 对这样取定的r, 再令$|h|$充分小, 就可以使$|e^{-ih\cdot y} - 1| \le \varepsilon$; 注意这里$|h|$的大小与$x$无关. 从而我们得到$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \le (1 + \|f\|_{L^1})\varepsilon$. 这就证明了$\hat{f}$一致连续; 对$\check{f}$的证明完全相同. □

定理2 (Riemann-Lebesgue引理)**.** 设$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0$且$\lim_{|\xi|\to 0}\check{f}(\xi)=0$.

证明. 逼近思想. 1. 对一元函数$f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$, 它是闭区间$[a,b]$的特征函数, 直接计算就得到

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}}{-i\xi}.$$

所以结论成立.

2. 利用Fourier变换分离变量的特性, 若$f(x)=\prod_{j=1}^d\chi_{[a_j,b_j]}(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 那么

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\prod_{j=1}^d\frac{e^{-ib_j\xi_j}-e^{-ia_j\xi_j}}{-i\xi_j},$$

所以结论依然成立(在$|\xi|\to\infty$过程中某个分量$\xi_j=0$的话, 利用洛必达法则, 此项是个有界量, 不影响结论成立). 特别地, 定理结论对简单函数g (有限个方体的特征函数的线性组合)仍然成立.

3. 由实变函数知识, 对任意给定的$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 对任意$\varepsilon>0$, 存在简单函数g 使得$\|f-g\|_{L^1}\le\varepsilon$.于是我们得到

$$|\hat{f}(\xi)|\le|\widehat{(f-g)}(\xi)|+|\hat{g}(\xi)|\le\|f-g\|_{L^1}+|\hat{g}(\xi)|\le\varepsilon+|\hat{g}(\xi)|.$$

于是就有$\limsup_{|\xi|\to\infty}|\hat{f}(\xi)|\le\varepsilon$. 利用$\varepsilon$的任意小性即得所证. 对Fourier逆变换可类似证明. □

二 Plancherel 定理及 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上 Fourier 变换

定理3 (Plancherel 定理)**.** 设 $u\in L^1\bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat{u},\check{u}\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 并且成立等式

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

证明. 以下第1步至第4步是证明此重要定理的核心思想; 其他步骤所包含的内容是一些常见的分析技巧.

1.若 v ,$w\in L^1\bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$, 则成立

$$\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\hat{w}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\hat{v}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.1}$$

事实上, 由于 $v,w\in L^1$, 从而 $\hat{v},\hat{w}\in L^\infty$, 所以上式两边积分有意义; 利用 Fubini 定理, 就得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\hat{w}(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}v(x)\int_{\mathbb{R}^d}w(y)e^{-ixy}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\int_{\mathbb{R}^d}v(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}w(y)\hat{v}(y)dy.\end{aligned}$$

以下证明的关键就是选取特殊的函数 v 和 w : v 选取为 Gauss 核, w 选取与 u 有关.

2. 令 $v_\epsilon(x)=e^{-\epsilon|x|^2}$ $(\epsilon>0)$. 利用例1, 则 $(v_\epsilon)^\wedge(y)=(\frac{1}{2\epsilon})^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}}$. 代入(1.1), 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}\hat{w}(x)e^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=(\frac{1}{2\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(y)e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}y. \tag{1.2}$$

3. 对定理中给定$u(x)$, 令 $v(x)=\bar{u}(-x)$, $w(y)=(u*v)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}u(y-x)v(x)\,\mathrm{d}y$, 则成立以下事实(待证)

1) $w(x)\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$; 2) $w(x)$连续; 3) $\hat{w}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}\hat{v}$.

利用定义不难发现

$$\hat{v}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ixy}\bar{u}(-y)\,\mathrm{d}y=(\frac{1}{2\pi})^{\frac{d}{2}}\overline{\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ixy}u(y)\,\mathrm{d}y}=\overline{\hat{u}(x)},$$

所以由3)得到, $\hat{w}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}\bar{\hat{u}}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\hat{u}|^2$.

4. 将上述表达式带入(1.2), 就得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2e^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(x)e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\epsilon\to 0$, 左边由 Levi 定理, 利用被积函数的非负性及关于ϵ的单调性, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\epsilon\to 0}|\hat{u}(x)|^2e^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(x)|^2e^{-\epsilon|x|^2}\,\mathrm{d}x.$$

右边利用逼近恒等的性质, 成立

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\frac{1}{4\pi\epsilon})^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}w(x)e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x=w(0),\qquad\text{(待证)}\tag{1.3}$$

而 $w(0)=\int_{\mathbb{R}^d}u(-y)v(y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}u(-y)\bar{u}(-y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}u(y)\bar{u}(y)\,\mathrm{d}y=\int_{R^d}|u|^2\,\mathrm{d}y=\|u\|_{L^2}^2$. 所以, $\|\hat{u}\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$. 类似可对Fourier逆变换给出相应证明.

5. 下面证明第3步1)式. 首先, 利用积分的平移不变性和 Fubini 定理, 对$u,v\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\begin{aligned}\int_{R^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|u(x-y)||v(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}|u(x-y)|\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^d}|v(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\le \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1},\end{aligned}$$

从而得到如下基本的卷积不等式:

$$\|u*v\|_{L^1}\le\|u\|_{L^1}\|v\|_{L^1}.\tag{1.4}$$

为证明$w\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, 需要用到$u\in L^2$的条件. 利用 Hölder 不等式, 就有

$$\begin{aligned}|w(x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)\overline{u}(-y)\mathrm{d}y\right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(x-y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\overline{u}(-y)\mathrm{d}y^2|\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|u\|_{L^2}^2,\text{这里使用了积分的平移不变性.}\end{aligned}$$

从而 $\|w\|_{L^\infty}\le\|u\|_{L^2}^2$.

6. 下面证明第3步2)式, 使用的是常见的逼近思想. 首先考虑$u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$的情形. 此时利用Lagrange中值定理, 显然w是连续的. 再考虑一般情形. 由于$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$在$L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$中是稠密的,故$\forall u\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d),\exists u_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 使得$u_k\to u$(依$L^2$范数收敛). 特别地, 存在与$k$无关的常数 C 使得 $\|u_k\|_{L^2}\le C$. 定义$w_k(x)=\int_{\mathbb{R}^d}u_k(x-y)\bar{u}_k(-y)\,\mathrm{d}y$, 那么对几乎所有$x$, 成立

$$\begin{aligned}|w_k(x)-w(x)| &\le \left|\int_{\mathbb{R}^d}|u_k(x-y)-u(x-y)||\overline{u}(-y)|\mathrm{d}y\right.\\ &\qquad\left.+\int_{\mathbb{R}^d}u_k(x-y)(\bar{u}_k(-y)-\bar{u}(-y))\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_k(x-y)-u(x-y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\overline{u}(-y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad+\|u_k\|_{L^2}\|u_k-u\|_{L^2}\\ &\le (\|u_k\|_{L^2}+\|u\|_{L^2})\|u_k-u\|_{L^2}\le C'\|u_k-u\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中常数C'与k 无关. 这表明连续函数列$\{w_k\}$一致收敛于w, 于是w是连续函数. 第3)式是Fourier变换的一个重要性质的应用,将在下面定理4中予以证明.

7. 最后证明(1.3)式. 这里体现了依据被积函数不同地点不同形态对积分加以分解研究的基本方法. 首先通过换元法不难验证

$$\frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}\,\mathrm{d}x = 1,$$

从而只需证明[1]

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)-w(0)|e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx = 0.$$

为此,利用$w(x)$在$x=0$的连续性, 对任意$\delta>0$, 存在$R>0$ 使得当$|x|\le R$时$|w(x)-w(0)|\le\delta$. 那么

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(x)-w(0)|e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx\\
=\;&\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\le R}|w(x)-w(0)|e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx+\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\ge R}|w(x)-w(0)|e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx\\
\le\;&\delta\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx+2\|w\|_{L^\infty}\Big(\frac{1}{4\pi\epsilon}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{|x|\ge R}e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}dx\\
\le\;&\delta+2\|w\|_{L^\infty}\Big(\frac{1}{\pi}\Big)^{\frac{d}{2}}\int_{|y|\ge R/(2\sqrt{\epsilon})}e^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

现取$\epsilon\to 0$, 第二项收敛于零; 则由δ的任意性, 即得所证. □

Plancherel定理说明Fourier变换$\mathcal{F}: L^1\cap L^2\to L^2$是$L^2(\mathbb{R}^d)$上的范数为1的有界线性算子. 由于$L^1\cap L^2$ 在L^2 中稠密, 由Banach 算子延拓定理可将Fourier变换对任意L^2函数予以定义, 且保持范数不变: $\|\mathcal{F}u\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$. 类似可定义$L^2$上Fourier逆变化, 它也是保范数的.

三 Fourier变换的基本性质

定理4. *以下设$u,v\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 1) Fourier变换保持L^2内积: $\int_{\mathbb{R}^d}u\bar{v}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}\bar{\hat{v}}\mathrm{d}x$;*

2) 若$D^\alpha u\in L^2(\mathbb{R}^d)$(其中$\alpha$为多重指标), 则$\mathcal{F}(D^\alpha u)=(iy)^\alpha\hat{u}(y)$;

3) 设$u,v\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$, 则$\mathcal{F}(u*v)=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}\hat{v}$;

4) $(\hat{u})^\vee=u$.

我们注意到性质4)实际上说明了Fourier变换是$L^2(\mathbb{R}^d)$上的保距同构, 而Plancherel定理也可视作勾股定理的一种推广. 性质2)是使Fourier变换极为重要的原因.一方面,它表明Fourier变换可以把超越的微分运算化为频率空间内的代数运算(乘法), 从而可以在微局部下较灵活而简单地研究偏微分算子; 另一方面, 也可看出函数的(导数的)光滑性体现在其Fourier变换在高频($|y|$充分大时)的衰减性. 由于衰减性比光滑性简单,所以可以利用Fourier变换较精细且简洁地研究函数的光滑性及函数空间的构造. 此外, 很多情形下一个性质较差的函数的Fourier变换往往比较光滑, 所以研究其Fourier变换较原函数往往较为容易. 这些都是Fourier变换在偏微分方程研究中具有极其重要作用的原因.

证明. 1. Fourier 变换$\mathcal{F}$是 Hilbert 空间L^2上的保距有界算子, 则由泛函分析结论, 其自然保内积, 即$(\mathcal{F}u,\mathcal{F}v)_{L^2}=(u,v)_{L^2}$, 从而性质1)得证.

---

[1]该式左边就是$\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|w(\sqrt{4\varepsilon}y)-w(0)|e^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y$, 利用$w$有界以及$e^{-|y|^2}$可积, 以及$\varepsilon\to 0$时$w(\sqrt{4\varepsilon}y)-w(0)$点态收敛到零, 利用Lebesgue控制收敛定理也可直接得到结论.

2. 用逼近的思想证明2). 首先设$u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 分部积分得到

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y}D^\alpha u(x)\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} D_x^\alpha(e^{-ix\cdot y})u(x)\mathrm{d}x\\ &= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}(-iy)^\alpha e^{-ix\cdot y}u(x)\mathrm{d}x\\ &= (iy)^\alpha(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y}u(x)\mathrm{d}x\\ &= (iy)^\alpha\hat{u}(y).\end{aligned}$$

然后逼近: 对任意满足$D^\alpha u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的$L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数u, 通过标准的磨光算子就可以找到一族函数$u_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 使得$u_k\xrightarrow{L^2}u$, $D^\alpha u_k\xrightarrow{L^2}D^\alpha u$. 利用Fourier变换保$L^2$范数性质, 就有$\mathcal{F}u_k\xrightarrow{L^2}\mathcal{F}u$,$\mathcal{F}D^\alpha u_k\xrightarrow{L^2}\mathcal{F}D^\alpha u$. 通过取一个子列, 可设上述收敛还是几乎处处意义下成立的. 从而将已证上式应用于u_k并两边取极限$k\to\infty$即可.

3. 由于$(u*v)(x)=\int_{R^d}u(x-y)v(y)\mathrm{d}y$, 直接计算就得到

$$\begin{aligned}\widehat{u*v}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)v(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i(x-y)\cdot\xi}u(x-y)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-iy\cdot\xi}v(y)\mathrm{d}y\right)\\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).\end{aligned}$$

4. 下面证明4). 首先对$u,v\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 成立如下公式

$$\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}(x)v(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\check{v}(y)u(y)\mathrm{d}y. \tag{1.5}$$

此式当$u,v\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$时与第1步证明(1)一样可直接按Fourier变换的定义验证. 对$u,v\in L^2$, 则存在$\{u_k\},\{v_k\}\subset L^1\cap L^2$ 使得当$k\to\infty$时按L^2范数$u_k\to u$, $v_k\to v$. 利用Fourier逆变换保L^2范数及Hölder不等式,就可得到$\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}_k(x)v_k(x)\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^d}\check{u}(x)v(x)\mathrm{d}x$. 由此就可以证明(1.5).

其次,我们有

$$\check{v}(y)=\overline{(\overline{v})^\wedge}(y).$$

这可直接对$v\in L^1$ 情形验证:

$$\text{右边}\ =\ \overline{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ix\cdot y}\overline{v}(x)\mathrm{d}x}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot y}v(x)\mathrm{d}x=\check{v}(y)=\text{左边}.$$

一般情形下通过逼近即可得到. 结合上述两公式, 我们就得到$\forall v\in L^2$ 成立$\int\hat{u}^\vee v\mathrm{d}x=\int\hat{u}\check{v}\mathrm{d}x=\int\hat{u}\overline{(\overline{v})^\wedge}\mathrm{d}x=\int u\overline{\overline{v}}\mathrm{d}x=\int uv\mathrm{d}x$. 这里第三个等号用到了 Fourier 变换保内积性质1). 于是由v 的任意性知$\hat{u}^\vee=u$. 证毕. □

四 应用举例

Fourier 变换的应用主要表现在两个方面: 1)得到解的表达式; 2)利用Plancherel定理得到解的L^2范数的估计式(能量不等式). 后一点在非线性问题的研究中尤为重要, 将在第二讲中举例介绍. 这里我们只看一个求出解表达式的简单例子.

例2. 求全空间椭圆型方程$-\triangle u+u=f$解的表达式, 其中$f\in L^2(R^d)$.

解. 对函数u就空间变量作Fourier变换得到$|y|^2\hat{u}+\hat{u}=\hat{f}$,从而$\hat{u}=\frac{\hat{f}}{1+|y|^2}$. 若$\hat{B}=\frac{1}{1+|y|^2}$,则有$u=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}B*f$. 求出$B$往往是问题的难点. 下面形式地予以计算.

注意到$\forall\alpha>0$ 成立$\frac{1}{\alpha}=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$. 取$\alpha=1+|y|^2$, 则$\frac{1}{1+|y|^2}=\int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)}\mathrm{d}t$, 从而可算得所谓Bessel位势$B$ 为

$$\begin{aligned}B &= \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{1+|y|^2})=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{1+|y|^2}e^{ix\cdot y}\mathrm{d}y\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty e^{-t}e^{-t|y|^2}e^{ix\cdot y}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot y-t|y|^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_0^\infty(\frac{\pi}{t})^{\frac{d}{2}}e^{-t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\mathrm{d}t=2^{-\frac{d}{2}}\int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}}e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

五 Sobolev空间$H^s(\mathbb{R}^d)$

利用Fourier变换的性质,可以方便地定义任意阶的(非齐次) Sobolev 空间$H^s(\mathbb{R}^d)$. 这类空间本身是作为求解众多偏微分方程的工作空间而引入的, 也是理解其它更复杂空间(如下节将遇到的加权Sobolev空间)的基础.

定义2. 设$0<s<\infty$, 且$u\in L^2(\mathbb{R}^d)$. 定义$u\in H^s(\mathbb{R}^d)$ 当且仅当$(1+|\xi|^s)\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 其范数为

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}=\|(1+|\xi|^s)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

可以证明$H^s(\mathbb{R}^d)$是Hilbert空间;它的内积可如下给定:

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^d)}=((1+|\xi|^s)^{\frac{1}{2}}\hat{u},(1+|\xi|^s)^{\frac{1}{2}}\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

下面命题说明$H^s(\mathbb{R}^d)$确实可看作经典Sobolev空间$W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ $(k=1,2,\cdots)$的一种推广. 我们回忆按定义,$u\in W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$当且仅当$u$及其直到$k$阶的弱导数$D^\alpha u$ $(|\alpha|\le k)$均是$L^2(\mathbb{R}^d)$函数, 且$\|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^n)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

命题1. 对$k=1,2,\cdots,H^k(\mathbb{R}^d)=W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$.

证明. 只需证$u\in L^2$是$W^{k,2}$中函数当且仅当$(1+|\xi|^k)\hat{u}\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 即$u\in H^k$.

1. 首先设$u\in W^{k,2}$, 则$\forall|\alpha|\le k$, $D^\alpha u\in L^2$. 而对$u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi).$$

通过逼近可知此式对$u\in W^{k,2}$也成立.[2]于是得知$(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)\in L^2$, $\forall|\alpha|\le k$. 特别地, 对$0\le l\le k$, 利用$|\xi|^{2l}\le C\sum_{|\beta|=l}|\xi^\beta|^2$ 和Plancherel定理, 就得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2l}|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\le C\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{\beta=l}|\xi^\beta|^2|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^d}|D^l u|^2\mathrm{d}x.$$

[2]设$u_k\in C_0^\infty$满足$u_k\to u(W^{k,2})$, 则$\widehat{u_k}\to\hat{u}$ (L^2), 于是有子列$\widehat{u_{k_j}}\to\hat{u}$ a.e. 又由$D^\alpha u_k\to D^\alpha u$ (L^2) 知$(i\xi)^\alpha\widehat{u_k}=\widehat{D^\alpha u_k}\to\widehat{D^\alpha u}$ (L^2), 从而有子列, 不妨仍设为u_{k_j},使得$(i\xi)^\alpha\widehat{u_{k_j}}\to\widehat{D^\alpha u}$ a.e. 于是利用几乎处处收敛极限的唯一性, 得到$(i\xi)^\alpha\hat{u}=\widehat{D^\alpha u}$.

利用$l=0$和$l=k$两式, 就有

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^k)^2|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le C\|u\|_{W^{k,2}}^2,$$

即$u\in H^k$ 且$\|u\|_{H^k}\le C\|u\|_{W^{k,2}}$.

2. 反之,设$u\in H^k$, 则对$|\alpha|\le k$,

$$\|(i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 \le \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2|\alpha|}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le C\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^k)^2|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi<\infty.$$

置$u_\alpha:=\mathcal{F}^{-1}[((i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi))]$, 则上式说明了$u_\alpha\in L^2$.

下面证明u_α在弱导数意义下就是$D^\alpha u$. 事实上, $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 确实成立

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(D^\alpha\varphi)\bar{u}\,\mathrm{d}x &= \int\widehat{D^\alpha\varphi}\bar{\hat{u}}\,\mathrm{d}\xi = \int(i\xi)^\alpha\hat{\varphi}\bar{\hat{u}}\,\mathrm{d}\xi\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int\hat{\varphi}\overline{(i\xi)^\alpha\hat{u}}\,\mathrm{d}\xi=(-1)^{|\alpha|}\int\hat{\varphi}\overline{\widehat{u_\alpha}}\,\mathrm{d}\xi=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\overline{u_\alpha}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们还得到$\|D^\alpha u\|_{L^2}\le\|u\|_{H^k}$, 从而$\|u\|_{W^{k,2}}\le C\|u\|_{H^k}$. 证毕. □

注记. 我们已经讲了Fourier变换有很多优点, 但它也有两个较为明显的缺点: 第一, 只能在全空间、环面等特殊区域上定义Fourier变换; [3] 第二, 很难用来处理非L^2空间上的估计.

[3] Fourier 变换的基本思想是通过代表元将函数展开；代表元的存在必然要求底空间具有某些群的性质；从而要求区域具有某些特殊的对称性质.

第二讲　能量积分, Lopatinskii 条件, 微局部对称化子的构造与L^2估计

这一讲主要通过研究实例说明利用Fourier变换在微局部观点下得到偏微分方程问题解的L^2 估计的方法. 我们首先回顾经典的能量积分方法, 分析其优点与不足; 然后引入调和分析方法予以更精确的分析: 以双曲型方程组初边值问题稳定性的 Kreiss–Lopatinskii 条件为例介绍规范模式分析方法(Normal Modes Analysis); 再就一个具体实例较为详细地介绍如何将问题微局部化并利用线性代数和复变函数知识构造对称化子; 然后利用单位分解、齐次扩张和Plancherel定理得出L^2估计. 这些清晰地体现了Fourier变换的巨大威力,以及调和分析研究问题非常精细深入的特点.

一　能量积分方法: 对称双曲组及强耗散边界条件

能量积分方法肇源与物理启发, 其数学上基本思想是假设未知函数U具有良好性质(如具紧致支集的光滑函数), 通过在方程组两边同时乘以U (或U的函数), 在恰当的区域上积分并通过分部积分和方程组的特性配平导数,得到关于U或其导数的某个正定的表达式;利用此类表达式作为范数引入函数空间, 并利用性质较好函数在其中的稠密性通过算子延拓或泛函延拓得到一般情形下L^2估计.

作为例子, 我们考察一阶线性偏微分方程组的边值问题:

$$LU := A_0\partial_t U + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha \partial_\alpha U + DU = f, \quad t\in\mathbb{R},\ x=(y',x_d),\ \ x_d>0,\ y'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.1}$$

$$BU = g, \quad t\in\mathbb{R},\ x=(y',x_d),\ \ x_d=0,\ y'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.2}$$

其中A_j $(j=0,1,\cdots,d)$ 和D为$n\times n$矩阵, U为未知n维向量值函数. 不失一般性, 通过减去一个特殊向量函数, 我们可假设$g=0$.

方程(2.1) 两边同时与U作$\mathbb{R}^n$的内积, 得到

$$(A_0\partial_t U, U) + \sum_{\alpha=1}^{d} (A_\alpha\partial_\alpha U, U) + (DU, U) = (f, U). \tag{2.3}$$

我们发现, 为了配平导数, 得到关于U对称的量, 必须把导数扔到系数上去; 为此**必须要求**A_α **$(\alpha=0,\cdots,d)$ 是对称矩阵.** 在此条件下成立

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(A_\alpha U, U) &= (A_\alpha\partial_\alpha U, U) + (A_\alpha U, \partial_\alpha U) + ((\partial_\alpha A_\alpha)U, U)\\
&= (A_\alpha\partial_\alpha U, U) + (U, A_\alpha\partial_\alpha U) + ((\partial_\alpha A_\alpha)U, U)\\
&= 2(A_\alpha\partial_\alpha U, U) + ((\partial_\alpha A_\alpha)U, U).
\end{aligned}$$

这里由于出现了A_α的偏导数, 故此处及以下需假设$A_\alpha\in W^{1,\infty}$. 于是(2.3) 变为$(\partial_0=\partial_t)$

$$\sum_{\alpha=0}^{d}\partial_\alpha(A_\alpha U, U) - \Big((\sum_{\alpha=0}^{d}\partial_\alpha A_\alpha)U, U\Big) + \Big((D+D^T)U, U\Big) = 2(f, U),$$

将其在$\Omega=\{x_d>0\}$ 上积分, 利用$U\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$的假设, 就得到

$$-\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (A_d U, U)|_{x_d=0}\,\mathrm{d}y + \int_\Omega (PU, U)\,\mathrm{d}x = 2\int_\Omega (f, U)\,\mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

其中

$$P = D + D^T - \sum_{\alpha=0}^{d} \partial_\alpha A_\alpha$$

是对称矩阵.

我们希望(2.4)左边是非负的, 那么必要条件就是: 1) P 为Ω上正定矩阵($P \geq \lambda I_n$, $\lambda > 0$); 2) 在$\ker B$ 上$(A_d U, U) \leq 0$. 由此就须自然地引入$L^2(\Omega)$ 空间, 并应用Cauchy–Schwarz不等式于右端得到

$$\lambda \|U\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|U\|_{L^2(\Omega)},$$

即能量估计

$$\|U\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

以此为基础发展的理论称为正对称方程组理论, 它可以用来研究许多混合型方程的边值问题.

现在(由物理问题验算), 如果我们仅知道A_0是正定的, 那么一般来说不可能得到P是正定的, 似乎上面的能量积分方法就会失效. 但这时一个重要的技巧"加权"可以帮助我们度过难关. 令$\gamma \geq 1$是待定的正常数, 并置

$$\tilde{U} = e^{-\gamma t} U,$$

则$\tilde{U}$满足如下边值问题:

$$L\tilde{U} := A_0 \partial_t \tilde{U} + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha \partial_\alpha \tilde{U} + (D + \gamma I_n)\tilde{U} = e^{-\gamma t} f, \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

$$B\tilde{U} = 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{2.6}$$

其相应矩阵$\tilde{P} = 2\gamma I_n + P$, 从而选取$\gamma$ 充分大, 就可以保证$\tilde{P}$正定: $\tilde{P} \geq \gamma I_n$.

定义1 (对称双曲组). *称一阶偏微分方程组(2.1)是对称双曲型的, 如果A_α ($\alpha = 0, \cdots, d$) 均为对称阵, 且A_0是正定的.*

与上述关于方程的性质配套, 为了得到估计, 还需要边界条件的帮助. 我们称边界矩阵B是**弱耗散**的, 若在$\ker B$ 上二次型$(A_d U, U) \leq 0$(半负定). 此时可以得到关于U的如下加权估计: 存在γ_0 及$C > 0$, 使得当参数$\gamma \geq \gamma_0$时成立

$$\gamma \|\tilde{U}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\gamma} \|e^{-\gamma t} f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2} \|\tilde{U}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

即

$$\gamma \|U\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leq \frac{4}{\gamma} \|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}. \tag{2.7}$$

这里我们自然地引入空间$L^2_\gamma(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_{L^2_\gamma(\Omega)} := \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\}$.

习题 1. 证明$L^2_\gamma(\Omega)$是一个Hilbert空间. □

为了求解含自由边界的非线性问题, 我们往往需要得到U在边界上的估计. 这就要求如下的**强耗散**边界条件: $(A_d U, U)$在$\ker B$上除在$\ker A_d$之外必须严格负定. [1]这相当于要求存在正

[1]一般双曲组初边值问题适定的一个要求是$\ker A_d \subset \ker B$.

常数C和ε使得二次型$w \mapsto \varepsilon|A_d w|^2 + (A_d w, w) - C|Bw|^2$非正定且仅在$\ker A_d$上为零. [2] 假如边界条件确实是强耗散的, 由(2.4) 我们就有边界估计

$$\varepsilon \int_{x_d=0} |A_d \tilde{U}|^2 \,\mathrm{d}y \le C\left(\frac{1}{\gamma}\left\|e^{-\gamma t} f\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|e^{-\gamma t} g\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\right). \tag{2.8}$$

综上回顾, 我们发现普通的能量积分方法有如下优点: 它适用于变系数线性方程组(要求系数属于$W^{1,\infty}$); 但其缺点也很明显: 要求方程组对称, 而且边界条件强耗散. 特别是后一点, 许多物理问题都不满足. 这就需要发展更精细的分析方法: 调和分析方法.

二 Kreiss–Lopatinskii条件

我们利用规范模式分析(Normal modes analysisi)方法推导出双曲型方程组初边值问题满足稳定性要求的一个必要条件: Kreiss-Lopatinskii条件. 由于类似(2.7)(2.8)的估计必然隐含着解对非齐次项f和g的(某种)稳定性, 所以Kreiss-Lopatinskii条件也是得到能量估计的必要条件. 而所谓规范模式分析方法, 本质就是利用分离变量等手段获得问题的一些有意义的特解的方法. 这些特解对于理解物理现象及一般理论的发展都有着重要的启发或借鉴意义.

1. 双曲性

考虑边值问题(2.1)(2.2). 由于即使一般情形仍总需假设A_0非奇异, 从而不失一般性, 以下都设$A_0 = I_n$.

定义2 (双曲性)**.** 称一阶方程组

$$\partial_t U + \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha \partial_\alpha U + DU = f \tag{2.9}$$

是双曲型的,若

$$A(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha \xi_\alpha, \qquad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d)$$

关于ξ可一致对角化, 且特征值均为实数:

$$A(\xi) = P(\xi)^{-1} \mathrm{diag}(\rho_1, \cdots, \rho_n) P(\xi), \quad \rho_j \in \mathbb{R};$$
$$\|P(\xi)\| \left\|P(\xi)^{-1}\right\| < C, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

该定义来源于对许多具体数学物理方程(Maxwell方程, 可压缩Euler方程等)的性质的抽象和Fourier分析(形如$e^{i(t\lambda - x\cdot\xi)}a$的行波解的存在性). 所以双曲型方程尤其适合用调和分析方法研究.

以下都需要假设A^α是常数矩阵.

---

[2]证明. 必要性. 由于$\ker A_d \subset \ker B$,这里定义的双线性型$\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 在$\ker A_d$ 上为零. 注意到A_d 是对称的, 所以有分解$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n(A_d) \bigoplus \ker A_d$. 设$w = w_r + w_k$,其中$w_r \in \mathbb{R}^n(A_d)$, $w_k \in \ker A_d$, 那么$B(w,w) = B(w_r, w_r)$. 我们只需证明存在ϵ 和C 使得$B(w,w)$在$\mathbb{R}^n(A_d)$上严格负定.

反证法. 假设上述断言不对, 那么存在序列$\{w_m\}$, $w_m \in R(A_d)$, $|w_m| = 1$ 使得$\frac{1}{m}|A_d w_m|^2 + (A_d w_m, w_m) \ge m|Bw_m| \ge 0$. 注意$\mathbb{R}^n(A_d)$ 是闭集, 从而$\{w_m\}$ 是紧的. 不失一般性,设$w_m \to w$ $(m \to \infty.)$ 显然$w \in \ker B$, $|w| = 1$, $w \in \mathbb{R}^n(A_d)$, 而且$(A_d w, w) \ge 0$, 与强耗散的假设矛盾!

充分性: 显然.

2. 基本思想

推导Kreiss–Lopatinskkii条件的思想如下: 对$\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tau \in \mathbb{C}$, 考察(2.9)当$D = 0, f = 0$时如下形式的特殊解

$$U(x,t) = \exp(\tau t + i\eta \cdot y)U(x_d). \tag{2.10}$$

我们的目的是要找到充分条件以保证存在破坏稳定性的如上形式的解, 即形如(2.10)的关于时间变量$t > 0$指数增长, 关于空间变量快速衰减到零的特解. 这就要求

$$\gamma = \mathrm{Re}\tau > 0. \tag{2.11}$$

一旦我们找到这种条件, 其反面就是边值问题(2.1)(2.2)稳定的必要条件, 即K -L 条件.

将(2.10)代入方程(2.9)(其中$D = 0 = f$), 就得到

$$A^d \frac{\mathrm{d}U(x_d)}{\mathrm{d}x_d} + (\tau I_n + iA(\eta))U(x_d) = 0,$$

其中$A(\eta) = \sum_{\alpha=1}^{d-1} A^\alpha \eta_\alpha$. 为简单起见,下面我们仅就边界$\{x_d = 0\}$非特征的情形, 即$\det A_d \neq 0$的情形加以推导. 于是可以置

$$\mathcal{A}(\tau,\eta) = -(A^d)^{-1}(\tau I_n + iA(\eta)),$$

并得到以τ,η为参数的自治线性ODE

$$\frac{\mathrm{d}U(x_d)}{\mathrm{d}x_d} = \mathcal{A}(\tau,\eta)U. \tag{2.12}$$

3. 破坏稳定性特解的构造

引理1. *设算子$\partial_t + \sum_\alpha A^\alpha \partial_\alpha$是双曲型的, 则$\forall \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$,$\mathrm{Re}\tau > 0$, 矩阵$\mathcal{A}(\tau,\eta)$没有纯虚数的特征值; 其稳定的特征值(即实部为负数的特征值) 的个数(按重数)等于A^d的正特征值的个数.*

证明. 1. 设ω 为$\mathcal{A}(\tau,\eta)$的纯虚数特征值, 即$P(X;\tau,\eta) = \det(XI_n - \mathcal{A}(\tau,\eta)) = 0$, 则$w$满足$\det(\tau I_n + iA(\eta) + \omega A^d) = 0$, 从而由双曲型定义, τ必须是纯虚数,与假设$\mathrm{Re}\tau > 0$矛盾.

2. 由于$P(\cdot;\tau,\eta)$光滑依赖于τ,η, 且关于τ,η的阶数不变, 则它的根也连续依赖于(τ,η), 从而利用$\{\mathrm{Re}\tau > 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$的连通性, 具正(负)实部根的个数不会变化. 取$\tau = 1, \eta = 0$, 则$\mathcal{A} = -(A^d)^{-1}$, 就可知$\mathcal{A}(\tau,\eta)$的负实部特征根个数就是$A^d$ 正特征值个数. □

由上述引理, 可得空间$\mathbb{C}^n$的如下分解

$$\mathbb{C}^n = E_-(\tau,\eta) \bigoplus E_+(\tau,\eta), \quad \mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1},$$

其中$E_\pm(\tau,\eta)$分别为$\mathcal{A}(\tau,\eta)$的稳定/不稳定子空间,它们均为$\mathcal{A}(\tau,\eta)$的不变子空间. 记$\pi_\pm(\tau,\eta)$分别为上述分解确定的$\mathbb{C}^n$到$E_\pm(\tau,\eta)$的投影算子,那么$\pi\mathcal{A} = \mathcal{A}\pi$. 又记$U_\pm(x_d) = \pi_\pm(\tau,\eta)U(x_d)$,则ODE(2.12)相应分解为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_d}U_\pm = \mathcal{A}U_\pm$, 解分别为

$$U_\pm(x_d) = \exp\Big(x_d\mathcal{A}\tau,\eta)\Big)U_\pm(0),$$

而$U = U_- + U_+$. 注意到除非$U_+(0) = 0$, 否则$U_+(x_d)$将在$x_d \to \infty$时指数增长; 而$U_-(x_d)$在$x_d \to \infty$时总指数衰减到零. 由于我们要求的破坏稳定性的特解在空间方向要衰减, 所以我们取$U_+(0) = 0$, 即$U(0) \in E_-(\tau,\eta)$. 另一方面,考虑(2.10)要满足齐次边界条件$BU|_{x_d=0} = 0$, 那么$U(0) \in \ker B$. 所以如果存在$\mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$使得$\ker B \cap E_-(\tau,\eta)$含有非零向量, 那末我们就可构造出所希望的特解. 后文会解释这种特解必然导致Hardmard 不稳定性. 所以我们得到了如下K-L条件.

定义3 (K-L条件). 称双曲型方程组边值问题(2.1)(2.2)满足K-L条件, 若$\forall \mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, 都成立

$$\ker B \cap E_-(\tau,\eta) = \{0\}. \tag{2.13}$$

上述定义是几何化的, 不便于计算. 为此, 设$e_-^1(\tau,\eta),\cdots,e_-^p(\tau,\eta)$是$E_-(\tau,\eta)$在的一组基(由引理1, 这组基存在, 其中参数$\mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$). 引入Lopatinskii行列式

$$\Delta(\tau,\eta) = \det(Be_-^1\tau,\eta,\cdots,Be_-^p(\tau,\eta)),$$

则K-L条件相当于要求$\Delta(\tau,\eta)$ 在$\mathrm{Re}\tau > 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$上没有零点. 进一步, 若$\Delta(\tau,\eta)$ 在闭集$\mathrm{Re}\tau \geq 0, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}$上都没有零点, 则称一致K-L条件成立.

4. Hölder空间中Hadamard 不稳定性: 尺度变换

对特解(2.10), 利用微分算子关于t,x都是仅含一次导数的特点, 我们做伸缩变换得到一族函数

$$u^\lambda(x,t) = u(\lambda x,\lambda t) = e^{\lambda\tau t + i\lambda\eta\cdot y}u(\lambda x_d) \quad \lambda > 0;$$

它们仍然满足方程(2.9) (其中$D = f = 0$), 以及同样的边界条件

$$Bu^\lambda(x,t)|_{x_d=0} = e^{i\lambda t + \lambda\eta\cdot y}B(u(0)) = 0;$$

但是初始条件为

$$u^\lambda(x,0) = e^{\lambda i\eta\cdot y}U(\lambda x_d).$$

可以看出当$\lambda \to \infty$时初值在Hölder空间$C^k(\mathbb{R}_+)$中范数 $\| u^\lambda(x,0) \|_{C_x^k} \sim O(\lambda^k)$至多为多项式增长. 然而, 对于任何固定的$t > 0$, 解$u^\lambda(x,t) = e^{\tau\lambda t}\cdot e^{\lambda i\eta\cdot y}U(\lambda x_d)$ 在任何空间C^k中 关于 λ 都是指数增长. 所以不可能通过初值的任何Hölder范数来控制$u(x,t)$的某个Hölder 范数. 这也就表明了该边值问题至少在Hölder空间框架下是不稳定的. 可以证明在Sobolev空间框架下它仍不稳定. 所以我们说K-L条件是边值问题稳定(能得到估计)的必要条件. 后面我们会看到,它在某种程度上讲也是一种充分条件.

三 例—超音速排气管道附近的涡面的线性稳定性分析

我们通过一个具体例子来展示如何利用Fourier变化得到双曲型方程边值问题的能量估计. 这里介绍的思路对于解决其它问题, 建立一般理论也具有借鉴和启发意义. [3]

1. Euler方程组

我们考虑的问题是气体动力学中超音速排气管道附近的涡面的线性稳定性分析(见图1). 这里气体运动的控制方程是如下三维定常可压缩 Euler 方程组:

$$\begin{cases} (\rho u)_x & + & (\rho v)_y & + & (\rho w)_z & = & 0, \\ (\rho u^2+p)_x & + & (\rho uv)_y & + & (\rho uw)_z & = & 0, \\ (\rho uv)_x & + & (\rho v^2+p)_y & + & (\rho uw)_z & = & 0, \\ (\rho wu)_x & + & (\rho wv)_y & + & (\rho w^2+p)_z & = & 0, \\ (\rho uE)_x & + & (\rho vE)_y & + & (\rho wE)_z & = & 0, \end{cases}$$

[3]本节及以下都是选读内容.

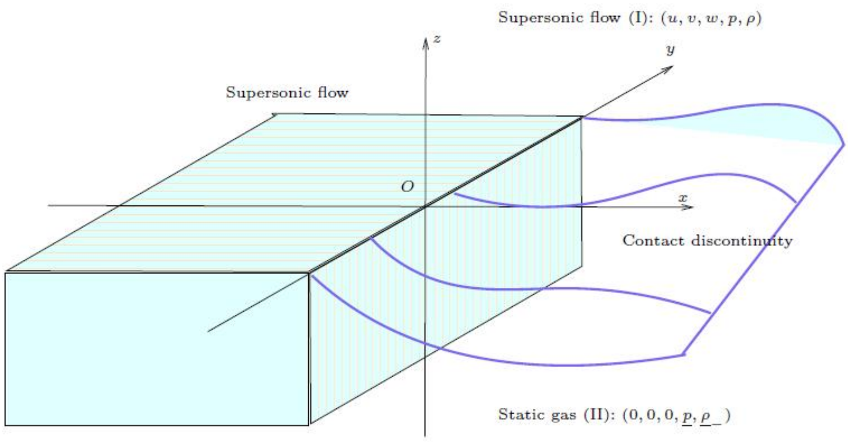

图 2.1 接触间断(涡与熵层)曲面将其上面的超音速气流与下方的静止气体分隔开来.

其中 $E = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{\gamma'}{\gamma'-1}\cdot\frac{p}{\rho}$, $\gamma'>1$ 为常数(对空气约为 $=1.4$). 这里未知量(u,v,w) 为气体流速, p 是气体压强 , ρ 是气体密度, 状态方程为$p = A(s)\rho^{\gamma'}$, 其中s 为熵, 而函数$A(s) = \exp(\frac{s}{c_v})$. 音速定义为$c = \sqrt{\gamma' p/\rho}$.

对于经典解, 当不出现真空时上述方程组可写为如下对称形式

$$A_1(u)\partial_x U + A_2(u)\partial_y U + A_3\partial_z U = 0,$$

其中$U = (u,v,w,p,s)^T$,

$$A_1(u) = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{u}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_2(u) = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{v}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$A_3(u) = \begin{pmatrix} \rho w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{w}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

注意上述矩阵中不同元素可能具有不同量纲, 所以在以后计算中不能任意地做矩阵乘法或求特征值对角化—必须要保证具有相同量纲的量才能相加.

习题 2. 若流体沿x轴为超音速流,即$u > c > 0$, 则Euler方程组为对称双曲组. □

2. 非线性自由边界问题

如图2.1所示，我们考虑区域$\{x > 0\}$中气体的运动. 设涡面(自由边界)的方程为 : $z = \psi(x,y)$ $(\psi(0,y) \equiv 0)$,则要求解的区域是 $\{x \geq 0, z \geq \psi(x,y)\}$, 在其中要解得函数$U$使得Euler方程组(在适当意义下)成立. 它有两个边界. 由于假设气体沿x轴方向为超音速的$(u > c)$, 所以在 $\{x = 0, z \geq 0\}$上应该给初值条件, 即 (u,v,w,p,s) 都给定. 在自由边界上需要两个条件,即两侧压强相等, $p = \underline{p}$,

以及沿自由边界气体法向速度为零, 即$(\psi_x,\psi_y,-1)(u,v,w)=0$, 或者$u\psi_x+v\psi_y=w$. 这就是非线性自由边界问题的提法. 这个问题有一个特解$(\underline{U},\psi\equiv 0)$,其中超音速流是均匀的，即由常向量$\underline{U}=(\underline{u},\underline{v},0,\underline{p},\underline{\rho}_+)$ 给定,而静止气体状态由常向量$(0,0,0,\underline{p},\underline{\rho}_-)$ 给定; 涡面就是平面$\{x>0,z=0\}$. 下文中这个特解也被称作背景解.

3. 常系数线性化问题

为了解决求解区域不确定的困难, 可以通过类似$z-\psi(x,y)\mapsto z$之类的坐标变换将区域化为 $\{x>0,z>0\}$, 而自由边界就固定为$\{z=0,x>0\}$. 然后在背景解处线性化,并利用初边值条件所应满足的相容性条件构造近似解, 利用近似解化简,就会得到以下常系数线性边值问题:

$$\begin{cases} A_1(\underline{U})\partial_x\dot{U}+A_2(\underline{U})\partial_y\dot{U}+A_3(\underline{U})\partial_z\dot{U}=f, & z>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\\ \dot{p}=\underline{p}, & z=0, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中$\dot{U}$为未知函数, 代表气流状态的小扰动. 扰动的自由边界$\dot{\psi}$的方程为

$$\underline{u}\dot{\psi}+\underline{v}\dot{\psi}=\dot{w}|_{z=0}.$$

这是一个输运方程,其初值条件为$\dot{\psi}(0,y)=0$.

习题 3. 边值问题(2.14)中边界$\{z=0\}$是特征边界, 其边界条件是弱耗散但不强耗散的. ($\ker B=\{\dot{p}=0\}$, $(A_3(\underline{U}),\dot{U},\dot{U})=2\dot{p}\dot{w}$ 在$\ker B$上一直负定但不严格负定.) □

由此可知我们不能指望普通的能量积分方法告诉我们$\dot{w}|_{z=0}$ 的估计, 而这个估计却是求解$\dot{\psi}$必需的. 下文我们将介绍如何利用调和分析在微局部下逐点构造对称化子得到能量估计的方法解决这一困难. 不过首先我们需要计算K-L条件. 下面习题给出了验证K-L 条件是否成立的一个快速算法. 以后我们会看到K-L条件成立可以帮助我们构造微局部的对称化子.

习题 4. 将 $\dot{U}(x,t)=e^{\tau\cdot x}e^{i\eta\cdot y}e^{\lambda z}\dot{U}$代入(2.14), 其中$\mathrm{Re}\tau>0,\mathrm{Re}\lambda<0$, $\dot{U}$为常向量, 计算 Lapatinskii 行列式并验证K-L 条件是否成立. □

为书写简单, 以下我们把$\underline{U}$就写为U.

四 微局部化与对称化子的构造及能量估计

这一节的目的, 就是在$\dot{U}\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^3)$的假设下, 对问题(2.14)给出$\dot{p}$, $\dot{w}$ 在$z=0$ 处的L^2 估计.[4]所用方法是通过Fourier变换微局部化, 在频率空间逐点构造对称化子，通过ODE 能量积分及Plancherel 定理得出可能的估计式.

1. 常系数线性问题的无量纲化和$A_3(U)$对角化

线性问题(2.14)来自于物理问题, 所以不同的量可能有不同的量纲. 例如矩阵

$$A_3(U)=\begin{pmatrix} \underline{0} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \underline{0} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \underline{0} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \underline{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0} \end{pmatrix},$$

虽然对角线上的数值均为零, 但是量纲却不完全相同, 而且与其它非对角线元素量纲也不同. 所以如果把A_3当作没有量纲的纯数字矩阵进行矩阵运算, 就可能会出现不同量纲量相加的

[4]一般说来, 一旦对这样的函数得到估计, 利用稠密性和逼近就可以得到更广泛的函数所必须满足的估计式. 所以一开始仅对光滑函数作估计具有一般意义.

错误,必然得到错误的结论.[5] 所以对物理问题研究起初就要特别注意量纲及无量纲化的问题. 这也是在下面对A_3对角化时矩阵选取要注意的地方. 此外, 在将$A_3(U)$ 对角化的同时, 应保持相应$A_1(U)$ 仍然对称正定.

为此, 令$\dot{U}=PV$, V 为新未知量, 同时在方程两边左乘Q. 这里选取

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&c&c&0\\0&0&\gamma'p&-\gamma'p&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\gamma'p}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{\gamma'p}&0&0&0\\0&0&\frac{c}{\gamma'p}&1&0\\0&0&\frac{c}{\gamma'p}&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

于是

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2c}&\frac{1}{2\gamma'p}&0\\0&0&\frac{1}{2c}&-\frac{1}{2\gamma'p}&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

若记$V=(V_1,V_2,V_3,V_4,V_5)^T$, 则

$$\begin{cases}V_1&=&\dot{u},\\V_2&=&\dot{v},\\V_3&=&\dfrac{\dot{w}}{2c}&+&\dfrac{\dot{p}}{2\gamma'p},\\V_4&=&\dfrac{\dot{w}}{2c}&-&\dfrac{\dot{p}}{2\gamma'p},\\V_5&=&\dot{s},\end{cases}$$

而(2.14)就转化为

$$\begin{cases}B_1(U)\partial_xV+B_2(U)\partial_yV+B_3(U)\partial_zV=Qf, & z>0,\\ \beta V^{\mathrm{nc}}=\dfrac{g}{\gamma'p}, & z=0,\end{cases}$$

其中$\beta=(1,-1)$, $V^{\mathrm{nc}}=(V_3,V_4)^T$, 而

$$B_1(U)=QA_1(U)P=\begin{pmatrix}\frac{u}{c^2}&0&1&-1&0\\0&\frac{u}{c^2}&0&0&0\\1&0&2u&0&0\\-1&0&0&2u&0\\0&0&0&0&u\end{pmatrix},$$

$$B_2(U)=QA_2(U)P=\begin{pmatrix}\frac{v}{c^2}&0&0&0&0\\0&\frac{v}{c^2}&1&-1&0\\0&1&2v&0&0\\0&-1&0&2v&0\\0&0&0&0&v\end{pmatrix},$$

[5] 从数学上讲, 原因是只有具有相同量纲的数的加法运算才有意义; 所以具有不同量纲的数并不关于加法和乘法构成一个环; 而矩阵运算只有元素所在集合是数域才有意义. 关于量纲的这一点在线性代数教学中强调得不够.

$$B_2(U)=QA_2(U)P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&2c&0&0\\0&0&0&-2c&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 加权

对参数$\gamma>0$, 令$\tilde V=e^{-\gamma x}V$, 则有

$$\begin{cases}\gamma B_1(U)\tilde V+B_1(U)\partial_x\tilde V+B_2(U)\partial_y\tilde V+B_3(U)\partial_z\tilde V=e^{-\gamma x}Qf, & z>0,\\ \beta\tilde V^{\mathrm{nc}}=e^{-\gamma x}\dfrac{g}{\gamma' p}, & z=0.\end{cases}$$

注意这里γ'就是绝热指数. 现在的关键(目标)就是估计$\tilde V^{\mathrm{nc}}\big|_{z=0}$.

为此, 我们只需考虑$f=0$的情形. 事实上, 考虑辅助问题

$$\begin{cases}\gamma B_1(U)\tilde V'+B_1(U)\partial_x\tilde V'+B_2(U)\partial_y\tilde V'+B_3(U)\partial_z\tilde V'=e^{-\gamma x}Qf, & z>0,\\ (0,0,1,0,0)\tilde V'=0, & z=0.\end{cases}$$

记$B=(0,0,1,0,0)$, 从而$\ker B=\{\tilde V_3'=0\}$, 则

$$(B_3\tilde V',\tilde V')=2c(\tilde V_3'^2-\tilde V_4'^2)\ \text{在}\ \ker B\ \text{上负定},$$

所以上述问题满足强耗散条件. 由前节内容可知$\tilde V'^{\mathrm{nc}}\big|_{z=0}$可由普通能量积分估计. 此时令$\tilde V''=\tilde V-\tilde V'$, 显然有: $\tilde V''^{nc}\big|_{z=0}$可估计$\Rightarrow$ $\tilde V^{nc}\big|_{z=0}$可估计.

所以下面我们仅考虑问题:

$$\begin{cases}\gamma B_1(U)\tilde V+B_1(U)\partial_x\tilde V+B_2(U)\partial_y\tilde V+B_3(U)\partial_z\tilde V=0, & z>0,\\ \beta\tilde V^{nc}=h, & z=0.\end{cases}\tag{2.15}$$

3. Fourier 变换$\longrightarrow$ ODE + 代数方程

对问题(2.15), 由于假设$\dot U$紧支光滑, 我们可对$x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$做Fourier变换. 记$\mathcal{F}_{x\to\delta,y\to\eta}(\tilde V(x,y,z))=\hat V(\delta,\eta,z)$和$\mathcal{F}(g)=\hat g$, 方程变为

$$(\gamma+i\delta)B_1(U)\hat V+i\eta B_2(U)\hat V+B_3(U)\frac{\mathrm{d}\hat V}{\mathrm{d}z}=0.$$

令$\tau=r+i\delta$, $r>0$, 则得到以(τ,δ)为参数的方程

$$\begin{cases}B_3(U)\dfrac{\mathrm{d}\hat V}{\mathrm{d}z}+(\tau B_1(U)+i\eta B_2(U))\hat V=0 & z>0\\ \beta\hat V^{nc}=\hat h & z=0\end{cases}\tag{2.16}$$

其中$\tau\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\tau>0$, $\eta\in\mathbb{R}$. 由于B_3奇异,这是一个ODE和代数方程耦合的系统.

4. 代数方程与ODE解耦

直接将(2.16)展开, 利用

$$\tau B_1(U)+i\eta B_2(U)=\begin{pmatrix}\dfrac{u\tau+iv\eta}{c^2}&0&\tau&-\tau&0\\0&\dfrac{u\tau+iv\eta}{c^2}&i\eta&i\eta&0\\\tau&i\eta&2(u\tau+iv\eta)&0&0\\-\tau&-i\eta&0&-2(u\tau+iv\eta)&0\\0&0&0&0&u\tau+iv\eta\end{pmatrix},$$

考虑一、二、五行可得代数方程部分如下：

$$\begin{cases} (u\tau+iv\eta)\hat{V}_1+\tau c^2(\hat{V}_3-\hat{V}_4) & =0, \\ (u\tau+iv\eta)\hat{V}_2+i\eta c^2(\hat{V}_3-\hat{V}_4) & =0, \\ (u\tau+iv\eta)\hat{V}_5 & =0; \end{cases}$$

考虑三、四行, 可得ODE部分如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}_3}{\mathrm{d}z}+\dfrac{1}{2c}(\tau\hat{V}_1+i\eta\hat{V}_2)+\dfrac{u\tau+iv\eta}{c}\hat{V}_3 & =0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}_4}{\mathrm{d}z}+\dfrac{1}{2c}(\tau\hat{V}_1+i\eta\hat{V}_2)-\dfrac{u\tau+iv\eta}{c}\hat{V}_4 & =0. \end{cases}$$

由代数方程部分解出$\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ 代入ODE部分, 得出解耦的ODE:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{V}^{\mathrm{nc}}}{\mathrm{d}z}=\mathcal{B}(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}, & z>0, \\ \beta\hat{V}^{\mathrm{nc}}=\hat{h}, & z=0, \end{cases} \tag{2.17}$$

其中,

$$B(\tau,\eta)=\begin{pmatrix} -a(\tau,\eta) & b(\tau,\eta) \\ -b(\tau,\eta) & a(\tau,\eta) \end{pmatrix},$$

$$a(\tau,\eta)=\frac{c}{2}\frac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+iv\eta}+\frac{u\tau+iv\eta}{c}, \quad b(\tau,\eta)=\frac{c}{2}\frac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+iv\eta}.$$

观察可知问题(2.17)有如下特点: 1) 矩阵$B(\tau,\eta)$ 在$u\tau+iv\eta=0$ 处有一阶极点; 2)$B(\tau,\eta)$ 关于(τ,η) 正齐次一次, 即$B(t\tau,t\eta)=tB(\tau,\eta)$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$.

5. Kreiss-Lopatinskii 条件

考察ODE问题(2.17). 记$E_-(\tau,\eta)$ 为$\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 的稳定子空间, $E_+(\tau,\eta)$ 为其不稳定子空间. 现需验证 Lopatinskii 条件：

$$\ker B\bigcap E_-(\tau,\eta)=\{0\}, \quad \forall \mathrm{Re}\tau>0, \eta\in\mathbb{R}.$$

这等价于 Lopatinskii 行列式$\Delta(\tau,\eta)=\det(Be_-(\tau,\eta))\neq 0$, 其中$e_-(\tau,\eta)$ 为$E_-(\tau,\eta)$ 的基底.

为此先计算特征值. 考虑$|\lambda I-B(\tau,\eta)|=0$得

$$\lambda^2=(a+b)(a-b)=\eta^2-\tau^2+\frac{1}{c^2}(u\tau+iv\eta)^2.$$

当$\tau=1$, $\eta=0$ 时, $\lambda^2=-1+\dfrac{u^2}{c}\Rightarrow\lambda_-=-\sqrt{\dfrac{u^2}{c}-1}, \lambda_+=\sqrt{\dfrac{u^2}{c}-1}$. 故对于$\mathrm{Re}\tau>0$, 必有特征值$\lambda_\pm$, 满足$\mathrm{Re}\lambda_-<0$, 且$\mathrm{Re}\lambda_+>0$.

记r_- 为对应于λ_- 的特征向量, 则

$$\begin{pmatrix} \lambda_-+a & -b \\ b & \lambda_--a \end{pmatrix} r_-=0\Longrightarrow r_-=\begin{pmatrix} \lambda_--a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow e_-(\tau,\eta)=r_-\times(u\tau+iv\eta)=\begin{pmatrix} \lambda_-(u\tau+iv\eta)-\dfrac{c}{2}(\eta^2-\tau^2)-\dfrac{(u\tau+iv\eta)^2}{c} \\ -\dfrac{c}{2}(\eta^2-\tau^2) \end{pmatrix}.$$

同理可得, $e_+(\tau,\eta)=(u\tau+iv\eta)\begin{pmatrix} b \\ \lambda_++a \end{pmatrix}$.

习题 5. 为什么不能取$(b,\lambda_-+a)^T$作为稳定子空间的基底？ □

因此, $\Delta(\tau,\eta)=\beta e_-(\tau,\eta)=(\lambda_- - \frac{(u\tau+iv\eta)}{c})(u\tau+iv\eta)$. 若$\lambda_-=\frac{(u\tau+iv\eta)}{c}$, 则

$$\lambda^2=\frac{(u\tau+iv\eta)^2}{c^2}=\eta^2-\tau^2+\frac{1}{c^2}(u\tau+iv\eta)^2\Rightarrow\eta^2=\tau^2\Rightarrow\tau=\pm|\eta|,$$

而$\mathrm{Re}\tau\ge 0$,则$\tau=|\eta|\in\mathbb{R}^+$. 所以$\mathrm{Re}\lambda_-=\frac{u\tau}{c}>0$, 与在该点$\mathrm{Re}\lambda_-<0$矛盾！

综上, 在去掉一个非零因子后, 有以下结论:

1) Lopatinskii行列式为$\Delta(\tau,\eta)=u\tau+iv\eta$;

2) Lopatinskii 条件成立, 即$\mathrm{Re}\tau>0$时$\Delta(\tau,\eta)\ne 0$;

3) 一致Lopatinskii 条件不成立: $\tau=-\frac{iv\eta}{u}$是$\Delta(\tau,\eta)=0$的一阶零点. 后面将会看到,这会导致能量估计含有一阶导数损失.

6. 微局部对称化子

本节要解决的问题是对ODE

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\hat{V}^{nc}}{\mathrm{d}z}=\mathcal{B}(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}, & z>0,\\ \beta\hat{V}^{nc}=\hat{h}, & z=0\end{cases}$$

得到$\hat{V}^{nc}|_{z=0}$的估计.这里$\hat{V}^{nc}=\hat{V}^{nc}(z;\tau,\eta),\beta=(1,-1),\mathcal{B}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}-a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

定义4 (Kreiss 对称化子). *记紧集*

$$\Sigma=\{(\tau,\eta):\tau\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(\tau)\ge 0,\eta\in\mathbb{R},|\tau|^2+|\eta|^2=1\}.$$

设(τ_0,η_0)为Σ内给定一点, 若存在(τ_0,η_0)在Σ上的邻域$\mathcal{V}$和C^∞映射T,r, 其中$T:V\to GL_2(\mathbb{C}),r:V\to H_2(\mathbb{C})$ (二阶Hermite矩阵), 满足下列条件: $\exists$常数$k,C>0$使得

(1) $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$, $\mathrm{Re}(r(\tau,\eta)T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta))\ge k\gamma I_2$,*其中*$\gamma=\mathrm{Re}(\tau)$;

(2) $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$, $r(\tau,\eta)+C(\beta T^{-1}(\tau,\eta))^*(\beta T^{-1}(\tau,\eta))\ge I_2$,

则称$r(\tau,\eta)$为(τ_0,η_0)附近的一个（局部）对称化子.

下面分三种情形分别构造对称化子: ①(τ_0,η_0)是Σ的内点;②(τ_0,η_0)是Σ的边界点但$\Delta(\tau_0,\eta_0)\ne 0$; ③$(\tau_0,\eta_0)$是$\Sigma$的边界点且$\Delta(\tau_0,\eta_0)=0$.

情形① 我们首先考虑内点的情形, 即$(\tau_0,\eta_0)\in\Sigma$, $\mathrm{Re}(\tau_0)>0$. 那么可以找到(τ_0,η_0)的一个邻域$\mathcal{V}$, 使得$\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$,成立$\mathrm{Re}(\tau)>0$.

第一步. 找到$T(\tau,\eta)$使之将$\mathcal{B}(\tau,\eta)$对角化.

如前所计算过的, 可令$e_-(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}\lambda_--a & -b\end{pmatrix}^T$, $e_+(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}b & \lambda_++a\end{pmatrix}^T$, 以及$T(\tau,\eta)=(e_-(\tau,\eta),e_+(\tau,\eta))^{-1}$. 则$T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T(\tau,\eta)^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_-(\tau,\eta) & 0\\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta)\end{pmatrix}$. 由引理1, 我们可适当缩小$\mathcal{V}$, 使得存在正常数$k$满足如下要求: $\mathrm{Re}\lambda_-(\tau,\eta)<-k$, $\mathrm{Re}\lambda_+(\tau,\eta)>k$, $\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$.

第二步. 构造对称化子, 即Hermite阵 $r(\tau,\eta)$.

假设 $r=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}$,其中 $K>0$ 为待定常数.那么对任意$K\geq 1$, 都有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(r(\tau,\eta)T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)) &= \mathrm{Re}\begin{pmatrix}-\lambda_-(\tau,\eta) & \\ & K\lambda_(+)(\tau,\eta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\mathrm{Re}(\lambda_-(\tau,\eta)) & \\ & K\mathrm{Re}(\lambda_+(\tau,\eta))\end{pmatrix}\\
&\geq \begin{pmatrix}k & \\ & kK\end{pmatrix}\\
&\geq kI\geq k\gamma I. \qquad (0\leq\gamma\leq 1)
\end{aligned}$$

下面只需验证要求2).

为此,我们需要利用Lopatinskii条件. 回忆$\Delta(\tau,\eta)\neq 0\Longleftrightarrow \ker\beta\cap E_-(\tau,\eta)=\{0\}$, 且就目前问题, $\dim\ker\beta=1$, $\dim E_-(\tau,\eta)=1$,于是

$$\ker\beta\oplus E_-(\tau,\eta)=\mathbb{C}^2.$$

从而由代数同态定理,$\beta: E_-(\tau,\eta)\longrightarrow\mathbb{C}$ 是同构映射. 在$\mathbb{C}^2$的坐标变换$\hat{W}=T\hat{V}^{\mathrm{nc}}$下(由标准基底变为$(e_-,e_+)$基底), $E_-(\tau,\eta)=(z_1,0)^T$, $E_+(\tau,\eta)=(0,z_2)^T$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 而β变为βT^{-1}. 利用这些性质, 考虑$\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 的线性变换 $P: Z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\beta T^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\\ z_2\end{pmatrix}$, 不难发现 P 是单射,从而也是 可逆的.所以存在 $C_0>0$ 使得

$$|Z|^2\leq C_0|PZ|^2\leq C_0(|z_2|^2+|\beta T^{-1}Z|^2).$$

现对于 $C=2C_0$, $K=2C_0+1$,利用上面这个不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
Z^* r(\tau,\eta)Z+C\parallel\beta T^{-1}Z\parallel^2 &\geq -|z_1|^2+(2C_0+1)|z_2|^2+2|Z|^2-2C_0|z_2|^2\\
&\geq |Z|^2.
\end{aligned}$$

这也就是所希望的$r(\tau,\eta)+C_0(\beta T_{-1}(\tau,\eta))^*(\beta T_{-1}(\tau,\eta))\geq I_2$.

情形② 我们再考虑Lopatinskii行列式不为零的那些边界点: $(\tau_0,\eta_0)\in\Sigma$, $\mathrm{Re}(\tau_0)=0$, $\Delta(\tau_0,\eta_0)\neq 0$. 对此我们又须分三种情况讨论.

- $\eta_0^2+\delta_0^2>\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$;
  这种情况下，$\lambda_\pm=\pm\sqrt{\eta_0^2+\delta_0^2-\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}}$, 所以 $\exists(\tau_0,\eta_0)$ 的邻域 $\mathcal{V}\subset\Sigma$ 及正数k,使得$\forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}$, $\mathrm{Re}(\lambda_-)\leq -k$, $\mathrm{Re}(\lambda_+)\geq k$. 这与 ①完全相同.

- $\eta_0^2+\delta_0^2=\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$;
  这种情况$\lambda_\pm=0$,矩阵$\mathcal{B}$不能对角化,所以对称化子构造比较复杂, 我们略去详细过程.

- $\eta_0^2+\delta_0^2<\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}$;
  这种情况下，$\lambda=\pm i\sqrt{\dfrac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$,由于$\lambda_\pm$互不相同,局部地它们都是 $\tau=\gamma+i\delta$ 的

全纯函数. 根据柯西–黎曼方程, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_-}{\partial r}\Big|_{(\tau_0,\eta_0)} &= \frac{\partial \mathrm{Im}\lambda_-}{\partial \delta}\Big|_{(\tau_0,\eta_0)} \\ &= \pm\frac{\partial}{\partial\delta}\sqrt{\frac{(u\delta+v\eta)^2}{c^2}-(\eta^2+\delta^2)}\Big|_{\delta=\delta_0,\eta=\eta_0} \\ &= \pm\frac{(u^2-c^2)\delta+uv\eta}{c^2\sqrt{\frac{(u\delta+v\eta)^2}{c^2}-(\eta^2+\delta^2)}}\Big|_{\delta=\delta_0,\eta=\eta_0}\end{aligned}$$

对此又有两种情形:

◇ $(u^2-c^2)\delta+uv\eta>0$, 于是$\lambda_\pm=\pm i\sqrt{\frac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$;

◇ $(u^2-c^2)\delta+uv\eta<0$, 于是$\lambda_\pm=\mp i\sqrt{\frac{(u\delta_0+v\eta_0)^2}{c^2}-\eta_0^2-\delta_0^2}$.

容易计算此时不可能出现$(u^2-c^2)\delta+uv\eta=0$,所以总有$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_-}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}<0$. 类似计算得$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_+}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}>0$.

对T,r 的构造同①一样, 因为$e_\pm$在(τ_0,η_0)邻域内仍有定义; 唯一区别在于得到

$$\mathrm{Re}(r(\tau,\eta)T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)) = \begin{pmatrix}-\mathrm{Re}(\lambda_-(\tau,\eta)) & \\ & K\mathrm{Re}(\lambda_+(\tau,\eta))\end{pmatrix}$$

后, 要利用$\frac{\partial \mathrm{Re}\lambda_\pm}{\partial\gamma}|_{(\tau_0,\eta_0)}\gtrless 0$, 那么在$(\tau_0,\eta_0)$ 的小邻域内$\mathrm{Re}\lambda_\pm|_{(\tau,\eta)}\gtrless \pm k\gamma$.

情形③ $(\tau_0,\eta_0)\in\Sigma, \mathrm{Re}(\tau_0)=0, \Delta(\tau_0,\eta_0)=0$.

注意到 $\mathcal{B}(\tau,\eta)$ 在 (τ_0,η_0) 的一个去心邻域内仍可对角化. 令 $m=u\tau+iv\eta$, 由于$m^2(\lambda_--a)^2+m^2b^2=\frac{c^2(\eta_0^2+\delta_0^2)}{2}|_{(\tau_0,\eta_0)}\neq 0$, 则可定义 $T(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}m(\lambda_--a) & mb\\ -mb & (\lambda_--a)\end{pmatrix}^{-1}$, 它使得下式成立

$$T(\tau,\eta)B(\tau,\eta)T^{-1}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix}\lambda_-(\tau,\eta) & 2b(\tau,\eta)\\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta)\end{pmatrix}.$$

由于$\lambda_\pm(i\delta_0,\eta_0)=\pm\sqrt{\eta_0^2+\delta_0^2}\in\mathbb{R}$ 互不相同, 所以在(τ_0,η_0)的小邻域$\mathcal{V}$内$\lambda_\pm$连续, 且存在正数k使得

$$\mathrm{Re}\lambda_-(\tau,\eta)<-k,\quad \mathrm{Re}\lambda_+(\tau,\eta)>k,\quad \forall(\tau,\eta)\in\mathcal{V}. \tag{2.18}$$

对这种情形我们不能构造对称化子, 将通过ODE积分利用边界条件直接得到估计.

7.齐次扩张与ODE能量估计

由上面的分析可知, 对Σ上每一个点都可以找到一个邻域$\mathcal{V}$, 在其上构造对称化子或矩阵T, 它们构成Σ的一个开覆盖. 由于Σ是紧集, 必存在有限子覆盖 $\{\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\dots,\mathcal{V}_J\}$. 于是, 有从属于此有限子覆盖的单位分解 $\{\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_J\}$, 其中 $0\le\chi_j\le 1$, $\mathrm{supp}\chi_j\subset\mathcal{V}_j$, $\Sigma\subset\cup_{j=1}^J\mathcal{V}_j$, 且$\sum\chi_j^2=1$.

记相应于$\mathcal{V}_j$上r,T分别为r_j,T_j. 对 $r_j(\tau,\eta),T_j(\tau,\eta)$, $\chi_j(\tau,\eta)$ 均作正齐次零次扩张, 使得它们定义在$\mathrm{Re}\tau>0,\eta\in\mathbb{R}$上.

现在开始在 $\mathcal{V}_j$ 上作估计.首先令 $W_j(z;\tau,\eta)=\chi_j(\tau,\eta)T_j(\tau,\eta)\hat{V}_j^{\mathrm{nc}}(z;\tau,\eta)$, 那么由(2.17),

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W_j(z;\tau,\eta)}{\mathrm{d}z}=T_j(\tau,\eta)\mathcal{B}(\tau,\eta)T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(z;\tau,\eta), & z>0, \\ \beta T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(0;\tau,\eta)=\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta), & z=0. \end{cases}$$

于是对于$\mathcal{V}_j$不是由极点所得邻域的情形, 利用对称化子性质,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^*r_jW_j) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^*)r_jW_j+W_j^*r_j\frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}z} \\ &= W_j^*(T_jBT_j^{-1})^*r_jWj+W_j^*r_jT_jBT_j^{-1}W_j \\ &= W_j^*(rjT_jBT_j^{-1})^*Wj+W_j^*r_jT_jBT_j^{-1}W_j \\ &= 2W_j^*\mathrm{Re}(r_jT_jBT_j^{-1})W_j \\ &\geq 2k\gamma|W_j|^2. \end{aligned}$$

利用当$z\to\infty$时$W_j\to 0$的假设条件,

$$\begin{aligned} 2k\gamma\int_0^{+\infty}|W_j(z;\tau,\eta)|^2\mathrm{d}z &\leq \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(W_j^*r_jW_j)\mathrm{d}z \\ &= -(W_j^*r_jW_j)\Big|_{z=0} \\ &\leq -|W_j|^2\Big|_{z=0}+CW^*(BT^{-1})^*(BT^{-1})W^* \\ &= -|W_j(0;\tau,\eta)|^2+C|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2 \end{aligned}$$

所以

$$2k\gamma\int_0^{+\infty}|W_j(z,\tau,\eta)|^2\mathrm{d}z+|W_j(0,\tau,\eta)|^2\leq c|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2,$$

再利用T_j及其逆在$\mathrm{supp}\chi_j$上算子范数有界, 我们得到

$$|\chi_j(\tau,\eta)\hat{V}^{nc}(0,\tau,\eta)|^2\leq C'|\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)|^2, \tag{2.19}$$

其中C'仅依赖$\mathcal{V}_j$.

极点邻域上估计 设$\mathcal{V}_j$是包含$\mathcal{B}$极点$\{(\tau,\eta):u\delta+v\eta=0\}$的一个邻域, 其中$\tau=\gamma+i\delta$. 回忆我们有如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} W_j^1(z,\tau,\eta) \\ W_j^2(z,\tau,\eta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_-(\tau,\eta) & 2b(\tau,\eta) \\ 0 & \lambda_+(\tau,\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1(z,\tau,\eta) \\ W_j^2(z,\tau,\eta) \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

其中$b=\frac{c}{2}\frac{\eta^2-\tau^2}{u\tau+iv\eta}$, λ 满足$\lambda^2=\eta^2-\tau^2+\frac{1}{c^2}(u\tau+iv\eta)^2$. 根据(2.18), 对$\lambda$作正齐次一次延拓, 就得到对$\mathrm{Re}\tau>0,\eta\in\mathbb{R}$, 成立

$$\mathrm{Re}\lambda_-<-k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}, \mathrm{Re}\lambda_+>k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}.$$

现在看(2.20)中第二个方程

$$\frac{\mathrm{d}W_j^2}{\mathrm{d}z}=\lambda_+W_j^2.$$

为保证$\lim_{z\to\infty}W_j^2(z;\tau,\eta)=0$, 其初值必须为零: $W_j^2(0,\tau,\eta)=0$, 所以$W_j^2(z,\tau,\eta)\equiv 0$. 由于(2.20)的第一个方程就是

$$\frac{\mathrm{d}W_j^1}{\mathrm{d}z}=\lambda_-W_j^1+2bW_j^2,$$

从而可利用$W_j^2=0$消去极点,得到$\dfrac{\mathrm{d}W_j^1}{\mathrm{d}z}=\lambda_- W_j^1$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}|W_j^1|^2}{\mathrm{d}z}=2\mathrm{Re}(\lambda_-)|W_j^1|^2,$$

积分就得到$|W_j^1(0,\tau,\eta)|^2\geq 2k\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}\int_0^{+\infty}|W_j^1|^2\mathrm{d}z$. 我们发现,关键还是估计$|W_j^1(0,\tau,\eta)|$. 这要依靠边界条件$\beta T_j(\tau,\eta)^{-1}W_j(0,\tau,\eta)=\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)$.

回忆

$$T_j^{-1}(\tau,\eta)=\begin{pmatrix} m(\lambda_- -a) & mb \\ -mb & m(\lambda_- -a)\end{pmatrix},\quad 其中\quad m=u\tau+iv\eta.$$

所以

$$\begin{aligned}\beta T_j^{-1}W_j(0,\tau,\eta) &= (1,-1)\begin{pmatrix} m(\lambda_- -a) & mb \\ -mb & m(\lambda_- -a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1 \\ 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m(\lambda_- -a+b) & m(b-\lambda_- +a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_j^1 \\ 0\end{pmatrix} \\ &= m(\lambda_- -a+b)W_j^1=\hat{h}\chi_j\end{aligned}$$

注意到$m(\lambda_- -a+b)=\Delta(\tau,\eta)S(\tau,\eta)^{-1}$, 其中$S(\tau,\eta)\neq 0$, 则

$$\Delta(\tau,\eta)W_j^1(0,\tau,\eta)=S\chi_j(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta)\quad(\tau,\eta)\in\mathcal{V}_j.$$

对$\Delta(\tau,\eta)=u\tau+iv\eta$, 在$\mathcal{V}_j$上显然成立$|\Delta(\tau,\eta)|\geq c\gamma$, 进行正齐次零次延拓[6]得

$$|\Delta(\tau,\eta)|\geq c\gamma/\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}\quad(\tau,\eta)\in\mathbb{R}^+\cdot\mathcal{V}_j.$$

注意这是估计带一阶导数损失的起源. 于是利用S的有界性, $|W_j^1(0,\tau,\eta)|\leq c\dfrac{\chi_j\hat{h}\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2}}{\gamma}$, 即$|W_j(0,\tau,\eta)|^2\leq C\dfrac{|\chi_j|^2|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2}$,或者等价地,

$$|\chi_j(\tau,\eta)|^2|\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2\leq C_j\frac{|\chi_j|^2|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2}. \tag{2.21}$$

8. 最终估计: Plancherel定理及加权Sobolev空间

注意到$(|\tau|^2+|\eta|^2)>\gamma^2$, 将(2.19) 和(2.21)关于$j$从1到$J$求和, 就有

$$|\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2\leq c\frac{|\hat{h}|^2(|\tau|^2+|\eta|^2)}{\gamma^2},\quad(\tau=\gamma+i\delta).$$

关于δ,η在$\mathbb{R}^2$上积分, 则

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|\hat{V}(0,\tau,\eta)|^2\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta\leq c\frac{1}{\gamma^2}\iint_{\mathbb{R}^2}|\hat{h}|^2(|\gamma|^2+|\delta|^2+|\eta|^2)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta.$$

利用Plancherel定理得

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}|\tilde{V}(x,y,0)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\mathbb{R}^2}|e^{-\gamma x}\hat{V}(x,y,0)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{C}{\gamma^2}\iint_{\mathbb{R}^2}|\hat{h}|^2(|\gamma|^2+|\delta|^2+|\eta|^2)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\eta\triangleq\frac{C}{\gamma^2}\|h\|^2_{H^1_\gamma}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

[6]由于对T_j 进行正齐次零次延拓,所以此处Δ 也必须是正齐次零次延拓,虽然看上去它是正齐次一次的. 同样对S也要作正齐次零次延拓.

这个不等式建议我们引入新的空间

$$H^1_\gamma(\mathbb{R}^2) = \left\{ u:\ \|u\|_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{u}(\delta,\eta)|^2 (|\gamma|^2 + |\delta|^2 + |\eta|^2) \mathrm{d}\delta \mathrm{d}\eta \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$

$$L^2_\gamma(\mathbb{R}^2) = \left\{ u:\ \|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\gamma x} |u(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$

于是(2.22)可以简单地写为

$$\|V^{nc}\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^2)} \le \frac{c}{\gamma^2} \|h\|^2_{H^1_\gamma(\mathbb{R}^2)}.$$

这就是我们所需要的估计式.

第三讲 广义函数(一)：概念和基本性质

广义函数理论为调和分析和偏微分方程理论发展提供了一个极为宽广却又有丰富装备(运算) 的舞台, 有着广泛的应用. 这一讲我们介绍关于广义函数的一些基本知识. 首先介绍由C^∞函数构成的若干测试函数空间的定义及其拓扑(收敛性), 而这些空间上连续线性泛函就构成各类广义函数. 然后介绍广义函数的求导、卷积及Fourier变换等运算及其性质.

一 测试函数空间

1. Schwartz速降函数空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

定义1. 设f是$\mathbb{R}^d$上的C^∞复值函数,若对任意多重指标α,β, 成立

$$\rho_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta f(x)|<+\infty,$$

则称f为*Schwartz*函数.所有*Schwartz*函数的集合记为$S(\mathbb{R}^d)$, 称为*Schwartz*速降函数空间. 这是一个线性空间.

这里$\{\rho_{\alpha,\beta}\}$是$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上一族半范数. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$是一个Frechet空间(可度量化的完备的局部凸拓扑线性空间), 即:

- ◊ 可度量化: 若$f,g\in S(\mathbb{R}^n)$, 定义距离

$$d(f,g)=\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\frac{\rho_j(f-g)}{1+\rho_j(f-g)},$$

  其中ρ_j为$\rho_{\alpha,\beta}$ 的一个列举. 不难验证d是$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上的一个度量(满足正定性、对称性及三角不等式).

- ◊ 关于d完备: 可验证任一Cauchy列都收敛;
- ◊ 局部凸: 原点有一个凸邻域$\{f:\rho_{\alpha,\beta}(f)<r\}$, 其中$r\in\mathbb{Q},\alpha,\beta$为多重指标.

例1. $e^{-|x|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $e^{-|x|}\notin\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

例2. 若$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,则对任何重指标$\alpha,\beta$, 成立$\partial^\alpha f, x^\beta f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

例3. 若$f_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$，则

$$f_1\otimes f_2(x_1,x_2,\ldots,x_{n+m})=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)f_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

习题 1. $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Leftrightarrow\forall$重指标$\alpha,\beta,|\partial^\alpha(x^\beta f(x))|<C_{\alpha,\beta}$. □

下面的结论在今后将会经常用到.

习题 2. $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$当且仅当$\forall$重指标$\alpha$, 自然数$N$, 存在常数$C_{\alpha,N}>0$使得$|\partial^\alpha f(x)|\le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}$. □

定义2 (收敛)**.** 设$f_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 若$\forall\alpha,\beta$有$\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f)=0$,则称$f_k\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}f(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

习题 3.证明上述求导、乘以多项式、加法等运算均关于上述拓扑连续. □

例4. 固定$x_0\in\mathbb{R}^d, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. 定义$f_k(x)=f(x+\frac{x_0}{k})$,则$f_k\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}f(S(\mathbb{R}^d))$.

定义3 (卷积). 如果$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

定理1. 如果$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,则$(f*g)(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$且$\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g=f*\partial^\alpha g$.

证明. 1. 先证$\partial_j(f*g)=\partial_jf*g$, 这是由于成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0}\frac{(f*g)(x+he_j)-(f*g)(x)}{h}\\
=&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d}[f(x+he_j-y)-f(x-y)]g(y)\mathrm{d}y\\
=&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d}[f(z+he_j)-f(z)]g(x-z)\mathrm{d}z\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(z+he_j)-f(z)]g(x-z)\mathrm{d}z\quad(\text{Lebesgue控制收敛定理})\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}\partial_jf(z)g(x-z))\mathrm{d}z\\
=&\partial_jf*g
\end{aligned}.$$

从而$\partial_i\partial_j(f*g)=\partial_i(\partial_jf*g)=\partial_i\partial_jf*g$. 类似可归纳证明$\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g\Rightarrow f*g\in C^\infty$.

2. $f*g$快于任何多项式衰减. 对任何充分大的N, 我们有

$$\begin{aligned}
|f*g(x)|&\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C_N\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\quad(\text{取}N>n)\\
&\le C_N\int_{|x-y|>\frac12|x|}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\\
&\quad+C_N\int_{|x-y|\le\frac12|x|}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\\
&\triangleq I_1+I_2.
\end{aligned}$$

这里

$$I_1\le C\left(1+\frac{|x|}{2}\right)^{-N}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|y|)^{-N}\mathrm{d}y\le C_N(1+|x|)^{-N}.$$

又由于$|x|-|y|\le|x-y|\le\frac12|x|$, 那么$|y|\ge\frac12|x|$, 从而有

$$\begin{aligned}
I_2&\le C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{|x-y|\le\frac12|x|}(1+|x-y|)^{-N}\mathrm{d}y\\
&=C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{|z|\le\frac12|x|}(1+|z|)^{-N}\mathrm{d}z\\
&=C(1+\tfrac{|x|}{2})^{-N}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|z|)^{-N}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

因此$|f*g(x)|\le C_N(1+|x|)^{-N}$. 于是得到

$$|\partial^\alpha(f*g)|=|\partial^\alpha f*g|\le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N},$$

从而$f*g\in\mathcal{S}$. □

定理2. *Fourier*变换（逆变换）为$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上的同构.

证明. 1. 我们需要证明: ① $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Rightarrow\hat{u},\check{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; ②Fourier(逆)变换是线性映射,且可逆; ③连续性:$u_k\to u\,(S(\mathbb{R}^d))$意味着$\hat{u_k}\to\hat{u}\,(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$以及$\check{u_k}\to\check{u}\,(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

2. 下证①$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Rightarrow\hat{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. 首先不难看出$\partial^\alpha\hat{u}(\xi)=F_{x\to\xi}[(-ix)^\alpha u(x)(\xi)$ 存在, 即$\hat{u}\in C^\infty$. 其次,

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(\hat{u}) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta\hat{u}|\\ &= C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\widehat{(x^\beta u)}|=C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|(\widehat{\partial^\alpha(x^\beta u)})|\\ &\le C'\|\partial^\alpha(x^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\le C'\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le n}}\rho_{\alpha,\beta}(u)<+\infty.\end{aligned}$$

3. 因为$\mathcal{S}\subset L^2$, 所以Fourier变换可逆且其逆就是Fourier逆变换.

4. 下证③$u_k\to 0$, 则$\hat{u_k}\to 0$, 即对任何重指标α,β, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{\alpha,\beta}(\hat{u_k})=0$. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|x^\alpha\partial^\beta\hat{u_k}\|_{L^\infty} &\le C\lim_{k\to\infty}\|\widehat{\partial^\alpha(x^\beta u_k)}\|_{L^\infty}\\ &\le C\lim_{k\to\infty}\|\partial^\alpha(x^\beta u_k)\|_{L^1}\\ &\le C\lim_{k\to\infty}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le n}}\rho_{\alpha,\beta}(u_k)=0.\end{aligned}$$

□

下面的结论以后会用到.

例5. 对 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 及 $e_j=(0,\cdots,0,1,0\cdots,0)$, $h\neq 0$, 当 $h\to 0$ 时, $(\tau^{-he_j}\varphi-\varphi)/h$ 以 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的拓扑收敛到 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$.

证明. 对 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 及任意的重指标 α,β,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha\partial^\beta\left(\frac{\tau^{-he_j}\varphi(x)-\varphi(x)}{h}-\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right)\right| &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^\beta\frac{\partial^2\varphi(x+\theta\tau he_j)}{\partial x_j^2}\cdot(\theta h)|\\ &\le C|h|\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^{\tilde{\beta}}\varphi|\to 0,\qquad \text{当 } h\to 0,\end{aligned}$$

其中 $|\tilde{\beta}|=|\beta|+2$, $\theta,\tau\in[0,1]$, 并利用了$h\to 0$时$\left|\frac{x^\alpha}{(x+he_j)^\alpha}\right|$的一致有界性. □

2. 其它测试函数空间: $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和$C^\infty(\mathbb{R}^d)$

除了上述为Fourier变换量身定做的Schwatz空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 外,在偏微分方程和调和分析中还经常需要以下两类测试函数空间.

♡ $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)=\left\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^d):u\text{ 的支集是紧集}\right\}$.

收敛性. 设$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的一列函数, 且存在紧集 K 使得$\operatorname{supp}f_k\subset K$. 若对于任何多重指标$\alpha$, 都成立

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha(f_k-f)(x)|=0,$$

则称f_k在$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$中收敛到f, 记作$f_k\to f\,(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

♡ $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

收敛性. 设$f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\{f_k\}$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的一列函数, 若$\forall\alpha,N\in\mathbb{N}$ 成立

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f_k-f)=0,$$

则称f_k在$C^\infty(\mathbb{R}^d)$中收敛到f, 记作$f_k\to f\,(C^\infty(\mathbb{R}^d))$. 这里半模$\tilde{\rho}_{\alpha,N}$ 定义为

$$\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f)=\sup_{|x|\le N}|\partial^\alpha f(x)|.$$

例6. *设$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 定义$\varphi_k(x)=\varphi(x-k)/k$. 序列$\varphi_k$几乎处处收敛到零, 且$\varphi_k\to 0\ (C^\infty)$, 但$\varphi_k$并不在$C_0^\infty$中收敛, 也不在$\mathcal{S}$中收敛.*

由上述收敛性我们有如下连续嵌入关系,且前者在后者中是稠密的:

$$C_0^\infty\subset\mathcal{S}\subset C^\infty. \tag{3.1}$$

二　广义函数及其基本运算

1. 广义函数的定义及例

广义函数就是定义在测试函数空间上的连续线性泛函.

◇ 广义函数: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)=(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$;

◇ 缓增广义函数: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)=(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))'$;

◇ 具有紧支集的广义函数: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)=(C^\infty(\mathbb{R}^d))'$.

我们常把线性泛函u作用于测试函数f写作$u(f)$ 或$\langle u,f\rangle$.

下面结果用“有界性”刻画连续性, 在理论分析中经常用到.

命题2. *设u是定义在给定测试函数空间上的线性泛函. 则*

1) $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\iff\forall K\subset\mathbb{R}^d, K$ 为紧集, $\exists m\in\mathbb{N}, C>0$, 使得 $|\langle u,f\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le m}\left\|\partial^\alpha f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, 其中$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且$\operatorname{supp}f\subset K$.

2) $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\iff\exists C>0, k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$, 使得 $|\langle u,f\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le k,|\beta|\le m}\rho_{\alpha\beta}(f)$ 对任意$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$均成立.

3) $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)\iff\exists C>0, k\in\mathbb{N}, N\in\mathbb{N}$, 使得 $|\langle u,f\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le k}\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f)$ 对任意$f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 均成立.

证明. 这里以2)为例给出证明. (在证明1)时注意支集在K上的C^∞函数在$C^k\ (k\in\mathbb{N})$半模下也是可度量化的.)

由缓增广义函数的定义显然可以得到“$\Longleftarrow$”(充分性). 下证必要性“$\Longrightarrow$”.

我们回忆, 称$B\subset T$是拓扑空间(X,T)的拓扑基, 若对于任意的开集$U\in T$ 及$x\in U$, 存在$V\in B$使得$x\in V\subset U$, 即B中开集通过并运算就可以得到T中的任意开集. 显然在度量空间(X,d)中, 所有球$B(x,\varepsilon)$就构成了由度量d诱导的拓扑的一个拓扑基. 现根据映射u的连续性, 由于$u(0)=0$, 从而$(-1,1)$的原象集应该是包含零函数的一个开集. 于是存在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$中的一个球$B(0,\delta)$使得对任意$f\in B(0,\delta)$, 成立$|\langle u,f\rangle|<1$.

根据前面对$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$距离的定义, 对上述确定的$\delta>0$, 可找到$k,m\in\mathbb{N}$使得集合$\{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d):\forall|\alpha|\le k,|\beta|\le m,\rho_{\alpha\beta}(f)<\delta/2\}$ 是$B(0,\delta)$的一个子集. (距离$d(f,0)$定义式中取j充分大使得$2^{-j}\le\delta/2$,

就可以使j后面无限项之和不大于$\delta/2$. 由此j就可以确定k和m.) 这样我们证明了$\exists k,m\in\mathbb{N},\delta>0$, 使得

$$\forall|\alpha|\le m,|\beta|\le k,\rho_{\alpha\beta}(f)<\delta\Longrightarrow|\langle u,f\rangle|<1.$$

现对$\tilde{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 令$f=\frac{\tilde{f}}{\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})}\delta$, 则由上述性质知$|\langle u,f\rangle|<1$, 于是

$$\begin{aligned}|\langle u,\tilde{f}\rangle| &= |\langle u,\frac{1}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})f\rangle|=\frac{1}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f})|\langle u,f\rangle| \\ &< \frac{1}{\delta}\sum_{|\alpha|\le m,|\beta|\le k|}\rho_{\alpha\beta}(\tilde{f}).\end{aligned}$$

所以取$C=\frac{1}{\delta}$, 即可得证. □

例7. 定义δ_0 为对$\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\langle\delta_0,f\rangle=f(0)$. 则$\delta_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

验证. 显然δ_0是C_0^∞上线性泛函. 设 $f_k\longrightarrow f(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$, 则$\langle\delta_0,f_k\rangle=f_k(0)\longrightarrow f(0)=\langle\delta_0,f\rangle$.

例8. 对局部可积函数 g , **约定** 通过定义线性泛函

$$L_g(f)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

可将 g 视为广义函数.

例如: $1,|x|^2\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),1,e^{|x|^2}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$等. 特别地, $L^p(1\le p\le\infty)$中的函数均可被视为缓增广义函数.

例9. 对任何有限 *Borel* 测度 μ, 通过定义线性泛函

$$L_\mu(f)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

可视μ为缓增广义函数. 显然$f_k\longrightarrow f\,(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))\Longrightarrow L_\mu(f_k)\longrightarrow L_\mu(f)$.

所以 Lebesgue 测度可视为缓增广义函数.

例10. 奇异函数$log|x|\in S'(\mathbb{R}^d)$.

例11. 对于函数 $g(x)$, 如果 $\exists C,k$, 使得对任意的 x, 有

$$|g(x)|\le C(1+|x|)^k,$$

则$g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

证明. 利用命题2 2), 对任意$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,成立

$$\begin{aligned}|L_g(f)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\le\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^m|f(x)|\right)\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{k-m}\mathrm{d}x \\ &\le C\sum_{|\alpha|\le l,|\beta|\le k}\rho_{\alpha\beta}(f).\end{aligned}$$

这里已取m充分大使得积分有限. □

例12. $\mathbb{R}$上既非函数又非测度的紧支广义函数的例子.

$$\langle u, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1} f(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}(f(x)-f(0))\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

证明. 显然$|u(f)|\le 2\|f'\|_{L^\infty}$, 从而若$f_k\to f\,(C^\infty(\mathbb{R}))$, 则$u(f_k)\to u(f)$. 此外, 利用分部积分, 有

$$\langle u, f\rangle = -\int_{-1}^{1} f'(x)\ln|x|\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon\ln|\varepsilon|\frac{f(-\varepsilon)-f(\varepsilon)}{2\varepsilon} = -\int_{-1}^{1} f'(x)\ln|x|\,\mathrm{d}x.$$

□

下面定义指出, 对广义函数空间, 我们应用其弱拓扑定义收敛性.

定义4. *称广义函数序列$u_k\in\mathcal{D}'$ (相应地$\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$)收敛到$u\in\mathcal{D}'$ (相应地$\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$), 若对于任何$f\in C_0^\infty$ (相应地$\mathcal{S}$, C^∞)都成立*

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k, f\rangle = \langle u, f\rangle.$$

容易看出广义函数的极限是唯一的. 此外由(3.1)知成立如下连续嵌入

$$\mathcal{E}'\subset\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}'.$$

2. 基本运算

广义函数理论的成功之处在于在很大限度内不仅包括了众多数学研究对象(演员), 而且具有丰富的结构和运算(设备). 下面介绍广义函数的一些常见运算及其局部性质.我们主要以$\mathcal{S}'$为例介绍.

1. 求导: 设$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 对任意重指标$\alpha$, 定义其导数$\partial^\alpha u\in\mathcal{S}'$ 如下: 对 $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle\partial^\alpha u, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha f\rangle.$$

2. Fourier 变换: $u\in S'(\mathbb{R}^d)$, 其Fourier变换$\hat{u}\in\mathcal{S}'$和逆变换$\check{u}\in\mathcal{S}'$定义为: 对 $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle\hat{u}, f\rangle = \langle u, \hat{f}\rangle,\quad \langle\check{u}, f\rangle = \langle u, \check{f}\rangle.$$

3. 平移算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其平移 $\tau^t u\in\mathcal{S}'$为:

$$\langle\tau^t u, f\rangle = \langle u, \tau^{-t} f\rangle.$$

这里$\tau^t f(x) = f(x-t)$, 而$t\in\mathbb{R}^t$为给定向量.

4. 伸缩算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其伸缩为 $\delta^a(u)\in\mathcal{S}'$:

$$\langle\delta^a(u), f\rangle = \langle u, a^{-n}\delta^{\frac{1}{n}}(f)\rangle.$$

这里$\delta^a f(x) = f(ax)$, 而$a>0$是给定的实数.

5. 反射算子: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义其反射 $\tilde{u}\in\mathcal{S}'$ 为

$$\langle\tilde{u}, f\rangle = \langle u, \tilde{f}\rangle,$$

这里$\tilde{f}(x) = f(-x)$.

6. 卷积: $\forall u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义其卷积$h*u\in\mathcal{S}'$为

$$\langle h*u,f\rangle=\langle u,\tilde{h}*f\rangle,$$

其中$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

平移、伸缩、反射、旋转等是$\mathbb{R}^d$的重要的不变群,所以上面相当于定义了在这些(坐标)变换下广义函数的变换形式. 请结合广义函数为光滑函数时特殊情形自己验证上述定义的合理性.

例13. 求 δ_0 的傅里叶变换.

解. 因为$\langle\hat{\delta_0},f\rangle=\langle\delta_0,\hat{f}\rangle=\hat{f}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ix\cdot 0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x$, 所以 $\hat{\delta_0}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$.

例14. 求$\partial^\alpha\delta_0$ 的傅里叶变换.

解. 由于

$$\begin{aligned}\langle(\partial^\alpha\delta_0)^\wedge,f\rangle &= \langle\partial^\alpha\delta_0,\hat{f}>\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta_0,\partial^\alpha\hat{f}\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\hat{f}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}(ix)^\alpha f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $(\partial^\alpha\delta_0)^\wedge=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(ix)^\alpha$.

从这两个例子看,往往性质较差的函数的Fourier变换性质倒比较好. 所以有时可对Fourier变换开展研究,再回到原函数本身.

例15. 设 $h\in S(\mathbb{R}^d)$, 求 $h*\delta_{x_0}$

解. 根据定义,

$$\begin{aligned}\langle h*\delta_{x_0},f\rangle &= \langle\delta_{x_0},\tilde{h}*f\rangle=(\tilde{h}*f)(x_0)=\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{h}(x_0-y)f(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}h(y-x_0)f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以 $(h*\delta_{x_0})(y)=h(y-x_0)$. □

注意一般的两个广义函数的乘积是没有定义的, 所以在出现两个广义函数相乘时必须特别小心. 我们下面主要研究卷积及Fourier变换两种运算.

3. 局部性质

定义5. 设 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, 定义 u 的支集为 (注意这里横线代表取闭包)

$$\operatorname{supp} u=\overline{\cap\{K^c:K\subset\mathbb{R}^d,\forall\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\operatorname{supp}\varphi\subset K,\text{则}\langle u,\varphi\rangle=0\}},$$

即 $\operatorname{supp} u$ 是最小的闭集 M, 当 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 的支集与 M 不相交时, $\langle u,\varphi\rangle=0$.

例16. 已知 $\langle\delta_{x_0},f\rangle=f(x_0)$, 则 $\operatorname{supp}\delta_{x_0}=\{x_0\}$

定义6. 设 h 是可积函数, 称 u 在开集 V 上等同于 h, 若$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且 $\operatorname{supp} u\subset V$, 成立 $\langle u,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}h\varphi\mathrm{d}x$.

命题3. 1) 设 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, 则 $\operatorname{supp} u$为紧集; 2)若 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, 且 $\operatorname{supp} u$为紧集, 则 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

证明. 1. $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 由连续性, 存在$C,m$和$N$使得

$$|\langle u,f\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le m}\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f),\quad 其中\quad \tilde{\rho}_{\alpha,N}(f)=\sup_{x\in B(0,N)}|\partial^\alpha f(x)|.$$

若取 $f(x)$ 满足 $\operatorname{supp} f\cap B(0,N)=\emptyset$, 则$\langle u,f\rangle=0$, 从而得知 $\operatorname{supp} u\subset B(0,N)$. 由定义 $\operatorname{supp} u$是闭集,从而证得它是紧集.

2. 设 $\operatorname{supp} u\subset B(0,N)$; 令 $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足在 $B(0,N)$ 上 $\eta\equiv 1$, 在 $B(0,N+1)$ 之外$\eta\equiv 0$. 若 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 则在 $B(0,N)$上 $f(1-\eta)\equiv 0$, 所以

$$\langle u,f\rangle=\langle u,\eta f\rangle+\langle u,(1-\eta)f\rangle=\langle u,\eta f\rangle.$$

从而, 对 $\forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, 可定义 $\langle u,\varphi\rangle=\langle u,\eta\varphi\rangle$; 易验证此定义与 η 的选取无关,且(利用求导的Leibniz法则和η已知的性质)

$$|\langle u,\varphi\rangle|=|\langle u,\eta\varphi\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in B(0,N)}|\partial^\alpha(\eta\varphi)(x)|\le 有限个\tilde{\rho}_{\alpha,N}(\varphi)之和.$$

所以$u\in\mathcal{E}'$. $\square$

第四讲　广义函数(二): 卷积与Fourier变换

这一讲我们详细地介绍有关广义函数卷积和Fourier变换的一些较为深入的性质.

一　广义函数和卷积

1. $\mathcal{S}$与$\mathcal{S}'$的卷积

定理1. 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

1) $\varphi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且成立公式$\partial^\alpha(\varphi * u) = (\partial^\alpha \varphi) * u = \varphi * (\partial^\alpha u)$;

2) $\varphi * u$ 及其任意阶导数在 $|x| \to \infty$ 时, 至多以多项式增长; 即对任意重指标 α, $\exists C_\alpha, k_\alpha > 0$, 使得 $|\partial^\alpha(\varphi * u)(x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}$;

3) 若 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\varphi * u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

证明. 1. 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, φ、$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么根据定义, 就有

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi * u, \psi \rangle &= \langle u, \tilde{\varphi} * \psi \rangle \qquad [\text{其中 } \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)] \\
&= \langle u, \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\cdot - y)\psi(y)\mathrm{d}y \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tilde{\varphi}(\cdot - y)\rangle \psi(y)\mathrm{d}y \quad [\text{利用积分Riemann和在}\mathcal{S}\text{中收敛}] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \tau^y \tilde{\varphi}\rangle \psi(y)\mathrm{d}y \qquad [\text{其中 } \tau^y\varphi(x) = \varphi(x-y)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau^y \tilde{\varphi}) \psi(y)\mathrm{d}y \qquad [\text{此处 } u(\tau^y\tilde{\varphi}) \text{ 为关于 } y \text{ 的函数}]
\end{aligned}
$$

所以 $(\varphi * u)(y) = u(\tau^y \tilde{\varphi})$, 即 $\varphi * u$是个点点有定义的函数. 这里Riemann和在$\mathcal{S}$中收敛将在第5步予以验证.

2. 下证 $(\varphi * u)(y) \in C^\infty$, 我们只需证 $(\varphi * u)(y) \in C^1$ 即可. 由导数和平移算子定义,

$$
\frac{(\varphi * u)(y + he_j) - (\varphi * u)(y)}{h} = \frac{u(\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi}) - u(\tau^y\tilde{\varphi})}{h} = u\left(\frac{\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi} - \tau^y\tilde{\varphi}}{h}\right),
$$

所以根据例上一讲例5的结论,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\tau^{-he_j}(\varphi * u)(y) - (\varphi * u)(y)}{h} &= \lim_{h\to 0} u\left(\frac{\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi} - \tau^y\tilde{\varphi}}{h}\right) \\
= \ u\left(\lim_{h\to 0}\frac{\tau^{y+he_j}\tilde{\varphi} - \tau^y\tilde{\varphi}}{h}\right) &= \left\langle u, \frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi})}{\partial y_j}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

根据定义, 我们有

$$
\frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi}(x))}{\partial y_j} = \frac{\partial(\tilde{\varphi}(x-y))}{\partial y_j} = \frac{\partial(\varphi(y-x))}{\partial y_j} = (\partial_j\varphi)(y-x) = \widetilde{(\partial_j\varphi)}(x-y) = \tau^y\widetilde{(\partial_j\varphi)}(x). \tag{4.1}
$$

这里$\partial_j g$表示对函数g的第j个自变量求偏导数. 于是我们得到

$$
\partial_j(\varphi * u)(y) = u(\tau^y\widetilde{(\partial_j\varphi)}) = (\partial_j\varphi) * u(y).
$$

这就证明了 $\partial_j(\varphi * u) = (\partial_j\varphi * u)$.

我们还需证明$\partial_j(\varphi*u)=\varphi*(\partial_j u)$. 从(4.1)第四个等号出发, 成立

$$\frac{\partial(\tau^y\tilde{\varphi}(x))}{\partial y_j}=(\partial_j\varphi)(y-x)=-\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi(y-x)),$$

从而

$$\partial_j(\varphi*u)(y)=\left\langle u,-\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi(y-x))\right\rangle=\left\langle\partial_j u,\varphi(y-x)\right\rangle=\partial_j u(\tau^y\tilde{\varphi})=\varphi*(\partial_j u).$$

注意在这里计算时$\tau^y\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(x-y)=\varphi(y-x)$. 由此利用归纳法, 对于任意重指标 α 可得 $\partial^\alpha(\varphi*u)=(\partial^\alpha\varphi*u)=\varphi*(\partial^\alpha u)$, 故 $\varphi*u\in C^\infty$.

3. 下证结论 2). 由u的连续性及φ速降性质, (u_x表示u是作用在以x为自变量测试函数上的广义函数)

$$\begin{aligned}
&|\partial^\alpha(\varphi*u)(y)|=|u(\tau^y\widetilde{\partial^\alpha\varphi})|=|\langle u,\widetilde{\partial^\alpha\varphi}(\cdot-y)\rangle|=|\langle u_x,\partial^\alpha\varphi(y-x)\rangle|\\
\le\ & C\sum_{|\gamma|\le m,|\beta|\le k}\|x^\gamma\partial_x^{\alpha+\beta}\varphi(y-x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_x)}\\
=\ & C\sum_{|\gamma|\le m,|\beta|\le k}\|(y-z)^\gamma\partial_z^{\alpha+\beta}\varphi(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_z)}\\
\le\ & CC_M\|(|y|+|z|)^m(1+|z|)^{-M}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_z)}\\
\le\ & C'_M(1+|y|)^m \qquad \text{取 } M=m.
\end{aligned}$$

最后一步利用$a+b\le(1+a)(1+b)$对$a,b>0$成立.

4. 对 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 要证 $\varphi*u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 只需证: $\forall\alpha,M>0$, 成立

$$|\partial^\alpha(\varphi*u)|\le C_{\alpha,M}(1+|y|)^{-M}.$$

事实上, 利用φ的速降性质,

$$\begin{aligned}
|(\varphi*u)(y)| &= |\langle u_x,\varphi(y-x)\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in B(0,N)}|\partial_x^\alpha\varphi(y-x)|\\
&\le C_M\sup_{x\in B(0,N)}(1+|y-x|)^{-M}\\
&\le C_M\frac{1}{(1+|y|/2)^M} \quad \text{当 } |y|\ge 2N, \text{ 时, 成立 } |x|\le|y|/2, \text{ 则 } |y|/2\le|y|-|x|\le|y-x|.\\
&\le C'_M\frac{1}{(1+|y|)^M}.
\end{aligned}$$

类似地对$\partial^\alpha(\varphi*u)$可得相应衰减性结论.

5. 最后我们说明第一步中积分Riemann和按$\mathcal{S}$拓扑收敛. 将方体 $[-N,N]^n$ 分割为边长为 $\frac{1}{N}$ 的 $(2N^2)^n$ 个小方体 Q_m, 记 y_m 为 Q_m 的中心, 则 Riemann和为 $\displaystyle\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|$.

我们需要证明对任意α,β, Riemann和 $\displaystyle\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|)$ 依 $L^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ 范数收敛到 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$, 即

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|)-\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y\\
&-\int_{([-N,N]^n)^c}x^\alpha\partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y\xrightarrow{L^\infty}0, \qquad \text{当 } N\to\infty.
\end{aligned}$$

下面记

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha \partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)|Q_m|) - \sum_{m=1}^{(2N^2)^n} \int_{Q_m} x^\alpha \partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y;\\
II &= \int_{([-N,N]^n)^c} x^\alpha \partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

首先分析II:

$$
\begin{aligned}
|II| &\le \int_{([-N,N]^n)^c} |x^\alpha \partial_x^\beta(\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C_M|x|^{|\alpha|}\int_{([-N,N]^n)^c} \frac{1}{(1+|x-y|)^M}\frac{1}{(1+|y|)^M}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

这里控制积分的困难在于x, y都可以非常大,它们之间存在竞争. 分两种情况. 若 $|x-y|\ge \dfrac{|x|}{2}$, 则

$$
\frac{1}{(1+|x-y|)^M}\le \frac{1}{(1+|x|/2)^M}\le C_M\frac{1}{(1+|x|)^M},
$$

从而,

$$
\frac{1}{(1+|x-y|)^M(1+|y|)^M}\le C_M\frac{1}{(1+|x|)^M}\frac{1}{(1+|y|)^M}\le C_M\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}};
$$

又若 $||x|-|y||\le|x-y|\le\frac{|x|}{2}$, 则 $|x|\le 2|y|$, 舍弃第一项, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+|x-y|)^M(1+|y|)^M}\le\frac{1}{(1+|y|)^M} &= \frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\\
&\le C_M\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}.
\end{aligned}
$$

所以,

$$
|II|\le C_M'|x|^{|\alpha|}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y \tag{4.2}
$$

在 (4.2) 式中，取定 $M\ge 2|\alpha|$ 且 $\dfrac{M}{2}>n+1$, 则利用积分收敛性,就得到

$$
|II|\le C_M'\int_{([-N,N]^n)^c}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\to 0 \quad 当\ N\to\infty.
$$

另一方面, 利用中值定理, 成立($\xi=\theta y_m+(1-\theta)y$, $\theta\in[0,1]$)

$$
\begin{aligned}
|I| &= \left|\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha\int_{Q_m}[\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y_m)\psi(y_m)-\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)]\mathrm{d}y\right|\\
&= \left|\sum_{m=1}^{(2N^2)^n} x^\alpha\int_{Q_m}\nabla_y[\partial_x^\beta\tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)]|_{y=\xi}(y_m-y)\mathrm{d}y\right|\\
&\le \sum_{m=1}^{(2N^2)^n}|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{Q_m}C_M\frac{1}{(1+|x-\xi|)^M}\frac{1}{(1+|\xi|)^M}\mathrm{d}y\\
&\le C_M'\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}|x|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|x|)^{M/2}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y\\
&\le C_M'\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y \qquad [已取\ M\ge 2|\alpha|].
\end{aligned}
$$

这里第三行中控制积分的方法与对II的处理一样(即分$|x-\xi|\geq|x|/2$和$|x-\xi|<|x|/2$. 对于后一种情形, 成立$|\xi|\geq|x|/2$). 由于 $1+|\xi|\geq 1+\frac{|\xi|}{2}$, 从而 $\frac{1}{(1+|\xi|)^{M/2}}\leq\frac{1}{(1+|\xi|/2)^{M/2}}$, 故

$$|I|\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(2+|\xi|)^{M/2}}\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

又由于 $y=\xi-\theta(y_m-y)$, $\theta\in[0,1]$, 从而当N充分大时 $|y|\leq|\xi|+|y_m-y|\leq|\xi|+1$. 代入 (4.3) 式, 得

$$\begin{aligned}|I| &\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\sum_{m=1}^{(2N^2)^n}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{\cup_{m=1}^{(2N^2)^n}Q_m}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\\ &\leq C''_M\frac{\sqrt{n}}{N}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|y|)^{M/2}}\mathrm{d}y\leq C'''_M\frac{1}{N}\to 0 \qquad \text{当 } N\to\infty.\end{aligned}$$

□

类似于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换将卷积变为乘法, 我们有

定理2. 对任意的 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 成立 $\widehat{\varphi*u}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{\varphi}\hat{u}$.

证明. 对任意的 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\begin{array}{ll}\langle\widehat{\varphi*u},\psi\rangle & \langle(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{\varphi}\hat{u},\psi\rangle\\ =\langle\varphi*u,\hat{\psi}\rangle & =(2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle\hat{u},\hat{\varphi}\psi\rangle\\ =\langle u,\tilde{\varphi}*\hat{\psi}\rangle & =(2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle u,(\hat{\varphi}\psi)^\wedge\rangle\\ & =\langle u,\hat{\hat{\varphi}}*\hat{\psi}\rangle.\end{array}$$

所以只需要证明 $\tilde{\varphi}=\hat{\hat{\varphi}}$, 或者$\check{\hat{\varphi}}=\varphi$, 而这由定义是显然的. □

2. 其它卷积

上面我们考虑了广义函数 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 与速降函数 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) 的卷积. 事实上, 对于以下情形我们也可以定义卷积:

- $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 此时可以定义 $u*v:\langle u*v,\varphi\rangle=\langle v,\tilde{u}*\varphi\rangle$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 由前面定理可知 $\tilde{u}*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 容易验证 $u*v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- 当$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$时也可按 $\langle u*v,\varphi\rangle=\langle v,\tilde{u}*\varphi\rangle$, $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$定义它们的卷积. 这时要利用$\operatorname{supp}\tilde{u}*\varphi\subset\operatorname{supp}\tilde{u}+\operatorname{supp}\varphi$的性质保证$\tilde{u}*\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 此时可以定义 $u*\varphi(x)=\langle u_y,\ \varphi(x-y)\rangle$. 可以证明 $u*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (留作习题.) 这里$u_y$表示$u$是作用在以$y$为自变量函数上的广义函数.

对上述定义的卷积, 都成立公式$\partial^\alpha(u*v)=(\partial^\alpha u)*v=u*(\partial^\alpha v)$.

3. 卷积的应用: 稠密性

我们知道 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在许多的函数空间 (比如$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ,$L^p(1\leqslant p<\infty)$)中稠密. 令人满意的是一一纵使我们将函数的定义扩展到广义函数空间 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 我们仍然可以有这种稠密性. 更准确地说, 我们有如下定理:

定理3. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

证明. 我们只证明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 我们分两步证明:

1. 证明 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

取标准光滑化子 φ, 即要求 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}x=1,\tilde{\varphi}=\varphi$. 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$. 于是我们有

$$u_\varepsilon := u*\varphi_\varepsilon=\langle u_y,\varphi_\varepsilon(x-y)\rangle\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

我们断言: $\langle u_\varepsilon,\psi\rangle\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\langle u,\psi\rangle$, $\forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 即有 $u_\varepsilon\to u$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, 进而可知 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle u_\varepsilon,\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle u_y,\varphi_\varepsilon(x-y)\rangle\psi(x)\mathrm{d}x=\lim_{d(\Delta_i)\to 0}\sum_i\langle u_y,\varphi_\varepsilon(x_i-y)\rangle\psi(x_i)|\Delta_i| \\
&= \lim_{d(\Delta_i)\to 0}\langle u_y,\sum_i\varphi_\varepsilon(x_i-y)\psi(x_i)|\Delta_i|\rangle\quad [\text{由}\operatorname{supp}\psi\text{紧性,此处为有限和}] \\
&= \langle u_y,\lim_{d(\Delta_i)\to 0}\sum_i\varphi_\varepsilon(x_i-y)\psi(x_i)|\Delta_i|\rangle\quad [\text{Riemann 和在}C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\text{中收敛,留作习题}] \\
&= \langle u_y,\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\mathrm{d}x\rangle=\langle u_y,\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(y-x)\psi(x)\mathrm{d}x\rangle \\
&= \langle u_y,\psi_\varepsilon\rangle\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\langle u,\psi\rangle.\quad [\text{利用}\psi_\varepsilon\text{在}C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\text{中收敛到}\psi\text{, 留作习题}]
\end{aligned}$$

于是断言成立, 这就完成了证明的第一步. [1]

2. 现在证明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

为此我们考虑函数截断的方法. 取 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 满足 $\psi\equiv 1$ 在 $B(0,1)$上; $\psi\equiv 0$ 在 $B(0,2)$外. 令 $\psi_k(x)=\psi(\frac{x}{k})$, 再取 $\{u_k\}\subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $u_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. 显然, 我们有 $\psi_k u_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们断言: $\psi_k u_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}u$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

事实上, 对任意 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle\psi_k u_k,\varphi\rangle=\langle u_k,\psi_k\varphi\rangle=\langle u_k,\varphi\rangle+\langle u_k,\varphi(\psi_k-1)\rangle$$

(注意到 $\varphi(\psi_k-1)$ 当 k 充分大时为零)

$$=\langle u_k,\varphi\rangle+\langle u_k,0\rangle=\langle u_k,\varphi\rangle\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\langle u,\varphi\rangle.$$

□

二 广义函数和Fourier变换

1. Fourier变换是$\mathcal{S}'$上同构

定理4. *Fourier* 变换$\mathcal{F}$为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的同构变换.

证明. 1. 显然$\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是线性映射.

2. $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续映射. 验证: 设$u_k\longrightarrow u$, 因为

$$\langle\hat{u}_k,f\rangle=\langle u_k,\hat{f}\rangle\longrightarrow\langle u,\hat{f}\rangle=\langle\hat{u},f\rangle$$

所以$\hat{u}_k\longrightarrow\hat{u}$.

[1]注意成立如下支集关系: $\operatorname{supp}\varphi*\psi\subset\operatorname{supp}\varphi+\operatorname{supp}\psi$.

3. $\mathcal{F}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是可逆映射. 事实上, 对 $\forall u\in\mathcal{S}',f\in\mathcal{S}$

$$\langle (u^\vee)^\wedge,f\rangle=\langle (u^\vee),f^\wedge\rangle=\langle u,(f^\wedge)^\vee\rangle=\langle u,f\rangle.$$

即 $(u^\vee)^\wedge=u$. 同理 $(u^\wedge)^\vee=u$. □

2. $\mathcal{E}'$上Fourier变换及Paley-Wiener-Schwartz 定理

定理5. 设$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{u}(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left\langle u_x,e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle$, 它可以开拓为$\mathbb{C}^n$上的全纯函数.

证明. 对$\varphi\in\mathcal{S}$, 利用积分$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$的黎曼和在$C^\infty(\mathbb{R}^n)$中收敛(留作习题), 就得到

$$\begin{aligned}\langle\hat{u}(\xi),\varphi(\xi)\rangle &= \langle u_x,\hat{\varphi}\rangle=\langle u_x,\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\rangle\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\langle u_x,e^{-ix\cdot\xi}\rangle\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即$\hat{u}(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left\langle u_x,e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle$.

以下忽略常数$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$. 由于$(ix)^\alpha e^{-ix\cdot z}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 可以定义 $F(z)=\left\langle u_x,e^{-ix\cdot z}\right\rangle$. 不难验证$\mathbb{C}\ni h\to 0$时(留作习题)

$$\frac{e^{-ix\cdot(z+he_i)}-e^{-ix\cdot z}}{h}\to\frac{\partial}{\partial z}(e^{-ix\cdot z})=-ix_je^{-ix\cdot z}\ (\text{in } C^\infty),$$

所以还成立

$$\partial^\alpha F(z)=\langle u_x,(-ix)^\alpha e^{-i\langle x,z\rangle}\rangle.$$

根据定义, $F(z)$ 是解析的(或称作全纯的). □

定理6. (1) *(***紧支光滑函数的** *Paley-Wiener-Schwartz* **定理***)* 设 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 则 $\hat{u}$ 可延拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$, 且满足

$(P1)$ $\forall N\in\mathbb{N},\exists\, C_N>0$ 为常数, 使得

$$|F(z)|\leqslant C_N(1+|z|)^{-N}e^{A|\Im z|}.$$

反之, 若 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$ 满足 *(P1)*, 则存在 $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 使得 $\hat{u}(\xi)=F(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$.

(2) *(***紧支广义函数的** *Paley-Wiener-Schwartz* **定理***)* 设 $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 则 $\hat{u}$ 可以延拓为 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(z)$, 且满足

$(P2)$ $\exists\, C,N>0$ 为常数, 使得

$$|F(z)|\leqslant C(1+|z|)^Ne^{A|\Im z|}.$$

反之, 若$\mathbb{C}^n$上的解析函数$F(z)$满足 *(P2)*, 则存在$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\operatorname{supp}u\subseteq B(0,A)$, 使得$\hat{u}(z)=F(z)$.

(1)**的证明.** 先证"$\Rightarrow$": 我们分以下几步证明. 为简洁起见,我们略去Fourier变换中的因子$1/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

第一步: 解析开拓. 注意到对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有 $\hat{u}(\xi)=\int_{|x|\leqslant A}u(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x$. 我们可以将其延拓如下:

$$F(z)=\int_{|x|\leqslant A}u(x)e^{-ix\cdot z}\mathrm{d}x,\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

这是有意义的, 因为

$$|e^{-ix\cdot z}| = |e^{x\cdot\Im z}e^{-ix\cdot\Re z}| \leqslant e^{A|\Im z|}. \tag{4.4}$$

第二步: $F(z)\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$. 由估计式 (4.4)以及$u$ 有紧支集, 我们可以交换求导与积分的顺序, 于是显然有 $F(z)\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$.

第三步: $F(z)$在 $\mathbb{C}^n$ 上解析, 即有 $\bar\partial F = \sum \frac{\partial}{\partial \bar z_j}F d\bar z_j = 0$.

这是由于

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j}F = \int_{|x|\leqslant A} u(x)\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j}e^{-ix\cdot z}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

注记. 由$F(z)$在 $\mathbb{C}^n$ 上解析可知非零 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier变换不可能具有紧支集. 如若不然, 全纯函数 F将在具有聚点的无限个点上为零, 因而 $F\equiv 0$, 于是 u将恒为零.

第四步: (P1)成立. 对任意的重指标 α, 利用分部积分

$$\begin{aligned}|z^\alpha F(z)| &= C\left|\widehat{\partial^\alpha u}(z)\right| = C\left|\int_{|x|\leqslant A}\partial^\alpha u(x)e^{-ix\cdot z}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant C\int_{|x|\leqslant A}|\partial^\alpha u(x)|\left|e^{-ix\cdot z}\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant C_\alpha e^{A|\Im z|},\end{aligned}$$

因而有

$$(1+|z|)^N|F(z)| \leqslant C_N e^{A|\Im z|}, \quad \forall N\in\mathbb{N}.$$

由此立得(P1)成立.

再证"$\Leftarrow$": 设 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 $F(\xi)$ 满足(P1), 我们利用Fourier逆变换定义如下 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

我们将分两步证明这就是我们要找的函数.

第一步: $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对任意的重指标 α, 由 $F(\xi)$ 的衰减性,

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha u &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha\left(e^{ix\cdot\xi}\right)F(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}(i\xi)^\alpha\left(e^{ix\cdot\xi}\right)F(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &< \infty.\end{aligned}$$

所以 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

第二步: u 具有紧支集.

对于固定的 $\eta_0\in\mathbb{R}^n$, 由 F的衰减性, 当 $|\xi|\to\infty$ 时有

$$\left|\int_0^{\eta_0}e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)\mathrm{d}\eta\right| \to 0.$$

因此, 利用关于围道的Cauchy积分定理, 我们有

$$\begin{aligned}u(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

于是

$$|u(x)| \leqslant Ce^{-x\cdot\eta}\int_{\mathbb{R}^n}|F(\xi+i\eta)|d\xi.$$

取 N足够大, 使得 $(1+|\xi|+|\eta|)^{-N}\le(1+|\xi|)^{-N}$可积. 再次利用 F的衰减性得:

$$|u(x)| \leqslant C_N e^{-x\cdot\eta+A|\eta|}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^N}=\tilde{C}_N e^{-x\cdot\eta+A|\eta|}.$$

由 η的任意性, 取 $\eta=t\frac{x}{|x|}, t>0$, 得

$$|u(x)| \leqslant \tilde{C}_N e^{t(A-|x|)}, \quad \forall t>0.$$

因此, 当 $|x|>A$ 时, 令 $t\to\infty$可知 u 在 $B(0,A)$之外为0, 即有 $\operatorname{supp} u\subseteq B(0,A)$. □

(2)的证明. **先证**“$\Rightarrow$”: 前一断言已在定理5中证明. 现在我们证明$F(z)$ 满足性质 (P2).

为此, 取函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, 它在$(-\infty,1/2)$中取值为1, 在$(1,\infty)$中取值为零. 置

$$\varphi_\xi(x)=e^{-ix\cdot\xi}\psi(|\xi|(|x|-A))\in C^\infty,$$

它在u的支集$\{|x|\le A\}$的邻域上与$e^{-ix\cdot\xi}$一致. 于是由连续性,

$$|F(\xi)|=|\langle u_x,\varphi_\xi(x)\rangle|\le C\sum_{|\alpha|\le N}\sup_x|D_x^\alpha\varphi_\xi(x)|.$$

因为φ_ξ的支集在$|x|\le A+\frac{1}{|\xi|}$上, 所以

$$|e^{-ix\cdot\xi}|\le e^{(A+\frac{1}{|\xi|})|\mathrm{Im}\xi|}\le e^{A|\mathrm{Im}\xi|+1},$$

而$D_x^\alpha\varphi_\xi(x)$至多增加关于$|\xi|$的多项式项, 其次数被这里的N控制.所以(P2)成立.

再证“$\Leftarrow$”. 注意到当 $F(z)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上取值时成立

$$|F(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^N, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

于是 $F(\xi)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 故存在 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\hat{u}=F(\xi)$.

取 φ_ε 如定理 3 中所定义的磨光核. 则 $u*\varphi_\varepsilon$ 的 Fourier 变换 $(2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{\varphi}_\varepsilon$ 有 $\mathbb{C}^n$ 上的解析延拓 $F(z)\hat{\varphi}_\varepsilon(z)$, 且满足($M$是任意自然数)

$$\begin{aligned}|F(z)\hat{\varphi}_\varepsilon(z)| &\leqslant C(1+|z|)^N e^{A|\Im z|}\cdot C_{M+N}(1+|z|)^{-M-N}e^{\varepsilon|\Im z|}\\ &=C_M(1+|z|)^{-M}e^{(A+\varepsilon)|\Im z|}.\end{aligned}$$

由本定理的第一部分(紧支光滑函数的 Paley-Wiener-Schwartz 定理)可知, $u*\varphi_\varepsilon$是C^∞函数且 $\operatorname{supp}(u*\varphi_\varepsilon)\subseteq B(0,A+\varepsilon)$. 令 $\varepsilon\to 0$, 由于$u*\varphi_\varepsilon\to u$ $(\mathcal{D}')$, 利用广义函数支集的定义即得$\operatorname{supp} u\subset B(0,A)$, 从而$u\in\mathcal{E}'$. □

第五讲　广义函数(三): 微分算子的基本解及 Schwartz 核定理

这一讲我们首先介绍微分算子的基本解的概念, 并求出Laplace算子的基本解, 然后介绍连续平移不变算子用广义函数卷积表示的定理以及 Schwartz 核定理. 这些结果都涉及用广义函数来表示算子, 对于今后理解卷积型及非卷积型奇异积分算子都有着基本的重要性.

一　常系数微分算子的基本解

定义1. *称广义函数$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$是常(复)系数微分算子$P = \sum a_\alpha \partial^\alpha$的一个基本解, 若$PE = \delta_0$*

微分算子的基本解的重要性体现在其具有如下性质: 设$u, f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则

$$
\begin{aligned}
E * (Pu) &= P(E * u) = P(E) * u = \delta_0 * u = u, \\
P(E * f) &= P(E) * f = f.
\end{aligned}
$$

这就是说, 与基本解E做卷积既是P的左逆, 也是P的右逆. 第二式表明,只要找到一个基本解,那么对任意$f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 方程$Pu = f$就有解$u = E * f$, 而且可以通过第一式, 由$f$的正则性信息得到$u$的正则性.

习题 1. *计算一元函数求导算子u'的基本解.* □

下面计算Laplace算子的基本解. 这是我们后面研究的卷积型奇异积分算子的重要来源之一.

定理1. *置*

$$
E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{(n-2)c_n}|x|^{2-n}, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n > 2, \end{cases}
$$

其中c_n是$\mathbb{R}^n$中单位球的表面积. 那么$\partial_j E$是局部可积函数$x_j|x|^{-n}/c_n$, 且

$$
\Delta E = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 E = \delta_0.
$$

证明. 1. 设$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则由控制收敛定理和Gauss公式,

$$
\langle \partial_j E, \varphi \rangle = -\langle E, \partial_j \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} E(x) \partial_j \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \partial_j E(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} E(x) \varphi(x) \frac{x_j}{|x|}\, \mathrm{d}S.
$$

最后一项面积分是$O(\varepsilon)$ $(n > 2)$或$O(\varepsilon|\ln \varepsilon|)$ $(n = 2)$ 量级,从而$\varepsilon \to 0$时极限为零. 从而广义函数导数$\partial_j E$其实是局部可积函数$\partial_j E(x) = x_j|x|^{-n}/c_n$.

2. 注意当$x \neq 0$时, 直接计算确实成立$\Delta E(x) = 0$. 由此, 利用逼近和第二Green公式, 我们有

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta E, \varphi \rangle &= \langle E, \Delta \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} (E \Delta \varphi - \varphi \Delta E)\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} \langle \varphi \nabla E - E \nabla \varphi, \frac{x}{|x|} \rangle\, \mathrm{d}S \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{c_n \varepsilon^n} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi \langle x, \frac{x}{|x|} \rangle\, \mathrm{d}S = \varphi(0).
\end{aligned}
$$

定理得证. □

回忆当$n=2$时, 在复平面z上, 成立$\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}$, 以及

$$4\frac{\partial E(z)}{\partial z}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\ln|z|^2=\frac{1}{\pi}\frac{1}{z},$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{z}\right)=\delta_0,$$

即 Cauchy–Riemann 算子(构成一阶椭圆组)的基本解是$1/(\pi z)$.

二 平移不变算子与广义函数的卷积

定义2. 设X 为$\mathbb{R}^n$ 上的函数构成的线性空间. 称X 是关于平移封闭的, 若$\forall f\in X$, $\forall z\in\mathbb{R}^n$, 成立$\tau^z f\in X$.[1] 设X, Y 是两个关于平移封闭的线性空间, $T:X\to Y$ 为线性算子. 称T 为平移不变算子, 若:

$$\tau^x(Tf)=T(\tau^x f),\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

例1. $L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1\le p\le\infty)$ 是关于平移封闭的空间.

定理2 (平移不变算子的卷积表示)**.** 设$1\le p,q\le\infty$, T 是$L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的平移不变的有界线性算子,则存在唯一的$v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$Tf=f*v,\qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

这个定理的证明需要如下较为粗糙的嵌入引理.

引理1. 设$h\in L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1\le q\le\infty)$, 且对任意重指标$|\alpha|\le n+1$, 成立$\partial^\alpha h\in L^q(\mathbb{R}^n)$. 则$h$ 几乎处处等于一个连续函数H, 且成立不等式

$$|H(0)|\le c_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

定理2的证明 1. 首先证明: $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, α 为重指标, 成立$\partial^\alpha(Tf)=T(\partial^\alpha f)$. 为此只要证 $\partial_j(Tf)=T(\partial_j f)$.

我们回忆对任意$g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 当$h\to0$时成立$\frac{\tau^{-he_j}g-g}{h}\to\partial_j g\,(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. 由此,

$$\begin{aligned}
\langle\partial_j(Tf),g\rangle &= -\langle Tf,\partial_j g\rangle=-\lim_{h\to0}\left\langle Tf,\frac{\tau^{-he_j}g-g}{h}\right\rangle\\
&= -\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}(Tf)(x)\frac{\tau^{-he_j}g-g}{h}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\tau^{he_j}-1}{-h}(Tf)(x)g(x)\,\mathrm{d}x\quad [\text{差分的“分部积分”}]\\
&= \lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}T\left(\frac{\tau^{he_j}f-f}{-h}\right)(x)g(x)\,\mathrm{d}x\quad [\text{平移不变性}]\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}T(\partial_j f)g\,\mathrm{d}x=\langle T(\partial_j f),g)\rangle\quad [T\text{ 的连续性}]
\end{aligned}$$

这就证明了$\partial_j(Tf)=T(\partial_j f)$.

[1] 回忆定义: $(\tau^x f)(y)=f(y-x)$, $\tilde f(x)=f(-x)$.

2. 定义u 为$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函:

$$\langle u, f\rangle = (Tf)(0).$$

首先, 由第1步, $\forall$重指标 α, $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 成立$\partial^\alpha(Tf) = T(\partial^\alpha f)\in L^q(\mathbb{R}^n)$. 根据引理1, 可知$Tf(0)$ 有定义, 所以上述定义合理. 其次, 显然$\langle u, f\rangle$ 关于f 是线性的. 再次, 由引理1, 成立

$$\begin{aligned}
|\langle u, f\rangle| = |Tf(0)| &\le c_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = c_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|T(\partial^\alpha f)\|_{L^q}\\
&\le c_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le c'_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{|\alpha|\le m,\ \ |\beta|\le k}\rho_{\alpha,\beta}(f),
\end{aligned}$$

这就证明了$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. 置$v\equiv\tilde{u}$, 则$Tf = f*v$. 事实上,

$$\begin{aligned}
f*v(x) &= \langle v, \tau^x\tilde{f}\rangle = \langle\tilde{u}, \tau^x\tilde{f}\rangle = \langle u, \widetilde{\tau^x\tilde{f}}\rangle = \langle u, f(x+cdot)\rangle\\
&= \langle u, \tau^{-x}f\rangle = T(\tau^{-x}f)(0) = (\tau^{-x}Tf)(0) = Tf(x).
\end{aligned}$$

4. 唯一性. 若有缓增广义函数v_1, v_2使得$Tf = f*v_1 = f*v_2$, 则对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 均成立$f*(v_1-v_2) = 0$. 两边取Fourier 变换就得到$v_1 - v_2 = 0$. □

下面我们再证明嵌入引理1.

引理1的证明 1. 设$h\in L^q(\mathbb{R}^n)$. 作截断函数

$$\Phi_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \ \Phi_R = \begin{cases}1 & |x|\le R\\ 0 & |x|>2R\end{cases},\ \ 则\ \Phi_R h\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

利用L^1函数的 Fourier (逆)变换是一致连续函数, 以及 Fourier (逆)变换是$L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有界的算子, 只需要证$\widehat{\Phi_R h}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 就有$\Phi_R h = (\widehat{\Phi_R h})^\vee$ 为连续函数以及所断言的不等式. 这里的思想就是用光滑性换取衰减性, 或用衰减性换取光滑性. 这也是用Fourier分析证明诸如Sobolev嵌入定理的基本思路.

2. 利用如下关于多项式的基本不等式:

$$\begin{cases}|x|^k &\le\ c_{k,n}\sum_{|\alpha|=k}|x|^\alpha,\\ 1 &\le\ c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}|(-ix)^\alpha|.\end{cases}$$

其中第一式可以利用连续函数在单位球面$\{|x|=1\}$上必取到最小值加以证明, 而第二式可由第一式结合二项式定理证明. 由第二式, 我们得到

$$\begin{aligned}
|\widehat{\Phi_R h}(x)| &\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}|(-ix)^\alpha\widehat{\Phi_R h}(x)|\\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}|D^\alpha\widehat{(\Phi_R h)}(x)|\\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\
&\le c_n(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^q}((2R)^n)^{\frac{1}{q'}}\\
&\le c_{n,q,R}(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|D^\alpha(\Phi_R h)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&\le c_{n,q,R}(1+|x|)^{-(n+1)}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

从而$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\Phi_R h}(x)|\,\mathrm{d}x \le c_{n,q,R} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. 由此即得

$$|h(0)| = |\Phi_R h(0)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\Phi_R h}(x)\,\mathrm{d}x\right| \le c_{n,q,R} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

□

注记. 考虑$L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$的平移不变算子. 设

$$X = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \Phi(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t\text{存在} \right\} \subset L^\infty(\mathbb{R}),$$

则$\Phi(\cdot)$为X 上有界线性泛函: $|\Phi(f)| \le \|f\|_{L^\infty}$. 由Hahn-Banach 泛函延拓定理知$\Phi$ 可保范延拓为$L^\infty(\mathbb{R})$上的泛函$\tilde{\Phi} : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$; 它亦可视为$L^\infty(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子.

$\tilde{\Phi}$ 是平移不变的. 这是因为$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tau^x f) - \tau^x \tilde{\Phi}(f) &= \tilde{\Phi}(\tau^x f) - \tilde{\Phi}(f) = \tilde{\Phi}(\tau^x f - f) \\ &= \Phi(\tau^x f - f) = 0. \end{aligned}$$

这里需验证对固定的$x \in \mathbb{R}$, $\tau^x f - f \in X$. 事实上,

$$\begin{aligned} \left|\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_0^R (\tau^x f - f)\mathrm{d}t\right| &= \left|\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\left(\int_0^R f(t-x)\mathrm{d}t - \int_0^R f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\ &= \left|\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\left(\int_{-x}^{R-x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^R f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\ &= \left|\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\left(\int_{-x}^{0} - \int_{R-x}^{R}\right) f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\|f\|_{L^\infty} \cdot 2|x| \\ &= 0. \end{aligned}$$

注意到$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 都成立$\Phi(f) = 0$, 所以若存在$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$使得$\tilde{\Phi}(f) = f * u$, 则必然有$u \equiv 0$. 所以由于$L^\infty$的不可分性, 广义函数的卷积并不能代表$L^\infty$上所有平移不变有界线性算子.

三 Schwartz 核定理

Schwartz核定理指出可以把很广泛的一类连续线性算子用乘积空间上的广义函数来表示. 这对于我们以后理解和定义非卷积型奇异积分算子具有重要意义.

1. 广义函数的张量积

下面首先介绍广义函数的张量积的概念. 由这里定理**??**的唯一性证明可得Schwartz核定理的惟一性, 其它结论后面不会用到.

定理3. 设$X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$都是开集, $\varphi(x,y) \in C^\infty(X \times Y)$, 且存在$X$ 的紧子集K 使得只要$x \notin K$, 就成立$\varphi(x,y) = 0$. 则$\forall u \in \mathcal{D}'(X)$, 函数

$$y \mapsto u(\varphi(\cdot,y)) \in C^\infty,$$

且$\partial_y^\alpha u(\varphi(\cdot,y)) = u(\partial_y^\alpha \varphi(\cdot,y))$.

证明. 取定$y \in Y$, 将φ 在(x,y)点Taylor 展开得到

$$\varphi(x,y+h) = \varphi(x,y) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y_j} + \psi(x,y,h).$$

对任意重指标α, 在该式中将φ换做$\partial_x^\alpha \varphi(x,y)$, 它仍成立. 于是我们有

$$\sup_x |\partial_x^\alpha \psi(x,y,h)| = o(|h|^2), \quad 当\ h \to 0.$$

根据u的线性, 就有

$$u(\varphi(\cdot,y+h)) = u(\varphi(\cdot,y)) + \sum_{j=1}^{n} h_j \langle u, \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y_j} \rangle + o(|h|^2),$$

其中最后一项利用了u连续的性质. 由此式就知道$u(\varphi(\cdot,y))$关于y是连续的, 而且$\partial_j u(\varphi(\cdot,y)) = u(\partial_{y_j}\varphi(\cdot,y))$. 由此迭代归纳(将$\partial_{y_j}\varphi(\cdot,y)$视作$\varphi$), 就可以得到要证结论. □

定义3. 设$X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,2)$ 是开集, $u_i \in C(X_i)$. 定义u_1与u_2的张量积$u_1 \otimes u_2 \in C(X_1 \times X_2)$为

$$u_1 \otimes u_2(x_1,x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2), \qquad x_j \in X_j.$$

不难验证, 对任意$\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$, 成立如下等式:

$$\iint (u_1 \otimes u_2)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int u_1 \varphi_1 \,\mathrm{d}x_1 \int u_2 \varphi_2 \,\mathrm{d}x_2. \tag{5.1}$$

定理4. 设$u_j \in \mathcal{D}'(X_j)$ $(j=1,2)$, 则存在唯一的广义函数$u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$使得

$$u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = u_1(\varphi_1)u_2(\varphi_2), \qquad \varphi_j \in C_0^\infty(X_j). \tag{5.2}$$

此外, u还满足

$$u(\varphi) = u_1[u_2(\varphi(x_1,x_2))] = u_2[u_1(\varphi(x_1,x_2))], \qquad \varphi \in C_0^\infty(X_1 \times X_2), \tag{5.3}$$

其中u_j作用在x_j为自变量的函数上.

若$u_j \in \mathcal{E}'$, $j=1,2$, 则对$\varphi \in C^\infty$, 上述结论仍成立. u 称作u_1与u_2的张量积, 记作$u = u_1 \otimes u_2$.

证明. 1. 唯一性: 即证明若$u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$对任何$\varphi_j \in C_0^\infty(X_j)$ 都成立$u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = 0$, 则$u \equiv 0$. (这相当于说明了可分离变量函数在二元光滑函数类里的稠密性.)

取磨光核$\psi_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $\psi_j \geq 0$, $\int \psi_j \,\mathrm{d}x_j = 1$, 且$\operatorname{supp}\psi_j \subset \{|x_j| \leq 1\}$. 置

$$\Psi_\varepsilon(x_1,x_2) = \varepsilon^{-n_1-n_2}\psi_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\psi_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) = \psi_{1,\varepsilon} \otimes \psi_{2,\varepsilon}.$$

回忆(上一讲定理3证明的第一步已证)当$\varepsilon \to 0$时, 对于$X_1 \times X_2$的任意给定的紧子集Y, 都成立$\Psi_\varepsilon * u \to u$ $(\mathcal{D}'(Y))$; 另一方面

$$\Psi_\varepsilon * u(x_1,x_2) = u(\Psi_\varepsilon(x_1-\cdot,x_2-\cdot)) = u(\psi_{1,\varepsilon}(x_1-\cdot)\otimes\psi_{2,\varepsilon}(x_2-\cdot)) = 0,$$

于是在Y上必有$u=0$. 由Y的任意性可知在$X_1 \times X_2$上u为零.

2. 存在性. 设K_j为X_j的紧子集, 则

$$|u_j(\varphi_j)| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} \sup|\partial^\alpha \varphi_j|, \qquad \varphi_j \in C_0^\infty(K_j).$$

若$\varphi \in C_0^\infty(K_1 \times K_2)$, 根据定理3, 就有

$$I_\varphi(x_1) \triangleq u_2(\varphi(x_1,\cdot)) \in C_0^\infty(K_1),$$

而且$\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi(x_1) = u_2(\partial_{x_1}^\alpha \varphi(x_1,\cdot))$. 利用$u_2$的连续性, 就有

$$\sup_{x_1} |\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi(x_1)| \le C_2 \sum_{|\beta| \le k_2} \sup_{x_1,x_2} |\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta \varphi(x_1,x_2)|.$$

将u_1作用于$I_\varphi(x_1)$, 利用其连续性和上面不等式就有

$$|u_1(I_\varphi)| \le C_1 C_2 \sum_{|\alpha_j| \le k_j} \sup_{x_1,x_2} |\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta \varphi(x_1,x_2)|.$$

由此, 定义$u(\varphi) = u_1(I_\varphi)$, 则$u \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$. 它满足(5.2)和(5.3)的第一个等式. 同样可以得到$v \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$满足(5.2) 和(5.3)的第二个等式. 利用唯一性,必有$u = v$. 从而u满足(5.2)和(5.3).

3. 余下的结论可类似证明. □

2. Schwartz 核定理

给定$K \in C(X_1 \times X_2)$, 不难验证

$$(\mathcal{K}\varphi)(x_1) = \int K(x_1,x_2)\varphi(x_2)\,\mathrm{d}x_2, \qquad \varphi \in C_0(X_2),\ \ x_1 \in X_1$$

定义了从$C_0(X_2)$ 到$C(X_1)$的一个积分算子[2], 而且成立等式(将K视作广义函数)

$$\langle \mathcal{K}\varphi, \psi \rangle = K(\psi \otimes \varphi), \quad \psi \in C_0^\infty(X_1),\ \ \varphi \in C_0^\infty(X_2). \tag{5.4}$$

下面我们将证明, 当K推广为一个广义函数, 而$\varphi \in C_0^\infty(X_2)$ 时, $\mathcal{K}\varphi$ 仍可视作一个广义函数.

定理5 (Schwartz 核定理). *对任意给定的$K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$, (5.4)定义了一个$C_0^\infty(X_2)$到$\mathcal{D}'(X_1)$的连续线性映射$\mathcal{K}$ (即φ_j在$C_0^\infty(X_2)$ 中收敛到0时$\mathcal{K}\varphi_j$在$\mathcal{D}'(X_1)$ 中收敛到0).*

反之, 对任一给定的$C_0^\infty(X_2)$到$\mathcal{D}'(X_1)$的连续线性映射$\mathcal{K}$, 都存在唯一的广义函数$K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$使得(5.4)成立. 广义函数$K$称作映射$\mathcal{K}$的核.

证明. 1. 若$K \in \mathcal{D}'(X_1 \times X_2)$, 那么由其连续性,对于$X_j$的紧子集$K_j$, $j = 1,2$, 存在常数$C > 0$ 和自然数k_1, k_2 使得对任意$\psi \in C_0^\infty(K_1)$和$\varphi \in C_0^\infty(K_2)$, 成立不等式

$$|K(\psi \otimes \varphi)| \le C \sum_{|\alpha| \le k_1,\ |\beta| \le k_2} \sup_{x_1,x_2} |\partial_{x_1}^\alpha \psi||\partial_{x_2}^\beta \varphi|.$$

这表明若φ固定, 则线性泛函$\psi \mapsto K(\psi \otimes \varphi)$ 就确定了一个$\mathcal{D}'(X_2)$ 广义函数, 记作$\mathcal{K}\varphi$. 当ψ作为测试函数固定时, 上面不等式还表明了线性算子$\mathcal{K}$ 的连续性.

2. 下面证明定理第二部分. 对于唯一性, 证明和定理4中的完全一样.

3. 下面开始证明存在性. 首先, 对任意给定的X_j的紧子集K_j, $j = 1,2$, 存在常数$C > 0$ 和自然数N_1, N_2 使得成立如下不等式:

$$|\langle \mathcal{K}\varphi, \psi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N_1} \sup_{x_1} |\partial_{x_1}^\alpha \psi| \sum_{|\beta| \le N_2} \sup_{x_2} |\partial_{x_2}^\alpha \varphi|, \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(K_1),\ \ \varphi \in C_0^\infty(K_2). \tag{5.5}$$

[2]证明连续性时, 利用x_2在一个紧集上, x_1在给定某点的领域上,从而对K成立一致连续性.

事实上, 由假设, 双线性型

$$C_0^\infty(K_1)\times C_0^\infty(K_2)\ni(\psi,\varphi)\mapsto\langle\mathcal{K}\varphi,\psi\rangle$$

关于变量ψ和φ是分别连续的(即φ任意固定时关于ψ连续, ψ任意固定时关于φ 连续). 但是利用泛函分析中共鸣定理[3], Frechét 空间的直积(这仍然是非空的完备的度量空间, 从而是第二纲集)上的关于各个变量分别连续的双线性型必然是关于所有变量连续的. 这就得到了(5.5).

4. 取定X_j的紧子集Y_j, 并取紧集K_j是Y_j的一个领域. 对任意$(x_1,x_2)\in Y_1\times Y_2$及$\varepsilon>0$, 置

$$K_\varepsilon(x_1,x_2)\triangleq\varepsilon^{-n_1-n_2}\left\langle\mathcal{K}\psi_2\Big(\frac{x_2-\cdot}{\varepsilon}\Big),\psi_1\Big(\frac{x_1-\cdot}{\varepsilon}\Big)\right\rangle,\tag{5.6}$$

其中ψ_j是定理4证明中定义的磨光函数. (可以证明, 这是关于ε,x_1,x_2 的C^∞函数.)

当ε小于Y_j到$\complement K_j$ (K_j的补集)的距离时, (5.6)是有定义的. 利用估计(5.5), 不难得到, 对$\mu=n_1+n_2+N_1+N_2$, 成立

$$|K_\varepsilon(x_1,x_2)|\le C\varepsilon^{-\mu},\quad x_j\in X_j,\ \ j=1,2.\tag{5.7}$$

我们注意到若符合(5.4)要求的广义函数K存在, 那么根据卷积定义, 就有$K_\varepsilon=K*\Psi_\varepsilon=K*(\psi_{1,\varepsilon}\otimes\psi_{2,\varepsilon})$, 从而当$\varepsilon\to0$时应该在$\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$中$K_\varepsilon\to K$. 所以下面的目标就是证明$K_\varepsilon$ 当$\varepsilon\to0$时在$\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$中确实收敛, 其基本思想是, 把函数$f(\varepsilon)$在0 点附近Taylor展开, 就比较容易找到$f$当$\varepsilon\to0$时的极限.

5. 注意若$\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 利用$\psi_\varepsilon(x)$ 关于(ε,x) 的齐次$-n$次性质, 成立

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi_\varepsilon(x)+\sum_j x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_\varepsilon(x)=-n\psi_\varepsilon(x),$$

从而有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon})\Big)=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\varepsilon^{-n}\psi_j(\frac{x}{\varepsilon})\Big),\qquad\psi_j(x)=-x_j\psi(x).\tag{5.8}$$

利用连续性(5.5), 不难通过差分证明对(5.6)可求导, 而且求导可以和$\langle\cdot,\cdot\rangle$以及$\mathcal{K}$换序. 从而由上述性质(5.8), 得

$$\frac{\partial K_\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial\varepsilon}=\sum_\nu\frac{\partial L_\varepsilon^\nu(x_1,x_2)}{\partial x_\nu},$$

其中ν跑遍所有坐标(x_1,x_2), 而L_ε^ν是在(5.6)中将ψ_1 或ψ_2 换做$-x_\nu\psi_1$或$-x_\nu\psi_2$得到的表达式. 从而估计(5.6)对L_ε^ν 仍然有效. 注意这里可以将导数∂_{x_ν}提出来, 因为x_1与x_2各变量是互相独立的.

6. 重复上述求导过程, 可以得到$K_\varepsilon^{(j)}(x_1,x_2)=\frac{\partial^jK_\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial\varepsilon^j}$, 它可**表为满足估计**(5.6)**的函数的**j**阶导数的和.** 现在取定充分小的$\delta>0$和$\varepsilon>0$, 成立Taylor展开式

$$K_\varepsilon=\sum_{j=0}^{\mu}\frac{1}{j!}(\varepsilon-\delta)^jK_\delta^{(j)}+\frac{1}{\mu!}(\varepsilon-\delta)^{\mu+1}\int_0^1K^{(\mu+1)}_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t.$$

[3]即一致有界性原理[20, p. 69]: 设X是拓扑线性空间, 不能表示为可列个闭的稀疏集的并集(即第二纲集). 设$\{T_a:a\in A\}$是一族X 到拟赋范线性空间Y的连续映射. 又设对任意$a\in A$, $x,y\in X$, 成立

$$\|T_a(x+y)\|\le\|T_ax\|+\|T_ay\|,\quad\|T_a(\alpha x)\|=\|\alpha T_a(x)\|,\forall\alpha\ge0.$$

那么如果集合$\{T_ax:a\in A\}$对每一个固定的x都有界, 则$x\to0$时T_ax 关于$a\in A$一致地在Y中强收敛到零.

再取定$\Phi\in C_0^\infty(Y_1\times Y_2)$, 那么当$\varepsilon\to 0$时, 成立

$$\langle K_\varepsilon,\Phi\rangle\to\langle K_0,\Phi\rangle\triangleq\sum_{j=0}^{\mu}\frac{1}{j!}(-\delta)^j\langle K_\delta^{(j)},\Phi\rangle+\frac{1}{\mu!}(-\delta)^{\mu+1}\int_0^1\langle K_{\delta(1-t)}^{(\mu+1)},\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t.$$

事实上这里只需证明$\int_0^1\langle K_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)},\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t.\to\int_0^1\langle K_{\delta(1-t)}^{(\mu+1)},\Phi\rangle(1-t)^\mu\,\mathrm{d}t$. 为此,可将$K_{\delta+t(\varepsilon-\delta)}^{(\mu+1)}$的$\mu+1$阶导数转移到$\Phi$身上, 再利用(5.6)的估计, 成立

$$C(1-t)^\mu(\delta+t(\varepsilon-\delta))^{-\mu}\le C\delta^{-\mu},$$

从而由Lebesgue控制收敛定理, 以及再把Φ的导数搬回来得到结论. 利用K_0的上述表达式, 不难根据定义(以及(5.6)) 验证$K_0\in\mathcal{D}'(Y_1\times Y_2)$.

7. 现在证明K_0确实是满足(5.4) 的广义函数. 取$\varphi_j\in C_0^\infty(Y_j)$, 那么

$$\langle K_\varepsilon,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle=\iint K_\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

又记$\tilde\psi_{j,\varepsilon}(x)=\varepsilon^{-n}\psi_j(-x/\varepsilon)$, 则由算子$\mathcal{K}$和$\langle,\rangle$的线性,

$$\iint K_\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=\iint\langle\mathcal{K}\tilde\psi_{2,\varepsilon}(\cdot-x_2)\varphi_2(x_2),\tilde\psi_{1,\varepsilon}(\cdot-x_1)\varphi_1(x_1)\rangle\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

将右侧积分写为Riemann和, 利用$\mathcal{K}$和$\langle,\rangle$的连续性, 可以证明积分号可与$\langle.\rangle$ 交换.于是成立

$$\langle K_\varepsilon,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle=\langle\mathcal{K}(\varphi_2*\tilde\psi_{2,\varepsilon}),\varphi_1*\tilde\psi_{1,\varepsilon}\rangle.$$

因为$\varepsilon\to 0$时$\varphi_j*\tilde\psi_{j,\varepsilon}$在$C_0^\infty(Y_j)$中收敛到$\varphi_j$, 于是得到

$$\langle K_0,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle=\langle\mathcal{K}\varphi_2,\varphi_1\rangle,\qquad\varphi_j\in C_0^\infty(Y_j).$$

由于Y_j是X_j的任意紧子集, 定理得证. □

例2. 设X是$\mathbb{R}^n$的开子集. 恒等映射$\mathcal{I}:C_0^\infty(X)\to C_0^\infty(X)$ 的核是如下确定的广义函数K:

$$\langle K,\Phi\rangle=\int_X\Phi(x,x)\,\mathrm{d}x,\quad\Phi\in C_0^\infty(X,X).$$

显然K的支集在对角线$\{(x,x):x\in X\}$上.

例3. 设$f:X_1\to X_2$是连续映射, 定义$\mathcal{K}\varphi=\varphi\circ f$, $\varphi\in C_0^\infty$, 则它的核K 由如下方式确定:

$$\langle K,\Phi\rangle=\int_{X_1}\Phi(x,f(x))\,\mathrm{d}x,\quad\Phi\in C_0^\infty(X_1,X_2).$$

可见K的支集在f的图像$\{(x,f(x)):x\in X_1\}$上.

第六讲　插值定理

偏微分方程的重要方法之一就是得到关于方程解的在适当函数空间的范数的估计式, 再利用逼近和紧性方法求解. 在调和分析中, 这往往对应要求证明某些线性算子在适当空间之间的有界性. 插值定理可以帮助我们通过仅仅考虑一些极端的或特殊的情形, 就得到在极端情形之间算子的有界性. 显然这是证明算子有界性的强有力的工具.

按证明方法是基于实分析方法还是复分析方法, 插值定理分为实插值和复插值两类. 前者的典型代表是 Marcinkiewicz 插值定理, 后者的典型代表是 Riesz–Thorin 插值定理. 它们在后续奇异积分算子理论中扮演着非常重要的角色.

一　分布函数与弱L^p空间

1. 分布函数

设 (X,μ) 是测度空间, $f(x)$ 是 (X,μ) 上的可测函数. 我们回忆常用函数空间L^p的定义:

定义1. $L^p(X,\mu)=\left\{f(x):\| f(x)\|_{L^p(X,\mu)}\triangleq(\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x))^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}, 1\le p<\infty$; 当 $p=\infty$ 时, $L^\infty(X,\mu)=\left\{f(x)|\,\| f(x)\|_{L^\infty(X,\mu)}=\mathrm{esssup}_{x\in X}|f(x)|<\infty\right\}$.

定义2 (分布函数). *设f是可测函数, 定义其分布函数:*

$$d_f(\alpha)=\mu\Big(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}\Big),\ \ \alpha\ge 0.$$

显然d_f是单调递减函数. 注意: 分布函数只能反映函数整体的大小, 不能反映其值的局部的具体的分布的情况.

例1. 设 $f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,\infty)$, 取 μ 为勒贝格测度, 则 $d_f(\alpha)=|x\in(0,\infty):|f(x)|>\alpha|=|x\in(0,\infty):x<\frac{1}{\alpha}|=\frac{1}{\alpha}$.

习题 1. 对如下简单函数求其分布函数: $f(x)=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}c_\alpha I_{M_\alpha}(x)$, 这里$M_\alpha\subset X$ 是可测子集, $c_\alpha\in\mathbb{C}$, 而I_M是集合M的特征函数. □

命题1 (基本性质). *1) $|f|\le|g|\Rightarrow d_f\le d_g$;*

2) $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则$d_{cf}(\alpha)=d_f(\frac{\alpha}{|c|})$;

3) $d_{f+g}(\alpha+\beta)\le d_f(\alpha)+d_g(\beta)$;

4) $d_{fg}(\alpha\beta)\le d_f(\alpha)+d_g(\beta)$.

证明. 这里只证明(3), 其它作为习题. 依定义, 利用$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$可得

$$\begin{aligned}
d_{f+g}(\alpha+\beta) &= \mu(\{x\in X:|(f+g)(x)|>\alpha+\beta\})\\
&\le \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}\cup\{x\in X:|g(x)|>\beta\})\\
&\le \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}+\mu(\{x\in X:|g(x)|>\beta\})\\
&= d_f(\alpha)+d_g(\beta).
\end{aligned}$$

□

命题2. 若 $f\in L^p(X,\mu)$ $(0<p<\infty)$，则 $\|f\|^p_{L^p(X,\mu)}=p\int_0^\infty \alpha^{p-1}d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

证明. 用 Fubini 定理, 就有

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty \alpha^{p-1}d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\int_X I_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\alpha\\
&= \int_X (p\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-1}\mathrm{d}\alpha)\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_X \alpha^p|_0^{|f(x)|}\mathrm{d}\mu(x)=\int_X |f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \|f\|^p_{L^p(X,\mu)}\,.
\end{aligned}$$

□

推论1. 若 φ 为$(0,\infty]$上的连续可微递增函数且$\varphi(0)=0$, 则 $\int_X\varphi(|f|)\mathrm{d}\mu(x)=\int_0^\infty\varphi'(\alpha)d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

由上述结论可见, 利用分布函数能够方便地计算只涉及函数大小的量; 它把多元函数积分问题转化为对集合估计测度大小这样一个较为简单的(几何)问题. 所以上述公式经常用到. 下面是一个很有用的的例子, 其中$|U|$表示集合U的Lebesgue测度.

例2 (Good-lambda 不等式)**.** 设u,v是定义在$\mathbb{R}^n$上的非负函数, 并且$\inf(1,u)$和$v\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 若存在$\varepsilon>0$和$\gamma\in[0,1)$满足$(1+\varepsilon)^p\gamma<1$使得对任何$\lambda>0$都成立

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,\, v(x)\le\lambda\}|\le\gamma|\{x\in\mathbb{R}^n:u(x)>\lambda\}|, \tag{6.1}$$

那么

$$\|u\|_{L^p}\le C(p,\varepsilon,\gamma)\,\|v\|_{L^p}\,.$$

证明. 1. 先设$\|u\|_{L^p}<\infty$, 那么

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p} &= p\int_0^\infty\lambda^{p-1}|\{u(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda=(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&= (1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,v(x)\le\lambda\}\cup\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&\le (1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda,v(x)\le\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda+(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&\le \gamma(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{u(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda+(1+\varepsilon)^p\int_0^\infty p\lambda^{p-1}|\{v(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda\\
&= \gamma(1+\varepsilon)^p\,\|u\|^p_{L^p}+(1+\varepsilon)^p\,\|v\|^p_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

由于$\gamma(1+\varepsilon)^p<1$, 并且$\|u\|_{L^p}<\infty$, 我们就得到

$$\|u\|^p_{L^p}\le\frac{(1+\varepsilon)^p}{1-\gamma(1+\varepsilon)^p}\,\|v\|^p_{L^p}\,.$$

2. 若$\inf(1,u)\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则不难验证对与任意$m>1$, 都成立$\inf(m,u)\in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\inf(m,u)\|^p_{L^p}=\int_{u\le1}|u|^p+\int_{1<u\le m}|u|^p+m^p\int_{u>m}\le\int_{u\le1}|u|^p+m^p\int_{u>1}=m^p\,\|\inf(1,u)\|^p_{L^p}<\infty.$$

此外, $\inf(m,u)$仍然满足条件(6.1). 事实上, 若$(1+\varepsilon)\lambda\ge m$, 则左端就是零,当然成立; 若$(1+\varepsilon)\lambda<m$, 那么$\lambda<m$, 而且$\{\inf(m,u)(x)>(1+\varepsilon)\lambda\}=\{u(x)>(1+\varepsilon)\lambda\}$. 所以对$\inf(m,u)$ 利用已证结论, 就得到$\|u\|_{L^p}=\lim_{m\to\infty}\|\inf(u,m)\|_{L^p}\le C(p,\varepsilon,\gamma)\,\|v\|_{L^p}$. □

2. 弱L^p空间

定义3. *1) 弱* $L^\infty(X,\mu)=L^{\infty,\infty}(X,\mu)\triangleq L^\infty(X,\mu)$;

2) 对$0<p<\infty$, *弱* $L^p(X,\mu)\triangleq\left\{f:f \text{ 是 } (X,\mu) \text{ 上的可测函数, 并且 } \|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}<\infty\right\}$, 其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} &= \inf\left\{c:d_f(\alpha)\le\frac{c^P}{\alpha^p},\quad\forall\alpha>0\right\} \qquad (6.2)\\ &= \sup\left\{rd_f(r)^{\frac{1}{p}}:\forall r>0\right\} \qquad (6.3)\end{aligned}$$

习题 2.利用 $d_f(\alpha)\le\frac{c^P}{\alpha^p}\Leftrightarrow\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le c$, 再由上下确界的定义, 证明(6.2)和(6.3)相等. □

我们注意弱 L^p 空间$(1\le p\le\infty)$为拟赋范线性空间, 即$\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$ 不是一个范数, 而满足如下性质:

- ◊ 齐次性: $\|kf\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=\sup\left\{rd_{kf}(r)^{\frac{1}{p}}:\forall r>0\right\}=\sup\left\{rd_f(\frac{r}{|k|})^{\frac{1}{p}}:\forall r>0\right\}=\sup\left\{\frac{r}{|k|}d_f(\frac{r}{|k|})^{\frac{1}{p}}\cdot|k|:\forall r>0\right\}=$ $|k|\sup\left\{\frac{r}{|k|}d_f(\frac{r}{|k|})^{\frac{1}{p}}:\forall r>0\right\}=|k|\,\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$.
- ◊ 正定性: $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}=0\Rightarrow\forall r>0, rd_f(r)^{\frac{1}{p}}=0\Rightarrow d_f(r)=0\Rightarrow f\equiv 0\ \ a.e.$
- ◊ 不满足三角不等式, 但满足 $\|f+g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\le C_p(\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}+\|g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)})$. 这里 $C_p=\max\{1,2^{p-1}\}$. (可利用 $(a+b)^p\le C_p(a^p+b^p),\forall p>0$ 以及分布函数的第三个性质加以验证.)

命题3. $L^P(X,\mu)\subsetneq L^{P,\infty}(X,\mu), 0<p<\infty$, 但 $L^\infty(X,\mu)=L^{\infty,\infty}(X,\mu)$.

证明. 1. $L^P\subseteq L^{P,\infty}$. 设$f\in L^p$, 则

$$\|f\|^P_{L^p(X,\mu)}=\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\ge\int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}\alpha^p\mathrm{d}\mu(x)=\alpha^pd_f(\alpha),\ \forall\alpha>0,$$

即 $\forall\alpha>0,\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_{L^p(X,\mu)}\Rightarrow\|f\|_{L^{p,\infty}}\le\|f\|_{L^p}$. 所以, $f\in L^{p,\infty}$.

2. 要找一个函数 $h(x)$,使得 $h(x)\notin L^p$,但 $h(x)\in L^{p,\infty}$. 为此取$h(x)=|x|^{-\frac{n}{p}}$, $x\in X=\mathbb{R}^n$, μ 取勒贝格测度,则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{1}{r}\mathrm{d}r\cdot|c_n|=\infty,$$

所以 $h(x)\notin L^p$. 但 $d_h(\alpha)=|\{x\in\mathbb{R}^n:|h(x)|>\alpha\}|=\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<\alpha^{-\frac{p}{n}}\right\}\right|=nc_n\alpha^{-p}$, 所以 $\|h\|_{L^{p,\infty}}=\sup\limits_{\alpha>0}\left(\alpha d_h(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)=(nc_n)^{\frac{1}{p}}<\infty$. □

习题 3.[Kolmogrov 不等式] 设$u\in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, 则对$\mathbb{R}^n$ 的任意一个具有有限测度的可测子集E及任何$\delta\in(0,1)$, 都成立

$$\int_E|u(x)|^\delta\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{1-\delta}|E|^{1-\delta}\|u\|^\delta_{L^{1,\infty}}.$$

□

证明. 利用$\int_E|u(x)|^\delta\,\mathrm{d}x=\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}|\{x\in E:|u(x)|>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\le\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}\inf(|E|,\frac{\|u\|_{L^{1,\infty}}}{\lambda})\mathrm{d}\lambda$, 然后将积分分两部分计算. □

二 范数插值

定理1. 设 $0<p<q\le\infty$, $f\in L^{p,\infty}\cap L^{q,\infty}(X,\mu)$,则 $\forall r\in(p,q)$成立$f(x)\in L^r(X,\mu)$, 且

$$\|f\|_{L^r(X,\mu)}\le\left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)\|f\|^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{p,\infty}(X,\mu)}\|f\|^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{q,\infty}(X,\mu)}.$$

证明. 主要思想是将积分(函数)等通过设定若干待定参数分解以达到最佳控制. 分两种情形.

1. $q<\infty$情形. 因为 $f\in L^{p,\infty}\cap L^{q,\infty}$, 而由定义, $\forall\alpha>0$, $\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_{L^{p,\infty}}$, $\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|_{L^{q,\infty}}$. 所以, $d_f(\alpha)\le\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)$. 因此, 利用 $\|f(x)\|^r_{L^r(X,\mu)}=r\int_0^\infty\alpha^{r-1}d_f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$, 通过取积分限$B$为参数, 就有

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^r_{L^r(X,\mu)} &\le r\int_0^\infty\alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)\mathrm{d}\alpha\\ &= r\int_0^B\alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)\mathrm{d}\alpha\\ &\quad +r\int_B^\infty\alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)\mathrm{d}\alpha\\ &\le \|f\|^p_{L^{p,\infty}}\int_0^B r\alpha^{r-1-p}\mathrm{d}\alpha+\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\int_B^\infty r\alpha^{r-1-q}\mathrm{d}\alpha\\ &= \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}B^{r-p}+\frac{r}{q-r}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}B^{r-q}.\end{aligned}$$

现取参数 B 满足 $\|f\|^p_{L^{p,\infty}}B^{r-p}=\|f\|^q_{L^{q,\infty}}B^{r-q}$, 即 $B=\left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{1}{q-p}}$. 那么就有

$$\|f\|^r_{L^r}\le\left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{r-p}{q-p}}.$$

化简之后即得要证之式.

2. $q=\infty$ 情形. 此时对于 $\alpha>\|f\|_{L^\infty}$,成立 $d_f(\alpha)=0$.于是再利用$d_f(\alpha)\le\alpha^{-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}$, 得到

$$\begin{aligned}\left\|f\right\|^r_{L^r} &\le r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}}\alpha^{r-1}\alpha^{-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}\mathrm{d}\alpha\\ &= \frac{r}{r-p}\left\|f\right\|^p_{L^{p,\infty}}\left\|f\right\|^{r-p}_{L^\infty},\end{aligned}$$

即得所证. □

三 实插值方法: Marcinkiewicz 插值定理

下面我们开始介绍 Marcinkiewicz 插值定理, 它适用于较线性算子为广的一类算子, 故给出如下定义.

定义4. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个测度空间, T 为定义在 (X,μ)上可测函数类(的一个子集)上的算子, 取值为 (Y,ν) 上的可测函数. 若对于任意$c\in\mathbb{C}$ 和使T有定义的f,g, 成立

- ◇ $T(f+g)=T(f)+T(g)$,$T(cf)=cT(f)$,则 T 称为线性算子.
- ◇ $|T(f+g)|\le|T(f)|+|T(g)|$,$|T(cf)|=|c||T(f)|$,则 T 称为次线性算子.
- ◇ $|T(f+g)|\le K(|T(f)|+|T(g)|)$, $|T(cf)|=|c||T(f)|$,则 T称为拟线性算子. 这里K是与f,g无关的常数.

下面引入常用的两个术语.

定义5. 对算子 T, 若存在常数C满足 $\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, 则 T 称为是 (p,q) 型算子; 若 T 满足 $\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \le C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, 则 T 称为是弱 (p,q) 型算子.

Marcinkiewicz 插值定理分为对角线情形和下三角情形两种, 其中对角线情形最为常用. 下面分别叙述.

定理2 (对角线情形 Marcinkiewicz 插值定理)**.** 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个测度空间, T 为定义在 $L^{p_0}(X,\mu)\cap L^{p_1}(X,\mu)$ $(0<p_0<p_1\le\infty)$ 上的次线性算子. 设存在常数 A_0, A_1 使得

$$\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}(Y,\nu)} \le A_0\|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)}, \quad \forall f\in L^{p_0}(X,\mu),$$
$$\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(Y,\nu)} \le A_1\|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)}, \quad \forall f\in L^{p_1}(X,\mu).$$

则 $\forall p\in(p_0,p_1)$, $f\in L^p(X,\mu)$, 都成立 $\|Tf\|_{L^p(Y,\nu)} \le M\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, 其中

$$M = 2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}.$$

注记. 在该定理中, 若 T 为线性算子, 可仅要求 T 定义在 (X,μ) 的简单函数类上.

证明. 1. 设$p_1<\infty$. 对$f\in L^{p_0}\cap L^{p_1}$ 和$s>0$, 作分解

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } |f(x)|>s, \\ 0, & \text{若 } |f(x)|\le s, \end{cases} \qquad f_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{若 } |f(x)|>s, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\le s, \end{cases}$$

则由$|Tf|\le|Tf_0|+|Tf_1|$, 成立

$$\mu(t)\triangleq d_{Tf}(t)\le d_{Tf_0}(t/2)+d_{Tf_1}(t/2)\le\left(\frac{2A_0}{t}\right)^{p_0}\int|f_0|^{p_0}+\left(\frac{2A_1}{t}\right)^{p_1}\int|f_1|^{p_1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\int|Tf|^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty t^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\right)\mathrm{d}t+p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty t^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2. 现取s为t的函数, 即$t=As$, 其中A 为待定正常数. 那么

$$\int|Tf|^p=p(2A_0)^{p_0}A^{p-p_0}\int_0^\infty s^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\right)\mathrm{d}s+p(2A_1)^{p_1}A^{p-p_1}\int_0^\infty s^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\right)\mathrm{d}s.$$

根据Fubini定理,

$$\int_0^\infty s^{p-1-p_0}\left(\int_{|f|>s}|f|^{p_0}\right)\mathrm{d}s=\int|f|^{p_0}\int_0^{|f|}s^{p-1-p_0}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{p-p_0}\int|f|^p,$$

类似地

$$\int_0^\infty s^{p-1-p_1}\left(\int_{|f|\le s}|f|^{p_1}\right)\mathrm{d}s=\int|f|^{p_1}\int_{|f|}^\infty s^{p-1-p_1}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{p_1-p}\int|f|^p.$$

从而

$$\int|Tf|^p\le\left\{\frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}A^{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}(2A_1)^{p_1}A^{p-p_1}\right\}\int|f|^p.$$

3. 取参数A使得上式右端括号内系数达到最小. 通过对A求导, 不难得到

$$A=2A_0^{-\frac{p_0}{p_1-p_0}}A_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}.$$

将此代入直接计算, 括号内数就是M^p.

4. $p=\infty$ 情形: 留作习题. □

定理3 (下三角情形 Marcinkiewicz 插值定理). 设 (X,μ) 与 (Y,ν) 为两个测度空间, T 为定义在 $L^{p_0}(X,\mu)\cap L^{p_1}(Y,\nu)$ 上的拟线性算子, 取值为 (Y,ν) 上的可测函数. 设 $0<p_0\neq p_1\leq\infty$, $0<q_0\neq q_1\leq\infty$, 且T是弱(p_0,q_0)型和弱(p_1,q_1)型(即$T:\ L^{p_0}(X)\to L^{q_0,\infty}(X)$, $T:\ L^{p_1}(X)\to L^{q_1,\infty}(X)$). 那么对$0<\theta<1$,

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},\quad p\leq q,$$

T 为 (p,q) 型, 且 $\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)}\leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$.

证明基于Lorentz空间理论, 可见[11, p. 62].

四　复插值方法: Riesz–Thorin 插值定理

1. Riesz–Thorin 插值定理

定理4 (Riesz–Thorin 插值定理). 设 $(X,\mu),(Y,\nu)$ 是测度空间, T 是线性算子, 定义在 (X,μ)的简单函数类上,取值为 (Y,ν)上的可测函数.假设T为(p_0,q_0)型 和(p_1,q_1)型, 其中$1\leq p_0,q_0,p_1,q_1\leq\infty$, 且

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(Y)}\leq M_0\,\|f\|_{L^{p_0}(X)},\quad \|Tf\|_{L^{q_1}(Y)}\leq M_1\,\|f\|_{L^{p_1}(X)}.$$

则T为(p,q)型 且

$$\|Tf\|_{L^q(Y)}\leq M_0^{1-\theta}\,M_1^{\theta}\,\|f\|_{L^p(X)}\ .$$

这里指标(p,q)由下式确定,其中$0\leq\theta\leq1$:

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\ ,\ \ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}\ .$$

进一步, 由简单函数在L^p中的稠密性, T 可以延拓为$L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)$ 上有界线性算子, 且算子范数$\|T\|_{L^p\to L^q}\leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.

该定理的证明依赖于如下复分析结论.

定理5 (Phragmén–Lindelöf极大值原理). 设$f(z)$ 在带状区域$D=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Re}z<1\}$上全纯, 且在$\bar{D}$上连续有界, 并且

$$|f(z)|\leq M,\quad \forall z\in\partial D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z=0\}\cup\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z=1\}.$$

则对任意$z\in D$, 成立$|f(z)|\leq M$, 且若存在$z_0\in D$使得$f(z_0)=M$, 则$f(z)\equiv M$.

证明. 对$n\in\mathbb{N}$, 定义全纯函数$f_n(z)=f(z)e^{\frac{z^2}{n}}=f(z)e^{\frac{x^2-y^2}{n}}e^{\frac{2ixy}{n}}$. 则在$\partial D$上$|f_n(z)|\leq Me^{\frac{1}{n}}$, 而当$|y|\to\infty$时$|f_nz|\leq Be^{-\frac{y^2}{n}}$, 从而关于$x\in[0,1]$一致收敛到零. 从而利用有界区域上全纯函数的极值原理, 成立$|f_n(z)|\leq Me^{1/n}$. 令$n\to\infty$就得到在$\bar{D}$内$|f(z)|\leq M$. 若在$z_0\in D$成立$f(z_0)=M$, 则由极值原理, f恒为常数. □

定理6 (Hadmard三线定理)**.** 设$w(z)$是带形区域$\bar{D}$上的有界连续函数, 在D内全纯, 且在$\{\mathrm{Re} z = 0\}$上满足$|w(z)| \le B_0$, 在$\{\mathrm{Re} z = 1\}$ 上满足$|w(z)| \le B_1$. 那么对于任意$z \in D$,成立$|w(z)| \le B_0^{1-\mathrm{Re} z} B_1^{\mathrm{Re} z}$.

证明. 不妨设B_0, B_1是正数(否则可通过逼近证明). 考虑函数$f(z) = \frac{w(z)}{B_0^{1-z} B_1^{z}}$, 显然在$D$内全纯, 且在$\bar{D}$上连续有界. 又$|f(iy)| \le 1, |f(1+iy)| \le 1$, 从而在$D$上$|f(z)| \le 1$. □

定理4的证明. 1. 取$f = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} I_{A_k}$ 是X上的简单函数, 其中$a_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, A_k是X的互不相交的具有有限测度的子集, 而I_A是集合A的特征函数. 根据算子范数的定义,我们只需控制

$$\left\|T(f)\right\|_{L^q(Y,\nu)} = \sup\left\{\left|\int_Y T(f)(x) g(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right| : g \text{ 是简单函数且 } \left\|g\right\|_{L^{q'}(Y,\nu)} \le 1\right\}.$$

我们可把g写作$g = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} I_{B_j}$, 其中$b_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, B_j 是Y 的互不相交的具有有限测度的子集.

2. 记

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1} z, \quad Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1} z.$$

对$z \in \bar{D}$ (前述定理所定义的闭带形区域), 定义复变函数

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x) g_z(x)\,\mathrm{d}\nu(x),$$

其中

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} I_{A_k}, \quad g_z = \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} I_{B_j}.$$

利用线性,可知

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(I_{A_k})(x) I_{B_j}(x)\,\mathrm{d}\nu(x),$$

从而, 注意到$a_k, b_j > 0$, 则$F(z)$ 在D 上全纯, 在$\bar{D}$上连续, 并且有界(依赖于f和g).

3. 当$\mathrm{Re} z = 0$时, 由A_K互不相交及$|a_k^{P(z)}| = a_k^{p/p_0}$可知$\left\|f_z\right\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \left\|f\right\|_{L^p}^{p}$; 类似地, 成立$\left\|f_z\right\|_{L^{q'_0}}^{q'_0} = \left\|f\right\|_{L^{q'}}^{q'}$. 在$\mathrm{Re} z = 1$时, 也成立$\left\|f_z\right\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \left\|f\right\|_{L^p}^{p}$ 以及$\left\|f_z\right\|_{L^{q'_1}}^{q'_1} = \left\|f\right\|_{L^{q'}}^{q'}$. 于是由Hölder不等式, 在$\mathrm{Re} z = 0$时

$$|F(z)| \le \left\|T(f_z)\right\|_{L^{q_0}} \left\|g_z\right\|_{L^{q'_0}} \le M_0 \left\|f_z\right\|_{L^{p_0}} \left\|g_z\right\|_{L^{q'_0}} = M_0 \left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}};$$

类似地, 在$\mathrm{Re} z = 1$时

$$|F(z)| \le \left\|T(f_z)\right\|_{L^{q_0}} \left\|g_z\right\|_{L^{q'_0}} \le M_1 \left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}}.$$

4. 根据Hadamard三线定理, 对$\theta = \mathrm{Re} z$, 成立

$$|F(z)| \le \left(M_0 \left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}}\right)^{\theta} \left(M_1 \left\|f\right\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \left\|g\right\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}}\right)^{1-\theta} = M_0^(1-\theta) M_1^{\theta} \left\|f\right\|_{L^p} \left\|g\right\|_{L^{q'}}.$$

在注意到$P(\theta) = Q(\theta) = 1$, 从而$F(\theta) = \int_Y T(f) g\,\mathrm{d}\nu$, 从而利用$\left\|g\right\|_{L^{q'}} \le 1$, 得到

$$\left\|Tf\right\|_{L^q} \le M_0^(1-\theta) M_1^{\theta} \left\|f\right\|_{L^p},$$

即得所证. □

2. 应用举例

定理7 (Schur 定理). 设$K(x,y)$ 是乘积测度空间$(X\times Y,\mu\times\nu)$上的局部可积函数, 且

$$\sup_{x\in X}\int_Y |K(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)=A<\infty,\quad \sup_{y\in Y}\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)=B<\infty.$$

则$Tf(x)=\int_Y K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$($f\in L^\infty(Y,\nu)$具有紧支集) 可延拓为$L^p(Y,\nu)\mapsto L^p(X,\mu)$ 上的有界线性算子, 且

$$\|T\|\le A^{1-\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{p}},\quad (1\le p\le\infty).$$

证明. 由条件易知

$$|(Tf)(x)|\le A\|f\|_{L^\infty},\quad \forall x\in X,$$

从而算子T 是(∞,∞) 型. 下证T 为$(1,1)$ 型:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^1} &\le \int_X\left|\int_Y K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right|\mathrm{d}\mu(x)\\ &\le \int_Y\left(\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right)|f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &\le B\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

利用Riesz 插值定理即得结论. □

例3. $L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le 2)$ 上的 *Fourier* 变换.

设$f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p\le 2)$, 作分解 $f=g+h$, 其中 $g\in L^1$, $h\in L^2$如下:

$$g=\begin{cases} f, & 若\ |f|\ge 1,\\ 0, & 若\ |f|\le 1;\end{cases}\qquad h=\begin{cases} 0, & 若\ |f|\ge 1,\\ f, & 若\ |f|\le 1.\end{cases}$$

定义f的Fourier变换为

$$\hat{f}=\hat{g}+\hat{h}.$$

这个定义是合理的, 即不依赖于具体分解. 事实上, 假设存在两个分解, 即$f=g_1+h_1=g_2+h_2$. 那么$g_1-g_2=h_2-h_1$, 从而$\widehat{g_1-g_2}=\widehat{h_2-h_1}$. 利用$L^1$及$L^2$上Fourier变换的线性,就有$\hat{g}_1-\hat{g}_2=\hat{h}_2-\hat{h}_1$, 或者$\hat{g}_1+\hat{h}_1=\hat{g}_2+\hat{h}_2$.

由于$\|\hat{f}\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^1}$, 即 $\mathcal{F}$ 是 $(1,\infty)$ 型; 又$\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$是酉算子,$\|\mathcal{F}\|=1$, 即 $\mathcal{F}$ 是 $(2,2)$ 型. 那么令 $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{2}$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{2}$, 则$\mathcal{F}:L^p\to L^q$且$\|\mathcal{F}\|\le 1$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}=1$. 所以最终我们有如下结果:

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ 其中\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad 1\le p\le 2.$$

例4. 关于卷积的 *Young* 不等式. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$,$g\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\ \le\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, 1\le r\le\infty.$$

证明. 定义如下卷积型(非奇异)积分算子$T_f(g)=f*g$. 在第一讲我们就证明了

$$\|T_f g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

另外显然成立

$$\|T_f g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

所以T_f 既为(1,1)型, 也是(∞,∞)型, 而且算子范数$M_0 = \|f\|_{L^1}, M_1 = \|f\|_{L^1}$. 那么对任意$1 \le p \le \infty$,$T_f$为$(p,p)$型: $\|T_f g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$. 即得所证. □

例5. 关于卷积的 *Young* 不等式(续). 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

其中$\frac{1}{r}+1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}, 1 \le p,q,r \le \infty$.

证明. 1. 仍定义线性算子$T_f(g) = f*g$. 由上一例, $(T_f)g$为$(1,p)$型 :

$$\|T_f g\|_{L^p} = \|f*g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}, \text{其中} M_0 = \|f\|_{L^p};$$

2. 若$q = p'$,则由Hölder不等式,T_f为(p',∞)型, 且

$$\|T_f g\|_{L^\infty} = \|f*g\|_{L^\infty} = \left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}, \text{其中} M_1 = \|f\|_{L^p}.$$

3. 于是由Riesz–Thorin 插值定理知T_f是(q,r)型, 且相应算子范数不大于$\|f\|_{L^p}$,其中

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}.$$

直接计算就有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1-\theta+\frac{\theta}{p'}+\frac{1}{p} = 1+\frac{1-\theta}{p} = 1+\frac{1}{r}$. 证毕. □

第七讲　平移不变算子与 Fourier 乘子

这一讲我们介绍有关平移不变算子和Fourier乘子的基本知识. 其中算子的转置(共轭)以及(2,2)型平移不变算子Fourier乘子的刻画在奇异积分算子的研究中常常用到.

一　算子的共轭和转置

从泛函分析我们知道一个空间X的对偶空间往往是研究X本身的重要工具; 类似地线性算子T的伴随算子也是研究T自己的重要工具. 设T 为$X\to Y$ 上的有界线性算子, 则由泛函分析知其伴随算子T^* 为$Y^*\to X^*$ 的有界线性算子且$\|T^*\|=\|T\|$. 对于实$L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间, 泛函作用定义为$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, 我们也写作$(f,g)=\langle f,g\rangle$; 对复$L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间, 为了与$p=2$时内积的定义相符, 泛函作用定义为$(f|g)\triangleq\langle g,\bar f\rangle=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$. 由于这里泛函作用定义的区别, 所以伴随算子的具体叫法也有一些区别: 对实(内积)空间, 若$(Tf,g)=(f,T'g)$, 我们称T' 为T 的转置算子; 对复(内积)空间,若$(Tf|g)=(f|T^*g)$, 则称T^* 为T 的共轭算子. 下面我们看一些形式计算的例子.

例1. 设$(Tf)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$, 其中$K(x,y)$称为T 的核,则

(1) T' 的核为$K(y,x)$;

(2) T^* 的核为$\overline{K(y,x)}$.

证明. (1) 由于

$$\begin{aligned}(f,T'g) &= (Tf,g)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以$T'g(y)=\int_{R^n} K(x,y)g(x)\mathrm{d}x$. 设$T'$ 的核为$K'(x,y)$. 作变量替换$x\rightleftarrows y$ 得,

$$(T'g)(x) = \int_{R^n} K'(x,y)g(y)\mathrm{d}y=\int_{R^n} K(y,x)g(y)\mathrm{d}y,$$

所以, $K'(x,y)=K(x,y)$. (2)的证明留作习题. □

例2. 设$Tf(x)=(m(\xi)\hat f(\xi))^\vee(x)$, 则

(1) T' 的傅里叶乘子为$m(-\xi)$;

(2) T^* 的傅里叶乘子为$\overline{m(\xi)}$.

证明. (1) 利用等式$\int u\hat v=\int \hat u v$,得到

$$\begin{aligned}(f,T'g) &= (Tf,g)=\int Tf(\check g)^\wedge\mathrm{d}\xi=\int (Tf)^\wedge\check g\mathrm{d}\xi\\ &= \int m\hat f\check g\mathrm{d}\xi=\int f(m\check g)^\wedge\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

于是$T'g=(m\check g)^\wedge$, 从而有

$$(T'g)^\wedge = (m\check g)^{\wedge\wedge}=\widetilde{m\check g}=\tilde m\tilde{\check g}=\tilde m\hat g=m(-\xi)\hat g.$$

(2) 利用Plancherel定理,

$$\begin{aligned}(f|T^*g) &= (Tf|g)=\int \overline{Tf}g\mathrm{d}\xi=\int \overline{\widehat{Tf}}\hat g\mathrm{d}\xi\\ &= \int \bar m\bar{\hat f}\hat g\mathrm{d}\xi=\int \bar{\hat f}((\bar m\hat g)^\vee)^\wedge\,\mathrm{d}\xi=\int \bar f(\hat g\bar m)^\vee\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即得$T^*g=(\hat g\bar m)^\vee$. □

二 平移不变算子空间$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

我们定义

$$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{T \in B(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)) : T\tau^x = \tau^x T, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

是与平移可交换的(p,q)型有界线性算子组成的赋范线性空间, 其范数$\|T\|_{p,q} = \|T\|_{L^p\to L^q}$. 由简单的泛函分析结论知$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 是Banach 空间.

定理1. 若$1 \le q < p < \infty$, 则$M^{p,q}(R^n) = \{0\}$.

证明. 1. 首先我们断言: 若$f \in L^p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, 则

$$\lim_{|h|\to\infty} \|\tau^h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

事实上, 此结论对$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 显然成立. (注意上述结论对L^∞显然不成立.) 在一般情形我们采取逼近的方法: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$, $\exists f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_k \to f\,(L^p)$; 即$\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$, 当$k > K$时, $\|f_k - f\|_{L^p} \le \epsilon$. 利用三角不等式, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$\begin{aligned}
\left|\|\tau^h f + f\|_{L^p} - \|\tau^h f_k + f_k\|_{L^p}\right| &\le \|\tau^h(f - f_k) + f - f_k\|_{L^p} \\
&\le \|\tau^h(f - f_k)\|_{L^p} + \|f - f_k\|_{L^p} \\
&= 2\|f - f_k\|_{L^p} \le 2\epsilon,
\end{aligned}$$

于是$\|\tau^h(f_k) + f_k\|_{L^p} - 2\epsilon \le \|\tau^h f + f\|_{L^p} \le \|\tau^h(f_k) + f_k\|_{L^p} + 2\epsilon$. 令$|h| \to \infty$, 就有

$$2^{\frac{1}{p}}\|f_k\|_{L^p} - 2\epsilon \quad\le\quad \lim_{|h|\to\infty} \|\tau^h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f_k\|_{L^p} + 2\epsilon, \quad \forall k > K.$$

再令$k \to \infty$, 得到

$$2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} - 2\epsilon \le \lim_{|h|\to\infty} \|\tau^h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} + 2\epsilon,$$

由ε的任意性即得所证.

2. 利用T的平移不变性和线性, 就有

$$\|\tau^h Tf + Tf\|_{L^q} = \|T(f\tau^h + f)\|_{L^q} \le \|T\|_{L^p\to L^q}\|\tau^h f + f\|_{L^p}.$$

令$|h| \to \infty$,因为$2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} < 1$, 由第一步的结论,得到$\|Tf\|_{L^q} \le 2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|T\|_{L^p\to L^q}\|f\|_{L^p}$. 于是按算子范数定义,$\|T\|_{L^p\to L^q} \le 2^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|T\|_{L^p\to L^q}$, 从而$T = 0$. □

定理2. 若$1 < p \le q < \infty$, 则$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$,其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

这个定理说明$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$和$\mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$其实是“两块招牌,一班人马”.

证明. 1. 第五讲中我们已证,对$T \in \mathcal{M}^{p,q}$,存在唯一的$u \in \mathcal{S}'$,使得$\forall f \in \mathcal{S}$, 成立$Tf = f * u$. 下面说明$T^* g = g * \bar{\tilde{u}}, \forall g \in \mathcal{S}$. 事实上,

$$(f|T^* g) = (Tf|g) = \langle \overline{f * u}, g\rangle = \langle \bar{f}, g * \bar{\tilde{u}}\rangle.$$

这里需验证第三个等号, 即$\langle f * u, \bar{g}\rangle = \langle f, \overline{g * \bar{\tilde{u}}}\rangle$.. 因为$\langle f * u, \bar{g}\rangle = \langle u, \tilde{f} * \bar{g}\rangle$, 而

$$\langle f, \overline{g * \bar{\tilde{u}}}\rangle = \langle \overline{g * \bar{\tilde{u}}}, f\rangle = \langle g * \bar{u}, \bar{f}\rangle = \langle \bar{u}, \tilde{g} * \bar{f}\rangle = \langle u, \widetilde{\overline{\tilde{g} * \bar{f}}}\rangle,$$

所以只需证$\tilde{f}*\bar{g}=\widetilde{\overline{\bar{g}*\bar{f}}}=\widetilde{\bar{\bar{g}}*f}$. 为此, 注意到

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}*g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(x-y)\bar{g}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}f(y-x)\bar{g}(y)\mathrm{d}y;\\
\widetilde{\bar{\bar{g}}*f}(x) &= \bar{\bar{g}}*f(-x)=\int_{\mathbb{R}^n}\bar{\bar{g}}(y)f(-x-y)\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\bar{g}(-y)f(-x-y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\bar{g}(y)f(y-x)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

从而有$T^*g=g*\bar{\bar{u}}$. 由泛函分析可知$T^*\in\mathcal{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$ 且$\|T\|_{p,q}=\|T^*\|_{q',p'}$.

2. 我们说明T 可定义在$L^{q'}$ 上,且在$L^{q'}\cap L^p$ 上的定义与其原来在L^p上的定义一样. 首先, T在$L^{q'}$ 上可如下定义:

$$Tf=\widetilde{\overline{T^*\tilde{\bar{f}}}}.$$

它可先对$f\in\mathcal{S}$定义,然后算子延拓到$L^{q'}$. 进一步, 对$f\in\mathcal{S}$, 成立

$$
\begin{aligned}
\left\langle\widetilde{\overline{T^*\tilde{\bar{f}}}},g\right\rangle &= \langle\tilde{\bar{f}}*\bar{\bar{u}},\bar{\bar{g}}\rangle=\langle\bar{\bar{u}},\bar{f}*\bar{\bar{g}}\rangle\\
&= \left\langle u,\widetilde{\overline{\bar{f}*\bar{\bar{g}}}}\right\rangle=\langle u,\widetilde{f*\tilde{g}}\rangle=\langle u,\tilde{f}*g\rangle=\langle f*u,g\rangle=\langle Tf,g\rangle.
\end{aligned}
$$

所以由延拓唯一性, 确实在$L^{q'}\cap L^p$上上述两种T作用的方式相同.

3. 最后证明$\|T\|_{p,q}=\|T\|_{q',p'}$. 已知$\|T\|_{p,q}=\|T^*\|_{q',p'}$,所以只需证$\|T^*\|_{q',p'}=\|T\|_{q',p'}$. 由$\|T^*\|_{q',p'}=\sup\frac{\|T^*f\|_{p'}}{\|f\|_{q'}}$以及$\|T\|_{q',p'}=\sup\frac{\left\|\widetilde{\overline{T^*\tilde{\bar{f}}}}\right\|_{p'}}{\|f\|_{q'}}$, 这是显然的. 所以我们证明了$\mathcal{M}^{p,q}\subset\mathcal{M}^{q',p'}$. 由对称性同理得$\mathcal{M}^{q',p'}\subset\mathcal{M}^{p,q}$, 所以定理得证. □

三 $\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$和$\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ 的刻画

这一节我们给出通过广义函数u的性质来刻画算子空间$\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$和$\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$的两个定理.

我们首先回忆$\mathbb{R}^n$上有限复值Borel 测度构成的Banach空间$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$,它是$C_{00}(\mathbb{R}^n)$的对偶空间;而$C_{00}(\mathbb{R}^n)$ 就是$\mathbb{R}^n$上连续且在无穷远处收敛到0的函数按最大模范数构成的Banach空间. 设$\mu\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, 则$\|\mu\|_{\mathfrak{M}}=\sup\limits_{\substack{f\in C_{00}(\mathbb{R}^n)\\ \|f\|_\infty=1}}|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}\mu(x)|$. 我们注意到通过$h\mapsto\int_M h(x)\,\mathrm{d}x$,其中$M\subset\mathbb{R}^n$为Borel集, 则可视$h\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 为$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$中测度,且显然$\|h\|_{\mathfrak{M}}\le\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. 所以成立如下连续嵌入:$L^1(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

定理3. $T\in\mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$当且仅当$\exists\mu\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$使得$Tf=f*\mu$. 此时还成立$\|T\|_{1,1}=\|\mu\|_{\mathfrak{M}}$.

证明. 1. 充分性. 设$\mu\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, 由于$Tf(x)=\int f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)$,所以

$$
\begin{aligned}
\int|Tf(x)|\mathrm{d}x &= \int\left|\int f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\right|\mathrm{d}x\\
&\le \int\int|f(x-y)|\mathrm{d}x|\mathrm{d}\mu(y)|\\
&= \|f\|_1\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{d}\mu(y)|\le\|\mu\|_{\mathfrak{M}}\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

于是有$T\in\mathcal{M}^{1,1}$且$\|T\|_{1,1}\le\|\mu\|_{\mathfrak{M}}$.

2. 必要性. 对$T\in\mathcal{M}^{1,1}$, 存在唯一的$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,使得$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,有$Tf=f*u$. 为了得到u的信息, 可利用卷积逼近恒等的性质. 对任意$\epsilon>0$, 取$f_\epsilon=\frac{1}{\epsilon^n}e^{-\pi|\frac{x}{\epsilon}|^2}$, 计算得: $\|f_\epsilon\|_{L^1}=\|e^{-\pi|x|^2}\|_{L^1}=1$,且

$$\|Tf_\epsilon\|_{L^1}\le\|T\|_{1,1}\|f_\epsilon\|_{L^1}=\|T\|_{1,1}.$$

所以$\{Tf_\epsilon\}$ 在$L^1(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界. 由于$L^1\mathbb{R}^n\hookrightarrow\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)=(C_{00}(\mathbb{R}^n))'$, 所以$\{Tf_\epsilon\}$ 在$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界.

由Banach–Alaoglu 定理得, $\{Tf_\epsilon\}$ 在$\mathfrak{M}$ 中是弱$*$ 列紧的; 即存在$\mu\in\mathfrak{M}$和子列$\epsilon_k\to 0$, 使得$\forall g\in\mathcal{S}\subset C_{00}$,

$$\langle Tf_{\epsilon_k},g\rangle\to\langle\mu,g\rangle.$$

另一方面, 注意到$f_{\epsilon_k}*g\to g$在$\mathcal{S}$中收敛, 那么

$$\langle Tf_{\epsilon_k},g\rangle=\quad\langle f_{\epsilon_k}*u,g\rangle=\langle u,\widetilde{f_{\epsilon_k}}*g\rangle=\langle u,f_{\epsilon_k}*g\rangle\to\langle u,g\rangle.$$

这就说明$u=\mu$.

3. 此时由于

$$\begin{aligned}\frac{|\langle u,g\rangle|}{\|g\|_{L^\infty}}&=\lim_{\epsilon_k\to0}\frac{|\langle Tf_{\epsilon_k},g\rangle|}{\|g\|_{L^\infty}}\le\lim_{\epsilon_k\to0}\|Tf_{\epsilon_k}\|_{L^1}\\&=\|T\|_{1,1}\lim_{\epsilon_k\to0}\|f_{\epsilon_k}\|_{L^1}=\|T\|_{1,1},\end{aligned}$$

所以$\|\mu\|_{\mathfrak{M}}\le\|T\|_{1,1}$. 再结合第一步所得不等式,就得到$\|T\|_{1,1}=\|\mu\|_{\mathfrak{M}}$. 证毕. □

下面我们研究$\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$的刻画. 这个定理对于以后研究奇异积分算子相当重要.

定理4. $T\in\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$当且仅当若$Tf=f*u$,则$\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 此时还成立$\|T\|_{2,2}=C\|\hat{u}\|_{L^\infty(R^n)}$,这里$C=(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

证明. 1. 充分性. $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 若$\hat{u}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$且有$Tf=f*u$ 成立, 则两端作Fourier 变换得$\widehat{Tf}=C\hat{f}\hat{u}$. 由Plancerel定理,

$$\|Tf\|_{L^2}=\|\widehat{Tf}\|_{L^2}=C\|\hat{f}\hat{u}\|_{L^2}\le C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\|\hat{f}\|_{L^2}=C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2},$$

所以$\|T\|_{L^2\to L^2}\le C\|\hat{u}\|_{L^\infty}$.

2. 必要性. 我们已知, 对$T\in\mathcal{M}^{2,2}$,存在唯一的$u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,使得$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$成立$Tf=f*u$. 则$\widehat{Tf}=C\hat{f}\hat{u}$. 下证$\hat{u}\in L^\infty(R^n)$.

取$\varphi\in C_c^\infty$, $\operatorname{supp}\varphi\in B(0,2)$, 且在$B(0,1)$ 上$\varphi\equiv1$, $0\le\varphi\le1$. 令$\varphi_R(x)=\varphi(\frac{x}{R})$, 则$C\varphi_R\hat{u}=(T\check{\varphi}_R)^\wedge$. 由于$\varphi_R\in L^2$, $\check{\varphi}_R\in L^2$, 且$T\in\mathcal{M}^{2,2}$, 所以有$T\check{\varphi}_R\in L^2$. 根据Plancherel 定理即得$(T\check{\varphi}_R)^\wedge\in L^2$,于是$\varphi_R\hat{u}\in L^2$. 这就说明了$\hat{u}|_{B(0,R)}=\varphi\hat{u}\big|_{B(0,R)}\in L^2(B(0,R))$. 由$R$ 的任意性得: $\hat{u}\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

下面进一步说明$\hat{u}\in L^\infty$. 设$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集, 则成立

$$\begin{aligned}C^2\int_{\mathbb{R}^n}|f\hat{u}|^2\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^n}|(T\check{f})|^2\mathrm{d}x\le\|T\|^2_{L^2\to L^2}\|\check{f}\|^2_{L^2}\\&=\|T\|^2_{2,2}\|f\|^2_{L^2}\le\|T\|^2_{2,2}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这就意味着

$$\int_{\mathbb{R}^n}(C^2|\hat{u}|^2-\|T\|^2_{2,2})|f|^2\mathrm{d}x\le0.$$

由f的任意性, 必然几乎处处成立$C^2|\hat{u}|^2\le\|T\|^2_{2,2}$. 从而$\hat{u}\in L^\infty$ 且$C\|\hat{u}\|_{L^\infty}\le\|T\|_{2,2}$.此外, 结合第一步的不等式, 就得到$C\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=\|T\|_{2,2}$. 证毕. □

四 Fourier乘子空间$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$

这一节我们对于卷积型算子侧重于从Fourier 乘子的角度，即卷积核u的Fourier变换的角度出发, 研究算子空间$\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$；其要害在于将算子演算转化为对应象征(乘子)的函数演算,从而使问题得到很大的简化. 为此我们注意以下四条对应关系:

- $m \in \mathcal{M}_p \Longleftrightarrow T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$
- $m_1 m_2 \Longleftrightarrow T_{m_1} T_{m_2} = T_{m_1 m_2}$
- $\overline{m_1} \Longleftrightarrow T^*_{m_1} = T_{\overline{m_1}}$
- $km_1 \Longleftrightarrow kT_{m_1} = T_{km_1}, \quad k \in \mathbb{C}$

它基于Fourier变换实现了把算子运算转化为函数演算, 具有非常重要的启发意义. 但若仅局限于Fourier乘子, 其缺点是对应的Banach代数还不够大, 没有单位元或关于取逆不封闭. 这也是以后发展拟微分算子等理论的原因之一.

定义1. *定义L^p– Fourier 乘子空间如下:*

$$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) = \{m \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), T_m f := (m\hat{f})^\wedge \text{是}(p,p)\text{型线性算子}\},$$

其范数定义为$\|m\|_{\mathcal{M}_p} = \|T_m\|_{L^p \to L^p}$.

例3. *1) $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$; 2) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

事实上, 由定理3, 由于

$$|\hat{\mu}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{d}\mu(x)| = \|\mu\|_{\mathfrak{M}},$$

1)成立; 2)则是定理4的推论.

例4. *对任意$1 \le p \le \infty$, $m = e^{i\xi\cdot b} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$.*

证明. 因为$\widehat{T_m f} = e^{i\xi\cdot b}\hat{f}(\xi)$,所以

$$\begin{aligned} T_m f &= (e^{i\xi\cdot b}\hat{f}(\xi))^\vee = \left(\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-b)\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\right)^\vee \\ &= \left(\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} f(y+b)\mathrm{d}y\right)^\vee = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_y f(y+b)) = f(y+b), \end{aligned}$$

所以$(T_m f)(t) = f(t+b)$. 由于$\|T_m f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$,则$T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$, 从而有$e^{i\xi\cdot b} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. 证毕. □

定理5. **(1)** *当$1 < p < \infty$ 时, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)$;*

(2) *当$1 < p < q < 2$ 时,$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_2 = L^\infty$.*

证明. 1. 由定理2得, $\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p',p'}(\mathbb{R}^n)$,从而$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)$.

2. 下证$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_p$. 由$\mathcal{M}_1 = \mathcal{F}(\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n))$ 得$\forall m \in \mathcal{M}_1$,有$T_m f = (\hat{f}m)^\vee = f * \mu/C$ 为(1,1) 型(算子范数为$\|\mu\|_{\mathcal{M}(R^n)}/C$), 其中$\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. 另一方面,

$$\|T_m f\|_{L^\infty} = \frac{1}{C}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\right| \le \|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{d}\mu(y)|/C = (\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}/C)\|f\|_{L^\infty},$$

即T_m是(∞,∞)型. 所以由Riesz–Thorin插值定理, $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$且$\|T_m f\|_{p,p} \le \|\mu\|_{\mathcal{M}(R^n)}/C$. 于是$m \in \mathcal{M}_p$,且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p} = \|T_m f\|_{p,p} \le \|\mu\|_{\mathcal{M}}/C = \|T_m f\|_{1,1} = \|m\|_{\mathcal{M}_1}.$$

3. 再证$\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_2$. 若$m \in \mathcal{M}_q$,则$T_m \in \mathcal{M}^{q,q} = \mathcal{M}^{q',q'}$. 由Riesz–Thorin 插值定理得$T_m \in \mathcal{M}^{2,2}$. 所以, $m \in \mathcal{M}_2 = L^\infty$,且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_2} = \|T_m f\|_{2,2} \le \|T_m f\|_{q,q} = \|m\|_{\mathcal{M}_q}.$$

4. 最后, $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q$的证明与第三步类似. □

定理6. *$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$按函数乘法是一个Banach 代数.*

证明. 1. 容易验证$\mathcal{M}_p$ 是个线性空间,而$\|\cdot\|_{\mathcal{M}_p}$ 是一个范数. 下证$\mathcal{M}_p$ 关于乘法封闭: $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_p \Longrightarrow m_1 m_2 \in \mathcal{M}_p$,且$\|m_1 m_2\| \le \|m_1\|\|m_2\|$. 这是因为

$$\|m_1 m_2\| = \|T_{m_1 m_2}\| = \|T_{m_1} T_{m_2}\| \le \|T_{m_1}\|\|T_{m_2}\| = \|m_1\|\|m_2\|.$$

2. 完备性. 取$\mathcal{M}_p$ 中柯西列$\{m_k\}$, 那么有$\lim_{k,j\to\infty} \|m_k - m_j\|_{\mathcal{M}_p} \to 0$. 因为$\mathcal{M}_p \hookrightarrow \mathcal{M}_2 = L^\infty$, 所以$\{m_k\}$ 也是L^∞ 中柯西列; 于是存在$m \in L^\infty$ 使得$m_k \to m(L^\infty)$. 下面只需证a) $m \in \mathcal{M}_p$; b) $m_k \to m(\mathcal{M}_p)$.

为证明a), 对任意$f \in \mathcal{S}$, 注意到

$$T_{m_k} f(x) = \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) m_k(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi,$$

令$k \to \infty$,由控制收敛定理得

$$T_{m_k} f(x) \to T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) m(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \quad a.e.$$

所以使用Fatou 引理, 就有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_m f(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{m_k\to m} |T_{m_k} f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\le \liminf_{m_k\to m} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{m_k} f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\le \liminf_{m_k\to m} (\|T_{m_k}\|_{p,p} \|f\|_{L^p})^p.\end{aligned}$$

这就是说$m \in \mathcal{M}_p$且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p} \le \liminf_{m_k\to m} \|m_k\|_{\mathcal{M}_p}.$$

取固定的j, 将$\{m_k\}$ 替换为$\{m_k - m_j\}$, 利用上式可得

$$\|m - m_j\|_{\mathcal{M}_p} \le \liminf_{m_k\to m} \|m_k - m_j\|_{\mathcal{M}_p}.$$

由于$\{m_k\}$ 是Cauchy 列, 令$j \to \infty$, 即得$\lim\limits_{j\to\infty} \|m_j - m\|_{\mathcal{M}_p} = 0$. 证毕. □

除$\mathcal{M}_1$ 和$\mathcal{M}_2$外, 对一般的$\mathcal{M}_p$ 加以刻画是一个困难且尚未完成的工作, 目前仅有一些零散的充分或必要条件. 后面我们将介绍奇异积分算子的理论, 以及Hörmander–Mihlin 乘子定理. 它们给出了一类卷积型算子是(p,p)型的充分条件, 在偏微分方程中有着许多重要的应用.

第八讲　Hardy–Littlewood 极大函数

经过前面的准备, 我们现在开始进入调和分析实变理论的核心地带.

一　Hardy–Littlewood 极大函数

1. 极大函数的定义及极大算子的(∞,∞)型

定义1 (中心与非中心极大函数). 设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 其中心与非中心极大函数分别定义为

$$M_c f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|\mathrm{d}y;$$

$$M(f)(x)=\sup_{x\in B_r(y)}\frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_r(y)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi.$$

这里$B_r(x)$是以x为中心, r为半径的开球体.

这两个极大函数之间可以点态地互相控制, 即$M_cf(x)\le Mf(x)\le 2^nM_cf(x)$. 实际上, 若$x\in B_r(y)$, 则必有$B_r(y)\subset B_{2r}(x)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_r(y)|}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi &\le \frac{1}{|B_r(y)|}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\ =\ &\frac{1}{|B_{2r}(x)|2^{-n}}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi=2^n\frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

两边分别取上确界即得. 此外不难看出极大算子M作为一个次线性算子, 是(∞,∞) 型:

$$|Mf(x)|\le\|f\|_{L^\infty}.$$

2. 覆盖引理与极大算子的弱$(1,1)$型

定理1. *M 是弱$(1,1)$ 型, 即*

$$|\{Mf(x)>\alpha\}|\le\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

这个定理不但如后文解释有许多应用,而且利用覆盖定理估计集合测度也是非常有启发性的思想. 下面先介绍Vitali 覆盖引理.

引理1 (Vitali 覆盖引理). *设$\{B_j\}_{j=1}^k$ 为$\mathbb{R}^n$ 中有限个开球, 则必存在其中若干个开球$\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$ 满足:*

1) 它们两两互不相交;

2) $\left|\bigcup_{i=1}^l B_{j_i}\right|\ge 3^{-n}\left|\bigcup_{j=1}^k B_j\right|$.

证明. 1. 不妨设$|B_1|\ge|B_2|\ge\cdots\ge|B_k|$. 下面使用归纳法并按照一定的规则选取所要的$\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$.

取$B_{j_1}=B_1$. 假设$B_{j_1},\cdots,B_{j_i}$ 已选定, 那么$B_{j_{i+1}}$ 按如下规则选取:

- 它与$B_{j_1},\cdots,B_{j_i}$ 均不相交;
- 它是在$\{B_j\}_{j=1}^k$ 中与$B_{j_1},\cdots,B_{j_i}$ 均不相交的剩下的球中测度最大的一个.

由于$k<\infty$, 以上选取经过有限步后结束, 即存在$l<\infty$使得$\forall B_j\notin\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$, 它必与$\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$ 其中之一相交.

2. 性质1) 根据以上第一个取法规则已成立. 下面验证2). 事实上, 若某个$B_j\notin\{B_{j_i}\}_{i=1}^l$, 则必存在某个$B_{j_r}$ 使得$|B_{j_r}|\geq|B_j|$ 且$B_{j_r}\cap B_j\neq\emptyset$, [1] 从而$B_j\subset 3B_{j_r}$ [2]成立. 由此可推出$\bigcup\limits_{j=1}^k B_j\subset\bigcup\limits_{r=1}^l 3B_{j_r}$. 那么

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{j=1}^k B_j\right| \quad &\leq \quad \left|\bigcup_{r=1}^l 3B_{j_r}\right| \quad \leq \quad \sum_{r=1}^l |3B_{j_r}| \\
&= \quad 3^n\sum_{r=1}^l |B_{j_r}| \quad = \quad 3^n|\bigcup_{r=1}^l B_{j_r}|.
\end{aligned}
$$

□

这个证明的关键, 和极大函数一样, 都是考虑"极大". 这是处理许多问题的关键点.

定理1的证明. 1. 集合$E_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n: Mf(x)>\alpha\}$ 是开集. 这是因为对$x\in E_\alpha$, 由非中心极大函数的定义知, 必存在一个球B_x, 使得

- $x\in B_x$;
- $\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(y)|\mathrm{d}y>\alpha$.

所以$\forall y\in B_x$, 有

$$Mf(y)=\sup_{y\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(z)|\mathrm{d}z\geq\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(z)|\mathrm{d}z>\alpha,$$

从而存在x 的一个球邻域B_x 使得$B_x\subset E_\alpha$.

2. 设K 为E_α 中的任意一个紧集. $\forall x\in K$, $\exists B_x\subset E_\alpha$, 使得$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(y)|\mathrm{d}y>\alpha$, 所以$\{B_x\}_{x\in K}$ 构成了K 的一个开覆盖. 由K 的紧性, 存在K 的一个有限开覆盖$\{B_i\}_{i=1}^k$. 再由Vitali 覆盖引理, 存在两两互不相交的$\{B_{j_i}\}_{i=1}^l\subset\{B_i\}_{i=1}^k$, 且$\left|\bigcup\limits_{i=1}^l B_{j_i}\right|\geq 3^{-n}|\bigcup\limits_{j=1}^k B_j|$. 因为

$$
\begin{aligned}
|K| \quad &\leq \quad \left|\bigcup_{i=1}^k B_i\right|\leq 3^n\sum_{i=1}^l|B_{j_i}|\leq 3^n\sum_{i=1}^l\frac{1}{\alpha}\int_{B_{j_i}}|f(z)|\mathrm{d}z \\
&= \quad \frac{3^n}{\alpha}\int_{\bigcup\limits_{i=1}^l B_{j_i}}|f(z)|\mathrm{d}z\leq\frac{3^n}{\alpha}\int_{E_\alpha}|f(z)|\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

所以$|K|\leq\frac{3^n}{\alpha}\int_{E_\alpha}|f(z)|\mathrm{d}z\leq\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. 再由Lebesgue 测度的内正则性, 即得

$$|E_\alpha|=\sup\{|K|: K\subset E_\alpha, K\text{是紧集}\}\leq\frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$

□

因为M 既是弱(1,1) 型,又是(∞,∞) 型, 所以由Marcinkiewicz 插值定理得M是(p,p) 型$(1<p\leq\infty)$.

例1 (Kolmogorov 不等式)**.** 设$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$|\{x: Mf(x)>\lambda\}|\leq\frac{C}{\lambda}\int_{\{x:Mf(x)>\lambda\}}|f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

[1] 否则, 若与B_j相交的球B_{j_i}都比B_j小, 假设B_{j_k} 是这些球中最大的那个, 那么当初在选取B_{j_k}时, 就应该选取B_j而不是现在的B_{j_k}.

[2] kB表示与B同心,但半径是B半径k倍的球体.

证明. 这个不等式可以由(8.1)看出. 这里给出另一个证明.

记$E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$. 对函数$f$ 作分解$f = f_1 + f_2$, 其中$f_1 = f\chi_{E_\lambda}$, $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E_\lambda}$. 对任意$x \in E_\lambda$, 由H-L极大函数定义, 存在包含$x$的球$B$, 使得$\frac{1}{|B|}\int_B |f| > \lambda$, 于是$B \subset E_\lambda$. 从而在$B$ 上$f = f_1$, 则必有$M(f_1)(x) > \lambda$. 这就证明了

$$E_\lambda \subset \{x : Mf_1(x) > \lambda\}.$$

利用M是弱(1,1)型, 如果f_1可积, 就得到

$$|E_\lambda| \le \frac{C}{\lambda}\left\|f_1\right\|_{L^1} = \frac{C}{\lambda}\int_{E_\lambda} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

如果f_1不可积, 则上式右端就是$+\infty$, 从而不等式仍然成立. □

例2. 设$f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $E \subset \mathbb{R}^n$测度有限, 且$0 < p < 1$. 证明:

$$\int_E |f|^p \le \frac{1}{1-p}|E|^{1-p}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}^p.$$

证明. 记$E_\lambda = \{x \in E : |f(x)| > \lambda\}$, 那么$|E_\lambda| \le |E|$且$|E_\lambda| \le \frac{1}{\lambda}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}$. 于是对任意$\delta > 0$, 成立

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|E_\lambda|\,\mathrm{d}\lambda \\ &\le p|E|\int_0^\delta \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda + p\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}\int_\delta^\infty \lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \delta^p|E| + \frac{p}{1-p}\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}\delta^{p-1}.\end{aligned}$$

取$\delta = \left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}/|E|$即得所证. □

习题 1. 定义$M_pf(x) = [M(|f|^p)(x)]^{\frac{1}{p}}$. 利用上述习题结论证明, 对$0 < p < 1$, M_p是$L^{1,\infty}$上有界算子, 即$\left\|M_pf\right\|_{L^{1,\infty}} \le C(n,p)\left\|f\right\|_{L^{1,\infty}}$. □

例3. 证明: 对$1 < p < \infty$, Hardy–Littlewood极大算子是$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$到$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的连续映射.

证明. 1. 利用例2的方法, 不难证明以下事实: 设(X,μ)为测度空间, $E \subset X$且$\mu(E) < \infty$. 又设$f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$ (其中$p \in (0,\infty)$), 则对$0 < q < p$, 成立

$$\int_E |f(x)|^q\,\mathrm{d}\mu(x) \le \frac{p}{p-q}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}^q.$$

由此得到

$$\sup_{E:0<\mu(E)<\infty}\mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_E |f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

下面将对$q = 1, p \in (1,\infty)$利用此不等式.

2. 设$f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}$. 定义$E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$, 以及$E_\lambda^R = \{x : Mf(x) > \lambda\} \cap \{|x| < R\}$, 后者测度有限. 那么根据第1步结论,

$$|E_\lambda^R|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda^R} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

令$R \to \infty$, 就得到[3]

$$|E_\lambda|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

[3]这一步及下一步不严格, 需该进.

由例1, 成立

$$\lambda|E_\lambda|^{\frac{1}{p}} \le C_n|E_\lambda|^{\frac{1}{p}-1}\int_{E_\lambda}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

从而

$$\lambda|E_\lambda|^{\frac{1}{p}} \le C_n\frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}.$$

左边关于$\lambda>0$取上确界, 就证明了$\left\|Mf\right\|_{L^{p,\infty}} \le C_n\frac{p}{p-1}\left\|f\right\|_{L^{p,\infty}}$. □

二 极大函数的应用: 点态收敛的极大函数法

1. 用Hardy–Littlewood 极大算子控制其它极大算子

Hardy–Littlewood极大算子作为对函数绝对值在各点周围的平均的极大化, 可以用来控制其它一些平均化算子, 例如常见的卷积磨光算子. 后者在微分方程中有许多应用.

定理2. *设k 为$[0,\infty)$ 上单调递减, 除有限个点外连续的非负函数. 又设$K(x)=k(|x|)$ 属于$L^1(\mathbb{R}^n)$, 并记$K_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon^n}K(\frac{x}{\epsilon})$. 则*

$$\sup_{\epsilon>0}(|f|*K_\epsilon)(x) \le M_cf(x)\|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

证明. 1. 只需对K 有紧支集且连续情形证明; 对一般的K, 可用满足上述条件的K_j 单调向上逼近K, 相应的结论可用Levi 单调收敛定理得出. 此外, 可只对$x=0$ 证明, 一般情形用估计式两边的平移不变性, 用函数$f(x+t)$ 代替$f(x)$ 即可.

2. 下面只需证: 对取定的$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)K_\epsilon(-y)|\mathrm{d}y \le M_cf(0)\|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

取$e_1=(1,\cdots,0)$, 则$K_\epsilon(-y)=K_\epsilon(|y|e_1)$. 记$F(r)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(r\theta)|\mathrm{d}\theta$, $a(r)=\int_0^r F(s)s^{n-1}\mathrm{d}s$, 注意到$a(0)=0$, K_ϵ 有紧支集, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)K_\epsilon(|y|e_1)|\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(r\theta)|K_\epsilon(re_1)r^{n-1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
=&\int_0^\infty F(r)K_\epsilon(re_1)r^{n-1}\mathrm{d}r = \int_0^\infty a'(r)K_\epsilon(re_1)\mathrm{d}r\\
=&\ a(r)K_\epsilon(re_1)|_0^\infty - \int_0^\infty a(r)\mathrm{d}K_\epsilon(re_1) = \int_0^\infty a(r)\mathrm{d}(-K_\epsilon(re_1)).
\end{aligned}$$

此处最后一项为Lebesgue–Stielges积分. 因为

$$\begin{aligned}
a(r) &= \int_0^r\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(s\theta)|\mathrm{d}\theta s^{n-1}\mathrm{d}s\\
&= \int_{B_r(0)}|f(y)|\mathrm{d}y \le |B_r(0)|M_cf(0),
\end{aligned}$$

所以, 记$\omega_n = |B(0,1)|$, 再利用$\mathbf{S}^{n-1}$的表面积为$n\omega_n$, 最终就有

$$\begin{aligned}|f|*K_\epsilon(0) &\le \int_0^\infty r^n\omega_n M_cf(0)\mathrm{d}(-K_\epsilon(re_1))\\ &= M_cf(0)\omega_n\Big((r^n)(-K_\epsilon(re_1))|_0^\infty + \int_0^\infty K_\epsilon(re_1)nr^{n-1}\mathrm{d}r\Big)\\ &= n\omega_nM_cf(0)\int_0^\infty K_\epsilon(re_1)r^{n-1}\mathrm{d}r\\ &= M_cf(0)\int_0^\infty\int_{\mathbf{S}^{n-1}}K_\epsilon(re_1)r^{n-1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\ &= M_cf(0)\|K_\epsilon\|_{L^1} = M_cf(0)\|K\|_{L^1}.\end{aligned}$$

证毕. □

推论1. 设φ 有控制函数Φ: $|\varphi| \le \Phi$, 且$\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$为径向对称[4]单调递减的连续函数. 则

$$\sup_{\epsilon>0}(|\varphi_\epsilon| * |f|)(x) \le M_cf(x)\|\Phi\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. 点态收敛的极大函数法

设(X,μ), (Y,ν) 是测度空间. 对$\epsilon > 0$, 设T_ϵ 是定义在$L^p(X,\mu)$上, 取值为(Y,ν)中可测函数的线性算子. 定义极大算子:

$$(T_*f)(x) = \sup_{\epsilon>0}|(T_\epsilon f)(x)|.$$

所谓点态收敛的极大函数法是指, 只要对$L^p(X,\mu)$的某个稠密子集中的f, 成立$(T_\varepsilon f)(x)$ 点态收敛, 那么由T_* 的弱(p,q) 型就可推出对一般的f, $(T_\epsilon)f$ 也几乎处处收敛. 严格来说, 我们有以下定理.

定理3. 设D是$L^p(X,\mu)$ 的稠密子集, $\{T_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ 是D 上的一族线性算子, 若

- 存在$B > 0$ 使得$\|T_*f\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \le B\|f\|_{L^p(X,\mu)}$;
- 对任意的$g \in D$, 在ν测度意义下对几乎所有的x成立$(T_\epsilon g)(x) \to (Tg)(x)$.

则$\forall f \in L^p(X,\mu)$, $(T_\epsilon f)$ 在ν 测度意义下几乎处处收敛于某个(Tf); 此时T 为$T|_D$ 在$L^p(X,\mu)$ 上的唯一线性延拓, 且为弱(p,q) 型.

证明. 1. 给定$f \in L^p(X,\mu)$, 对任意$y \in Y$, 定义

$$O_f(y) = \overline{\lim_{\epsilon>0}}\ \overline{\lim_{\theta>0}}|(T_\epsilon f)(y) - (T_\theta f)(y)|.$$

显然$O_f(y) \le \sup_{\epsilon,\theta>0}(|T_\epsilon f(y)| + |T_\theta f(y)|) \le 2T_*f(y)$. 下面证明: $\forall\delta > 0$, 有

$$\nu(\{y \in Y : O_f(y) > \delta\}) = 0. \tag{8.2}$$

若(8.2) 成立,就有$O_f(y)$ ν-几乎处处为0, 从而可推出$\{T_\epsilon f(y)\}_{\epsilon>0}$ 几乎处处为柯西列.

2. 由稠密性, $\forall\eta > 0, \exists g \in D$, 使得$\|f - g\|_{L^p} < \eta$. 利用三角不等式易知$O_f(y) \le O_{f-g}(y) + O_g(y)$, 而由定理条件可得$O_g(y) = 0$. 所以成立

$$\begin{aligned}\nu(\{y \in Y : O_f(y) > \delta\}) &\le \nu(\{y \in Y : O_{f-g}(y) > \delta\})\\ &\le \nu(\{y \in Y : 2(T_*(f-g))(y) > \delta\})\\ &\le \left(\frac{2B}{\delta}\|f-g\|_{L^p}\right)^q \le \left(\frac{2B\eta}{\delta}\right)^q.\end{aligned}$$

[4] $\Phi(x)$只依赖于$|x|$.

这里用了T_* 是弱(p,q) 型. 再由η的任意小性，就可得到(8.2).

3. 由$\{T_\epsilon f(y)\}$ 几乎处处为柯西列知: $T_\epsilon f(y) \to Tf(y)$. 这就给出了线性算子$T$在$L^p(X,\mu)$上的定义. 因为$|Tf(y)| \le T_* f(y)$, 且$T_*$ 是弱(p,q) 型, 所以由定义可知T 是弱(p,q) 型. 证毕. □

3. 在微分定理中的应用

下面首先介绍定理3在函数微分(局部性质)方面的应用.

定理4 (Lebesgue 微分定理). *若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, 则*

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} f(y)\mathrm{d}y = f(x).$$

证明. 选取极大函数$T_* f(x) = \sup\limits_{R>0}\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}|f(y)|\mathrm{d}y = M_c f(x)$, 它是弱$(p,p)$型. 又对于连续函数$f$,当$R\to 0$时处处成立$(T_R)f(x) = \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}|f(y)|\mathrm{d}y \to f(x)$. 根据连续函数在$L^p(\mathbb{R}^n)$中稠密性, 用定理3即证结论. □

注意这里球体$B_R(x)$若换为任何包含x且测度趋于零的球体或方体, 用完全相同的证明思路, 也可证结论成立. 所以对局部可积函数f, 我们可得到

$$|f(x)| \le Mf(x), \quad a.e. x \in \mathbb{R}^n.$$

我们注意到$L^p(1 \le p < \infty)$空间是通过全局的积分定义的. 这里的微分定理说明一个L^p函数在每点附近值的分布还是体现出某种连续性的. 所以与L^∞函数相比, L^p函数是个性质更好的函数.

推论2. *设$T_\epsilon = f * \varphi_\epsilon$, φ 满足: $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$; $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi \mathrm{d}x = a$; φ 有一个径向对称单调递减且$L^1(\mathbb{R}^n)$ 可积的连续控制函数Φ. 则对任意的$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 成立*

$$T_\epsilon f(x) \to af(x)\ a.e.$$

证明. 1. 结论对$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 显然成立. 又极大算子

$$T_* f(x) = \sup_{\epsilon>0}|f * \varphi_\epsilon|(x) \le \sup_{\epsilon>0}|f| * \Phi_\epsilon(x) \le M_c f(x)\|\Phi\|_{L^1}$$

为弱(p,p)型. 由定理3即得证. □

三 椭圆型方程的L^p边值问题

下面我们用极大函数研究仅具有L^p边值的Laplace方程的边值问题. 这类问题在研究双曲—椭圆复合—混合型方程组的诸如跨音速接触间断或跨音速激波问题时会遇到: 由于双曲部分的解可能含有激波等间断而光滑性很差, 导致亚音速流(椭圆)部分边界只有Lipschitz光滑性, 而边界值也仅是L^p函数.

我们考虑最简单的情形, 以获得对这类问题最基本的认识. 考虑Lapalace方程的如下边值问题:

$$\begin{cases} \triangle u &= 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u &= f(x), & \{t=0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 试问该问题是否有解? 此外, 若有解$u(x,t)$, 则当$t \to 0$ 时, $u(x,t)$ 是否点态收敛到$f(x)$?

1. 点态收敛

由数理方程知识, 我们知道Laplace 方程在上半空间对应的Green 函数为如下Poisson核

$$P(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

它满足$\|P\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. 令$P_t(x) = \frac{1}{t^n} P(\frac{x}{t})$, 则可以验证$\frac{\mathrm{d}^2 P_t(x)}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 P_t(x) = 0$, 所以$P_t(x)$ 是关于(x,t)的调和函数. 上述Laplace 方程边值问题的解就是

$$u(x,t) = (f * P_t)(x).$$

这是一个逼近恒等, 所以边值在$\lim_{t\to 0} \left\|u(\cdot,t) - f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$意义下满足. 又若$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则利用第一讲中处理Gauss核的方法(热方程的边值问题), 可以证明$u(t,x) \to f(x)$处处成立.

另一方面，由定理2, $(|f| * P_t)(x) \le M_c f(x) \|P\|_{L^1} = M_c f(x)$, 所以$(T_* f)(x) = \sup\limits_{t>0} |f| * P_t(x) \le M_c f(x)$. 这样根据定理3, $\forall f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, 有$u(t,x) = (f * P_t)(x) \to f(x)$几乎处处成立.

2. 非切向收敛

设$F(x,t)$是$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$上的可测函数, 我们定义它的开口为$a > 0$的非切向极大函数

$$F_m^*(x) := \sup_{t>0} \sup_{|y-x|<at} |F(y,t)|,$$

它也就是F在锥$\Gamma_a(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |y - x| < at\}$ 上的上确界.

定理5. *设Φ具有径向对称的且连续递减的属于$L^1(\mathbb{R}^n)$的控制函数φ. 则对于任意$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 置$F(x,t) = \Phi_t * f(x)$, 那么成立*

$$F_a^*(x) \le C_{n,a}(\left\|\varphi\right\|_{L^1} + |\varphi(0)|) M_c f(x).$$

这里$M_c f(x)$是f的Hardy–Littlewood中心极大函数.

证明. 利用定理2证明第一步所采取的简化, 只需证明: 对任意$|z| < a\varepsilon$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\varphi_\varepsilon(z-y)| \,\mathrm{d}y \le C_{n,a} M_c f(0) (\left\|\varphi\right\|_{L^1} + |\varphi(0)|). \tag{8.3}$$

事实上, 令

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(0), & |x| \le a, \\ \varphi(|x| - a), & |x| > a, \end{cases}$$

则$\psi(x)$就是$\sup_{|u|\le a} |\varphi(x-u)|$的一个径向对称连续递减且可积的控制函数. 于是$|\varphi_\varepsilon(z-y)| = |\varphi_\varepsilon(y-z)| = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}y - \varepsilon^{-1}z) \le \sup_{|u|\le a} \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}y - u) \le \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}y) = \psi_\varepsilon(y) = \psi_\varepsilon(-y)$. 定理2证明第2步已经证得$|f| * \psi_\varepsilon(0) \le C_n M_c f(0) \left\|\psi\right\|_{L^1}$. 由此就得到(8.3)成立. □

由此定理, 容易看出, 当$\Phi(x)$是Poisson核$P(x)$时, 我们就知道以$f \in L^p (1 \le p < \infty)$ 为边值的上半空间调和函数$u(x,t)$非切向几乎处处收敛于$f(x)$, 即对几乎所有$x \in \mathbb{R}^n$, 对所有$a > 0$, 成立

$$\lim_{\Gamma_a(x) \ni (y,t) \to (x,0)} u(y,t) = f(x).$$

四 Calderon–Zygmund 分解

最后,我们介绍极其重要的Calderon–Zygmund 分解定理, 它结合了函数值在空间的分布把函数分解为有界的好的部分和有若干性质的“不好”的部分. 这将在今后研究奇异积分算子的弱(1,1)型时起关键作用.

定义2 (二进方体)**.** *$\mathbb{R}^n$中边长为2^k, 各边平行于坐标轴的正方体$[2^k m_1, 2^k(m_1+1))\times[2^k m_2, 2^k(m_2+1))\times\cdots\times[2^k m_n, 2^k(m_n+1))$ 称为二进方体. 这里$k, m_1, \cdots, m_n$均为整数.*

固定k, 全空间可被这样的二进方体覆盖, 且具有以下两条基本性质:

(a) 当k 相同时, 两两互不相交;

(b) 当k 不同时, 必有一个包含在另一个中或互不相交.

定理6 (Calderon–Zygmund 分解)**.** *设$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha>0$. 则存在$\mathbb{R}^n$ 上的函数g 和b 满足:*

1) $f=g+b$;

2) $\|g\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$, $\|g\|_{L^\infty}\le 2^n\alpha$;

3) $b=\sum\limits_j b_j$, *其中*$\operatorname{supp} b_j$ *包含在某个二进方体*Q_j *中, 且*$Q_j\cap Q_k=\emptyset (k\ne j)$;

4) $\int_{Q_j} b_j \mathrm{d}x=0$;

5) $\|b_j\|_{L^1(Q_j)}\le 2^{n+1}\alpha|Q_j|$;

6) $\sum\limits_j |Q_j|\le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$.

证明. 1. 选择满足定理要求的方体.

因为$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<\infty$, 可取$l$ 充分大, 使得对任意的边长为2^l的方体Q, 都成立$|Q|>\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}$. 这样的方体被称为第0 代方体, 其集合记作$G_0$.

对每个$Q\in G_0$, 将其每个边二等分得到2^n 个小方体, 后者边长为2^{l-1}, 称为第1 代方体, 其集合记作G_1.

按照如下准则选择方体($k=1,2,\cdots$):

- 现对第k代方体$Q\in G_k$, 若
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x>\alpha,$$
则其被选中. 记所有被选中的第k代方体为S_k.

- 对没有选中的第k代方体$Q\in G_k\setminus S_k$, 将其每边二等分得到第$k+1$代方体.所有第$k+1$代方体集合记作G_{k+1}.

对$k=1,2,\cdots$, 上述步骤可以无限进行下去. 记$S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$. 这就是定理性质3)中出现的方体的集合.

2. 构造满足条件的b_j.

对任意的$Q_j\in S$, 令$b_j(x)=f(x)-\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|\mathrm{d}y$, 则性质4)显然成立. 令$b=\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$. 所以3)成立.

3. 令$g=f-b$, 则性质1) 满足.

4. 再验证性质5). 从定义可知$\int_{Q_j}|b_j|\mathrm{d}x \le 2\int_{Q_j}|f|\mathrm{d}x$. 因为$Q_j$ 被选中, 必有$Q_{j'}$ 使得通过其边对分一次[5]得到Q_j, 则$|Q_{j'}| = 2^n|Q_j|$ 且$Q_j \subset Q'_j$; 而$Q_{j'}$之所以被分解, 是因为没有被选中, 即成立$\frac{1}{|Q_{j'}|}\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x \le \alpha$, 或$\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x \le 2^n\alpha|Q_j|$. 于是得到$\int_{Q_j}|b_j|\mathrm{d}x \le 2^{n+1}\alpha|Q_j|$.

5. 下证性质6). 若$Q_j \in S$, 则$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x > \alpha$,[6] 于是

$$\sum_j |Q_j| < \frac{1}{\alpha}\sum_j \int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{\bigcup Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

6. 最后验证性质2). 因为

$$g = f - b = \begin{cases} f, & x \notin \bigcup Q_j, \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x, & x \in Q_j, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &\le \sum_j \int_{Q_j}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\bigcup Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

又对$x \in Q_j$, 如前所述存在Q'_j使得Q_j由Q'_j分解一次得到, 从而

$$|g| \le \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{2^n}{|Q_{j'}|}\int_{Q_{j'}}|f(x)|\mathrm{d}x \le 2^n\alpha.$$

另一方面, 对于$x \notin \bigcup Q_j$, 必存在一列$\{\tilde{Q}_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得$\tilde{Q}_j \in G_j$, 且$x \in \tilde{Q}_j$, $\bigcap \tilde{Q}_j = \{x\}$, $|\tilde{Q}_j| \to 0$. 所以由Lebesgue 微分定理, 利用$\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|\mathrm{d}x \le \alpha$对这列$\tilde{Q}_j$成立, 令$j \to \infty$, 即$|\tilde{Q}_j| \to 0$, 可得

$$\lim_{|\tilde{Q}_j|\to 0}\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|\mathrm{d}x = |f(x)| \le \alpha.$$

从而有$|g(x)| < 2^n\alpha$. 证毕. □

极大函数和C-Z分解是调和分析中最重要的方法之一. 下面我们举一些例子帮助大家熟悉这套方法.

例4. *若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 以 $\lambda > 0$ 为水平对 f 作 C-Z 分解, 所得方体记为 $\{Q_k^\lambda\}$, 则:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_c f(x) > 7^n\lambda\}| \le 2^n \sum_k |Q_k^\lambda|.$$

分析: $\{x : |f|(x)| > \lambda\} \subset \{x : Mf(x) > \lambda\} \subset (\cup_k Q_k^\lambda) \cup Z$, 其中$|Z| = 0$.

证明. 1. 对任意 Q_k^λ, 记 $(Q_k^\lambda)^*$ 为与 Q_k^λ 同心但边长为其两倍的方体. 下面说明: 对任意 $x \notin \bigcup_k (Q_k^\lambda)^*$, 有 $M_c f(x) \le 7^n\lambda$, 即若 $x \notin \bigcup_k (Q_k^\lambda)^*$, 则对任意以 x 为中心的方体 Q, 成立:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x \le 7^n\lambda.$$

[5]注意所有第0代方体都被分割掉了.

[6]从而在Q_j上成立$Mf(x) > \alpha$.

下面分两种情形讨论.

2. $Q \subset \mathbb{R}^n \backslash (\bigcup\limits_k Q_k^\lambda)$. 此时对任意 $x \in Q$ 有 $|f(x)| \le \lambda \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x \le \lambda \le 7^n\lambda$ 成立.

3. 否则 Q 必与某个 Q_k^λ 相交. 由于x在Q中且$x \notin (Q_k^\lambda)$, 所以成立$Q_k \subset 3Q$,(以 Q 的中心为心, 边长为 Q 的边长的 3 倍的方体), 于是对所有与Q相交的Q_k取并, 成立 $\bigcup Q_k^\lambda \subset 3Q$. 那么

$$
\begin{aligned}
\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_{Q\cap(\mathbb{R}^n\backslash \bigcup\limits_k Q_k^\lambda)} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{Q\cap(\bigcup\limits_k Q_k^\lambda)} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \lambda|Q| + \int_{\bigcup\limits_k (Q\cap Q_k^\lambda)} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \lambda|Q| + \int_{\bigcup\limits_{k\in\mathcal{A}} (Q_k^\lambda)} |f(x)|\mathrm{d}x \quad (\text{这里记 } \mathcal{A} = \{k :\ Q_k^\lambda \cap Q \ne \emptyset\}) \\
&= \lambda|Q| + \sum_{k\in\mathcal{A}} \int_{Q_k^\lambda} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \lambda|Q| + \sum_{k\in\mathcal{A}} 2^n\lambda|Q_k^\lambda| \quad (\text{因为 } \frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda} |f(x)|\mathrm{d}x \le 2^n\lambda) \\
&= \lambda|Q| + 2^n\lambda \sum_{k\in\mathcal{A}} |Q_k^\lambda| = \lambda|Q| + 2^n\lambda\Big|\bigcup_{k\in\mathcal{A}} Q_k^\lambda\Big| \\
&\le \lambda|Q| + 2^n\lambda\cdot 3^n|Q| = \lambda(1+6^n)|Q| \le \lambda 7^n|Q|.
\end{aligned}
$$

证毕. □

第二部分

卷积型奇异积分算子

第九讲　卷积型奇异积分算子及其L^p有界性

这一讲我们开始介绍卷积型奇异积分算子的一般理论. 这类奇异积分算子形式上可写为:

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中"奇异" 是指积分核$K(x)$ 在$x=0$ 处有奇性(例如增长到无穷大)且$K(x) \notin L^p(\mathbb{R}^n)(1 \le p \le \infty)$. 所以上述积分式其实是不收敛,从而没有意义的. 我们要解决的主要问题是：

- 因为K 在$x=0$ 处有奇性，即使$f \in C_0^\infty$, 上述形式定义中的积分式也未必收敛. 所以首要任务是在关于K 的合理的且尽量一般的条件下给出奇异积分算子的严格定义;

- 在K 的什么条件下, 上述定义的奇异积分T 是(p,p) 型?

在介绍完一般理论后,第十一讲中我们将介绍特殊的所谓齐次奇异积分算子,以及Riesz变换和Hilbert 变换.在那里我们将看到奇异积分算子广泛地出现在偏微分方程的研究中. 以后在介绍了Hardy空间$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 和BMO$\mathbb{R}^n$空间后,我们还将利用这一讲所述的研究奇异积分算子的一般思想探究非卷积型的奇异积分算子,它们对发展拟微分算子和仿微分算子的L^p理论有重要作用.

一　Calderon–Zygmend 奇异积分核

1. Calderon–Zygmund奇异积分核

定义1 (Calderon–Zygmund奇异积分核). *设$K(x)$ 为定义在$\mathbb{R}^n$ 上且在$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 处是局部可积的函数，并且$\exists A_1,A_2,A_3>0$ 使得以下条件成立:*

1. *奇性强度条件:* $\sup\limits_{R>0}\int_{R<|x|<2R}|K(x)|\,\mathrm{d}x = A_1 < \infty;$

2. *消失性条件:* $\sup\limits_{\varepsilon,N>0}\left|\int_{\varepsilon<|x|<N}K(x)\,\mathrm{d}x\right| = A_2 < \infty;$

3. *Hörmander 光滑性条件:* $\sup\limits_{y\neq 0}\int_{|x|\ge 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,\mathrm{d}x = A_3 < \infty,$

则称K 为广义Calderon–Zygmund积分核,简称"C–Z核". 其中A_1,A_2,A_3 称为"C–Z常数".

例1. *$K(x)=1/|x|^n$不是 C-Z 核.*

2. 关于"C–Z核"条件的注

①奇性强度条件的充要条件为: $\sup\limits_{R>0}\dfrac{1}{R}\int\limits_{|x|\le R}|K(x)||x|\,\mathrm{d}x = B_1 < \infty.$

证明. 充分性. 因为$\int_{R<|x|<2R}|K(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{R<|x|<2R}|K(x)|\dfrac{|x|}{R}\,\mathrm{d}x \le \dfrac{1}{2R}\int_{|x|<2R}|K(x)||x|\,\mathrm{d}x\cdot 2 \le 2B_1$, 所以$A_1 \le 2B_1$.

必要性. 根据奇性强度条件在环形上积分的特点,这里利用对空间做环形分解的一个技巧:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\int_{|x|<R}|K(x)||x|\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}R\le|x|\le 2^{-k}R}|K(x)||x|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}R\le|x|\le 2^{-k}R}|K(x)|(2^{-k}R)\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k}R)A_1 = 2A_1.\end{aligned}$$

所以$B_1\le 2A_1$. 证毕. □

②奇性强度条件的充分条件：$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|K(x)||x|^n = C_1<\infty$.

证明. $\int_{R\le|x|\le 2R}|K(x)|dx \le C_1\int_{R\le|x|\le 2R}\frac{1}{|x|^n}dx = C_1\int_{R\le r\le 2R}\frac{1}{r^n}r^{n-1}dr = C_1\ln r\Big|_R^{2R} = C_1\ln 2$. 证毕. □

③Hörmander 条件的充分条件：

a) 梯度条件: 存在$C_1>0$使得对任意$x\ne 0$, 成立$|\nabla K(x)|\le \frac{C_1}{|x|^{n+1}}$.

b) Lipschitz条件：存在$C_2>0$和$\delta>0$使得对任意$|x|>2|y|, y\ne 0$, 成立$|K(x-y)-K(x)|\le C_2\frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}$.

证明. $a)\Longrightarrow b)\Longrightarrow$ Hörmander 条件.

1. $a)\Longrightarrow b)$.利用中值定理,有$|K(x-y)-K(x)|\le|\nabla K(x-ty)||y|\le\frac{C_1|y|}{|x-ty|^{n+1}}\le\frac{2^{n+1}C_1|y|}{|x|^{n+1}}$. 这里$t\in[0,1]$, 并且利用了由于$|x|>2|y|>0$, 成立$|x-ty|\ge|x|-|y|\ge|x|/2>0$.

2. $b)\Longrightarrow$ Hörmander 条件. 直接计算就有$\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|dx\le\int_{|x|>2|y|}C_2\frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}dx\le$ $C_2'|y|^\delta\int_{r>2|y|}\frac{1}{r^{n+\delta}}r^{n-1}dr = C_2'|y|^\delta\int_{r>2|y|}r^{-1-\delta}dr = \frac{C_2'}{\delta 2^\delta}<\infty$. 证毕. □

二 主要结论

定理1. *设K 是$C-Z$ 核. 则存在$W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 它在$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上等于K. 称$Tf=W*f(f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ 为由K确定的一个奇异积分算子. 此外下列结论成立(χ_A 指集合A的特征函数)*:

a) T 为$(2,2)$ 型: $\sup\limits_{0<\varepsilon<N<\infty}\sup\limits_{\xi\ne0}\left|(K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|<N\}})^\wedge(\xi)\right|\le C_1$，且$\|T\|_{L^2\to L^2}\le C_1$;

b) T 为弱$(1,1)$ 型, 且$\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\le C_2$;

c) T 为(p,p) 型$(1<p<\infty)$, 且$\|T\|_{L^p\to L^p}\le C_3\max(p,\frac{p}{p-1})$

这里C_1,C_2,C_3 为仅依赖于$C-Z$ 常数及空间维数n 的常数.

这个定理的证明步骤如下:

1) 说明所断言$W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的存在性, 给出奇异积分算子的严格定义;

2) 用Fourier 变换证明(2,2)型;

3) [Benedek-Calderon-Panzone原理]用C-Z分解和Hörmander条件证明$(r,r)\,(r>1)$ 型⇒弱(1,1)型;

4) ◊ Marcinkiewics 插值定理⇒ T 为(p,p)型, $1<p\le 2$;
   ◊ 对偶方法⇒ T 为(p,p) 型, $2<p<\infty$.

此外我们还将研究奇异积分算子对应极大算子的性质.

三　奇异积分算子的定义

1. C-Z核确定的广义函数

命题1. *K 在原点之外是一个缓增广义函数: $\forall\varepsilon>0$, $K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|<\infty\}}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

证明. 首先,对$\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, 按约定, 定义泛函作用为

$$\langle K(x)\chi_{\varepsilon<|x|<\infty},\varphi\rangle = \int K(x)\chi_{\varepsilon<|x|<\infty}\varphi(x)dx=\int_{\varepsilon<|x|}K(x)\varphi(x)dx.$$

为证明其连续性, 利用奇性强度条件:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\varepsilon<|x|}K(x)\varphi(x)dx\Big|\le\int_{\varepsilon<|x|}\Big|K(x)\varphi(x)\Big|dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^k\varepsilon<|x|<2^{k+1}\varepsilon}|K(x)||\varphi(x)|dx\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^k\varepsilon<|x|<2^{k+1}\varepsilon}|K(x)|\frac{(1+|x|)^M|\varphi(x)|}{(1+|x|)^M}dx\le\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^k\varepsilon<|x|<2^{k+1}\varepsilon}|K(x)\frac{|(1+|x|)^M|\varphi(x)|}{(1+2^k\varepsilon)^M}dx\\
\le&\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(1+|x|)^M\varphi(x)|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2^k\varepsilon)^M}\int\limits_{2^k\varepsilon<|x|<2^{k+1}\varepsilon}|K(x)|dx\\
\le&A_1\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^M|\varphi(x)|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2^k\varepsilon)^M}\le A_1C_{M,\varepsilon}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^M|\varphi(x)|\\
\le&A_1C_{M,\varepsilon}\sum_{|\alpha|\le k,|\beta|\le l}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)
\end{aligned}$$

证毕. □

命题2. *设存在序列$\delta_j\searrow0(j\to\infty)$使得极限*

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{1>|x|>\delta_j}K(x)dx=L \tag{9.1}$$

存在, 则存在$W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 成立$\langle W,\varphi\rangle=\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\delta_j<|x|<j}K(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$

证明. 定义W 为 $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $W(\varphi)=\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{j>|x|>\delta_j}K(x)\varphi(x)dx$. 我们说明这个定义是合理的.

1. 因为$K\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, 所以每项 $\int\limits_{j>|x|>\delta_j}K(x)\varphi(x)dx$ 均存在.

2. 下面证明极限的存在性. 为此, 注意到

$$\begin{aligned}
\int\limits_{j>|x|>\delta_j}K(x)\varphi(x)dx&=\int\limits_{j>|x|\ge1}K(x)\varphi(x)dx+\int\limits_{1>|x|>\delta_j}K(x)\varphi(x)dx\\
&=\int\limits_{j>|x|\ge1}K(x)\varphi(x)dx+\int\limits_{1>|x|>\delta_j}K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\\
&\quad+\varphi(0)\int\limits_{1>|x|>\delta_j}K(x)dx=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

其中, 由命题1 可见$I_1 \to \int\limits_{|x|>1} k(x)\varphi(x)dx$, 而由条件成立$I_3 \to \varphi(0)L$. 所以关键是要看$I_2$ 的收敛性. 这等价于它的Cauchy 列收敛到0. 事实上, 利用奇性强度条件,就有

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\delta_k>|x|>\delta_j} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\Big| \le \int\limits_{\delta_k>|x|>\delta_j} |K(x)||\varphi(x)-\varphi(0)|dx \\
\le\ & |\nabla\varphi(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\delta_k>|x|>\delta_j} |K(x)||x|dx \le |\nabla\varphi(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\delta_k>|x|} |K(x)||x|dx \le C|\nabla\varphi(x)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\delta_k \to 0.
\end{aligned}
$$

3. 下面再验证$W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 由上面计算结果, 依旧利用奇性强度条件, 就有

$$
\begin{aligned}
|W(\varphi)| &= \Big|\int\limits_{|x|>1} K(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{|x|<1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \varphi(0)L\Big| \\
&\le \Big|\int\limits_{|x|>1} K(x)\varphi(x)dx\Big| + \Big|\int\limits_{|x|<1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\Big| + \Big|\varphi(0)L\Big| \\
&\le \Big|\int\limits_{|x|>1} K(x)\varphi(x)dx\Big| + |\nabla\varphi|_{L^\infty} \int\limits_{|x|<1} |K(x)||x|dx + \Big|\varphi(0)L\Big| \\
&\le C\times \text{有限个半范数}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)\text{之和}.
\end{aligned}
$$

证毕. □

由消失性条件, $\sup\limits_{0<R<1}\Big|\int\limits_{R\le|x|\le1} k(x)dx\Big| = A_2 < \infty \Longrightarrow \exists R_j \searrow 0, \lim\limits_{R_j\to0} \int\limits_{1>|x|>R_j} k(x)dx = L$ 必存在. 所以对于C-Z核, 仅利用奇性强度条件和消失性条件, 就可以确定出一个前述定义的广义函数W.

2. 奇异积分算子的定义

从上面证明我们知道广义函数W由下式确定:

$$W(\varphi) = \int\limits_{|x|>1} K(x)\varphi(x)dx + \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\delta_j<|x|<1} K(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \varphi(0)L;$$

而且在$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$的拓扑下成立如下重要关系式:

$$W = \lim_{\delta_j\to0,N\to\infty} K^{(\delta_j,N)}, \quad K^{(\delta_j,N)} = K(x)\chi_{\{\delta_j<|x|<N\}}. \tag{9.2}$$

回忆这里χ_U表示集合U的特征函数. 所以,如果通过C-Z核K确定了一个广义函数$W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 按照缓增广义函数与速降函数作卷积定义, K对应的奇异积分算子为

$$Tf(x) = f * W(x), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{9.3}$$

那么$Tf(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 而且成立

$$Tf(x) = W(\tau^x\tilde{f}) = \lim_{\delta_j\to0,N\to\infty} T^{(\delta_j,N)}f(x), \tag{9.4}$$

其中

$$T^{(\delta_j,N)}f(x) := K^{(\delta_j,N)} * f(x).$$

注意对$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, (9.4) 中收敛对任意固定$x$均(点态)成立.

此外,利用命题1, 我们也可不考虑上截断N; 对前述W, 也成立

$$W = \lim_{\delta_j\to0} K\chi_{\{|x|>\delta_j\}} \quad (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

下面的命题表明, 极限(9.1)也是积分核K可以确定一个广义函数W的必要条件.

命题3. 若存在序列$\delta_j \searrow 0 (j \to \infty)$ 使得由$\langle W, \varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\delta_j<|x|} K(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$确定了一个广义函数$W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 那么极限$\lim_{j\to\infty} \int_{1>|x|>\delta_j} K(x)dx = L$ 存在.

证明. 我们有$\langle W, \varphi \rangle = \int_{1<|x|} K(x)\varphi(x)dx + \lim_{j\to\infty} \int_{1>|x|>\delta_j} K(x)\varphi(x)dx$.由于左边和第一项均确定广义函数, 那么$\lim_{\delta_j \to 0} \int_{1>|x|>\delta_j} K(x)\varphi(x)dx$也确立了一个$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$广义函数. 取$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$使得$|x| \le 1$时$\varphi \equiv 1$, 就表明$\lim_{j\to\infty} \int_{1>|x|>\delta_j} k(x)dx = L$ 存在. 证毕. □

3. 截断C-Z核仍是C-Z核

我们发现截断核$K^{(\varepsilon,N)}$本身属于L^1,又可在广义函数意义下逼近K确定的广义函数W,所以它的性质对今后研究奇异积分算子具有重要价值. 下面是关于截断核性质的一个非常重要的定理.

定理2. 对任意$0 < \varepsilon < N < \infty$, $K^{(\varepsilon,N)} := K\chi_{\{\varepsilon<|x|<N\}}$ 仍为$C-Z$ 核, 并且它的$C-Z$ 常数仅依赖于K的C-Z常数(从而与ε, N 无关).

证明. 固定ε, N, 记$h(x) = K(x)\chi_{\varepsilon<|x|<N}$. 我们要证明$h$ 满足奇性强度条件, 消失性条件和Hörmander 光滑性条件.

1. 奇性强度条件. 因为$|h| \le |K|$, 所以奇性强度条件显然成立.

2. 消失性条件.$\left| \int_{R_1<|x|<R_2} h(x)dx \right| = \left| \int_{\max\{R_1,\varepsilon\}<|x|<\min\{R_2,N\}} K(x)dx \right| < A_2$.

3. 下面只需验证"Hörmander 条件". 和调和分析中对许多积分的处理一样,这里需要分各种情况一一讨论.

4. 情形(A): $|y| \ge N$. 此时$|x| \ge 2|y|$意味着$|x| \ge 2N$且$|x-y| \ge |x| - |y| \ge |y| \ge N$, 于是直接有

$$\int_{|x|\ge 2|y|} |h(x-y) - h(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

5. 情形(B): $|y| < N$. 此时对积分区域按$|x|$的大小分解, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{2|y|\le|x|, |y|<N} |h(x-y) - h(x)|dx \\
= &\left(\int_{2|y|\le|x|\le\varepsilon, |y|<N} + \int_{2|y|\le|x|, |y|<N\le|x|} + \int_{2|y|\le|x|, |y|<N, \varepsilon<|x|<N} \right) |h(x-y) - h(x)|dx \\
= &\ I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

下面分别验证这三个积分有界.

6. 积分I_1. 此时$h(x) = 0$. 利用$|x| \ge 2|y|$可知$|x-y| \le |x| + |y| \le 3|x|/2 \le 3\varepsilon/2$. 于是$I_1 = \int_{2|y|\le|x|\le\varepsilon, |y|<N} |h(x-y)|dx \le \int_{|x-y|\le 3\varepsilon/2} |h(x-y)|dx = \int_{\varepsilon\le|x-y|\le 3\varepsilon/2} |h(x-y)|dx \le \int_{\varepsilon\le|x|\le 2\varepsilon} |h(x)|dx \le A_1$.

7. 积分I_2. 此时仍有$h(x)=0$. 利用$|x|\geq 2|y|$可知$|x-y|\geq |x|-|y|\geq |x|/2\geq N/2$. 于是$I_2=\int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,|x|\geq N}|h(x-y)|dx\leq\int_{N/2\leq|x-y|}|h(x-y)|dx=\int_{N/2\leq|x|\leq N}|h(x)|dx\leq A_1$.

8. 积分I_3. 对此积分再按照$|x-y|$的大小作区域分解:

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,\varepsilon<|x|<N}|h(x-y)-h(x)|dx\\&=\int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,\varepsilon<|x|<N,|x-y|<\varepsilon}+\int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,\varepsilon<|x|<N,|x-y|>N}+\int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,\varepsilon<|x|<N,\varepsilon<|x-y|<N}\\&= I+II+III.\end{aligned}$$

下面再依次对这三个积分加以讨论.

9. 积分I. 此时$h(x-y)=0$.又$|x|/2\leq|x|-|y|\leq|x-y|\leq\varepsilon$推出$|x|\leq 2\varepsilon$. 于是

$$I=\int_{2|y|\leq|x|,|y|<N,\varepsilon<|x|<N,|x-y|<\varepsilon}|h(x)|dx\leq\int_{\varepsilon<|x|<2\varepsilon}|h(x)|dx\leq A_1.$$

10. 积分II. 此时仍有$h(x-y)=0$.又$N\leq|x-y|\leq|x|+|y|\leq 3|x|/2$推出$|x|\geq 2N/3$. 于是

$$II=\int_{2|y|\leq|x|,|x-y|>N,|y|<N,\varepsilon<|x|<N}|h(x)|dx\leq\int_{2N/3<|x|<N}|h(x)|dx\leq A_1.$$

11. 最后，对于积分III, 直接利用K的Hörmander条件, 就成立

$$III=\int_{2|y|\leq|x|,\varepsilon<|x|<N,|y|<N,\varepsilon<|x-y|<N}|h(x-y)-h(x)|dx\leq\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|dx\leq A_2.$$

证毕. □

四 奇异积分算子的$L^p(1<p<\infty)$有界性

1. Fourier变换与L^2有界性

定理3. 截断C-Z核$K^{(\varepsilon,N)}:=K\chi_{\{\varepsilon<|x|<N\}}$的Fourier变换一致有界. 即$\|\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C$, 其中$C$只与$K$的$C-Z$常数有关.

证明. 固定ε,N, 记$h=K\chi_{\varepsilon<|x|<N}$. 这里证明的关键是通过适当添项减项而利用Hörmander条件.

1. 首先, 我们注意到, 对$\xi\neq 0$, 取$y=\pi\xi/|\xi|^2$, 那么$e^{iy\cdot\xi}=e^{\pi i}=-1$. 于是

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}h(x)e^{-ix\cdot\xi}dx=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}h(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}dx\\&= e^{iy\cdot\xi}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}h(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}h(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx.\end{aligned}$$

所以成立

$$\hat{h}(\xi)=-\frac{1}{2C_n}\int_{\mathbb{R}^n}(h(x-y)-h(x))e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

2. 由此, 通过对上述积分区域分解, 利用Hörmander条件, 不难得到

$$\begin{aligned}
|\hat{h}(\xi)| &\le C_n\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(h(x-y)-h(x))e^{-ix\cdot\xi}dx\Big| \\
&\le C_n\Big|\int_{|x|\ge 2|y|}(h(x-y)-h(x))e^{-ix\cdot\xi}dx\Big|+C_n\Big|\int_{|x|<2|y|}(h(x-y)-h(x))e^{-ix\cdot\xi}dx\Big| \\
&\le C_n\int_{|x|\ge 2|y|}|h(x-y)-h(x)|dx+C_n\Big|\int_{|x|<2|y|}(h(x-y)-h(x))e^{-ix\cdot\xi}dx\Big| \\
&\le C_nA_3+C_n|I|.
\end{aligned}$$

所以下面只需证明积分I一致有界.

3. 对于I, 继续分解:

$$\begin{aligned}
-I &= \int_{|x|<2|y|}(h(x)-h(x-y))e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \int_{|x|<2|y|}h(x)(e^{-ix\cdot\xi}-1)dx+\int_{|x|<2|y|}h(x)dx-\int_{|x|<2|y|}h(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= J_1+J_2-J_3.
\end{aligned}$$

对于J_1, 可以利用奇性强度条件, 得到

$$\begin{aligned}
|J_1| &= \Big|\int_{|x|<2|y|}h(x)(e^{-ix\cdot\xi}-1)dx\Big|\le\int_{|x|<2|y|}|h(x)||x\cdot\xi|dx\le|\xi|\int_{|x|<2|y|}|h(x)||x|dx \\
&\le 2C|\xi||y|\le 2C\pi.
\end{aligned}$$

对于J_2, 利用消失性条件,

$$|J_2| = \Big|\int_{|x|<2|y|}h(x)dx\Big|=\Big|\int_{\varepsilon<|x|<\min(2|y|,N)}K(x)dx\Big|\le A_2.$$

所以下面只需得到J_3的一致估计.

4. 对于J_3, 利用与前面一样的技巧, 有

$$\begin{aligned}
-J_3 &= -\int_{|x|<2|y|}h(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx=-e^{-iy\cdot\xi}\int_{|x|<2|y|}h(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}dx \\
&= \int_{|x|<2|y|}h(x-y)(e^{-i(x-y)\cdot\xi}-1)dx+\int_{|x|<2|y|}h(x-y)dx=J_4+J_5.
\end{aligned}$$

其中,对于J_4, 由于$|x-y|\le|x|+|y|\le 3|y|$, 继续利用奇性强度条件, 就有

$$|J_4|\le\int_{|x-y|<3|y|}|h(x-y)||(x-y)\cdot\xi|dx\le|\xi|\int_{|z|<3|y|}|h(z)||z|dx\le 3C|y||\xi|=3C\pi.$$

5. 最后考虑积分J_5. 此时为了利用消失性条件,我们考虑包含$\{|x|<2|y|\}$的更大的区域$\{|x-y|\le 3|y|\}$, 于是

$$J_5=\int_{|x-y|\le 3|y|}h(x-y)dx-\int_{|x|\ge 2|y|,|x-y|\le 3|y|}h(x-y)dx=J_6+J_7.$$

由消失性条件,

$$|J_6|=\Big|\int_{|z|\le 3|y|}h(z)dz\Big|=\Big|\int_{\varepsilon\le|z|\le\min(3|y|,N)}K(z)dz\Big|\le C_3.$$

再看J_7. 由于$|x|\geq 2|y|$隐含着$|x-y|\geq |x|-|y|\geq |y|$, 所以利用奇性强度条件, 就成立

$$|J_7|\leq \int_{|y|\leq|x-y|\leq 3|y|}|h(x-y)|\,\mathrm{d}x=\int_{|y|\leq|z|\leq 3|y|}|h(z)|\,\mathrm{d}x\leq 2C_1.$$

6. 由于$\{\xi=0\}$是零测集, 上述计算结果表明$\left\|\mathcal{F}(K^{(\varepsilon,N)})\right\|_{L^\infty}$一致有界. 证毕. □

由这个定理我们可直接知道截断奇异积分算子$T^{(\varepsilon,N)}f=f*K^{(\varepsilon,n)}$是(2,2)型,且算子范数只依赖于$K$的C-Z常数.

推论1. $\|\hat{W}\|_{L^\infty}\leq C\Longrightarrow T$ 为(2,2)型.

证明. 由于$K^{(\varepsilon,N)}\to W,(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, 利用Fourier 变换的连续性, 成立$\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}\to\hat{W}(S'(\mathbb{R}^n))$. 另一方面, $\|\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}\|_{L^\infty}\leq C$, 所以$\{\widehat{K^{(\varepsilon,N)}}\}$为$L^\infty(\mathbb{R}^n)$中的弱*紧集. 于是存在子列$\widehat{K^{(\varepsilon_j,N_j)}}$ 在L^∞ 弱*意义下收敛, 从而也在广义函数意义下收敛. 由广义函数极限的唯一性, 必有

$$\lim_{\varepsilon_j\to 0,N_j\to\infty}\widehat{K^{(\varepsilon_j,N_j)}}=\hat{W}\quad (L^\infty\text{弱*拓扑}).$$

于是利用L^∞在弱*拓扑下的完备性, 必有$\hat{W}\in L^\infty$, 且根据范数在弱*拓扑下的下半连续性, 必有

$$\left\|\hat{W}\right\|_{L^\infty}\leq \liminf_{\varepsilon_j\to 0,N_j\to\infty}\left\|\widehat{K^{(\varepsilon_j,N_j)}}\right\|_{L^\infty}\leq C.$$

由此, 易知$Tf=f*W$为(2,2)型. 证毕. □

2. Benedeck-Calderon-Panzone原理与弱(1,1)有界性

定理4 (BCP原理). 设T是一个次线性算子, 满足以下条件:

- T是弱(p,p)型, $1<p<\infty$, 即存在常数C_1使得对任意$f\in L^p$成立$|\{x:|Tf(x)|>\lambda\}|\leq C_1\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p}$;
- 存在大于1的常数C_2,C_3使得对于满足

$$\operatorname{supp} b\subset B(x_0,r),\quad \int_{B(x_0,r)}b(x)\,\mathrm{d}x=0$$

的任意$L^1\cap L^p$函数b, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,C_2r)}|Tb(x)|\,\mathrm{d}x\leq C_3\|b\|_{L^1}.$$

则对于具有紧致支集的有界函数$f(x)$, 有

$$|\{x:|Tf(x)|>\lambda\}|\leq C\frac{\left\|f\right\|_{L^1}}{\lambda}.$$

利用具有紧致支集的有界函数$f(x)$在L^1中的稠密性及依测度收敛序列存在几乎处处收敛子列, 可以将T 延拓为L^1上弱(1,1)型且范数仍是C.

证明. 1. 设$f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset L^1$, 按$\lambda>0$ 对其做C-Z 分解$f=g+b\Rightarrow|Tf|\leq|Tg|+|Tb|$. 于是

$$\begin{aligned}d_{Tf}(\lambda)&=|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tf(x)|>\lambda\}|\leq|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tg(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}|+|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tb(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}|\\&=d_{Tg}(\tfrac{\lambda}{2})+d_{Tb}(\tfrac{\lambda}{2})=A+B.\end{aligned}$$

其中, 回忆$\left\|g\right\|_{L^\infty}\leq 2^n\lambda$ 且$\left\|g\right\|_{L^1}\leq\left\|f\right\|_{L^1}$, 所以$\left\|g\right\|_{L^p}^p\leq\left\|g\right\|_{L^\infty}^{p-1}\left\|g\right\|_{L^1}\leq c_{n,p}\lambda^{p-1}\left\|f\right\|_{L^1}$. 于是利用$T$为弱$(p,p)$型, 就有

$$A\leq\frac{C_1}{\lambda^p}C_{n,p}\lambda^{p-1}\|f\|_{L^1}\leq\frac{C_{n,p}}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

后面会证明成立$b\in L^p\cap L^1$.

2. 为了估计B, 利用第二个条件. 设x_k为C-Z分解所得方体Q_k的中心. 以Q_k的对角线长$2r_k$为直径的球记作$B(x_k,r_k)$. 记$B^*(x_k,r_k)=B(x_k,C_2r_k)$, 以及$B^*=\cup_k B^*(x_k,r_k)$. 这样我们就有

$$\begin{aligned} B &= d_{Tb}(\tfrac{\lambda}{2})=|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tb(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}| \\ &= |(\{x\in B^*:|Tb(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\})\cup(\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B^*:|Tb(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\})| \\ &\le |B^*|+|\{x\in\mathbb{R}^n\backslash B^*:|Tb(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}| \\ &\le \sum_k|B^*(x_k,r_k)|+\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B^*}\frac{|Tb(x)|}{\frac{\lambda}{2}}\,\mathrm{d}x=I+J. \end{aligned}$$

这里, 回忆由C-Z分解可得$\sum_k|Q_K|\le\dfrac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$, 所以

$$I=\sum_k C_2^n|B(x_k,r_k)|\le C_nC_2^n\sum_k|Q_k|\le C_n'\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

3. 下面估计J. 回忆由C-Z 分解, 我们有$b=\sum_k b_k$, 而$\operatorname{supp} b_k\in Q_k$, 且$\int b_k\,\mathrm{d}x=0$, $\|b_k\|_{L^1}\le 2^{n+1}\lambda|Q_k|$, 于是

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B^*}\frac{|Tb(x)|}{\frac{\lambda}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{待证}}{\le} \frac{2}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B^*}\sum_k|Tb_k(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fatou引理}}{\le} \frac{2}{\lambda}\sum_k\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B^*}|Tb_k(x)|\,\mathrm{d}x\le\frac{2}{\lambda}\sum_k\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash B^*(x_k,r_k)}|Tb_k(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{第二条件}}{\le} \frac{2}{\lambda}\sum_k C_3\|b_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le\frac{C_n}{\lambda}\sum_k\lambda|Q_k|\le C_n\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

这就证明了T是弱(1,1)型.

4. 下面证明几乎处处成立$|Tb(x)|\le\sum\limits_k|Tb_k(x)|$. 这是我们假设$f$是具有紧支集的有界函数的原因. 这里关键是利用$T$的弱$(p,p)$型. 首先说明: $b_k\in L^p(1<p<\infty)$. 为此回忆C-Z分解中b_k的定义:

$$b_k(x)=\left(f(x)-\frac{1}{|Q_k|}\int\limits_{Q_k}f(y)dy\right)\chi_{Q_k}.$$

于是利用Hölder不等式,

$$|b_k(x)|^p\le C_p\left(|f(x)|^p+\left|\frac{1}{|Q_k|}\int\limits_{Q_k}f(y)\,\mathrm{d}y\right|^p\right)\chi_{Q_k}\le C_p\left(|f|^p+\frac{1}{|Q_k|}\int\limits_{Q_k}|f|^p\,\mathrm{d}y\right)\chi_{Q_k},$$

从而$\int\limits_{Q_k}|b_k|^p\,\mathrm{d}x=2C_p\|f\|^p_{L^p(Q_k)}<\infty$, 且

$$\sum_k\int\limits_{Q_k}|b_k|^p\,\mathrm{d}x=2C_p\sum_k\int\limits_{Q_k}|f|^p\,\mathrm{d}x\le 2C_p\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f|^p\,\mathrm{d}x.$$

于是利用Q_k互不相交的特点, $|b|^p=\sum_k|b_k|^p$, 就有

$$\|b\|^p_{L^p}=\sum_k|b_k|^p_{L^p}\le\|f\|^p_{L^p}<\infty.$$

5. 下面说明$\|b-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0(N\to\infty)$. 事实上,

$$\begin{aligned}\|b-\sum_{k=1}^{N} b_k\|_{L^p}^p &= \|\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k\|_{L^p}^p=\sum_{k=N+1}^{\infty}\|b_k\|_{L^p}^p \le C_p\sum_{k=N+1}^{\infty}\|f\|_{L^p(Q_k)}\\ &= \int\limits_{\cup_{k\ge N+1}Q_k} |f|^p\,\mathrm{d}x \to 0,\end{aligned}$$

其中第二个等号用了Q_k互不相交的性质以及Levi单调序列收敛引理; 最后一个等号利用了$\sum_k|Q_k|$有限, 从而$\lim_{N\to\infty}|\cup_{k\ge N+1}Q_k|\to 0$, 以及积分的绝对连续性.

6. 利用T是弱(p,p) 型, 我们得到

$$|\{x:|T(b-\sum_{k=1}^{N} b_k)|\ge\lambda\}|\le \frac{C\|b-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k\|_{L^p}^p}{\lambda^p}\to 0 \quad (N\to\infty).$$

这就是说序列$T(b-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k)$依测度收敛到0. 于是$T(b-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k)$必有子列几乎处处收敛到0. 从而,

$$|Tb(x)|\le\left|T(b(x)-\sum_{k=1}^{N_j} b_k(x))\right|+\left|T(\sum_{k=1}^{N_j} b_k(x))\right|\le|T(b(x)-\sum_{k=1}^{N_j} b_k(x))|+\sum_{k=1}^{N_j}|Tb_k(x)|\to\sum_{k=1}^{\infty}|Tb_k(x)|$$

几乎处处成立. 这就完成了BCP原理的证明. □

下面我们利用BCP原理研究奇异积分算子的弱(1,1)型. 我们先引入极大算子. 设$K(x)$是一个C-Z核. 前面我们已定义它的截断$K^{(\varepsilon,N)}=K(x)\chi_{\varepsilon<|x|<N}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 并记

$$(T^{(\varepsilon,N)}f)(x)=K^{(\varepsilon,N)}*f(x).$$

现定义对应的极大奇异积分算子为

$$(T^*f)(x)=\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|(T^{(\varepsilon,N)}f)(x)|.$$

定理5. *设$K(x)$为C-Z核, 则$T^{(\varepsilon,N)}$和T^* 是弱(1,1)型, 且算子范数仅依赖于C-Z常数和空间维数n以及p.*

证明. 1. $T^{(\varepsilon,N)}$ 和T^*是(2,2)型可直接由$\mathcal{F}(K^{(\varepsilon,N)})$的一致有界性(与$\varepsilon,N$无关)得到.

2. 为证$\tilde{T}=T^{(\varepsilon,N)}$ 或T^*为弱(1,1)型, 由BCP原理, 只需验证若$\operatorname{supp} b\subset B(x_0,r)$ 且$\int b(x)\,\mathrm{d}x=0$, 取$C_2=2, C_3=A_3>0$ 就使得

$$\int_{B(x_0,C_2r)^c}|\tilde{T}b(y)|\,\mathrm{d}y\le C_3\int_{B(x_0,r)}|b(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{9.5}$$

事实上,由于

$$T^{(\varepsilon,N)}(b)(x)=\int_{B(x_0,r)}K^{(\varepsilon,N)}(x-y)b(y)\,\mathrm{d}y=\int_{B(x_0,r)}[K^{(\varepsilon,N)}(x-y)-K^{(\varepsilon,N)}(x-x_0)]b(y)\,\mathrm{d}y,$$

从而利用$K^{(\varepsilon,N)}$仍为C-Z核且C-Z常数与K的相同, 就有

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,2r)^c}|T^{(\varepsilon,N)}b(x)|\,\mathrm{d}x &\le \int_{B(x_0,2r)^c}\int_{B(x_0,r)}|K^{(\varepsilon,N)}(x-y)-K^{(\varepsilon,N)}(x-x_0)||b(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\le \int_{B(x_0,r)}\Big[\int_{B(x_0,2r)^c}|K^{(\varepsilon,N)}(x-y)-K^{(\varepsilon,N)}(x-x_0)|\,\mathrm{d}x\Big]|b(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\le \int_{B(x_0,r)}\Big[\int_{|x-x_0|>2r>2|y-x_0|}|K^{(\varepsilon,N)}((x-x_0)-(y-y_0))-K^{(\varepsilon,N)}(x-x_0)|\,\mathrm{d}x\Big]|b(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\le A_3\int_{B(x_0,r)}|b(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这就说明$T^{(\varepsilon,N)}$是弱(1,1)型; 在左边对ε,N取上确界就得到T^*是弱(1,1)型. 证毕. □

由此结论及Marcinkiewicz插值定理,我们知道T^*和$T^{(\varepsilon,N)}$ 必然是(p,p)型$(1<p\le 2)$, 而且特别地用点态收敛的极大函数法可知对$f\in L^p$ $(1\le p\le 2)$, $\lim_{\varepsilon\to 0,N\to\infty}T^{(\varepsilon,N)}f(x)=Tf(x)$几乎处处成立; 同时这个式子也给出了当$f$仅仅是$L^p$函数时奇异积分算子的定义. 再用Fatou引理,就知道

$$\|Tf\|_{L^p}\le \liminf_{\varepsilon\to 0,N\to\infty}\|T^{(\varepsilon,N)}f\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^p}.$$

这里常数C只依赖于n,p和核K的C-Z常数. 这就证明了T是(p,p)型$(1<p<2)$.

下面我们再用BCP原理证明T是弱(1,1)型. 这里关键是证明对于满足BCP原理第二条件的b, 当$x\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,2r)$时, 几乎处处成立

$$Tb(x)=\int_{B(x_0,r)}K(x-y)b(y)\,\mathrm{d}y. \tag{9.6}$$

事实上,由于$\lim_{\varepsilon\to 0,N\to\infty}T^{(\varepsilon,N)}b(x)=Tb(x)$几乎处处成立, 于是当$\varepsilon<r$时, 由于对$y\in B(x_0,r)$成立$|x-y|>r$, 所以

$$Tb(x)=\lim_{\varepsilon\to 0,N\to\infty}\int_{\varepsilon<|x-y|<N}K(x-y)b(y)\,\mathrm{d}y=\lim_{N\to\infty}\int_{|x-y|<N}K(x-y)b(y)\,\mathrm{d}y=\int K(x-y)b(y)\,\mathrm{d}y.$$

这里最后一个等式成立是因为$|x-y|\le|x|+r+x_0$, 从而当N充分大时截断自然被移去.

命题4. *T是弱(1,1)型.*

证明. 由于(9.6) 成立, 所以证明与定理5的完全一样, 只要把那里的$T^{(\varepsilon,N)}$均换为T, $K^{(\varepsilon,N)}$换成K即可. 证毕. □

3. 对偶原理与$L^p(2<p<\infty)$有界性

这样,我们已经证明了T是(p,p)型$(1<p\le 2)$和弱(1,1)型. 那么怎么对$2<p<\infty$证明T仍是(p,p)型呢? 这要利用T的线性及其伴随算子的核仍是C-Z核的性质.

第一步: 由于T (和$T^{(\varepsilon,N)}$)是$L^p(1<p\le 2)$上有界线性算子, 故它有定义在$L^{p'}$上的伴随算子T' (和$(T^{(\varepsilon,N)})'$), 且$\|T\|_{L^{p'}\to L^{p'}}=\|T\|_{L^p\to L^p}$. 这里$\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$. 此外, 如同在第七讲中计算过的, $(T^{(\varepsilon,N)})'$仍然可表示为卷积型算子, 且其积分核为$K^{(\varepsilon,N)}(-x)$或$\overline{K^{(\varepsilon,N)}(-x)}$. 注意若$K$为C-Z核, 则$K(-x)$, $K^{(\varepsilon,N)}(-x)$ (或$\overline{K(-x)}$, $\overline{K^{(\varepsilon,N)}(-x)}$)仍然是C-Z核, 它们的C-Z常数只和$K$的C-Z常数有关. 所以由前面已证明的结论, $(T^{(\varepsilon,N)})'$和它所对应的极大算子$(T')^*$必然是弱(1,1) 型; 再利用Marcinkiewicz插值定理和p'的任意大性质,就知道$(T^{(\varepsilon,N)})'$和$(T')^*$ 是(q,q)型$(1<q<\infty)$. 最后利用$(T^{(\varepsilon,N)})'$的伴随算子就是$T^{(\varepsilon,N)}$, 就知道后者是(q',q')型.由于$1<q<\infty$, 所以$1<q'<\infty$. 此外, $T^{(\varepsilon,N)}$的$L^{q'}$算子范数仅依赖于K的C-Z常数以及n,q'.

第二步: 设$p\geq 2$. 对任意$f\in(L^p\cap L^1)\subset L^2$, 我们已知$T^{(\varepsilon,N)}f(x)\to Tf(x)$ 几乎处处成立. 所以由Fatou引理,

$$\left\|Tf\right\|_{L^p}^p=\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^p\,\mathrm{d}x\leq\liminf_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|T^{(\varepsilon,N)}f(x)|^p\,\mathrm{d}x\leq C\left\|f\right\|_{L^p}^p.$$

这就证明了T是(p,p)型,且算子范数只依赖于K的C-Z常数以及n,p. 对于一般的$f\in L^p$, 通过算子延拓就可以定义Tf.

这样,我们就完成了定理1的证明.

第十讲 极大奇异积分算子的有界性和Hörmander–Mihlin 乘子定理

作为上一讲内容的继续, 我们现在介绍极大奇异积分算子的有界性, 并且作为奇异积分算子理论的一个应用, 证明在实际中常用的Hörmander–Mihlin 乘子定理.它是从Fourier乘子角度对奇异积分算子理论的另一种阐述.

一 极大奇异积分算子的有界性与奇异积分算子的点态收敛

定理1. *设$K(x)$为C-Z核, 则T^* 是(p,p)型$(1<p<\infty)$, 且算子范数仅依赖于C-Z常数和空间维数n以及p.*

对于极大算子T^*, 我们不一定可以定义其共轭算子, 所以不能通过对偶方法说明它对$p>2$也是(p,p)型. 为了得到更精确的结果, 通过对前面证明方法的适当改进, 在下面定理中我们直接用T^*的具体信息证明它对$p>2$也是(p,p)型.

证明. 1. 以下总假设$1<p<\infty$. 对$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$的情形, 固定$x\in\mathbb{R}^n$, 我们有如下分解:

$$\begin{aligned}
T^{(\varepsilon,N)}(f)(x) &= \int_{\varepsilon\le|x-y|\le N} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varepsilon\le|x-y|} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{|x-y|\ge N} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\varepsilon\le|x-y|} [K(x-y)-K(z_1-y)]f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varepsilon\le|x-y|} K(z_1-y)f(y)\,\mathrm{d}y\\
&\quad - \int_{|x-y|\ge N} [K(x-y)-K(z_2-y)]f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{|x-y|\ge N} K(z_2-y)f(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\varepsilon\le|x-y|} [K(x-y)-K(z_1-y)]f(y)\,\mathrm{d}y + T(f)(z_1) - T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1)\\
&\quad - \int_{|x-y|\ge N} [K(x-y)-K(z_2-y)]f(y)\,\mathrm{d}y - T(f)(z_2) + T(f\chi_{|x-\cdot|<N})(z_2).
\end{aligned}$$

这里z_1,z_2分别为满足$|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}$ 和$|z_2-x|\le\frac{N}{2}$的任意的点. 由于假设$f\in C_0^\infty$, 上式左端及运算中出现的每一项对满足前述条件的z_1,z_2均是处处有定义的. [1]

2. 将上面的式子先后关于z_1和z_2分别在$B(x,\frac{\varepsilon}{2})$和$B(x,\frac{N}{2})$ 上取积分平均. 左边仍然是$T^{(\varepsilon,N)}(f)(x)$, 而右边前三项依次成为如下形式:

$$\begin{aligned}
|J_1| &\le \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} \int_{|x-y|\ge\varepsilon} |K(x-y)-K(z_1-y)||f(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z_1\\
&\le \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \|f\|_{L^\infty} \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} \Big[\int_{|x-y|\ge\varepsilon} |K(x-y)-K(z_1-y)|\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}z_1\\
&\le \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \|f\|_{L^\infty} \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} \Big[\int_{|x-y|\ge2|x-z_1|} |K(x-y)-K((x-y)-(x-z_1))|\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}z_1\\
&\le A_3\|f\|_{L^\infty};\\
|J_2| &\le \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \int_{|z_1-x|\le\frac{\varepsilon}{2}} |Tf(z_1)|\,\mathrm{d}z_1 \le M_c(Tf)(x);
\end{aligned}$$

[1]例如, 由于$|z_1-x|\le\varepsilon/2$, 所以当$|x-y|\ge\varepsilon$时$|z_1-y|\ge|x-y|-|z_1-x|\ge\varepsilon/2$, 所以积分$I:=\int_{\varepsilon\le|x-y|}K(z_1-y)f(y)\,\mathrm{d}y<\infty$. 另一方面, 与前文定义$Tb$类似, 不难验证$I=\lim_{\delta\to0,N\to\infty}\int K^{(\delta,N)}(z_1-y)(f(y)\chi_{|y-x|\ge\varepsilon})\,\mathrm{d}y$, 于是由极限性质,$I=\lim_{\delta\to0,N\to\infty}\int K^{(\delta,N)}(z_1-y)f(y)\,\mathrm{d}y-\lim_{\delta\to0,N\to\infty}\int K^{(\delta,N)}(z_1-y)(f(y)\chi_{|y-x|\le\varepsilon})\,\mathrm{d}y=I_1-I_2$. 由奇异积分的定义, 因为这里$f\in L^1$, 所以$I_1=T(f)(z_1)$, $I_2=-T(f\chi_{|x-\cdot|\le\varepsilon})(z_1)$.

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n\int_{|z_1-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}}|T(f\chi_{|x-\cdot|\leq\varepsilon})(z_1)|\,\mathrm{d}z_1 \leq \left(\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n\int_{|z_1-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}}|T(f\chi_{|x-\cdot|\leq\varepsilon})(z_1)|^p\,\mathrm{d}z_1\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \|T\|_{L^p\to L^p}\left(\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n\int_{|z_1-x|\leq\varepsilon}|f(z_1)|^p\,\mathrm{d}z_1\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|_{L^p\to L^p}\,(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

完全类似地,将ε换成N, z_1换成z_2,对后三项也有估计

$$|J_4| \leq A_3\left\|f\right\|_{L^\infty};\quad |J_5| \leq M_c(Tf)(x);\quad |J_6| \leq \|T\|_{L^p\to L^p}\,(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}.$$

回忆这里符号$M_c(f)$是Hardy–Littlewood极大函数. 所以我们就得到如下重要估计:

$$|T^*f(x)| \leq 2A_3\left\|f\right\|_{L^\infty} + \underbrace{2M_c(Tf)(x) + 2\|T\|_{L^p\to L^p}\,(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}}_{S_p(f)(x)}. \tag{10.1}$$

3. 我们首先利用(10.1)证明T^*是弱(p,p)型. 由于M_c和T均是(p,p)型,所以$S_p(f)$的第一项是(p,p)型. 另外,利用H-L极大算子是弱(1,1)型,有$|\{x:(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}>r\}| = |\{x:(M_c(|f|^p)(x))>r^p\}| \leq C_n\frac{\|f\|_{L^p}^p}{r^p}$,从而$\left\|(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{r>0}(r|\{x:(M_c(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}>r\}|^{\frac{1}{p}}) \leq C_{n,p}\left\|f\right\|_{L^p}$,即$S_p(f)$的第二项是弱$(p,p)$型;所以总的来说$S_p$是(拟线性的)[2]弱$(p,p)$型,其算子范数仅依赖于$p,n$和C-Z常数. 但由于(10.1)式右边第一项不是弱(p,p)型的,所以我们需要更深入地分析: 基本思想是通过把f分解为有界的小的部分利用(10.1)估计,而无界的部分避开(10.1)式,利用T^*的弱(1,1)型估计.

4. f的分解. 对任意的$\alpha>0$,我们有分解$f=f_\alpha+f^\alpha$,其中$f_\alpha=f\chi_{|f|\leq\alpha/(16A_3)}$, $f^\alpha=f\chi_{|f|\geq\alpha/(16A_3)}$. 则$f_\alpha\in L^p\cap L^\infty$, $f^\alpha\in L^1\cap L^p$. 特别地,成立

$$\left\|f^\alpha\right\|_{L^1} = \int|f^\alpha|^p|f^\alpha|^{1-p} \leq \left(\frac{16A_3}{\alpha}\right)^{p-1}\left\|f\right\|_{L^p}^p. \tag{10.2}$$

进一步,对f^α按高度$\alpha\gamma$做C-Z分解得到$f^\alpha=g^\alpha+b^\alpha$,其中$\gamma>0$待定, g^α是好的有界的部分, b^α是坏的部分. 所以我们最终有如下分解

$$f = f_\alpha + g^\alpha + b^\alpha,$$

从而成立

$$\begin{aligned}|\{x:T^*f(x)>\alpha\}| &\leq |\{x:T^*(f_\alpha+g^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{2}\}| + |\{x:T^*(b^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{2}\}|\\ &\leq |\{x:2A_3\left\|f_\alpha+g^\alpha\right\|_{L^\infty}+S_p(f_\alpha+g^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{2}\}| + |\{x:T^*(b^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{2}\}|\\ &\leq \underbrace{|\{x:2A_3\left\|f_\alpha\right\|_{L^\infty}+2S_p(f_\alpha)(x)>\frac{\alpha}{4}\}|}_{b_1} + \underbrace{|\{x:2A_3\left\|g^\alpha\right\|_{L^\infty}+2S_p(g^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{4}\}|}_{b_2}\\ &\quad \underbrace{+|\{x:T^*(b^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{2}\}|}_{b_3}.\end{aligned}$$

5. 我们已经证明T^*是弱(1,1)型,从而利用$\|b^\alpha\|_{L^1}\leq 2\left\|f^\alpha\right\|_{L^1}$以及(10.2)可得估计

$$b_3 \leq C\frac{\|b^\alpha\|_{L^1}}{\alpha/2} \leq 4C\frac{\left\|f^\alpha\right\|_{L^1}}{\alpha} \leq C(n,p,A)\frac{\left\|f\right\|_{L^p}^p}{\alpha^p}.$$

[2]不难算得$[M_c(|f+g|^p)(x)]^{\frac{1}{p}} \leq [2^pM_c(|f|^p+|g|^p)(x)]^{\frac{1}{p}} \leq 2[M_c(|f|^p)(x)+M_c(|g|^p)(x)]^{\frac{1}{p}} \leq 2([M_c(|f|^p)(x)]^{\frac{1}{p}}+[M_c(|g|^p)(x)]^{\frac{1}{p}})$,于是$S_p(f+g)\leq 2S_p(f)+2S_p(g)$.

另外,由于$2A_3\|f_\alpha\|_{L^\infty}\le\alpha/8$, 利用$S_p$为弱$(p,p)$型可知

$$b_1\le|\{x:S_p(f_\alpha)(x)>\frac{\alpha}{16}\}|\le C(n,p,A)\frac{\|f_\alpha\|_{L^p}^p}{\alpha^p}\le C(n,p,A)\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\alpha^p}.$$

类似地,取$\gamma=(2^{n+4}A_3)^{-1}$, 由C-Z分解的性质2), $2A_3\|g^\alpha\|_{L^\infty}\le 2A_32^n\alpha\gamma\le\alpha/8$. 于是

$$b_2\le|\{x:S_p(g^\alpha)(x)>\frac{\alpha}{16}\}|\le C(n,p,A)\frac{\|g^\alpha\|_{L^p}^p}{\alpha^p}\le C(n,p,A)\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\alpha^p}.$$

这里在最后一步我们用了如下估计:

$$\|g^\alpha\|_{L^p}^p\le\|g^\alpha\|_{L^\infty}^{p-1}\|g^\alpha\|_{L^1}\le(2^n\alpha\gamma)^{p-1}\|f^\alpha\|_{L^1}\le\left(\frac{2^n\alpha}{2^{n+4}A_3}\right)^{p-1}\left(\frac{16A_3}{\alpha}\right)^{p-1}\|f\|_{L^p}^p=\|f\|_{L^p}^p.$$

于是我们证明了

$$|\{x:T^*f(x)>\alpha\}|\le C(n,p,A)\frac{\|f\|_{L^p}^p}{\alpha^p},$$

即T^*是弱(p,p)型.

6. 最后证明T^*是强(p,p)型. 我们已经知道T^*是弱$(2p,2p)$型和弱(1,1型. 由Marcinkiewicz插值定理, 立即就得知T^*是强(p,p)型. 于是通过算子延拓,可对任意$f\in L^p$ 定义T^*f. (虽然T^*只是次线性的,但根据其定义, 这样的延拓还是成立的.) 证毕. □

推论1. *设$f\in L^p$, 则$T^{(\varepsilon,N)}f\to Tf$在几乎处处意义下$(1\le p<\infty)$及$L^p$ $(1<p<\infty)$意义下都成立.*

证明. 1. 由点态收敛极大函数法, 前一论断容易验证成立.

2. 对给定的$f\in L^p$, 由于$\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}T^{(\varepsilon,N)}f(x)=Tf(x)$几乎处处成立, 且$|T^{(\varepsilon,N)}f(x)-Tf(x)|^p\le 2^p(T^*f(x))^p$是个可积函数,故由Lesbegue 控制收敛定理就得到$\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\|T^{(\varepsilon,N)}f-Tf\|_{L^p}=0$. 证毕. □

总结

最后,我们把前面所得的结论做一总结: 设K是$C-Z$核,则存在一个广义函数$W\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上等同于$K$, 使得可对速降函数$f$点点定义奇异积分算子$Tf(x)=W*f(x)=\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}K^{(\varepsilon,N)}*f(x)=\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}T^{(\varepsilon,N)}f(x)$. 算子$T$和$T^{(\varepsilon,N)}$及相关极大算子$T^*$是$L^p$有界$(1<p<\infty)$且弱(1,1)型; 它们的算子范数只与$n,p$和C-Z常数有关. 将$T$线性延拓成$L^p$上算子后, 则对任意$f\in L^p$, $T^{(\varepsilon,N)}f$不但按L^p范数收敛到Tf,而且在几乎处处点态意义下也是收敛的.

二 Hörmander–Mihlin 乘子定理

我们利用前述奇异积分算子理论证明如下Hörmander–Mihlin 乘子定理. 奇异积分算子理论是利用积分核给出算子有界性的充分条件, 而这个定理则是从Fourier乘子(卷积核对应广义函数的Fourier 变换)角度给出判断对应卷积型算子有界性的充分条件. 它的证明使用了Littlewood-Paley环形分解的思想.

定理2 (Hörmander-Mihlin 乘子定理). *设$m(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$,且存在$A>0$, 使得满足下列条件之一:*

a) *(Mihlin 条件) 对任何多重指标α, $|\alpha|\le[\frac{n}{2}]+1$:*

$$|\partial^\alpha m(\xi)|\le A|\xi|^{-|\alpha|};$$

b) *(Hörmander 条件)* 对任何多重指标α, $|\alpha|\le[\frac{n}{2}]+1$:

$$\sup_{R>0}R^{-n+2|\alpha|}\int_{R<|\xi|<2R}|\partial^\alpha m(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\le A^2.$$

则$m\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$,且

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p}\le C_n\max(p,1/(p-1))(A+\|m\|_{L^\infty}).$$

又T_m 为弱(1,1) 型, 且

$$\|T_m\|_{L^1\to L^{1,\infty}}<C_n(A+\|m\|_{L^\infty}).$$

证明. 1. 由于从Mihlin条件可以推出Hörmander条件, 我们只需在后者成立的条件下证明结论. 又由于m 是有界的, 所以$W=\check{m}$ 对应的卷积算子T_m必为(2,2)型. 所以如果我们证明了T_m是弱(1,1)型, 则由Marcinkiewicz插值定理, 它必是(p,p)型$(1<p\le2)$, 即$m\in\mathcal{M}_p=\mathcal{M}_{p'}$, 其中$1/p'+1/p=1$. 所以就可以得到$T_m$是$(p,p)$型$(1<p<\infty)$的结论.

2. 为了证明T_m是弱(1,1)型, 由BCP原理, 我们只需证明W在$\mathbb{R}^n$上等同于一个局部可积函数K, 而K 满足Hörmander光滑性条件. 事实上, 对于满足$\operatorname{supp}b\subset B(x_0,r)$ 且$\int b(x)\,\mathrm{d}x=0$ 的函数$b\in L^1\cap L^2$, 可以通过标准的磨光算子得到序列$\{b_\varepsilon\}\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得在L^1和L^2范数下$b_\varepsilon\to b$, 且$\operatorname{supp}b_\varepsilon\subset B(x_0,r+2\varepsilon)$, $\int b_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=0$. 按算子$T_m$的定义, $T_mb_\varepsilon(x)=\langle W,\tau^x\tilde{b_\varepsilon}\rangle$. 对于$x\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,C_2r)$, 当$\varepsilon$小于$(C_2-1)r/2$ 时原点不包含在$\operatorname{supp}\tau^x\tilde{b_\varepsilon}$ 内. 所以其实成立$T_mb_\varepsilon(x)=\langle K,\tau^x\tilde{b_\varepsilon}\rangle=K*b_\varepsilon(x)$. 由于已经知道$T_m$是(2,2)型, 所以按算子延拓, 令$\varepsilon\to0$, 就成立

$$T_mb(x)=K*b(x),\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,C_2r).$$

由此表达式就可以利用Hörmander条件验证BCP原理第二个条件成立了.

3. 下面我们首先构造$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上局部可积函数$K$. 设$\hat{\zeta}$是支集在环状区域$\{\frac12\le|\xi|\le2\}$内的取值于[0,1]的$C^\infty$光滑函数, 且使得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\zeta}(2^{-j}\xi)=1,\quad\xi\neq0.$$

对$j\in\mathbb{Z}$, 置$m_j(\xi)=m(\xi)\hat{\zeta}(2^{-j}\xi)$, $K_j=\check{m}_j$. 那么在缓增广义函数意义下$\sum_{j=-N}^NK_j$收敛到W. 事实上, 对任意$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 根据Lebesgue控制收敛定理有

$$\langle\sum_{j=-N}^NK_j,\varphi\rangle=\langle\sum_{j=-N}^Nm_j,\check{\varphi}\rangle\to\langle m,\check{\varphi}\rangle=\langle W,\varphi\rangle,\quad N\to\infty.$$

此外, 注意到K_j的Fourier变换有紧支集,所以K_j是C^∞ 函数.

4. 记$n_0=[\frac{n}{2}]+1$. 下面证明存在常数$\tilde{C}_n$使得

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac14}\,\mathrm{d}x\le\tilde{C}_nA,\tag{10.3}$$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{-j}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac14}\,\mathrm{d}x\le\tilde{C}_nA.\tag{10.4}$$

5. 先证(10.3). 首先,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac14}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|(1+2^j|x|)^{n_0}(1+2^j|x|)^{\frac14-n_0}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|^2(1+2^j|x|)^{2n_0}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+2^j|x|)^{-2n_0+\frac12}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\tag{10.5}$$

注意到无论n是偶数还是奇数, 都成立$-2n_0+\frac{1}{2}<-n$, 从而上面第二项可被

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+2^j|x|)^{-2n_0+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leq 2^{-jn/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-2n_0+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_n 2^{-jn/2}$$

控制. 对于(10.5)右端第一项, 利用展开式

$$(1+2^j|x|)^{n_0}\leq C_n\sum_{|\gamma|\leq n_0}|(2^jx)^\gamma|,$$

那么, 再利用Plancherel定理, 注意到$\hat{K}_j=m_j$, 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|^2(1+2^j|x|)^{2n_0}\,\mathrm{d}x &\leq C_n\sum_{|\gamma|\leq n_0}\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|^2 2^{2j|\gamma|}|x^\gamma|^2\,\mathrm{d}x\\ \leq\ C_n\sum_{|\gamma|\leq n_0}2^{2j|\gamma|}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}^{-1}(\partial^\gamma\hat{K}_j)(x)|^2\,\mathrm{d}x &= C_n\sum_{|\gamma|\leq n_0}2^{2j|\gamma|}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma m_j(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

为了计算后一积分, 对任意重指标$|\gamma|\leq n_0$, 利用Leibniz公式, 以及定理条件, 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma m_j(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi &= \sum_{\delta\leq\gamma}C_\delta\int_{\mathbb{R}^n}|2^{-j|\gamma-\delta|}\partial^{\gamma-\delta}\hat{\zeta}(2^{-j}\xi)(\partial^\delta m)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\leq \sum_{\delta\leq\gamma}C_\delta 2^{-2j|\gamma|}2^{2j|\delta|}\int_{2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}}|\partial^\delta m(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\ &\leq \sum_{\delta\leq\gamma}C_\delta 2^{-2j|\gamma|}2^{2j|\delta|}2A^2(2^j)^{n-2|\delta|}=\tilde{C}_nA^2 2^{jn}2^{-2j|\gamma|}.\end{aligned}$$

这样我们就得到了

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x)|^2(1+2^j|x|)^{2n_0}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leq\tilde{C}_nA2^{\frac{jn}{2}}.$$

这就完成了(10.3)的证明.

6. 对于(10.4) 可以类似证明: 将上面K_j换作∂_rK_j. 由于

$$\mathcal{F}(|x|^\gamma\partial_rK_j(x))=C_n2^j\partial^\gamma(2^{-j}\xi_r\hat{\zeta}(2^{-j}|\xi|)m(\xi))=C_n2^j\partial^\gamma(\hat{\zeta}_r(2^{-j}|\xi|)m(\xi)),$$

所以将第5步证明中函数$\hat{\zeta}$换作$\hat{\zeta}_r=\xi_r\hat{\zeta}(\xi)$后处理完全一样, 但前面会多一个$2^j$因子. 所以(10.4)中每项会多一个$2^{-j}$因子来平衡.

7. 现在证明若$x\neq 0$, 则$\sum_{j\in\mathbb{Z}}K_j$ 收敛到一个函数, 我们将之记作K. 事实上, 利用K_j定义不难看出

$$|K_j(x)|\leq C_n\|m\|_{L^\infty}2^{jn}.$$

这就表明了$\sum_{j\leq 0}K_j$按照L^∞收敛且有界. 此外, 利用(10.3), 对任意$\delta>0$可得到

$$(1+2^j\delta)^{\frac{1}{4}}\int_{|x|\geq\delta}|K_j(x)|\,\mathrm{d}x\leq\tilde{C}_nA,$$

所以$\sum_{j>0}$在原点的任何一个领域之外可积, 所以几乎处处有限. 这样, 我们就证明了K是一个$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上的局部可积函数, 而且$\sum_jK_j$在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上任意紧集上$L^1$收敛, 所以必然依$\mathcal{S}'$收敛. 这就证明了在原点之外$K=W=\check{m}$.

8. 现在证明$K=\sum_j K_j$满足Hörmander条件: [3]

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,\mathrm{d}x\leq 2C_n'A,\quad \forall\, y\neq 0.$$

对于取定的$y\neq 0$, 存在整数k使得$2^{-k}\leq|y|\leq 2^{-k+1}$. 注意和式$I_k(x):=\sum_{j\leq k}K_j(x)$是在点态意义下成立的, $J_k(x):=\sum_{j>k}K_j(x)$ 在原点以外按照L^1意义成立, 而$K(x)=I_k(x)+J_k(x)$ 在点态意义下成立. 所以利用三角不等式,

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,\mathrm{d}x\leq \int_{|x|\geq 2|y|}|I_k(x-y)-I_k(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{|x|\geq 2|y|}|J_k(x-y)-J_k(x)|\,\mathrm{d}x=I+J.$$

9. 先估计积分I. 由于这里是点态极限,继续利用三角不等式, 则成立

$$\begin{aligned}
I &\leq \sum_{j\leq k}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_j(x-y)-K_j(x)|\,\mathrm{d}x=\sum_{j\leq k}\int_{|x|\geq 2|y|}\int_0^1|-y\cdot\nabla K_j(x-\theta y)|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^1\sum_{j\leq k}2^{-k+1}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla K_j(x-\theta y)|(1+2^j|x-\theta y|)^{\frac14}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta\\
&\leq \tilde{C}_nA\sum_{j\leq k}2^{j-k+1}\leq \tilde{C}_n'A.
\end{aligned}$$

10. 再估计积分J. 由于

$$\|J_k\|_{L^1}=\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=k+1}^m K_j\right\|_{L^1}\leq\lim_{m\to\infty}\sum_{j=k+1}^m\left\|K_j\right\|_{L^1}=\sum_{k=j+1}^{\infty}\left\|K_j\right\|_{L^1},$$

所以

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_{|x|\geq 2|y|}(|J_k(x-y)|+|J_k(x)|)\,\mathrm{d}x\leq 2\int_{|x|\geq|y|}|J_k(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leq 2\sum_{j=k+1}^{\infty}\int_{|x|\geq|y|}|K_j(x)|\,\mathrm{d}y=2\sum_{j=k+1}^{\infty}\int_{|x|\geq|y|}|K_j(x)|\frac{(1+2^j|x|)^{\frac14}}{(1+2^j|x|)^{\frac14}}\,\mathrm{d}y\\
&\leq 2\tilde{C}_nA\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{(1+2^j|y|)^{\frac14}}\leq 2\tilde{C}_nA\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{(1+2^{j-k})^{\frac14}}\leq\tilde{C}_n'A.
\end{aligned}$$

这就证明了K满足Hörmander条件. □

习题 1. 证明$|\xi|^{i\tau}\in\mathcal{M}_p$, 这里$1<p<\infty$, 且$\tau\in\mathbb{R}$. □

三 应用举例

下面我们通过无限带形区域上椭圆边值问题的L^p估计来介绍Hörmander–Mihlin 乘子定理的一个应用.

---

[3]注意这里的等号并不一定是点态意义下的, 所以不能直接用关于点态求和的三角不等式转化为证明估计

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_j(x-y)-K_j(x)|\,\mathrm{d}x\leq 2C_n'A,\quad\forall\, y\neq 0.$$

1. 偏微分方程边值问题

给定$h>0$, 定义平面上带形区域

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{R}, y\in(0,h)\},$$

及其上、下边界

$$F_0=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\},\qquad F_1=\{(x,h): x\in\mathbb{R}\}.$$

定义B上椭圆算子

$$Lu=D_{xx}u+D_{yy}u+aD_xu+bu,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

及边界上斜导数算子

$$M_ju=\alpha_jD_yu+\beta_jD_xu+\lambda_ju,\qquad \alpha_j,\beta_j,\lambda_j\in\mathbb{R},\quad j=0,1.$$

考虑边值问题(P)

$$Lu=f,\ \text{在}\ B\ \text{内},\quad M_ju=0,\ \text{在}\ F_j\ \text{上}.$$

我们的目的是找到系数$a,b,\alpha_j,\beta_j,\lambda_j$所满足的条件, 使得存在常数$C$以成立不等式

$$\|u\|_{W^{2,p}(B)}\le C\|f\|_{L^p(B)},\tag{10.6}$$

其中$1<p<\infty$, 而$f\in L^p(B)$.

2. 常微分方程边值问题

为此, 假设$u\in H^2(B)$, 对u关于$x\in\mathbb{R}$作Fourier变换:

$$\hat{u}(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x,\qquad \xi\in\mathbb{R}, y\in(0,h).$$

那么前述边值问题就转化为$\hat{u}(\xi,y)$关于y的二阶线性常微分方程两点边值问题, 其中$\xi\in\mathbb{R}$是参数:

$$\begin{cases}\hat{u}''+(-\xi^2+ia\xi+b)\hat{u}=\hat{f},\quad y\in(0,h),\\ \alpha_0\hat{u}'(\xi,0)+(i\beta_0+\lambda_0)\hat{u}(\xi,0)=0,\\ \alpha_1\hat{u}'(\xi,h)+(i\beta_1+\lambda_1)\hat{u}(\xi,h)=0.\end{cases}\tag{10.7}$$

由常微分方程边值问题的Fredholm择一性(见[18, 第26节, 第248页]), 上述问题有唯一解当且仅当齐次问题只有零解. 考虑齐次方程

$$v''+(b+ia\xi-\xi^2)v=0,$$

它的基础解系是

$$v_1(y)=\sin\rho y,\quad v_2(y)=\cos\rho y,$$

其中$\rho=(b+ia\xi-\xi^2)^{\frac12}$ (我们通过复平面割去负实轴定义开方函数). 所以得到通解

$$v(y)=\mu_1v_1(y)+\mu_2v_2(y),\qquad \mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}.$$

为确定系数μ_1,μ_2, 利用v满足边界条件, 得到关于μ_1,μ_2 的二元一次方程组

$$\begin{cases}[\alpha_0v_1'(0)+(i\beta_0\xi+\lambda_0)v_1(0)]\mu_1+[\alpha_0v_2'(0)+(i\beta_0\xi+\lambda_0)v_2(0)]\mu_2=0,\\ [\alpha_1v_1'(h)+(i\beta_1\xi+\lambda_1)v_1(h)]\mu_1+[\alpha_1v_2'(h)+(i\beta_1\xi+\lambda_1)v_2(h)]\mu_2=0.\end{cases}\tag{10.8}$$

它只有零解的充分必要条件就是

$$\begin{aligned} F(\xi) \quad := \quad & \sin\rho h[\alpha_0\alpha_1\rho^2-\beta_0\beta_1\xi^2+\lambda_0\lambda_1+i(\lambda_1\beta_0+\lambda_0\beta_1)\xi] \\ & -\rho\cos\rho h[\alpha_0\lambda_1-\alpha_1\lambda_0+i(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)\xi]\neq 0, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

以下假设$F(\xi)$没有实根, 那么(10.7)的解可以表示为

$$\hat{u}(\xi,y)=\int_0^h K(\xi,y,z)\hat{f}(\xi,z)\,\mathrm{d}z, \tag{10.10}$$

其中$K(\xi,y,z)$ (ξ 是参数) 是Green 函数(参考[18]26节, 251页), 当$z\geq y$时定义为

$$K(\xi,y,z)=\frac{1}{\delta}\left[\alpha_0\cos\rho y-\frac{i\beta_0\xi+\lambda_0}{\rho}\sin\rho y\right]\left[\alpha_1\cos\rho(z-h)-\frac{i\beta_1\xi+\lambda_1}{\rho}\sin\rho(z-h)\right],$$

当$z\leq y$时定义为

$$K(\xi,y,z)=\frac{1}{\delta}\left[\alpha_1\cos\rho(y-h)-\frac{i\beta_1\xi+\lambda_1}{\rho}\sin\rho(y-h)\right]\left[\alpha_0\cos\rho z-\frac{i\beta_0\xi+\lambda_0}{\rho}\sin\rho z)\right],$$

其中

$$\delta=(\alpha_1[i\beta_0\xi+\lambda_0]-\alpha_0[i\beta_1\xi+\lambda_1])\cos\rho h+(\alpha_0\alpha_1\rho^2+[i\beta_0\xi+\lambda_0][i\beta_1\xi+\lambda_1])\frac{\sin\rho h}{\rho}.$$

3. 乘子定理与L^p估计

对于$u\in W^{2,p}(B)\cap H^2(B)$, 我们希望利用(10.10)证明如下不等式

$$\|u\|_{W^{2,p}(B)}\leq C\|Lu\|_{L^p(B)}. \tag{10.11}$$

为此, 我们证明如下引理.

引理1. 设$\xi,y,z\mapsto K(\xi,y,z)$是光滑函数, 且

$$\max_{y\in(0,h)}\int_0^h\max_{\xi\in\mathbb{R}}\{|K(\xi,y,z)|+|\xi||D_\xi K(\xi,y,z)|\}\,\mathrm{d}z<\infty, \tag{10.12}$$

$$\max_{z\in(0,h)}\int_0^h\max_{\xi\in\mathbb{R}}\{|K(\xi,y,z)|+|\xi||D_\xi K(\xi,y,z)|\}\,\mathrm{d}y<\infty, \tag{10.13}$$

那么由

$$\hat{u}(\xi,y)=\int_0^h K(\xi,y,z)\hat{f}(\xi,z)\,\mathrm{d}z$$

定义的线性算子$f\mapsto u$在$L^p(B)$上是有界的, 其中$p\in(1,\infty)$.

证明. 定义函数

$$M(y,z)=\max_{\xi\in\mathbb{R}}\{|K(\xi,y,z)|+|\xi||D_\xi K(\xi,y,z)|\}.$$

通过Riemann和逼近, Mihlin乘子定理(其中对应$n=1$情形), 以及Minkowskii 不等式, 可知对任意$p\in(1,\infty)$, 存在常数C 使得

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\int_0^h M(y,z)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,z)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}z. \tag{10.14}$$

再对右端积分算子应用Schur定理(视$\left\|f(\cdot,z)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}$为自变量), 就得到结论. □

最后, 我们得到关于边值问题(P)的如下结论:

定理3. 设$b>0,a\neq 0$, 且方程$F(\xi)=0$没有实根, 那么对任意$p\in(1,\infty)$, 存在常数C_0 使得对于问题*(P)* 的解$u\in W^{2,p}(B)\cap H^2(B)$, 成立不等式(10.11).

证明. 只需对Grenn函数K验证上述引理的条件. 事实上, 计算得到存在常数L使得

$$|K(\xi,y,z)|\leq \frac{L}{|\rho|}\exp|\rho|(y+z-2h),$$
$$|\xi||D_\xi K(\xi,y,z)|\leq L\exp|\rho|(y+z-2h),$$

而当$|\xi|\to\infty$时$|\rho|\sim|\xi|$. 注意$a\neq 0,b>0$ 保证了$\rho(\xi)\neq 0$. □

第十一讲　齐次卷积型奇异积分算子; Riesz变换和Hilbert变换

利用前面建立的一般理论, 这一讲我们介绍齐次卷积型奇异积分算子的基本结果, 以及常用的更为特殊的Riesz 变换和Hilbert 变换.

一　齐次卷积型奇异积分算子

1. 经典C-Z核

定义1. *设$\Omega(x)$是$\mathbb{R}^n$中正齐次零次函数(即对任意$k>0$,成立$\Omega(kx)=\Omega(x)$), $\Omega\in L^1(\mathbf{S}^{n-1})$且成立消失性条件*

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(x)\,\mathrm{d}S=0, \tag{11.1}$$

则称$K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$为经典Calderon–Zygmend(奇异积分)核.

注意按这里的定义, 经典Calderon–Zygmend(奇异积分)核未必是C-Z核. 此外经典C-Z核不属于$L^1(\mathbb{R}^n)$; 但它满足奇性强度条件和消失性条件,所以它对应一个缓增广义函数W_Ω, 可以至少在速降函数空间上确定一个奇异积分算子T_Ω. 利用前两讲中的一般性结论,我们有如下结果:

定理1. *设Ω确定了一个经典Calderon–Zygmend(奇异积分)核K, 且Ω还满足如下Dini条件:*

$$\int_0^1\frac{\omega(s)}{s}\,\mathrm{d}s<\infty,$$

其中$\omega(\rho)=\sup\{|\Omega(x)-\Omega(y)|:x,y\in\mathbf{S}^{n-1}$且$|x-y|<\rho\}$. 则$K$为C-Z核且对应奇异积分算子$T_\Omega$及其极大算子$T^*_\Omega$均为弱$(1,1)$型和$(p,p)$型$(1<p<\infty)$.

证明. 只需验证Hörmander光滑性条件.分以下三步. 1. 首先证明一个几何结论: 若$\mathbb{R}^n$中不同两点x,y满足$|x|\ge 2|y|$, 则成立

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\le 2\frac{|y|}{|x|}.$$

为了证明这个结论,我们固定非原点的x点, 以及$0<r\le|x|/2$. 取定球$B(x,r)$中任意一点z, 则O, x和z确定一个平面. 这也就确定了$y=x-z$. 为了使$\left|\frac{z}{|z|}-\frac{x}{|x|}\right|$尽可能大, 显然需要$z\in\partial B(x,r)$, 即向量$y$与$z$垂直(见图11.1). 由三角形的正弦定理,成立

$$\left|\frac{z}{|z|}-\frac{x}{|x|}\right|=\frac{\sin\theta}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2})}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2})}\frac{|y|}{|x|}=\frac{1}{\cos(\theta/2)}\frac{|y|}{|x|}.$$

所以只需验证$\cos(\theta/2)\ge 1/2$. 为此, 利用三角公式有$\cos(\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$, 以及$\cos\theta=|z|/|x|=|x-y|/|x|\ge\frac{1}{2}$, 所以$\cos(\frac{\theta}{2})\ge\sqrt{3/4}\ge 1/2$. 所以几何断言成立.

2. 注意$\omega(\rho)$是个单调下降的函数, 则极限$\lim_{\rho\to 0}\omega(\rho)$存在. Dini条件意味着$\lim_{\rho\to 0}\omega(\rho)=0$, 所以它隐含着$\Omega$ 是$\mathbf{S}^{n-1}$上的连续函数. 特别地, 我们有$\|\Omega\|_{L^\infty}<\infty$.

3. 取定 $y\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x=\int_{|x|>2|y|}\left|\frac{\Omega(\frac{x-y}{|x-y|})}{|x-y|^n}-\frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}\right|\mathrm{d}x\\
\le&\int_{|x|>2|y|}\frac{1}{|x-y|^n}\left|\Omega(\frac{x-y}{|x-y|})-\Omega(\frac{x}{|x|})\right|\mathrm{d}x+\int_{|x|>2|y|}\left|\Omega(\frac{x}{|x|})\left(\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right)\right|\mathrm{d}x\\
=&\ I+J.
\end{aligned}$$

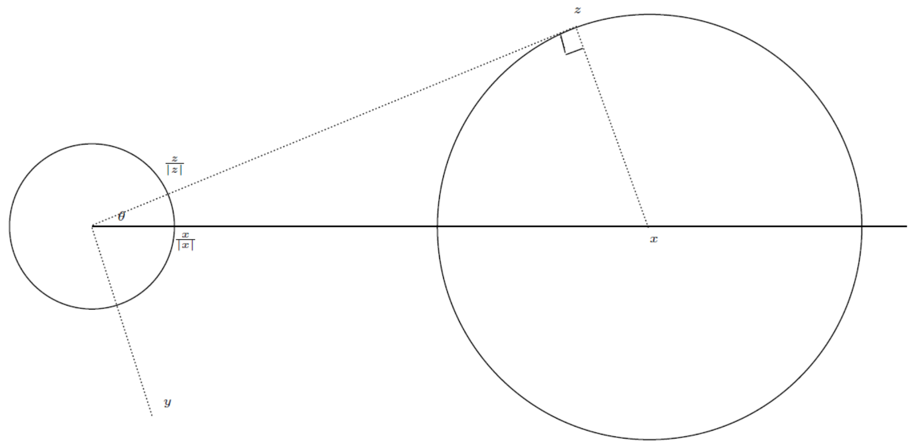

图 11.1 定理1几何结论示意图.

对于函数 $G(x)=\frac{1}{|x|^n}$, 成立 $|\nabla G(x)|\le \frac{n}{|x|^{n+1}}$.于是利用Hörmander条件的一个充分条件(梯度条件), 就有

$$J\le \|\Omega\|_{L^\infty}\int_{|x|>2|y|}\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right|\mathrm{d}x\le C|\Omega|_{L^\infty}.$$

对于积分I, 利用Dini条件, 就有

$$\begin{aligned}
I &\le \int_{|x|>2|y|}\frac{1}{|x-y|^n}\omega\left(2\frac{|y|}{|x|}\right)\mathrm{d}x \quad (\text{根据几何结果})\\
&\le \int_{|x|>2|y|}\frac{2^n}{|x|^n}\omega\left(2\frac{|y|}{|x|}\right)\mathrm{d}x \quad (|x-y|>|x|-|y|>\frac{|x|}{2})\\
&= \int_{\mathbf{S}^{n-1}}\int_{2|y|}^{\infty}\frac{2^n}{r^n}\omega\left(\frac{2|y|}{r}\right)r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S=\omega_n 2^n\int_{2|y|}^{\infty}\omega\left(\frac{2|y|}{r}\right)\frac{1}{r}\mathrm{d}r\\
&= \omega_n 2^n\int_1^0\omega(s)\frac{s}{2|y|}\frac{2|y|}{-s^2}\mathrm{d}s \quad (s=\frac{2|y|}{r})\\
&= 2^n\omega_n\int_0^1\frac{\omega(s)}{s}\mathrm{d}s\le c_n.
\end{aligned}$$

证毕. □

利用函数Ω的特殊性, 在去掉Dini条件的情形下, 用一些特殊的技巧也可以证明T_Ω及其极大算子的L^p有界性. 这方面的一般性结论将在第三小节列出.

2. Fourier乘子

我们已经看到, 精确地知道算子对应的Fourier乘子就可以通过代数演算证明算子本身的许多性质. 所以下面我们计算经典C-Z核对应的Fourier变换.

定理2. *设$n\ge 2$且$\Omega\in L^1(\mathbf{S}^{n-1})$满足消失性条件(11.1). 那么由对应的C-Z核K确定的广义函数W_Ω的Fourier 变换由如下几乎处处有限的函数给出:*

$$\widehat{W_\Omega}(\xi)=c_n\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}-\frac{i\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)\right)\mathrm{d}\theta. \tag{11.2}$$

这里常数$c_n=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.[1]

这个定理的证明需要较多数学分析方面计算积分的技巧. 我们在下面一一列举.

[1]注意这个因子是由我们在第一讲所约定的Fourier变换公式诱导出的.

(1). $\mathbf{S}^{n-1}$上积分表示为$\mathbf{S}^{n-2}$上积分之和 设$n\geq 2$, f为半径是R的球面$R\mathbf{S}^{n-1}$上函数.那么成立

$$\int_{R\mathbf{S}^{n-1}} f(x)\,\mathrm{d}S(x) = \int_{-R}^{R}\int_{\sqrt{R^2-s^2}\mathbf{S}^{n-2}} f(s,\theta)\,\mathrm{d}\theta \frac{R\,\mathrm{d}s}{\sqrt{R^2-s^2}}. \tag{11.3}$$

这个结论可以利用球坐标公式证明. [2]

为说明(11.2)给出的$\widehat{W_\Omega}(\xi)$几乎处处有限(注意这并不意味着它是L^∞函数), 利用Ω的消失性条件和对数的性质, 只需对任意$\xi'\in\mathbf{S}^{n-1}$, 证明

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}\,\mathrm{d}\theta<\infty.$$

为此, 利用 Fubini 定理, 只要证明

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}\mathrm{d}S_\theta \mathrm{d}S_\xi = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\Omega(\theta)|\left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}\mathrm{d}S_\xi\right)\right)\mathrm{d}S_\theta<\infty.$$

取 $\xi=A^T\xi'$, A 为正交矩阵. 由于 $(A^T\xi',\theta)=(\xi',A\theta)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}\right)\mathrm{d}S_\xi = \int_{\mathbf{S}^{n-1}}\left(\log\frac{1}{|A^T\xi'\cdot\theta|}\right)\mathrm{d}S'_\xi\\
=&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\left(\log\frac{1}{|\xi'\cdot A\theta|}\right)\mathrm{d}S_{\xi'}\ \ (\text{取}A\text{使得}A\theta=e_1)\\
=&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\left(\log\frac{1}{|\xi'_1|}\right)\mathrm{d}S_{\xi'} = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-s^2}\mathbf{S}^{n-2}}\left|\log\frac{1}{|s|}\right|\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}\\
=&\ c_n\int_{-1}^{1}|\log|s||(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}s<\infty.\quad (n\geq 2)
\end{aligned}$$

(2). 积分第二中值定理 设f,g为$[a,b]$上Riemann 可积的函数且g是单调的. 则存在$\xi\in[a,b]$使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3). 含三角函数无解区域积分的收敛及一致有界估计 设 $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0<\epsilon<N<\infty$, 则有以下结论成立:

1. $\lim\limits_{\epsilon\to 0, N\to\infty}\int_\epsilon^N \dfrac{\cos(ra)-\cos r}{r}\mathrm{d}r = \log\dfrac{1}{|a|}$;
2. $\left|\int_\epsilon^N \frac{\cos(ra)-\cos r}{r}\mathrm{d}r\right|\leq 2|\log\frac{1}{|a|}|$, $(0<\epsilon<N<\infty)$;
3. $\lim\limits_{\epsilon\to 0, N\to\infty}\int_\epsilon^N \dfrac{\sin(ra)}{r}\mathrm{d}r = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)$;
4. $\left|\int_\epsilon^N \frac{\sin(ra)}{r}\mathrm{d}r\right|\leq 4\quad (0<\epsilon<N<\infty)$;
5. $\lim\limits_{\epsilon\to 0, N\to\infty}\int_\epsilon^N \dfrac{e^{-ira}-\cos r}{r}\mathrm{d}r = \log\dfrac{1}{|a|}-\dfrac{i\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)$;

[2]参见[11, p.441].

6. $\left|\int_\epsilon^N \frac{e^{-ira}-\cos r}{r}\mathrm{d}r\right| \le 4+2|\log\frac{1}{|a|}|$ $(0<\epsilon<N<\infty)$.

证明. 由于 $\dfrac{e^{-ira}-\cos r}{r} = \dfrac{\cos(ra)-\cos r - i\sin(ra)}{r}$, 仅需证明前四项成立; 最后两项是它们的直接推论.

1. 这里用的是数学分析中化为累次积分再通过积分换序使得"柳暗花明"的技巧. 由于$\cos(ra)=\cos(-ra)$, 以下不妨设$a>0$. 于是

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^N \frac{\cos(ra)-\cos r}{r}\mathrm{d}r &= \int_\epsilon^N \frac{1}{r}\int_1^{|a|}(-\sin(tr))r\mathrm{d}t\mathrm{d}r = -\int_\epsilon^N\int_1^{|a|}\sin(tr)\mathrm{d}t\mathrm{d}r\\ &= -\int_1^{|a|}\int_\epsilon^N \sin(tr)\mathrm{d}r\mathrm{d}t = \int_1^{|a|}\frac{\cos(tN)-\cos(t\epsilon)}{t}\mathrm{d}t\\ &= -\int_1^{|a|}\frac{\cos(t\epsilon)}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{|a|}\frac{\cos(tN)}{t}\mathrm{d}t\\ &= -\int_1^{|a|}\frac{\cos(t\epsilon)}{t}\mathrm{d}t + \int_N^{|a|N}\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t \to \ln\frac{1}{|a|}.\end{aligned}$$

这里第一项利用控制收敛定理, 第二项利用积分第二中值定理.

2. 由上述推导过程我们看出 $\left|\int_\epsilon^N \frac{\cos(ra)-\cos r}{r}\mathrm{d}r\right| \le |2\int_1^{|a|}\frac{1}{t}|\mathrm{d}t = 2|\ln|a||$.

3. 这是数学分析中通过加稳定因子计算积分的典型问题. 对$a>0$, 记$I(a)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}\mathrm{d}x$. 有控制收敛定理知$I(\infty)=0$. 此外计算得$I'(a)=-1/(1+a^2)$, 于是$I(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$, 从而$I(0)=\frac{\pi}{2}$. 这就证明了$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$. 由此, 利用sin是奇函数, 就有

$$\lim_{\epsilon\to0,N\to\infty}\int_\epsilon^N\frac{\sin(ra)}{r}\mathrm{d}r = \mathrm{sgn}(a)\lim_{\epsilon\to0,N\to\infty}\int_{|a|\epsilon}^{|a|N}\frac{\sin(r)}{r}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a).$$

4. 当 $0<\epsilon<1$ 时,易知成立 $|\int_\epsilon^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x|\le 1$. 另外, 由积分第二中值定理可知: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得以下式子成立:

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\epsilon}\int_a^\xi \sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{N}\int_\xi^b \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{a}(\cos a-\cos\xi)+\frac{1}{b}(\cos\xi-\cos b)\\ &= \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cos\xi + \frac{1}{a}\cos a - \frac{1}{b}\cos b.\end{aligned}$$

所以对$\varepsilon\ge1$, 成立 $|\int_\epsilon^N\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x|\le|\frac{1}{N}-\frac{1}{\varepsilon}|+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{N}\le\frac{2}{\varepsilon}|+\frac{1}{N}\le3$ 所以对任意$0<\varepsilon<N<\infty$, 成立 $|\int_\epsilon^N\frac{\sin x}{x}|\mathrm{d}x\le1+3=4$. 证毕. □

定理2的证明. 有了前述准备工作, 我们可以很快证明定理2了. 对任意 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 由广义函

数Fourier变换的定义, 以及利用Ω的消失性条件(第六个等号)

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{W_\Omega},\varphi\rangle &= \langle W_\Omega,\hat{\varphi}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\epsilon}>|x|>\epsilon}\frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x\\
&= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\epsilon}>|x|>\epsilon}\frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\
&= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\left(\int_{\frac{1}{\epsilon}>|x|>\epsilon}\frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi\\
&= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\epsilon}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\frac{\Omega(\theta)e^{-ir\theta\cdot\xi}}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta\right)\mathrm{d}\xi\\
&= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\epsilon}}\frac{e^{-ir\theta\cdot\xi}-\cos r}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta\right)\mathrm{d}\xi\\
&= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\left(\frac{1}{\ln|\theta\cdot\xi|}-\frac{\pi}{2}i\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\right)\mathrm{d}S_\theta\mathrm{d}\xi\\
&= \left\langle(\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\left(\frac{1}{\ln|\theta\cdot\xi|}-\frac{\pi}{2}i\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\right)\mathrm{d}S_\theta,\varphi\right\rangle.
\end{aligned}
$$

上面倒数第二个等号成立是利用了 Lebesgue 控制收敛定理, 其中控制函数为 $|\varphi(\xi)\Omega(\theta)|(4+2|\ln|\frac{1}{\theta\cdot\xi}||)\in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)\times L^1(\mathbf{S}^{n-1})$. 这就证明了$\widehat{W_\Omega}=(\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega(\theta)(\frac{1}{\ln|\theta\cdot\xi|}-\frac{\pi}{2}i\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi))\mathrm{d}S_\theta$. □

3. 齐次卷积型奇异积分算子L^p有界性的一般结论

我们注意到$\Omega(x)=\frac{1}{2}[\Omega(x)-\Omega(-x)]+\frac{1}{2}[\Omega(x)-\Omega(-x)]$, 所以任何经典$C-Z$核都可以分解为核为奇函数情形和偶函数的情形.

定理3 (核为奇函数情形)**.** *设Ω为奇函数且在$\mathbf{S}^{n-1}$上可积. 则T_Ω及其极大算子T^*_Ω都是(p,p)型$(1<p<\infty.)$*

定理4 (核为偶函数情形)**.** *设$n\geq 2$且Ω为$\mathbf{S}^{n-1}$上可积的偶函数, 成立消失性条件(11.1), 并且*

$$c_\Omega=\int_{\mathbf{S}^{n-1}}|\Omega(\theta)|\log^+|\Omega(\theta)|\mathrm{d}\theta<\infty.$$

那么其所对应奇异积分算子T_Ω是(p,p)型$(1<p<\infty)$, 且算子范数至多为$c_n\max\{p^2,(p-1)^{-2}\}(c_\Omega+1)$.

证明可见[11, pp. 272–278].

二 Riesz变换

下面我们介绍一些更加特殊的齐次卷积型奇异积分算子. 它们曾是奇异积分算子理论的最早研究对象, 在偏微分方程中有许多应用.

定义2. *设空间维数$n\geq 2$. 取$\Omega_j(x)=c_n\frac{x_j}{|x|}$, $(j=1,\cdots,n)$, 从而 $K_j(x)=c_n\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, 那么$K_j$是C-Z核;它所定义的奇异积分算子 $R_j(f)(x)=c_nP.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}f(y)\mathrm{d}y$ 称为第j个 Riesz 变换.*

不难看出Ω_j满足Dini条件,所以 R_j 为弱 (1,1) 型和 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$.

1. Fourier乘子

定理5. 如果取 $c_n=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$，那么 $\widehat{R_j(f)}(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$.

证明. 1. 由于Ω_j是奇函数, 由定理2, 我们有

$$\begin{aligned}\widehat{W_{\Omega j}} &= (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}(-\frac{\pi}{2})i\int_{\mathbf{S}^{n-1}}c_n\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\mathrm{d}S_\theta=(\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}}(-\frac{\pi}{2})i(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\mathrm{d}S_\theta\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}(-i)\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\mathrm{d}S_\theta=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}.\end{aligned}$$

为使最后一个等号成立, 只要证明

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\mathrm{d}S_\theta=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\xi_j}{|\xi|}.$$

不失一般性, 这里可假设 $|\xi|=1$.

2. 利用被积函数和积分区域的奇对称性, 容易看出下面结论成立:

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\mathrm{sgn}(\theta_k)\theta_j\mathrm{d}S_\theta=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ \int_{\mathbf{S}^{n-1}}|\theta_j|\mathrm{d}S_\theta, & k=j.\end{cases}$$

事实上, 当$k\neq j$时,

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\mathrm{sgn}(\theta_k)\theta_j\mathrm{d}S_\theta=\int_{\mathbf{S}^{n-1}\bigcap\{\theta_k>0\}}\theta_j\mathrm{d}S_\theta-\int_{\mathbf{S}^{n-1}\bigcap\{\theta_k<0\}}\theta_j\mathrm{d}S_\theta=0.$$

3. 取定$\xi\in\mathbf{S}^{n-1}$,那么存在正交矩阵 $A=(a_{jk})$，使得 $Ae_j=(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)^T=\xi$. 这意味着$A$的第 j 列就是$(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)^T=\xi$. 通过换元, 不难得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi)\mathrm{d}S_\theta=\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(\theta\cdot Ae_j)\mathrm{d}S_\theta=\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(e_j\cdot A^T\theta)\mathrm{d}S_\theta\\ =&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_j\mathrm{sgn}(A^T\theta)_j\mathrm{d}S_\theta\quad(\text{作变换}\theta=A\theta')\\ =&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}(A\theta')_j\mathrm{sgn}(\theta'_j)\mathrm{d}S_{\theta'}\quad(\text{把}\theta'\text{写成}\theta)\\ =&\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\sum_{k=1}^n(a_{jk}\theta_k)\mathrm{sgn}(\theta_j)\mathrm{d}S_\theta=\sum_{k=1}^n a_{jk}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}\theta_k\mathrm{sgn}(\theta_j)\mathrm{d}S_\theta\\ =&\ a_{jj}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}|\theta_j|\mathrm{d}S_\theta=\frac{\xi_j}{|\xi|}\int_{\mathbf{S}^{n-1}}|\theta_j|\mathrm{d}S_\theta.\end{aligned}$$

所以余下的就是证明

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}}|\theta_j|\mathrm{d}S_\theta=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

4. 利用公式(11.3), 就有

$$\begin{aligned}&\text{上式左边}=\int_{-1}^1\int_{\sqrt{1-s^2}\mathbf{S}^{n-2}}\mathrm{d}S_\theta|S|\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}=\int_{-1}^1\int_{\mathbf{S}^{n-2}}|s|(1-s^2)^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}S_\theta\\ =&\ \omega_{n-2}\int_0^1(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}s^2=\omega_{n-2}\int_0^1(1-t)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t=\omega_{n-2}\int_0^1u^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2}{n-1}\omega_{n-2}=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.\end{aligned}$$

证毕. □

作为上述结果的应用, 我们证明

推论1. $\mathbb{R}^n$上*Riesz*变换$\{R_j\}_{j=1}^n$满足关系式$\sum_{j=1}^n R_j^2 = -I$, 其中I为恒等算子.

证明. 不妨设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 因为 $\widehat{R_j(f)}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, 所以$\widehat{\sum_{j=1}^n R_j^2 f} = \sum_{j=1}^n \widehat{R_j^2 f} = \sum_{j=1}^n -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{R_j f} = -\sum_{j=1}^n \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2}\hat{f} = -\hat{f}$. 由Fourier变换的可逆性和就得到结论. □

2. 应用举例

定理6. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 < p < \infty)$ 且$\Delta u = f$, 则 $\|D^2 u\|_{L^p} \le c\|f\|_{L^p}$.

证明. 对 $\Delta u = f$ 两边进行 Fourier 变换并同时乘以 $\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\frac{-i\xi_k}{|\xi|}$, 就得到: $\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\frac{-i\xi_k}{|\xi|}(-|\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \frac{-i\xi_j}{|\xi|}\frac{-i\xi_k}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$. 左边 $= -\mathcal{F}(\partial_j\partial_k u)$, 右边 $= \mathcal{F}(R_jR_kf)$, 所以, $\partial_j\partial_k u = -R_jR_kf$.于是 $\|D^2u\|_{L^p} \le c_n\|f\|_{L^p}$. 证毕. □

这个结论是具连续二阶项系数二阶椭圆型方程$W^{2,p}$理论的出发点. 详细结论可见[10]第九章. 关于利用Newton位势求解Poisson方程的问题, 我们在下一讲会详细介绍.

三 Hilbert变换

下面介绍直线上的典型的奇异积分算子–Hilbert变换.

定义3. 由$\mathbb{R}$上*C-Z*核 $K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\frac{1}{x}$ 确定的奇异积分算子

$$H(f)(x) = \lim_{\epsilon\to 0} H^\varepsilon f(x) := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|\ge\varepsilon} f(x-y)\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

称为 *Hilbert* 变换.

很容易验证$K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\frac{1}{x}$ 确实是C-Z核,所以Hilbert变换及其对应极大算子都是弱(1,1)型和(p,p)型$(1 < p < \infty)$.

定理7. *Hilbert*变换满足: $\widehat{Hf}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)$.

证明. 设K确定的广义函数为W. 利用消失性条件,直接计算, 则对任意$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$都成立

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{W}, \varphi\rangle = \langle W, \hat{\varphi}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{1}{x}\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\left(\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{1}{x}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\left(\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{1}{x}[\cos(x\cdot\xi) - i\sin(x\cdot\xi)]\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\
= \ & \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\left(\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}}\frac{\sin(x\cdot\xi)}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi = \frac{-2i}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\left(\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}}\frac{\sin(x\cdot\xi)}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\
= \ & \frac{-2i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi)\mathrm{d}\xi = \langle -i\mathrm{sgn}(\xi), \varphi(\xi)\rangle.
\end{aligned}$$

因此 $\hat{W} = -i\mathrm{sgn}(\xi)$. 证毕. □

由上述关于乘子的信息, 利用$[-i\mathrm{sgn}(\xi)]^2 = -1$, 就知道成立 $H^2 = -I$. 此外, 回忆 T, T^*, T^t 的 Fourier 乘子分别为 $m(\xi), \bar{m}(\xi), m(-\xi)$. 所以对于Hilbert变换, 就成立 $H^* = -H$, $H^t = -H$.

习题 1. 设$f\in L^1(\mathbb{R})$. 证明若成立$Hf\in L^1(\mathbb{R})$,则必须成立$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. □

提示: 由假设知$\widehat{Hf}=-i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)$是连续函数, 从而必须有$\hat{f}(0)=0$. 由Fourier变换定义即得.

习题 2. 设$f,xf\in L^2(\mathbb{R})$. 证明若成立$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$, 则$Hf\in L^1(\mathbb{R})$. □

证明. 利用$\int|f|\,\mathrm{d}x\le(\int(1+x^2)|f(x)|^2\,\mathrm{d}x)^{\frac12}(\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x)^{\frac12}\le C(\|f\|_{L^2}+\|xf\|_{L^2})$ 可知$f\in L^1(\mathbb{R})$. 由于$Hf\in L^2(\mathbb{R})$, 只需再证$xHf\in L^2$,或$\widehat{xHf}=-\partial_\xi(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi))\in L^2$, 而这由$\hat{f}(0)=0$及$\partial_\xi\hat{f}\in L^2$ (即$\widehat{xf}\in L^2$)可以保证. 证毕. □

Hilbert变换与全纯函数边值问题

Hilbert变换与全纯函数边值问题有着密切联系. 考察如下Cauchy–Riemann方程组在上半平面$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\ge0\}$的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\[2mm] u(x,0)=f(x) & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{cases}\tag{11.4}$$

我们首先求解该问题. 由复变函数知识, 这等价于寻找全纯函数 $F(z)=u+iv$, $z=x+iy$ 使得当z趋向于边界时(即$y\to0$时)其实部u(在某种拓扑下)收敛到$f(x)$.

受Cauchy积分定理启发, 我们取

$$F(z)=\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{z-t}\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{Im}z>0.$$

注意这个函数在$\mathrm{Im}z>0$确实是有定义的, 而且求导可以与积分交换. 下面验证 $F(z)$ 确实是问题(11.4)的解.

首先, 根据 $F(z)$ 的表达式, 显然成立 $\frac{\partial F}{\partial\bar z}=0$, 即 $F(z)$ 是全纯函数. 所以C–R方程组成立.

其次, 由于

$$F(z)=\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{x-t+iy}\mathrm{d}t=\frac{i}{\pi}\int_R\frac{x-t-iy}{(x-t)^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$u(x,y)=\mathrm{Re}F(z)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t=P_y*f(x).$$

回忆这里 $P(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$恰是一维情形的Poisson核, 其对应伸缩变换就是$P_y(x)=\frac1yP(\frac xy)=\frac1\pi\frac{y}{x^2+y^2}$. 所以由逼近恒等的性质及点态收敛的极大函数法, $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, 在L^p及几乎处处意义下都成立

$$\lim_{y\to0}u(x,y)=f(x).$$

这就验证了边界条件成立.

注意上述解也完全确定了

$$v(x,y)=\mathrm{Im}F(z)=\frac{1}{\pi}\int_R\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t=Q_y*f(x).$$

这里 $Q(x)=\frac1\pi\frac{x}{1+x^2}$ 称为共轭Poisson核, 其对应伸缩变换为$Q_y(x)=\frac1\pi\frac{x}{y^2+x^2}$. 一个很自然的问题是, $v(x,y)$当$y\to0$时是否在某种意义下收敛?如果收敛,那么极限是什么?显然这个极限应该由f唯一确定,那么这种决定机制是什么?

注意到Q不属于 $L^1(\mathbb{R})$, 我们不能利用逼近恒等. 所以上述问题的答案并不是显而易见的.

命题5. $\forall f\in L^p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$, 在$L^p(\mathbb{R})$及几乎处好意义下都成立

$$Q_\epsilon * f(x)-H^\epsilon f(x)\to 0.$$

证明. 下面计算表明$Q_\epsilon * f(x)-H^\epsilon f(x)$可以被一个收敛到零的磨光卷积控制:

$$\begin{aligned} Q_\epsilon * f(x)-H^\epsilon f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x-t}{(x-t)^2+\epsilon^2}f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<\epsilon}\frac{x-t}{(x-t)^2+\epsilon^2}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\left(\frac{x-t}{(x-t)^2+\epsilon^2}f(t)-\frac{f(t)}{x-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{|t|<\epsilon}\frac{t}{t^2+\epsilon^2}f(x-t)\mathrm{d}t-\int_{|t|>\epsilon}\left[\frac{t}{t^2+\epsilon^2}-\frac{1}{t}\right]f(x-t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\psi_\epsilon * f(x). \end{aligned}$$

这里 $\psi_\epsilon=\frac{1}{\epsilon}\psi(\frac{x}{\epsilon})$, 而

$$\psi(x)=\begin{cases}\frac{t}{t^2+1}, & t<1,\\ \frac{-1}{t(t^2+1)}, & t\ge 1\end{cases}$$

是个属于$L^1(\mathbb{R})$的奇函数, 所以$\int_{\mathbb{R}}\psi(x)\mathrm{d}x=0$. 于是成立

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\|\psi_\epsilon * f(x)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

为了说明点态收敛, 注意到

$$\Psi(x)=\begin{cases}1, & t<1,\\ \frac{1}{(t^2+1)}, & t\ge 1\end{cases}$$

是ψ的一个径向递减且L^1可积的控制函数.所以由点态收敛极大函数法知$Q_\epsilon * f(x)-H^\epsilon f(x)\to 0$几乎处处成立. 证毕. □

利用H^ε对应极大奇异积分算子是弱(p,p)型, 可知 $H^\epsilon f(x)\to(Hf)(x)$也在几乎处处和$L^p(1<p<\infty)$意义下成立 ,我们就得到如下结论: 设$f\in L^p(\mathbb{R})(1\le p<\infty)$,则几乎处处成立 $Q_\epsilon * f(x)\to Hf(x)$. 此外若$(1<p<\infty)$, 则该极限也在$L^p(\mathbb{R})$意义下成立. 也就是说, 由实部的边值$f$确定的全纯函数的虚部的边值是$Hf$.

第十二讲　分数次积分算子与Newton位势

Poisson方程在偏微分方程理论和应用中具有十分重要的地位. 这主要体现在三方面. 首先, 作为最简单和典型的方程之一, 对它的理解有助于把握和研究更复杂的问题; 其次, 许多重要的数学物理方程, 如Navier–Stokes 方程, 都直接含有Laplace 算子; 第三, 许多问题的研究最终都需要利用Poisson 方程的理论作为工具. 在这一讲, 我们将利用分数次积分算子和奇异积分算子理论说明Newton 位势确实给出了Poisson 方程的解, 并且成立若干L^p估计. 如前解释, 这里的结论及方法都有广泛的应用.

考虑$\mathbb{R}^n$中Poisson方程

$$\Delta u = f.$$

利用Laplace算子的基本解, u可以通过如下Newton位势表示:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) f(y) \mathrm{d}y,$$

这里

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2, \\ \frac{-1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

我们有如下结论:

定理1. *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $f \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, 则 $\Delta u = f$ 有解 $u = N * f \in W^{2,p}(\Omega)$, 它在几乎处好意义下满足方程. 此外, 还存在只依赖于n,p和$|\Omega|$ 的常数C使得*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

由于 N及∇N都属于$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 所以 当 f 衰减较快时, $u = N * f$和$\nabla u(x) = \nabla N * f(x)$ 都有意义. 它们对应的是一类积分核具有弱奇性的卷积型积分算子, 称为分数次积分算子. 但注意到 $\nabla^2 N$ 仅属于$L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 所以计算$u$的二阶导数$D^2u$时就必须引入奇异积分算子. 下面首先介绍分数次积分算子, 然后推导奇异积分算子是怎样引入的. 最后综合所得结论就可以证明定理1.

一　分数次积分算子

利用 Fourier 变换的性质, $\widehat{\Delta f} = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$, 即 $-\Delta f = (|\xi|^2 \hat{f}(\xi))^\vee$. 对 $z \in \mathbb{C}$, 我们可定义分数次 Laplace 算子

$$(-\Delta)^{\frac{z}{2}} f = (|\xi|^z \hat{f}(\xi))^\vee = (|\xi|^z)^\vee * f.$$

容易验证其半群性质, 即 $(-\Delta)^w(-\Delta)^z = (-\Delta)^{w+z}$. 下面我们会证明 $(|\xi|^z)^\vee = C_{n,z}|x|^{-n-z}$. 为了保证 $|x|^{-n-z} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且$|\xi|^z \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (在原点可积), 要求 $\mathrm{Re}(-n-z) > -n$, $\mathrm{Re} z > -n$, 即 $-n < \mathrm{Re} z < 0$. 若令$z = -s \in \mathbb{R}$, 则要求 $0 < s < n$.

命题6. $(|\xi|^{-s} \hat{f}(\xi))^\vee(x) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}} \mathrm{d}y.$

证明. 利用变量替换不难证明$\xi \neq 0$时成立等式

$$\int_0^\infty e^{-\lambda|\xi|^2} \lambda^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}\lambda = |\xi|^{-s} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}\lambda = \Gamma(s/2)|\xi|^{-s}.$$

于是, 回忆公式$(uv)^\vee = c_n u^\vee v^\vee$, 以及$(e^{-\lambda|\xi|^2})^\vee(x) = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda}}$, 那么

$$\begin{aligned}
(|\xi|^{-s}\hat{f}(\xi))^\vee(x) &= c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda|\xi|^2}\lambda^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}\lambda\right)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= c_{n,s}\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{2}-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{-\lambda|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\lambda \\
&= c_{n,s}\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{2}-1} f*(e^{-\lambda|\xi|^2})^\vee(x)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= c_{n,s}\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{2}-\frac{n}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\lambda \\
&= c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{2}-\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}y \\
&= c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_0^\infty \mu^{\frac{n}{2}-\frac{s}{2}-1}e^{-\mu|x-y|^2}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \\
&= c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{-n+s}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

定义1. 称 $I_s f(x) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f(x) = C_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}}\mathrm{d}y \quad (0<s<n)$ 为 f 的分数次积分. I_s称为分数次积分算子.

(p,q) 型指标限定 我们希望得到分数次积分算子的$(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ 有界性. 由于积分核是齐次$s-n$次的, 我们可以考虑通过$\mathbb{R}^n$的伸缩变换: $(\pi_\delta f)(x) = f(\delta x)$, $\delta>0$ 来确定指标(p,q)需满足的必要条件. 如同下面所展示的, 这种通过所在空间自同构群确定算子(p,q)型指标的范围是研究算子或偏微分方程的某些问题的有效方法.

对伸缩变换: $(\pi_\delta f)(x) = f(\delta x)$, $\delta>0$, 直接计算有

$$\begin{aligned}
(\pi_{\delta^{-1}} I_s \pi_\delta f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|\frac{x}{\delta}-y|^{n-s}}f(\delta y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta^{n-s}}{|x-\delta y|^{n-s}}f(\delta y)\mathrm{d}\delta y\cdot\frac{1}{\delta^n} \\
&= \delta^{-s}\int_{R^n}\frac{f(z)}{|x-z|^{n-s}}\mathrm{d}z = (\delta^{-s} I_s f)(x),
\end{aligned}$$

以及

$$\|(\pi_\delta f)(x)\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\delta x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|^p\mathrm{d}z\cdot\delta^{-n}\right)^{\frac{1}{p}} = \delta^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}.$$

所以,假设I_s是(p,q)型, $p\neq\infty, q\neq\infty$, 就成立

$$\|I_s f\|_{L^p} = \delta^s\|\pi_{\delta^{-1}} I_s \pi_\delta f\|_{L^q} = \delta^s\delta^{\frac{n}{q}}\|I_s\pi_\delta f\|_{L^q} \le \|I_s\|_{L^p,L^q}\delta^s\delta^{\frac{n}{q}}\|\pi_\delta f\|_{L^p} = \|I_s\|_{L^p,L^q}\delta^{s+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}.$$

由算子范数定义及$\delta>0$可以任意选取, 这就要求 $s+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}=0$, 即 $\frac{s}{n}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.

定理2 (Hardy-Littlewood-Sobolve 定理)**.** 设$0<s<n$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{s}{n}$, $1\le p<\frac{n}{s}$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 那么成立

1) $(I_s(f))(x) \le C\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}} M_c f(x)^{1-\frac{ps}{n}}$, 从而 I_s 为弱 $(1,\frac{n}{n-s})$ 型.

2) 若$1<p<\frac{n}{s}$, 则 $\|I_s f\|_{L^q} \le C_{n,p,s}\|f\|_{L^p}$.

证明. 1. 不妨设 $f(x)\ge 0$. 则

$$
\begin{aligned}
I_s f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-s}} f(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{|y|\le r} \frac{1}{|y|^{n-s}} f(x-y)\mathrm{d}y + \int_{|y|>r} \frac{1}{|y|^{n-s}} f(x-y)\mathrm{d}y = I+J,
\end{aligned}
$$

其中$r>0$为待定参数.

令 $\psi(y)=\frac{1}{|y|^{n-s}}\chi_{|y|\le 1}$, 则 $\psi_r(y)=\frac{1}{r^n}\psi(\frac{y}{r})=\frac{1}{r^n}\frac{1}{|\frac{y}{r}|^{n-s}}\chi_{\{|\frac{y}{r}|\le 1\}}=r^{-s}\frac{1}{|y|^{n-s}}\chi_{\{|y|\le r\}}$. 所以 $I=r^s\psi_r * f$. 因 ψ 是径向递减的 L^1 可积的函数, 所以 $I=r^s\psi_r * f(x)\le Cr^s M_c f(x)\|\psi\|_{L^1}=C_{n,s}M_c f(x) r^s$.

2. 对积分J, 可直接利用Hölder不等式,

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{|y|>r} \frac{1}{|y|^{n-s}} f(x-y)\mathrm{d}y \le \left(\int_{|y|>r} |f(x-y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|y|>r} |y|^{-(n-s)p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le C_{n,p,s}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^\infty r^{-(n-s)p'+n-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p'}} = C_{n,p,s} r^{s-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

这里为了后一个积分收敛,需要$p<n/s$.

3. 综上, $I_s f(x)\le C_{n,s,p}(r^s M_c f(x)+r^{s-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p})$. 取 r 使得 $r^{s-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}=r^s M_c f(x)$, 即 $r=(\frac{M_c f(x)}{\|f\|_{L^p}})^{-\frac{p}{n}}$, 就得到$I_s f(x)\le C_{n,s,p}M_c f(x)(\frac{M_c f(x)}{\|f\|_{L^p}})^{-\frac{ps}{n}}=C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}} M_c f(x)^{1-\frac{ps}{n}}$. 由此利用H-L极大算子的弱(1,1)型,不难直接算出I_s为弱$(1,\frac{n}{n-s})$型.

4. 当 $1<p<\frac{n}{s}$ 时, 利用H-L极大算子的(p,p)型, 就有

$$
\|I_s f(x)\|_{L^q}\le C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_c f(x)^{(1-\frac{ps}{n})q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},
$$

而 $(1-\frac{ps}{n})q=\frac{np}{n-sp}(1-\frac{sp}{n})=p$, 所以

$$
\begin{aligned}
\|I_s f(x)\|_{L^q} &\le C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_c f(x)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}}\|M_c f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \le C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}}\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \\
&= C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}^{\frac{ps}{n}+\frac{p}{q}} = C_{n,s,p}\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

证毕. □

推论1. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是有界区域, $f\in L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$, $u=N*f$. 则 $\|u\|_{L^p(\Omega)}\le C_{p,n,|\Omega|}\|f\|_{L^p}$, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\le C_{p,n,|\Omega|}\|f\|_{L^p}$.

证明. 1. 将 $f(x)$ 零延拓到 $\mathbb{R}^n$.由于$|\Omega|$有限, 所以由Hölder不等式, $f\in L^p\cap L^1(\mathbb{R}^n)$. 此外根据定义, $u=N*f=(-\Delta)^{-1}f$ 是对应于$s=2$的分数次积分算子 .

2. 设$1<p<n/2$. 此时取指标$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{2}{n}$, 则$q>p$. 由H-L-S定理可知 $u\in L^q(\mathbb{R}^n)$,且成立 $\|u\|_{L^p(\Omega)}\le C_{|\Omega|,p,n}\|u\|_{L^q(\Omega)}\le C_{|\Omega|,p,n}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C_{p,q,n,|\Omega|}\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

3. 设$n/2\le p<\infty$. 此时取指标r使得$\frac{1}{p}=\frac{1}{r}-\frac{2}{n}$, 则$p>r$. 利用H-L-S定理就成立 $\|u\|_{L^p(\Omega)}\le\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_{p,n}\left\|f\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}=C_{p,n}\left\|f\right\|_{L^r(\Omega)}\le C_{|\Omega|,p,n}\left\|f\right\|_{L^p(\Omega))}$.

4. 根据定义, $\nabla u=\nabla N*f=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f$ 是对应于$s=1$ 的分数次积分算子. 所以类似地分$1<p<s$和$s\le p<\infty$两种情形就可以证明 $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\le C_{p,n,|\Omega|}\|f\|_{L^p(\Omega)}$.证毕. □

二 齐次卷积型奇异积分算子的导出

设 $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是齐次 $1-n$ 次的函数,则不难知道有齐次零次的函数$\Omega(x)$,它可视为单位球面$\mathbf{S}^{n-1}$上的C^∞函数(从而有界),使得 $K(x) = \frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^{n-1}}$. 由于$\Omega$有界, 所以$K(x) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 在$x \neq 0$处求导数, 可知 $\nabla K(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 为齐次 $-n$ 次, 所以$\nabla K(x)$在原点奇性较强, 不再是$L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$函数.

由K的局部可积性, 至少对$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 可以定义积分算子 $Rf(x) = K * f(x)$,它是光滑函数. 但是 $\partial_j(Rf)(x) = (\partial_j K) * f$ **不成立** (因 $\partial_j K$ 不是局部可积的, 后一积分不收敛, 所以求导不可能和积分换序).

不过,在广义函数意义下,我们有$Rf(x) = K*f(x) = K(\tau^x \tilde{f}) = \langle K, \tau^x \tilde{f}\rangle$,所以$\partial_j(Rf) = \langle \partial_j K, \tau^x \tilde{f}\rangle = \partial_j K * f$, 这里最后一个 $\partial_j K$ 是K的第j个广义函数意义下的偏导数. [1]

下面计算 $\partial_j K$. 设 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$
\begin{aligned}
-\langle \partial_j K, \varphi\rangle = \langle K, \partial_j \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x)\partial_j\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} K(x)\partial_j\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\epsilon}\partial_j(K(x)\varphi(x))\mathrm{d}x - \int_{|x|\geq\epsilon}\partial_j K(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{|x|=\epsilon} K\varphi\cdot\frac{-x_j}{x}\mathrm{d}S\Big) - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\partial_j K(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = I - J.
\end{aligned}
$$

注意这里第三个等号成立是利用了 Lebesgue 控制收敛定理.

下面考察第一项. 利用简单的换元就有

$$
\begin{aligned}
I &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|=1} K(y\epsilon)y_j\epsilon^{n-1}\varphi(\epsilon y)\mathrm{d}S_y = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|=1} K(y)y_j\varphi(\epsilon y)\mathrm{d}S_y \\
&= -\int_{|y|=1} K(y)y_j\mathrm{d}S_y\varphi(0) = -C_j\langle\delta,\varphi\rangle,
\end{aligned}
$$

其中常数

$$C_j = \int_{|y|=1} K(y)y_j\mathrm{d}S_y.$$

对于积分J对应的积分核$\partial_j K$ (注意这里∂_j指的是经典意义下的导数, 所以$\partial_j K$ 是原点之外的光滑函数), 下面定理表明它是个经典C-Z核.

定理3. *记$P = \partial_j K$, 它是齐次 $-n$ 次的,从而具有形式 $P(x) = \frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}$. 此外消失性条件成立:*

$$\int_{|x|=1} P(x)\mathrm{d}S_x = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbf{S}^{n-1}}\Omega\mathrm{d}S_x = 0.$$

证明. 1. 由K为齐次$1-n$次, 容易算得$\partial_j K$是齐次$-n$次的. 所以奇性强度条件成立.

2. 取非负函数 $\rho(r)$ 满足 $\rho(r) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\rho \subset (A,B) \subset (0,\infty)$. 则

$$0 = \int_{A<|x|<B}\partial_j(\rho(|x|)K(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\rho'(|x|)\frac{x_j}{x}K(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n}\rho\partial_j K\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

[1] 在这一段讨论中大家要特别注意区分$\partial_j K$是代表K的广义函数导数还是经典意义下定义在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上的导数.

这里

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \rho'(r)\theta_j K(r\theta)r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \rho'(r)\theta_j r^{1-n}K(\theta)r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\theta_j K(\theta)\mathrm{d}S_\theta \int_0^\infty \rho'(r)r^{1-n}r^{n-1}\mathrm{d}r = 0, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \rho(r)\partial_j K(r\theta)r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty \rho(r)\partial_j K(\theta)r^{-n+n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S_\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\partial_j K(\theta)\mathrm{d}S_\theta \int_0^\infty \frac{\rho(r)}{r}\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

而 $\int_0^\infty \frac{\rho(r)}{r}\mathrm{d}r \neq 0$，所以 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\partial_j K(\theta)\mathrm{d}S_\theta = 0$. 证毕. □

这样一来, 由于函数$\partial_j K$满足奇性强度条件和消失性条件, 它就确定了一个广义函数$W_{\partial_j K} =$ p.v.$\partial_j K$:

$$\langle W,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\partial_j K(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j K(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

所以

$$J = \langle \text{p.v.}\partial_j K,\varphi\rangle.$$

此外由于Ω是光滑的,Dini条件成立,所以$\partial_j K$是个C-Z核.

综上分析, 我们得到在广义函数意义下,

$$\partial_j K = \text{p.v.}\partial_j K + C_j\delta,$$

所以

$$\partial_j(Rf) = (\partial_j K)*f = (\text{p.v.}\partial_j K)*f + C_j\delta * f = \text{p.v.}\ (\partial_j K)*f + C_j f. \tag{12.1}$$

这里(p.v.$\partial_j K)*f$就是由核$\partial_j K$确定的奇异积分算子.

三 Poisson方程的求解

下面验证$u = N*f$满足方程$\Delta u = f$且有估计$\|\partial_{jk}u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

直接计算就有(对$n\geq 2$都成立)

$$\partial_j u(x) = \frac{1}{nw_n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y.$$

所以$K(x) = K_j(x) := \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_j}{|x|^n}$.

为求$\partial_{jk}u$, 利用上节的一般理论, 分两种情形讨论.

◊ 当 $k\neq j$ 时, 求经典导数得到$\partial_k K_j = \frac{-1}{\omega_n}\frac{x_jx_k}{|x|^{n+2}}$, 而常数$C_{jk} = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|x|=1}x_jx_k\,\mathrm{d}S_x = 0$. 记$T_{jk}$为由C-Z核$\partial_k K_j$确定的奇异积分算子, 那么

$$\partial_{kj}u(x) = T_{jk}f(x),$$

于是$\|\partial_{kj}u\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p}$.

◊ 当 $k=j$ 时, 求经典导数得到$\partial_j K_j = \dfrac{1}{n\omega}\left(\dfrac{1}{|x|^n} - n\dfrac{x_j^2}{|x|^{n+2}}\right)$. 它确定的奇异积分算子记作$T_{jj}$. 又显然成立$\sum_{j=1}^n \partial_j K_j = 0$. 此外不难算出常数$C_{jj} = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|x|=1} x_j^2 \mathrm{d}S_x$. 所以

$$\partial_{jj}u(x) = T_{jj}f(x) + C_{jj}f(x).$$

由此我们知道$D^2u \in L^p(\Omega)$ 且立即可以得到估计$\left\|\partial_{jj}u\right\|_{L^p} \le C_p \left\|f\right\|_{L^p}, j = 1,\cdots,n.$

最后验证$\Delta u = f$. 首先,

$$\sum_{j=1}^n T_{jj}f(x) = \text{p.v.}(\sum_{j=1}^n \partial_j K_j) * f = 0.$$

其次,

$$\sum_{j=1}^n C_{jj} = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|x|=1} \mathrm{d}S_x = 1,$$

所以$\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{jj}u = f$.

这样我们也就完成了定理1的证明. 通过"凝固系数法", 在每一点小领域内用常系数方程逼近具有连续系数的变系数椭圆方程, 可以证明定理1所述的L^p估计其实对一般的最高阶项具有连续系数的椭圆型方程都成立. 这个理论和Schauder理论一样对于研究椭圆型方程有非常重要的的作用.

四 在向量场分析中的应用

Poisson方程及Newton位势在对向量场的研究中起着非常重要的作用. 设$v = (v_1, v_2, v_3)$是定义在$\mathbb{R}^3$上的向量场, 它的散度就是$\mathbb{R}^3$上的函数

$$\mathrm{div}v = \partial_{x_1}v_1 + \partial_{x_2}v_2 + \partial_{x_3}v_3,$$

而旋度就是向量

$$\mathrm{curl}v = (\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2, \partial_{x_3}v_1 - \partial_{x_1}v_3, \partial_{x_1}v_2 - \partial_{x_2}v_1).$$

散度,旋度和向量场之间成立如下重要的恒等式:

$$\nabla(\mathrm{div}v) - \mathrm{curl}(\mathrm{curl}v) = \Delta v, \quad \psi \in \mathbb{R}^3. \tag{12.2}$$

正是由于这个关系式, 使我们可以利用向量场散度及旋度的信息, (再加上适当边界条件,) 通过Poisson方程求解出向量场.

旋度方程组的求解

作为典型特例, 考虑如下一阶超定椭圆型方程组

$$\mathrm{curl}v = w, \quad \mathrm{div}v = 0 \qquad \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 内}, \tag{12.3}$$

其中向量场 $w \in \mathbb{R}^3$已知, 而$v \in \mathbb{R}^3$是待求的.

定理4. 设$w \in L^p(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ $(1 < p < 3)$. 则(12.3)有解当且仅当在广义函数意义下成立

$$\mathrm{div} w = 0. \tag{12.4}$$

若上式成立, 则v由如下方式确定:

$$v = -\mathrm{curl}\psi, \tag{12.5}$$

其中向量函数ψ满足*Poisson*方程

$$\Delta\psi = w. \tag{12.6}$$

v的显式表达式为

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K_3(x-y)w(y)\mathrm{d}y, \tag{12.7}$$

其中K_3是3阶矩阵:

$$K_3(x)h = -\frac{1}{4\pi}\frac{x\times h}{|x|^3}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^3.$$

证明. 1. 设(12.3)有局部可积的解v. 由于恒等式$\mathrm{div}\mathrm{curl} v = 0$在广义函数意义下依旧成立, 所以必然要求$\mathrm{div} w = 0$.

2. 反之, 若(12.4) 成立, 我们证明利用(12.5)(12.6)确定的v是问题(12.3)的解.

首先, 利用Newton位势知道

$$\psi(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{w(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}y \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3).$$

对该式在积分号下求导, 利用旋度定义计算, 就直接得到(12.7), 并且$v = -\mathrm{curl}\psi \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. 利用恒等式$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\psi) = 0$, 就得到$\mathrm{div}\, v = 0$.

3. 进一步需要验证$\mathrm{curl} v = w$. 为此, 利用(12.2), 只需证明$\mathrm{div}\,\psi = 0$. 通过积分号下求导, 不难得到

$$\mathrm{div}\,\psi(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_x\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\cdot w(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_y\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\cdot w(y)\,\mathrm{d}y.$$

引入取值在$[0,1]$的截断函数$\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$使得$\mathrm{supp}\,\varphi_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus B(0,1), \mathrm{supp}\,\varphi_2 \in B(0,4)$, 且在$\mathbb{R}^3 \setminus B(0,2)$上$\varphi_1 = 1$, 在$B(0,3)$上$\varphi_2 = 1$. 于是对于任意$\varepsilon > 0$, $\mathrm{supp}\,\varphi_1(x/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon x) \subset \{\varepsilon \le |x| \le \frac{4}{\varepsilon}\}$, 且在环$\{2\varepsilon \le |x| \le \frac{3}{\varepsilon}\}$上$\varphi_1(x/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon x) = 1$.

现在对于固定的x, 注意到$\frac{\varphi_1((x-y)/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon(x-y))}{|x-y|} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 所以利用$\mathrm{div}\, w = 0$在广义函数意义下成立, 即

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_y\left(\frac{\varphi_1((x-y)/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon(x-y))}{|x-y|}\right)\cdot w(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

再考虑

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_y\left(\frac{1-\varphi_1((x-y)/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon(x-y))}{|x-y|}\right)\cdot w(y)\,\mathrm{d}y\right| \\
\le\ & \int_{\{|y|\le 2\varepsilon\}\cup\{|y|\ge 3/\varepsilon\}}\frac{|w(x-y)|}{|y|^2}\,\mathrm{d}y + \int_{\{\varepsilon\le|y|\le 2\varepsilon\}}\frac{|w(x-y)|}{\varepsilon|y|}\,\mathrm{d}y + \int_{\{\frac{3}{\varepsilon}\le|y|\le\frac{4}{\varepsilon}\}}\frac{\varepsilon|w(x-y)|}{|y|}\,\mathrm{d}y \\
=:\ & I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

对于第一个积分, 利用定理2证明第1, 2步的方法(取$n=3, s=1$), 得到

$$I_1 \le CM_c w(x)\varepsilon + C_p \varepsilon^{\frac{3}{p}-1}\|w\|_{L^p}.$$

注意这里需要$p<3$的条件. 再用类似的方法就得到

$$I_2 \le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|y|\le 2\varepsilon} |w(x-y)|\,\mathrm{d}y \le C\varepsilon M_c w(x),$$

$$I_3 \le C_p\varepsilon\|w\|_{L^p}\left(\int_{3/\varepsilon}^{4/\varepsilon} r^{2-p'}\,\mathrm{d}r\right)^{1/p'} = \begin{cases} C_p\varepsilon\|w\|_{L^p}, & p=3/2, p'=3; \\ C_p\varepsilon^{2-\frac{3}{p'}}\|w\|_{L^p}, & p<3, p\ne 3/2. \end{cases}$$

所以总成立$I_1+I_2+I_3 \le C\varepsilon M_c w(x) + C_p\varepsilon^{\frac{3}{p}-1}\|w\|_{L^p}$. 由于$M_c w(x)\in L^p$, 所以对于几乎所有的$x$, $M_c w(x)$是有限的. 于是就得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_y\left(\frac{1-\varphi_1((x-y)/\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon(x-y))}{|x-y|}\right)\cdot w(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

这就证明了$\operatorname{div}\psi=0$. 所以$w=\Delta\psi=\mathrm{curl}(-\mathrm{curl}\psi)=\mathrm{curl}v$. 证毕. □

习题 1. 利用(12.1)和(12.7), 证明

$$Dv(x)h = -\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi}\frac{w(y)\times h}{|x-y|^3}+\frac{3}{4\pi}\frac{\{[(x-y)\times w(y)]\otimes(x-y)\}h}{|x-y|^5}\mathrm{d}y+\frac{1}{3}w(x)\times h.$$

这里 $(z\otimes w)_{ij}=z_i w_j$,即$z\otimes w=z^T w$. □

第三部分

非卷积型奇异积分算子

第十三讲　BMO 空间(一): 定义及奇异积分算子的(L^∞,BMO)型

Calderón–Zygmend 奇异积分算子未必是$L^\infty(\mathbb{R}^n)$到自身的连续线性算子, 这就对处理某些临界情形的问题带来了困难. 为此, 这一讲我们介绍有界平均振荡函数空间, 即BMO($\mathbb{R}^n$)的基本性质, 并证明C-Z 奇异积分算子从L^∞到BMO的连续性. 除在偏微分方程中的应用外, BMO空间对于非卷积型奇异积分算子理论的发展也起着重要作用.

一　Sharp 极大算子与BMO 空间

1. Sharp 极大算子

设 Q是$\mathbb{R}^n$中的方体, 对$f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 记$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x$为$f$在$Q$上的平均值. 称

$$\tilde{f}_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x$$

为f在Q 上的平均振动, 并定义f的 Sharp 极大函数为$f^\sharp(x)=\sup\limits_{x\in Q}\tilde{f}_Q$, 或

$$f^\sharp(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y.$$

这里上确界是对包含x的任何方体取的. 次线性算子$\sharp$: $f\to f^\sharp$ 就叫做 Sharp 极大算子.

命题1 (Sharp 极大算子的初等性质). *(a)定义中心 sharp 极大函数* $f^\sharp_c(x)=\sup\limits_{r>0}\tilde{f}_{Q(x,r)}$, *其中* $Q(x,r)$ *是以* x *为中心,* r *为边长的方体, 则* $f^\sharp_c(x)\le f^\sharp(x)\le 2^{n+1}f^\sharp_c(x)$.

(b) 对$x\in\mathbb{R}^n$*成立*$f^\sharp(x)\le 2Mf(x)$, *这里*M *为 Hardy–Littlewood 极大算子. 所以*$\sharp$*是弱* (1,1) *型和 (p,p) 型,* $(1<p<\infty)$.

(c) $(|f|)^\sharp(x)\le 2f^\sharp(x)$.

证明. 1. 若方体Q包含点x, 且 Q 的边长为 r, 作 $\tilde{Q}=Q(x,2r)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|\mathrm{d}x &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_{\tilde{Q}}|\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_{\tilde{Q}}-f_Q|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{2^n}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f-f_{\tilde{Q}}|\mathrm{d}x+|f_{\tilde{Q}}-f_Q|\le 2^nf^\sharp_c(x)+|f_{\tilde{Q}}-f_Q|.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}|f_Q-f_{\tilde{Q}}| &= \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q(f(x)-f_{\tilde{Q}}(x))\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_{\tilde{Q}}|\mathrm{d}x\le\frac{2^n}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f-f_{\tilde{Q}}|\mathrm{d}x\\ &\le 2^nf^\sharp_c(x).\end{aligned}$$

所以左边取上确界得到$f^\sharp(x)\le 2^{n+1}f^\sharp_c(x)$; 而$f^\sharp_c(x)\le f^\sharp(x)$是显然的.

2. 对任意包含 x的方体Q, 简单计算就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|}\int|f_Q|\mathrm{d}x\\ &= Mf(x)+|f_Q|\le Mf(x)+\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\le 2Mf(x).\end{aligned}$$

所以$f^\sharp(x)\le 2Mf(x)$.

3. 利用三角不等式, 计算得

$$\begin{aligned}||f_Q|-|f|_Q| &= \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|-|f_Q|\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f|-|f_Q||\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|\mathrm{d}x \le f^\sharp(x).\end{aligned}$$

于是类似地就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)|-|f|_Q|\mathrm{d}y &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)|-|f_Q||\mathrm{d}y+\frac{1}{|Q|}\int_Q ||f_Q|-|f|_Q|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|\mathrm{d}x+||f_Q|-|f|_Q| \le 2f^\sharp(x).\end{aligned}$$

□

习题 1. 有时使用以球做平均的Sharp极大函数$f_B^\sharp$(即将定义中方体Q换为球B) 会更方便一些. 证明这两种方式定义的Sharp极大函数是等价的: 存在常数c_n,c_n'使得$c_nf^\sharp(x)\le f_B^\sharp(x)\le c_n'f^\sharp(x)$. □

2. 有界平均振动函数空间BMO($\mathbb{R}^n$)

定义1 (BMO($\mathbb{R}^n$))**.** *设$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 若 $f^\sharp(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则称 f 为有界平均振动函数 (Bounded Mean Oscillation, 简称BMO函数). BMO 函数全体构成的线性空间称为 BMO($\mathbb{R}^n$).*

注. 在BMO函数类上可定义"范数" $\|f\|_{BMO}=\|f^\sharp\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, 或直接写为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x,$$

这里上确界是对任意方体Q取的. 注意到$\|f\|_{BMO}=0 \implies f$ 是常数, 所以在函数意义下$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$不是范数. 不过在BMO 函数类中引入等价类" $f_1\sim f_2 \iff f_1-f_2=$ 常数" 后, $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ 就是对应商空间上的范数. 所以我们约定, 以后所称 BMO 空间都是这个模常数的商空间, 它在上述范数下成为赋范线性空间.

此外, 不难看出在上述定义中可以把方体Q换为球B, 所得范数是等价的.

例1. *$L^\infty\subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 这是因为 $f^\sharp(x)\le 2Mf(x)$, 所以$\|f\|_{\mathrm{BMO}}\le 2\|f\|_{L^\infty}$.*

例2. *$W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.*

证明. 先回忆球上的 Poincaré 不等式:

存在常数C使得对于$\mathbb{R}^n$中任意球$B(x,r)$, 若$u\in W^{1,p}(B(x,r)), 1\le p\le\infty$, 则
$$\|u-u_{B(x,r)}\|_{L^p(B(x,r))}\le C_{n,p}r\|Du\|_{L^p(B(x,r))}.$$

现对于$u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\subset W^{1,1}(B(x,r))$, 利用该不等式和Hölder 不等式, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|u-u_{B(x,r)}|\mathrm{d}x &\le \frac{C_nr}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|Du|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{C_nr}{r^n}\left(\int_{B(x,r)}|Du|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{B(x,r)}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (\text{其中 } \frac{1}{n}+\frac{1}{n'}=1)\\ &= \frac{C_n}{r^{n-1}}\left(r^n\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{B(x,r)}|Du|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\le C_n\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\le C_n\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

左边对$x\in\mathbb{R}^n$和$r>0$取上确界, 并利用非中心Sharp极大函数可被中心Sharp极大函数控制(命题1), 就证明了$\|u\|_{\mathrm{BMO}}\le C_n\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$. □

利用定义验证一个函数是BMO函数, 需要计算它在任意方体上的积分平均, 这一般都比较复杂. 为此, 我们给出下面定理.

定理1. 设$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)\iff$ 存在 $C>0$, 对任意 Q, 存在 $a_Q\in\mathbb{R}$, 使得 $\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-a_Q|\mathrm{d}x\le C$. 特别地, $\|f\|_{\mathrm{BMO}}\le 2C$.

证明. 1. $\Longrightarrow$. 取$a_Q=f_Q$, 就得到$C=\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

2. $\Longleftarrow$. 首先, $\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|\mathrm{d}x\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-a_Q|\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|}\int_Q|a_Q-f_Q|\mathrm{d}x\le C+|a_Q-f_Q|$. 又因为 $|f_Q-a_Q|=\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q(f-a_Q)\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-a_Q|\mathrm{d}x\le C$. 所以 $\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|\mathrm{d}x\le 2C$, 即$\|f\|_{\mathrm{BMO}}\le 2C$. □

例3. $\ln|x|\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 特别地, L^∞是BMO的真子空间.

证明. 1. 对于球 $B(x,r)$, 当 $|x|\le 2r$ 时, 取常数$a_B=\ln r$, 就有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\ln|y|-a_B|\mathrm{d}y\\
=\;&\frac{C_n}{r^n}\int_{B(0,1)}\left|\ln\frac{|x+rz|}{r}\right|\mathrm{d}zr^n \quad (\text{这里令 } y=x+rz)\\
=\;&C_n\int_{B(0,1)}|\ln|\frac{x}{r}+z||\mathrm{d}z=C_n\int_{B(0,1)}|\ln|x_0+z||\mathrm{d}z \quad (\text{这里 } x_0=\frac{x}{r},|x_0|\le 2)\\
=\;&C_n\int_{B(x_0,1)}|\ln|y||\mathrm{d}y \quad (\,y=x_0+z)\\
\le\;&C_n\int_{B(0,3)}|\ln|y||\mathrm{d}y=C_n\omega_n\int_0^3|\ln r|r^{n-1}\mathrm{d}r\\
=\;&C_n\omega_n\left(\int_0^1(-\ln r)r^{n-1}\mathrm{d}r+\int_1^3(\ln r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right)\le C_n'.
\end{aligned}
$$

2. 当 $|x|>2r$ 时, 球$B(x,r)$已离开原点, $\ln|y|$主要被$\ln|x|$控制, 所以取$a_B=\ln|x|$, 就有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\ln|y|-a_B|\mathrm{d}y=C_n\int_{B(0,1)}\left|\ln\frac{|x+rz|}{|x|}\right|\mathrm{d}z\\
=\;&C_n\int_{B(0,1)}\left|\ln|\frac{x}{|x|}+\frac{rz}{|x|}|\right|\mathrm{d}z=C_n\int_{B(0,1)}\left|\ln|x_0+\frac{r}{|x|}z|\right|\mathrm{d}z \quad (\,x_0=\frac{x}{|x|})\\
=\;&C_n(\frac{r}{|x|})^{-n}\int_{B(x_0,r/|x|)}|\ln|y||\mathrm{d}y \quad (\,y=x_0+\frac{rz}{|x|})\\
\le\;&C_n\sup_{|x_0|=1}\sup_{\delta<1/2}\delta^{-n}\int_{B(x_0,\delta)}|\ln|y||\mathrm{d}y \quad (\text{注意在}B(x_0,\delta)\text{上成立 }|\ln|y||\le\ln 2)\\
\le\;&C_n\ln 2\sup_{\delta>0}\delta^{-n}\int_{B(x_0,\delta)}\mathrm{d}y\le C_n''.
\end{aligned}
$$

综上,就得证$\ln|x|\in\mathrm{BMO}$. □

对数函数是BMO函数的典型代表, 从它可以启发我们分析理解BMO函数的一般性质. 下面我们证明BMO空间的完备性, 这可以使我们今后将泛函分析的结论应用于BMO空间.

定理2. BMO 空间是模常数的 *Banach* 空间.

证明. 我们只需证明完备性: 设 $\{f^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 为 BMO 空间中的 Cauchy 列, 要证明存在$f\in\mathrm{BMO}$使得$\lim_{n\to\infty}\left\|f^{(n)}-f\right\|_{\mathrm{BMO}}=0$.

1. 由Cauchy列定义, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, 当 $m,n>N$ 时, $\| f^{(n)}-f^{(m)}\|_{BMO}\le\epsilon$. 特别地, $\{\left\|f^{(n)}\right\|_{\mathrm{BMO}}\}_n$一致有界. 由BMO范数定义,对任意方体$I\subset\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{|I|}\int_I|(f^{(n)}-f_I^{(n)})-(f^{(m)}-f_I^{(m)})|\mathrm{d}x\le\epsilon$. 所以 $\{f^{(n)}-f_I^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 为 $L^1(I)$ 中的 Cauchy 列. 这里特别注意N与I无关.

由 $L^1(I)$ 的完备性, 存在 $f^I(x)\in L^1(I)$ 使得当 $n\to\infty$ 时在$L^1(I)$中成立

$$f^{(n)}-f_I^{(n)}\to f^I,\tag{13.1}$$

即: 对任意 $\epsilon>0$, 存在 N' (可依赖于 I), 使得当 $n>N'$ 时, $\int_I|f^{(n)}-f_I^{(n)}-f^I|\mathrm{d}x\le\epsilon$.

2. 下面构造极限函数. 设 $J\subset\mathbb{R}^n$ 为方体, 且$I\subset J$, 则由上述推理, 存在 $f^J\in L^1(J)\subset L^1(I)$, 且当 $n\to\infty$ 时, 在$L^1(J)$中成立

$$f^{(n)}-f_J^{(n)}\to f^J.\tag{13.2}$$

现考察数列$\{f_J^{(n)}-f_I^{(n)}\}_n$, 它是有界的. 事实上,

$$\begin{aligned}|f_J^{(n)}-f_I^{(n)}| &= \left|\frac{1}{|I|}\int_I(f^{(n)}-f_J^{(n)})\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{|I|}\int_I|f^{(n)}-f_J^{(n)}|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{|J|}{|I|}\frac{1}{|J|}\int_J|f^{(n)}-f_J^{(n)}|\mathrm{d}x\le\frac{|J|}{|I|}\| f^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}}\le C(I,J)<\infty.\end{aligned}$$

所以存在单增趋于正无穷的序列 $\{n_k\}$, 使得 $f_J^{(n_k)}-f_I^{(n_k)}\to C_{I,J}$. 由于

$$(f^{n_k}-f_I^{n_k})-(f^{n_k}-f_J^{n_k})=f_J^{n_k}-f_I^{n_k},$$

令 $n_k\to\infty$, 就得到在L^1或几乎处处意义下成立

$$f^I-f^J=C_{I,J}\Longrightarrow f^J=f^I-C_{I,J}.\tag{13.3}$$

3. 现令 $\{I_k\}$ 为一列方体, $I_1\subset I_2\subset I_3\subset\cdots$ 且 $\cup_{k=1}^\infty I_k=\mathbb{R}^n$. 由(13.3), 在减去一个常数后可取 $f^{(I_2)}$ 使得在 I_1 上有 $f^{I_2}=f^{I_1}$; f^{I_3} 通过减去一个常数, 在 I_2 上与(新的) f^{I_2} 相同; $\cdots$ $f^{I_{k+1}}$ 减去一个常数后在 I_k 上与(新的) $f^{(n_k)}$ 相同. 由此定义极限函数 $f=f^{I_k},x\in I_k$.

4. 下证 $f\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 即存在 C, 使得对任意方体 I, 成立 $\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|\mathrm{d}x\le C$. 现取定 I, 必有某个 $J=I_k$, 使得 $I\subset J$. 由于 $f|_J=f^{(J)}$, 只需证明 $\frac{1}{|I|}\int_I|f^J-f_I^J|\mathrm{d}x<C$.

由 (13.3) 式两边取I上积分平均值得 $f_I^J=f_I^I-C_{I,J}$, 再由 (13.1) 式得$f_I^I=0$, 所以$f_I^J=-C_{I,J}$, 从而再用(13.3)得到 $f^J=f^I+f_I^J\Longrightarrow f^J-f_I^J=f^I$. 这样一来,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I|f^I(x)|\mathrm{d}x &\le \frac{1}{|I|}\int_I|f^I-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x+\frac{1}{|I|}\int_I|f^{(n)}-f_I^{(n)}|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{|I|}\int_I|f^I-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x+\| f^{(n)}\|_{BMO}.\end{aligned}$$

对任意 $\epsilon>0$, 存在 N_I, 使得$n>N_I$时 $\frac{1}{|I|}\int_I|f^I-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\le\epsilon$. 所以利用 ϵ 的任意小性,

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f^I(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon+\sup_n\| f^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}}\Longrightarrow\frac{1}{|I|}\int_I|f^I(x)|\mathrm{d}x\le\sup_n\| f^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}}.$$

这就表明$f\in\mathrm{BMO}$, 且 $\| f\|_{\mathrm{BMO}}\le\sup_n\| f^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}}$.

5. 最后证明$\| f^{(n)}-f\|_{\mathrm{BMO}}\to 0 \quad (n\to\infty)$, 即对任意$\epsilon>0$, 存在$N>0$, 使得当$n>N$时,对于任意方体$I$, 都成立$\frac{1}{|I|}\int_I|f-f^{(n)}-(f_I-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\le\epsilon$. 和前面一样,可以找到$J=I_k$使得$I\subset J$, 而且$f|_J=f^J$. 于是只需证明, 对任意$\epsilon>0$, 存在$N$(与$I,J$均无关), 当$n\ge N$时, 有: $\frac{1}{|I|}\int_I|f^J-f^{(n)}-(f_I^J-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\le\epsilon$. 在第4步已经证明$f^J-f_I^J=f^I$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|I|}\int_I|f^J-f^{(n)}-(f_I^J-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x=\frac{1}{|I|}\int_I|f^I-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\\
\le\ &\frac{1}{|I|}\int_I|f^I-(f^{(m)}-f_I^{(m)})|\mathrm{d}x+\frac{1}{|I|}\int_I|(f^{(m)}-f_I^{(m)})-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\\
=:\ &A+B.
\end{aligned}
$$

首先考虑积分A. 利用(13.1), 对任意$\theta>0$, 存在M_I, 当$m>M_I$时, $A<\theta$. 再看积分B. 对$\epsilon>0$, 当$n>N$(由Cauchy列定义确定,与I无关)时, $B\le\epsilon$. 于是得到$A+B\le\theta+\epsilon$. 再由θ任意小(即令$m\to\infty$), 就得到当$n>N$时总成立$\frac{1}{|I|}\int_I|f^J-f^{(n)}-(f_I^J-f_I^{(n)})|\mathrm{d}x\le\epsilon$. 证毕. □

下述BMO函数的截断性质将在第十五讲证明BMO是Hardy的$\mathcal{H}^1$空间的对偶时用到.

命题2. *设f,g是实值的BMO函数, 则$\max(f,g)$和$\min(f,g)$也是BMO函数, 而且*

$$\|\max(f,g)\|_{\mathrm{BMO}}\le\frac{3}{2}(\|f\|_{\mathrm{BMO}}+\|g\|_{\mathrm{BMO}}),\quad \|\min(f,g)\|_{\mathrm{BMO}}\le\frac{3}{2}(\|f\|_{\mathrm{BMO}}+\|g\|_{\mathrm{BMO}}).$$

证明. 由命题1的结论c), 我们知道$|f|\in\mathrm{BMO}$且$\||f|\|_{\mathrm{BMO}}\le2\|f\|_{\mathrm{BMO}}$. 利用基本关系式

$$\max(f,g)=\frac{1}{2}(|f-g|+f+g),\quad \min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

就得到结论. □

二 奇异积分算子的(L^∞,BMO)型

利用BMO空间的定义以及C-Z积分核的Hörmander条件, 就可以证明C-Z奇异积分算子是$L^\infty(\mathbb{R}^n)$到$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$的有界连续算子. 我们先看如下特殊但是本质的情形.

定理3. *设K为$C-Z$核, T是由K确定的卷积型奇异积分算子, 则存在常数$C>0$, 对任意具有紧支集的$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 成立*

$$\|Tf\|_{\mathrm{BMO}}\le C\|f\|_{L^\infty}.$$

证明. 1. 设Q为$\mathbb{R}^n$中的以C_Q为中心, 边长为l的一个方体, Q^*是与Q同心且边长为$2l\sqrt{n}$的方体. 作函数分解: $f=f_1+f_2$, 其中$f_1=f\chi_{Q^*}$, $f_2=f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}$.

2. 估计Tf. 因为$f\in L^\infty$且具有紧支集, 所以$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 而且$f_1\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$.于是$Tf=Tf_1+Tf_2$有定义.

选取$a=\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}K(C_Q-y)f_2(y)\mathrm{d}y$, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf(x)-a|\mathrm{d}x &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(x)|\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_2(x)-a|\mathrm{d}x\\
&= I+II.
\end{aligned}
$$

首先, 利用Hölder不等式及T为(2,2)型, 不难得到

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C|Q|^{-\frac{1}{2}} \| f_1 \|_{L^2} \leq C|Q|^{-\frac{1}{2}} \| f \|_{L^\infty} |Q^*|^{\frac{1}{2}} \leq CC_n \| f \|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

其次, 回忆对几乎所有 $x \in Q$, 成立

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K^{\epsilon,N}(x,y)f(y)\mathrm{d}y = Tf_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

(f的支集范围及$x \in Q$使得截断$K^{\epsilon,N} = K$). 所以

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} K(C_Q-y)f(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x-y)-K(C_Q-y)||f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\leq \| f \|_{L^\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x-y)-K(C_Q-y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\leq A_3 \| f \|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

这里最后一个不等号是因为利用Hörmander条件 $\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x-y)-K(C_Q-y)|\mathrm{d}y \leq \int_{\{|Z|\geq 2|Y|\}} |K(Z-Y)-K(Z)|\mathrm{d}Z \leq A_3$, 其中若 $x \in Q$, $y \in \mathbb{R}^n\setminus Q^*$, 作 $Z = C_Q - y, Y = C_Q - x$, 则 $|Z| = |y - C_Q| \geq \dfrac{1}{2}\cdot 2l\sqrt{n} = l\sqrt{n} \geq 2\cdot\dfrac{l\sqrt{n}}{2} \geq 2|x-C_Q| = 2|Y|$. 所以我们得到$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)-a|\mathrm{d}x \leq C\left\|f\right\|_{L^\infty}$, 其中$C$只依赖于C-Z常数和$n$. 由定理1就得到$\left\|Tf\right\|_{\mathrm{BMO}} \leq 2C\left\|f\right\|_{L^\infty}$. □

下面定义任意 L^∞ 函数上的奇异积分算子. 这里的主要难点在于L^∞是不可分的, 所以不能用算子有界延拓.

定义2. *设 Q 是以原点为中心, 边长为 l 的方体, Q^* 是以原点为中心, $2l\sqrt{n}$ 为边长的方体. 对任意$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 作唯一的分解*

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_{Q^*}.$$

对任意 $x \in Q$, 定义

$$Tf(x) := Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} (K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y.$$

下面说明这个定义是合理的.

1. 注意到$f_1 \in L^2$, 所以$Tf_1(x)$对几乎所有$x \in Q$有意义. 又右端积分收敛. 这是因为由定理3证明中的分析,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x-y)-K(-y)||f_2(y)|\mathrm{d}y &\leq \| f_2 \|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |K(x-y)-K(-y)|\mathrm{d}y \\ &\leq A_3 \| f_2 \|_{L^\infty} \leq A_3 \| f \|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

2. 定义与 Q 的选取无关. 设 $\bar{Q}$ 是另外一个以原点为中心的方体,而 $\bar{Q}^*$ 为相应的为以原点为中心, 包含 $\bar{Q}$ 的方体, 那么有分解 $f = \bar{f_1} + \bar{f_2}$, 其中$\bar{f_1} = f\chi_{\bar{Q}^*}$. 以下不妨设$\bar{Q} \subset Q$. 我们计算

$$\left(Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} (K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y\right) - \left(T\bar{f_1}(x) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus \bar{Q}^*} (K(x-y)-K(-y))\bar{f_2}(y)\mathrm{d}y\right) = I + II.$$

首先考虑

$$\begin{aligned} I := Tf_1(x)-T\bar{f}_1(x) &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n} K^{\epsilon,N}(x-y)(f_1(y)-\bar{f}_1(y))\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_{Q^*\setminus\bar{Q}^*} K^{\epsilon,N}(x-y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{Q^*\setminus\bar{Q}^*} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

其次, 不难验证

$$\begin{aligned} II &:= \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^n\setminus\bar{Q}^*}(K(x-y)-K(-y))\bar{f}_2(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{Q^*\setminus\bar{Q}^*}K(-y)f(y)\mathrm{d}y-\int_{Q^*\setminus\bar{Q}^*}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\quad I+II=\int_{Q^*\setminus\bar{Q}^*}K(-y)f(y)\mathrm{d}y$. 所以在相差一个常数意义下, 定义是合理的.

3. 当 $f\in L^\infty$ 且有紧支集时, 定义与原来相符 (允许相差一个常数). 事实上, 对定义式 $Tf=Tf_1+\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y$, 只需取 $Q\supset\operatorname{supp}f$, 则$f=f_1$, 第二项为零, 所以两端定义相吻合.

定理4. *按定义2, 由C-Z核K确定的卷积型奇异积分算子对任意$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 都有定义, 而且*

$$\|Tf\|_{\mathrm{BMO}}\le C\|f\|_{L^\infty}.$$

证明. 1. 因为 $f_1\in L^\infty$ 具有紧支集, 用定理 3 得$\|Tf_1\|_{\mathrm{BMO}}\le C\|f\|_{L^\infty}$.

2. 对任意方体 $I\subset\mathbb{R}^n$, 取 Q 充分大, 使得 $I\subset Q$. 那么

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x &\le \|f_2\|_{L^\infty}\sup_{x\in I}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|K(x-y)-K(-y)|\mathrm{d}y \\ &\le A_3\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

这里依旧使用了Hörmander光滑性条件. 从而利用定理1 (取$a_I=0$), 就有

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x-y)-K(-y))f_2(y)\mathrm{d}y\right\|_{\mathrm{BMO}}\le 2A_3\|f\|_{L^\infty}.$$

所以$Tf\in\mathrm{BMO}$且T 是(L^∞,BMO)型算子. □

第十四讲　BMO空间(二): John–Nirenberg 定理和Sharp 极大定理

这一讲我们介绍BMO函数的一些深刻的性质. 这方面最重要的结果当属John–Nirenberg 定理, 它给出了BMO 函数在任意方体上分布函数的估计. 由于利用分布函数可以计算许多函数积分, 这就可以给出BMO函数的许多估计式. 我们还将证明Sharp极大定理, 并利用它给出(L^p,L^p) 及(L^∞,BMO) 型算子的插值定理.

一　有界平均振动函数的性态

我们先介绍关于BMO函数无穷远形态的一个可积性定理. 这在以后学习Carleson 测度和仿积算子时会用到. 然后证明John–Nirenberg定理及其推论, 以及它们在二阶椭圆型方程理论中的重要应用.

1. 无穷远性态

定理1. 设$f\in \mathrm{BMO}$, 则对于任意给定的$\delta>0$, $\dfrac{f}{1+|x|^{n+\delta}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\ell^\delta\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f_Q|}{\ell^{n+\delta}+|x-x_0|^{n+\delta}}\mathrm{d}x\le C\,\|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

其中 Q 是以$x_0\in\mathbb{R}^n$为中心,边长为 ℓ 的方体, C 是只依赖于n,δ的常数.

证明. 只需对方体中心为$x_0=0$且$\ell=1$的情形证明. 记此方体为Q_0. 对一般情形只需考虑函数$\tilde f(x):=f(x_0+\ell x)$. 下面证明的重要思想和特点就是对$\mathbb{R}^n$ 作环形分解, 将估计式离散化后分别处理.

1. 设 $Q_k=Q(0,2^k)$, $S_k=Q_k\backslash Q_{k-1},k=1,2,\cdots$, 那么成立

$$\mathbb{R}^n=Q_0\cup\left(\cup_{k=1}^\infty S_k\right),\quad I=I_0+\sum_{k=1}^\infty I_k,$$

其中

$$I_k=\int_{S_k}\frac{|f-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\delta}}\mathrm{d}x,\quad I_0=\int_{Q_0}\frac{|f-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+\delta}}\mathrm{d}x.$$

容易估计

$$I_0\le\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f-f_{Q_0}|\mathrm{d}x\le\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

2. 在 S_k 上, $|x|\ge 2^{k-2},1+|x|^{n+\delta}\ge|x|^{n+\delta}\ge 2^{(k-2)(n+\delta)}=2^{-2(n+\delta)}\cdot 2^{k(n+\delta)}$. 所以

$$\begin{aligned}
I_k &\le 2^{-k(n+\delta)+2(n+\delta)}\int_{S_k}|f-f_{Q_0}|\mathrm{d}x=2^{-k(n+\delta)+2(n+\delta)}\left(\int_{Q_k}|f-f_{Q_k}|\mathrm{d}x+|Q_k||f_{Q_k}-f_{Q_0}|\right)\\
&= 2^{-k(n+\delta)+2(n+\delta)}2^{kn}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f-_{Q_k}|\mathrm{d}x+|f_{Q_k}-f_{Q_0}|\right)\\
&\le 2^{-k\delta+2(n+\delta)}(\|f\|_{\mathrm{BMO}}+|f_{Q_k}-f_{Q_0}|),
\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
|f_{Q_k}-f_{Q_0}| &\le \sum_{i=1}^{k}|f_{Q_i}-f_{Q_{i-1}}| = \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}(f-f_{Q_i})\mathrm{d}x\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{k}\frac{|Q_i|}{|Q_{i-1}|}\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}|f-f_{Q_i}|\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{i=1}^{k}\|f\|_{BMO}\frac{2^{in}}{2^{(i-1)n}} = 2^n k\|f\|_{\mathrm{BMO}},
\end{aligned}
$$

所以 $|I_k| \le 2^{2(n+\delta)-k\delta}(1+2^n k)\|f\|_{\mathrm{BMO}} = C_{n,\delta}2^{-k\delta}k\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

3. 由于$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\delta}k = C_\delta < \infty$, 所以我们就有$I \le (1+C_\delta C_{n,\delta})\|f\|_{\mathrm{BMO}}$. □

2. John-Nirenberg定理

定理2 (John-Nirenberg 定理). 设 $f \in \mathrm{BMO}, f \ne 0$, 则存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对任意方体 Q 和 $\lambda > 0$ 都成立

$$
|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \le C_1|Q|\exp\left(\frac{-C_2\lambda}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right).
$$

证明. 1. 不失一般性, 可假设$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = 1, f_Q = 0$, 否则取 f 为 $\dfrac{f-f_Q}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}$即可. 所以下面只需证

$$
|\{x \in Q : \ |f(x)| > \lambda\}| \le C_1 e^{-C_2\lambda}|Q|. \tag{14.1}
$$

2. 若 $0 < \lambda < 1$, 取 $C_1 = e, C_2 = 1$, 那么$C_1e^{-C_2\lambda} = e\cdot e^{-\lambda} = e^{1-\lambda} \in (1,e)$. 所以 $|\{x \in Q : \ |f(x)| > \lambda\}| \le |Q| \le e^{1-\lambda}|Q|$自然成立.

3. 下面只需对 $\lambda > 1$ 情形证明. 这里有两个关键想法: 首先是通过 Calderón–Zygmend 分解知道$\{x \in Q : \ |f(x)| > \lambda\}$ 包含在对f在Q内做C-Z分解所得到的方体的并集之内; 其次是将估计(14.1) 离散化, 即仅对一列线性增长的λ_k 做C-Z 分解, 再通过$|\{x \in Q : \ |f(x)| > \lambda_k\}|$ 的单调性作插值得到连续性的估计(14.1). 后面这种想法非常有典型性, 在诸如椭圆型方程的Moser迭代等方法中也是非常重要的.

4. 注意到$f \in L^1(Q)$, 又 $\|f\|_{\mathrm{BMO}} = 1, f_Q = 0$, 所以

$$
\frac{1}{|Q|}\|f\|_{L^1(Q)} \le \lambda. \tag{14.2}
$$

于是对 f 在 Q 上按高度 λ 做C-Z 分解: 将 Q 通过各边等分得到 2^n 个小方体, 再对满足(14.2)的每个小方体继续分解, 等等. 最后得到没有被分解的方体 $\{Q_k^\lambda\}$, 它们互不相交. 由C-Z分解的性质, 我们知道在 $Q\backslash(\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k^\lambda)$ 上 $|f| \le \lambda$. 所以为了估计 $|\{x \in Q : \ |f(x) > \lambda|\}| \subset (\bigcup_k Q_k^\lambda) \cup Z$, 其中$Z$是一个零测集, 只需估计 $|\bigcup_k Q_k^\lambda| = \sum_k |Q_k^\lambda|$.

5. 由C-Z分解的性质, 成立 $\lambda < \dfrac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x \le 2^n\lambda$. 利用$f \in \mathrm{BMO}$, 此式右端还可以改进.

事实上, Q_k^λ必由某个方体Q'通过一次等分边得到, 而在Q'上成立(14.2)才会被等分, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x &\le \frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)-f_{Q'}|\mathrm{d}x+|f_{Q'}|\\ &\le \frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'}|f-f_Q|\mathrm{d}x+|f_{Q'}|\\ &\le 2^n\|f\|_{\mathrm{BMO}}+|f_{Q'}|\\ &\le 2^n+\lambda.\end{aligned}$$

6. 取 $\mu=\lambda+2^{n+1}$, 对 f 在 Q 上按高度 μ 做 C-Z 分解, 得到互不相交的一族方体 $\{Q_j^\mu\}$. 我们断言, Q_j^μ 必包含在某个 Q_k^λ 中.

这可以通过对方体Q的分解过程看出. 事实上, Q本身在高度λ和μ下都被分解了. 对于下一代方体Q', 由于$\mu>\lambda$, 若成立$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x\le\lambda$, 则关于$\lambda,\mu$ 都会被分解; 若成立$\lambda<\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x\le\mu$, 则关于$\mu$分解, 关于$\lambda$不分解, 所以断言成立; 若$\mu\le\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x$, 则$Q'$不再被分解, 断言也成立.

7. 在 Q_j^μ 上成立 $\mu\le\frac{1}{|Q_j^\mu|}\int_{Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x$, 即 $\mu|Q_j^\mu|\le\int_{Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x$. 现固定一个 Q_k^λ, 设它至少包含某一个Q_j^μ, 就有

$$\sum_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}\mu|Q_j^\mu|\le\sum_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}\int_{Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda+2^{n+1}=\mu &\le \frac{1}{\sum\limits_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}|Q_j^\mu|}\int_{\bigcup\limits_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{\sum\limits_{\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\}}|Q_j^\mu|}\int_{\bigcup\limits_{\{j:Q_k^\mu\subset Q_k^\lambda\}}Q_j^\mu}|f(x)-f_{Q_k^\lambda}|\mathrm{d}x+|f_{Q_k^\lambda}|\\ &\le \frac{|Q_k^\lambda|}{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|}\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)-f_{Q_k^\lambda}|\mathrm{d}x+|f_{Q_k^\lambda}|\quad(\text{记 }\mathcal{A}_k=\{j:Q_j^\mu\subset Q_k^\lambda\})\\ &\le \frac{|Q_k^\lambda|}{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|}\|f\|_{\mathrm{BMO}}+|f_{Q_k^\lambda}|\\ &\le \frac{|Q_k^\lambda|}{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|}+\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\le \frac{|Q_k^\lambda|}{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|}+2^n+\lambda,\end{aligned}$$

即得到$2^n\le\frac{|Q_k^\lambda|}{\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|}$, 或$\sum\limits_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|\le2^{-n}|Q_k^\lambda|$. 对 k 求和, 就有

$$\sum_j|Q_j^\mu|\le\sum_k\sum_{j\in\mathcal{A}_k}|Q_j^\mu|\le2^{-n}\sum_k|Q_k^\lambda|.$$

8. 有了上面这个估计, 下面就可以关于 λ 及 μ 作迭代了:

(1) $\lambda = 1, \quad \mu = 1+2^{n+1}$;

(2) $\lambda = 1+2^{n+1}, \quad \mu = 1+2\cdot 2^{n+1}$;

(3) $\lambda = 1+2\cdot 2^{n+1}, \quad \mu = 1+3\cdot 2^{n+1}$;

……

(r) $\lambda = 1+(r-1)2^{n+1}, \quad \mu = 1+r\cdot 2^{n+1}$;

……

从而成立估计

$$\begin{aligned}\sum_j |Q_j^{(1+r\cdot 2^{n+1})}| &\le 2^{-n}\sum_k |Q_k^{(1+2^{n+1}(r-1))}| \\ &\le 2^{-n}\cdot 2^{-n}\sum_{k'} |Q_{k'}^{(1+(r-2)2^{n+1})}| \\ &\le 2^{-nr}\sum_{k'} |Q_{k'}^1| \le 2^{-nr}|Q|.\end{aligned}$$

现对任意$\alpha>1$, 存在 $r\in\mathbb{N}$, 使得 $\mu = 1+r\cdot 2^{n+1} < \alpha \le 1+(r+1)\cdot 2^{n+1}$. 利用 $\{x\in Q: |f(x)>\alpha|\}\subset\{x\in Q: |f(x)|>\mu\}$, 可得

$$\begin{aligned}|\{x\in Q: |f(x)|>\alpha\}| &\le \{x\in Q: |f(x)|>\mu\} \\ &\le \sum_j |Q_j^{\mu}| = \sum_j |Q_j^{(1+2^{n+1}r)}| \\ &\le 2^{-nr}|Q| = (e^{\ln 2})^{-nr}|Q| = e^{-(\ln 2)nr}|Q| \\ &\le e^{-[(\alpha-1)2^{-(n+1)}-1]n\ln 2}|Q| \quad (\text{因为 } (\alpha-1)2^{-(n+1)} < r+1) \\ &= e^{-n(\alpha\cdot 2^{-(1+n)}-2^{-(1+n)}-1)\ln 2}|Q| \\ &= |Q|e^{-n\ln 2\cdot 2^{-(n+1)}\alpha}\cdot e^{n\ln 2(2^{-(n+1)}+1)} \\ &= C_1 e^{-C_2\alpha}|Q|.\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明. □

定理3. *设f不是常数. 以下论断是等价的:*

i) $f\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$;

ii) *存在常数C_1, C_2使得对于任意方体Q都成立*

$$|\{x\in Q: |f(x)-f_Q|\ge s\}| \le C_1 e^{-C_2 s}|Q|;$$

iii) *存在* $p\in[1,+\infty)$ *和* C_p, *使得*

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C_p < +\infty;$$

iv) *存在* C_3, C_4, *使得对任意方体* $Q\subset\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (e^{C_3|f(x)-f_Q|}-1)\mathrm{d}x \le C_4.$$

证明. 1. i)⇒ii): 即John-Nirenberg定理.

2. ii)⇒iii): 利用分布函数计算积分公式. 事实上, 对任意$1 \le p < \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_Q |f(x)-f_Q|^p \,\mathrm{d}x &= p\int_0^\infty t^{p-1}|\{x\in Q: |f(x)-f_Q|>t\}|\,\mathrm{d}t \\
&\le pC_1|Q|\int_0^\infty t^{p-1}e^{-\frac{C_2}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}t}\,\mathrm{d}t \le pC_1|Q|\left(\frac{C_2}{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}\right)^{-p}\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\le pC_1C_2^{-p}\Gamma(p)|Q|\,\|f\|_{\mathrm{BMO}}^p.
\end{aligned}$$

3. iii)⇒iv): 利用指数函数的级数展开, 注意到$k\Gamma(k)=k!$, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q (e^{C_3|f(x)-f_Q|}-1)\,dx &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|Q|}\frac{1}{k!}\int_Q (C_3|f(x)-f_Q|)^k\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}C_3^k k! C_1 C_2^{-k}\|f\|_{\mathrm{BMO}}^k = C_1\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{C_3\|f\|_{\mathrm{BMO}}}{C_2}\right)^k.
\end{aligned}$$

如果取$C_3=\frac{1}{2}C_2/\|f\|_{\mathrm{BMO}}$, 上式右端就就被$C_4=C_1$控制.

4. iv)⇒iii): 利用级数展开及各项非负性即得.

5. iii)⇒i): 利用Hölder不等式即可. □

推论1. 设$f\in\mathrm{BMO}$, 则存在 C_5, C_6, 使得若$v=e^{C_5 f}$, 则对任意方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$, 成立

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{v}\,\mathrm{d}x\right)\le C_6. \tag{14.3}$$

反之, 若此不等式成立, 则$f\in\mathrm{BMO}$.

证明. 1. 取$C_5=C_3$. 由iv) 知

$$\int_Q e^{C_5 f(x)-C_5 f_Q}\,\mathrm{d}x \le (C_4+1)|Q|, \quad \int_Q e^{-C_5 f(x)+C_5 f_Q}\,\mathrm{d}x \le (C_4+1)|Q|.$$

两边相乘, 约去常数$e^{\pm C_5 f_Q}$即得所证不等式.

2. 反之, 为证$f\in\mathrm{BMO}$, 不妨设$C_5=1$. 利用凸函数的Jensen不等式, 成立

$$\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\lambda(x)}\,\mathrm{d}x.$$

从而, 取$\lambda=\mp f$, 则成立

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{f(x)-f_Q}\,\mathrm{d}x &= \exp(-f_Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{f(x)}\,\mathrm{d}x \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\le C_6, \\
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-f(x)+f_Q}\,\mathrm{d}x &= \exp(f_Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-f(x)}\,\mathrm{d}x \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\le C_6.
\end{aligned}$$

记$Q^+=\{x\in Q: f(x)-f_Q\ge 0\}, Q^-=\{x\in Q: f(x)-f_Q<0)$, 那么

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|f(x)-f_Q|}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{|Q|}\left(\int_{Q^+} e^{f(x)-f_Q}\,\mathrm{d}x+\int_{Q^-} e^{-f(x)+f_Q}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q e^{f(x)-f_Q}\,\mathrm{d}x+\int_Q e^{-f(x)+f_Q}\,\mathrm{d}x\right)\le 2C_6.
\end{aligned}$$

由于$x < e^x$, 就得到

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|f(x)-f_Q|}\,\mathrm{d}x \le 2C_6,$$

即得$f \in \mathrm{BMO}$且$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \le 2C_6/C_5$. □

满足条件(14.3)的非负局部可积函数v称为A_2权函数. 上述推论相当于证明了v是A_2权函数当且仅当$\ln v \in \mathrm{BMO}$. 这其实对一般A_p权也成立. A_p权理论在研究加权函数空间及其上算子的连续性, 以及退化椭圆型方程解的正则性课题中都有重要应用.

二 应用: 具可测系数二阶椭圆型方程的Moser–Harnack不等式

设Ω是$\mathbb{R}^n$中区域, 对$i,j=1,\cdots,n$, $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$, 称在$\Omega$上的二阶线性方程$-\partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u(x)) = 0$是椭圆型的, 如果存在常数$\lambda > 0$使得对于任意$x \in \Omega$和$\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ 成立

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2.$$

函数$u \in H^1(\Omega)$是该方程的一个弱解, 如果对任何$\varphi \in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$\int_\Omega a^{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

现在假设$u > 0$是一个弱解, 那么对于任意$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, 成立$\varphi = \frac{1}{u}\eta^2 \in H_0^1(\Omega)$. 将其作为测试函数代入弱解定义式, 就得到

$$-\int_\Omega a^{ij}\partial_j u\partial_i u\frac{1}{u^2}\eta^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega a^{ij}\partial_j u\frac{1}{u}2\eta\partial_i\eta\,\mathrm{d}x = 0.$$

第一式利用椭圆型定义, 第二式利用a^{ij}有界性及Young不等式, 就有

$$\lambda\int_\Omega |Du|^2\frac{1}{u^2}\eta^2\,\mathrm{d}x \le \varepsilon\int_\Omega |Du|^2\frac{1}{u^2}\eta^2\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_\Omega |D\eta|^2\,\mathrm{d}x.$$

从而取$\varepsilon = \lambda/2$, 得到

$$\int_\Omega |Du|^2\frac{1}{u^2}\eta^2\,\mathrm{d}x \le C\int_\Omega |D\eta|^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_\Omega |D\ln u|^2\eta^2\,\mathrm{d}x \le C\int_\Omega |D\eta|^2\,\mathrm{d}x.$$

现在对于任意包含在Ω内的球B_{2R}, 取η使得$\mathrm{supp}\,\eta \in B_{2R}$, 在$B_R$上$\eta = 1$, 且$|D\eta| \le 4/R$. 那么

$$\int_{B_R} |D\ln u|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{C}{R^2}\int_{B_{2R}}\,\mathrm{d}x = CR^{n-2}.$$

回忆球上的Poicaré不等式, 则

$$\int_{B_R} |\ln u - (\ln u)_{B_R}|^2\,\mathrm{d}x \le CR^n.$$

用Hölder不等式就得到

$$\int_{B_R} |\ln u - (\ln u)_{B_R}|\,\mathrm{d}x \le CR^n,$$

其中C与u和B_R无关. 于是我们证明了$\ln u \in \mathrm{BMO}(U)$, 其中$U$为任意包含在$\Omega$内的紧集.

所以利用推论, 存在常数$\alpha > 0$使得对$v = e^{\alpha\ln u}$ 成立

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v\,\mathrm{d}x\right) \le C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

另一方面, 利用Moser迭代方法, 对正的弱解u可以证明如下不等式: 对任意$p>0$ 和$q<0$, 存在常数c_1,c_2使得

$$\sup_{B_{R/2}} u \le c_1\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad \inf_{B_{R/2}} u \ge c_2\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

这样, 取$p=\alpha$, $q=-\alpha$, 得到

$$\sup_{B_{R/2}} u \le c_1\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le Cc_1\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^{-p}\,\mathrm{d}x\right)^{-1/p} \le c_1c_2C\inf_{B_{R/2}} u.$$

这样我们对于系数仅为有界可测函数的二阶散度形椭圆型方程的正的弱解u得到了Moser–Harnack不等式:

$$\sup_{B_{R/2}} u \le K\inf_{B_{R/2}} u.$$

它的上述推导过程本质上不依赖于方程的线性, 所以该论证及结论在拟线性散度形椭圆型方程的理论中起着非常重要的应用.

三 Sharp极大定理

1. Good-lambda 估计

定义1 (二进极大函数)**.** 设f为$\mathbb{R}^n$上局部可积函数, 定义其二进极大函数为

$$M_df(x)=\sup\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y : x\in Q\text{且}Q\text{是二进方体}\right\}.$$

显然$M_d(f)(x)\le Mf(x)$, 所以M_d是弱(1,1)型. 此外由Lebesgue微分定理可知几乎处处成立$f(x)\le M_df(x)$. 所以, 利用Sharp极大函数的初等性质我们知道对$1<p<\infty$, 成立$\|f^\sharp\|_{L^p}\le C\|Mf\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^p}\le\|M_df\|_{L^p}$. 这一节要证明的Sharp极大定理说反过来也成立, 即$\|M_df\|_{L^p}\le C\|f^\sharp\|_{L^p}$. 为此, 我们先证明如下常被称作Good-lambda 估计的定理, 从其证明中我们也可以发现引入二进极大函数的一些优点.

定理4. 对任意$\lambda>0,\gamma>0$及$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : M_df(x)>2\lambda, f^\sharp(x)\le\gamma\lambda\}|\le C_n\gamma|\{x\in\mathbb{R}^n : M_df(x)>\lambda\}|. \tag{14.4}$$

证明. 1. 记$\Omega_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n : M_df(x)>\lambda\}$. 如果$|\Omega_\lambda|=\infty$, 则毋需证明. 所以以下总假设$|\Omega_\lambda|<\infty$.

对任意$x\in\Omega_\lambda$, 必然存在一个最大的二进方体Q^x使得

$$\frac{1}{|Q^x|}\int_{Q^x}|f(y)|\,\mathrm{d}y>\lambda. \tag{14.5}$$

由于Q^x必然包含在Ω_λ内, 所以最大的Q^x的存在性由$|\Omega_\lambda|<\infty$ 保证.

现在记$\{Q_j\}$ 为所有$x\in\Omega_\lambda$ 对应的满足(14.5) 的最大方体的集合. 由于二进方体互不相交, 所以这些方体之间也互不相交. 此外, 由于每个Q_j必包含在Ω_λ内, 显然有$\cup_jQ_j\subset\Omega_\lambda$. 另一方面, 每个$x\in\Omega_\lambda$ 必包含在某个Q_j之内, 即$\Omega_\lambda\subset\cup_jQ_j$, 所以我们得到$\Omega_\lambda=\cup_jQ_j$

注意到成立$\{x\in\mathbb{R}^n : M_df(x)>2\lambda, f^\sharp(x)\le\gamma\lambda\}\subset\Omega_\lambda$, 为了证明(14.4), 下面只要证明

$$|\{x\in Q_j : M_df(x)>2\lambda, f^\sharp(x)\le\gamma\lambda\}|\le C_n\gamma|Q_j|. \tag{14.6}$$

此式两边关于j求和就可以得到(14.4).

2. 现在固定j和$x\in Q_j$, 使得$M_d f(x)>2\lambda$, 且$f^\sharp(x)\le\gamma\lambda$. 注意到在

$$M_d f(x)=\sup_{R\ni x}\frac{1}{|R|}\int_R |f(t)|\,\mathrm{d}t \tag{14.7}$$

中上确界是对包含x的所有二进方体R取的. 由于$Q_j\cap R\neq\emptyset$ (都包含x), 所以根据二进方体的定义, 这里的R或者包含Q_j, 或者被包含在Q_j中.

设(14.7)中上确界在R'取到, 若R'包含Q_j且$R'\neq Q_j$, 那么将(14.5)中Q^x 换做R' 后依旧成立. 这就与Q_j的极大性矛盾. 所以必须成立$R'\subset Q_j$.

这样一来, 我们可以在(14.7)中将f换做$f\chi_{Q_j}$ 而不改变其值, 即仍成立

$$M_d(f\chi_{Q_j})(x)>2\lambda.$$

3. 记Q是通过边等分得到Q_j的边长为Q_j两倍的二进方体, 它是唯一确定的. 利用Q_j的极大性, 成立

$$|f_Q|\le|f|_Q\le\lambda.$$

由三角不等式就成立

$$M_d\Big((f-f_Q)\chi_{Q_j}\Big)(x)\ge M_d(f\chi_{Q_j})(x)-|f_Q|\ge 2\lambda-\lambda=\lambda.$$

这意味着我们证明了

$$\{x\in Q_j: M_d f(x)>2\lambda\}\subset\Big\{x\in Q_j: M_d\Big((f-f_Q)\chi_{Q_j}\Big)(x)\ge\lambda\Big\}.$$

对右边集合的测度, 利用M_d的弱(1,1)型, 就有

$$\begin{aligned}\left|\Big\{x\in Q_j: M_d\Big((f-f_Q)\chi_{Q_j}\Big)(x)\ge\lambda\Big\}\right| &\le \frac{C_n}{\lambda}\int_{Q_j}|f(y)-f_Q|\,\mathrm{d}y\\ &\le \frac{C_n 2^n|Q_j|}{\lambda}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f_Q|\,\mathrm{d}y\\ &\le \frac{C_n|Q_j|}{\lambda}f^\sharp(\xi_j),\quad \forall\xi_j\in Q_j.\end{aligned}$$

于是就成立

$$|\{x\in Q_j: M_d f(x)>2\lambda, f^\sharp(x)\le\gamma\lambda\}|\le\frac{C_n|Q_j|}{\lambda}(\gamma\lambda)=C_n\gamma|Q_j|.$$

证毕. □

2. Sharp极大定理

定理5 (Sharp极大定理). 设$0<p_0<\infty$, 则 $\forall p_0\le p<\infty$, 存在常数$C_{n,p}$使得对满足$M_d f\in L^{p_0}$ 的任意函数f都成立

$$\|M_d f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C_{n,p}\|f^\sharp\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

证明. 1. 对$N>0$, 定义积分

$$I_N=\int_0^N p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n: M_d f(x)>\lambda\}|\,\mathrm{d}\lambda.$$

由于$M_d f\in L^{p_0}$, I_N是有限的:

$$I_N \le \frac{pN^{p-p_0}}{p_0}\int_0^N p_0\lambda^{p_0-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda \le \frac{pN^{p-p_0}}{p_0}\left\|M_d f\right\|_{L^{p_0}}^{p_0}<\infty.$$

2. 注意我们可以改写I_N 为

$$I_N = 2^p\int_0^{\frac{N}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>2\lambda\}|\mathrm{d}\lambda.$$

由Good-lambda估计, 不难得到

$$\begin{aligned}
I_N &\le 2^p\int_0^{\frac{N}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>2\lambda, f^\sharp(x)\le\gamma\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\
&\quad +2^p\int_0^{\frac{N}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : f^\sharp(x)>\gamma\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\
&\le 2^pC_n\gamma\int_0^{\frac{N}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\
&\quad +2^p\int_0^{\frac{N}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : f^\sharp(x)>\gamma\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\
&\le 2^pC_n\gamma I_N+\frac{2^p}{\gamma^p}\int_0^{\frac{N\gamma}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : f^\sharp(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

取$\gamma=1/(C_n2^{p+1})$, 利用$I_N<\infty$, 就可以得到

$$I_N\le C_{n,p}\int_0^{\frac{NC_{n,p}}{2}} p\lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : f^\sharp(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda \le C_{n,p}\left\|f^\sharp\right\|_{L^p}^p.$$

于是若右边有限, 则让$N\to\infty$, 就得到

$$\left\|M_d f\right\|_{L^p}\le C_{n,p}\left\|f^\sharp\right\|_{L^p}.$$

证毕. □

最后注意到因为 $|f(x)|\le M_d f(x)$ *a.e.* 成立, 所以 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$ 就意味着 $\|f\|_{L^p}\le C_{n,p}\|M_d f\|_{L^p}\le C_{n,p}\|f^\sharp\|_{L^p}$.

习题 1. 设$f\in L^{p_0}\cap\mathrm{BMO}$, 则对任意$p\in[p_0,\infty)$, 成立$f\in L^p$ 且$\left\|f\right\|_{L^p}\le C_{n,p,p_0}\left\|f\right\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}\left\|f\right\|_{\mathrm{BMO}}^{\theta}$. 这里$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}$. □

证明. 由于$\left\|f^\sharp\right\|_{L^p}\le C_{n,p,p_0}\left\|f^\sharp\right\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}\left\|f^\sharp\right\|_{L^\infty}^{\theta}$, 左边利用Sharp极大定理, 右边第一项利用Sharp极大算子(p_0,p_0)型即可. □

四 L^p与BMO空间的算子内插定理

定理6 ((L^∞,*BMO*)算子内插定理). *若 T 是 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$ 和 (L^∞,BMO) 型的线性算子, 则 T 为 (q,q) 型 $(p\le q<\infty)$.*

证明. 定义 $T_1f=(Tf)^\sharp$. 注意 T_1 为次线性算子.

- T_1 是 (p,p) 型: 利用上一讲命题1就成立 $\|T_1f\|_{L^p}\le C_{n,p}\|M(Tf)\|_{L^p}\le C_{n,p}\|Tf\|_{L^p}\le C_{n,p}\|f\|_{L^p}$.
- T_1 是 (∞,∞) 型: 这是因为 $\|T_1f\|_{L^\infty}=\|Tf\|_{BMO}\le C\|f\|_{L^\infty}$.

由 Marcinkiewicz 插值定理 T_1 是 (q,q) 型 $(p\le q<\infty)$. 故根据Sharp极大定理, $\|Tf\|_{L^q}\le C\|(Tf)^\sharp\|_{L^q}=C\|T_1f\|_{L^q}\le\|f\|_{L^q}$. □

复习题

1. 设 $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n), 1 \le p_0 < \infty$, 对任意 f 作 C-Z 分解得到方体 $\{Q_k^\lambda\}$, 记 $t(\lambda) = \sum_k |Q_k^\lambda|$, 则对任意 $A > 0$, 成立:

$$t(\lambda) \le |\{x : f^\sharp(x) > \frac{\lambda}{A}\}| + \frac{2}{A} t(2^{-n-1}\lambda).$$

注. 利用$\lambda < \frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda} |f(x)| \mathrm{d}x \le \left(\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$, 对$f \in L^p$ 也可以做C-Z分解.

证明. 以 $\mu = 2^{-1-n}\lambda$ 作 C-Z 分解,得方体 $\{Q_j^\mu\}$. 注意任意一个Q_k^λ 必包含在某个 Q_j^μ 中. 对任意 $x \in \bigcup_k Q_k^\lambda$, 或者成立$f^\sharp(x) > \frac{\lambda}{A}$ (即被右端第一项控制), 或者 $x \notin \{x \in \bigcup_k Q_k^\lambda : f^\sharp(x) > \frac{\lambda}{A}\} \implies x \in \{x \in \bigcup_k Q_k^\lambda : f^\sharp(x) \le \frac{\lambda}{A}\}$. 我们下面就是要控制这部分的大小.

首先我们注意到$|f_{Q_j^\mu}| \le \frac{1}{|Q_j^\mu|}\int_{Q_j^\mu} |f(x)| \mathrm{d}x \le 2^n\mu = 2^n \cdot 2^{-1-n}\lambda = \frac{\lambda}{2}$. 由 $f^\sharp(x) \le \frac{\lambda}{A} \implies \frac{1}{|Q_j^\mu|}\int_{Q_j^\mu} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \le \frac{\lambda}{A}$. 此外,

$$\int_{Q_k^\lambda} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \ge \int_{Q_k^\lambda} |f(x)| \mathrm{d}x - \int_{Q_k^\lambda} |f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \ge \lambda |Q_k^\lambda| - \frac{\lambda}{2}|Q_k^\lambda| = \frac{\lambda}{2}|Q_k^\lambda|.$$

记 $\mathcal{A}_j = \left\{k : Q_k^\lambda \subset Q_j^\mu, \exists x \in Q_k^\lambda \text{ 使得 } f^\sharp(x) \le \frac{\lambda}{A}\right\}$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{A}_j} \frac{\lambda}{2}|Q_k^\lambda| &\le \sum_{k \in \mathcal{A}_j} \int_{Q_k^\lambda} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \\ &\le \int_{Q_j^\mu} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \le \frac{\lambda}{A}|Q_j^\mu|. \end{aligned}$$

$\implies \sum_{k \in \mathcal{A}_j} |Q_k^\lambda| \le \frac{2}{A}|Q_j^\mu|$. 对 j 求和,就有

$$\left|\left\{x \in \bigcup_k Q_k^\lambda : f^\sharp(x) \le \frac{\lambda}{A}\right\}\right| \le \sum_j \sum_{k \in \mathcal{A}_j} |Q_k^\lambda| \le \frac{2}{A}\sum_j |Q_j^\mu| = \frac{2}{A} t(\mu),$$

即得结果. □

第十五讲　Hardy 空间$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$

这一讲我们用"原子"分解及组合的现代观点来介绍Hardy的空间$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ 的定义及某些重要性质, 如作为度量空间的完备性, 算子的插值定理, 以及奇异积分算子的$(\mathcal{H}^1, L^1)$ 有界性. 最后, 我们证明$\mathcal{H}^1$的对偶空间就是BMO. 这就使得今后我们可以利用泛函分析中强大的对偶方法来研究BMO空间了.

一　Whitney 分解

我们先介绍如下把$\mathbb{R}^n$中真开子集恰当地分解为若干方体的 Whitney 分解定理. 它可以帮助我们把一个$\mathcal{H}^1$中的函数分解为"原子" 的线性组合.

定理1 (Whiteney 分解定理)**.** *设开集$U \subset \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^n \setminus U \neq \emptyset$,则存在可列个内部互不相交的二进(闭)方体$\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$满足(其中$l(Q)$是方体$Q$的边长):*

a) $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$;

b) $\forall k \in \mathbb{N}$,有 $\sqrt{n} l(Q_k) \le \operatorname{dist}(Q_k, F) \le 4\sqrt{n} l(Q_k)$;

c) 若两方体$Q_j \cap Q_k \neq \emptyset$, 则$\frac{1}{5} \le \frac{l(Q_j)}{l(Q_k)} \le 5$;

d) 对给定方体Q_j, 至多有15^n个方体Q_k与之相交.

证明. 1. 从原点出发, 将$\mathbb{R}^n$ 用边长为2^k $(k \in \mathbb{Z})$ 的二进方体覆盖. 记D_k为这种方体

$$\left\{(x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n) : m_j 2^{-k} \le x_j \le (m_j + 1)2^{-k}\right\} \quad (m_j \in \mathbb{Z})$$

的全体. 将每个这样的方体通过对等分各边就可以得到2^n个D_{k+1}中的方体.

2. 对任意整数k, 记$U_k = \{x \in U : 2\sqrt{n} 2^{-k} < \operatorname{dist}(x, F) \le 4\sqrt{n} 2^{-k}$, 那么$U = \cup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$. 现定义方体的集合

$$\mathcal{F}' = \{Q\text{是二进方体} : \text{存在整数}k \text{ 使得} Q \in D_k \text{ 且 } U_k \cap Q \neq \emptyset\},$$

则$\mathcal{F}'$中方体满足性质b).

事实上, 设$Q \in \mathcal{F}'$, 则$l(Q) = 2^{-k}$. 取$x \in Q \cap U_k$, 那么就成立

$$\sqrt{n} 2^{-k} \le \operatorname{dist}(x, F) - \sqrt{n} l(Q) \le \operatorname{dist}(Q, F) \le \operatorname{dist}(x, F) \le 4\sqrt{n} 2^{-k}.$$

这就是b).

3. 利用性质b), 可知$\cup_{Q \in \mathcal{F}'} Q \subset U$. 另一方面, 对任意$x \in U$, 必然存在$k$使得$x \in U_k$; 又一定存在$Q \in D_k$ 使得$x \in Q$. 于是成立$Q \in \mathcal{F}'$, 从而$U \subset \cup_{Q \in \mathcal{F}'} Q$. 这就证明了$\cup_{Q \in \mathcal{F}'} Q = U$.

注意任意两个不同的二进方体或者(内部)不相交, 或者一个包含在另外一个之中. 所以对任意给定的$Q \in \mathcal{F}'$, 存在唯一的极大方体$Q^* \in \mathcal{F}'$, 它包含Q (注意$l(Q^*) < \operatorname{dist}(Q, F) + l(Q) < \infty$). 记$\mathcal{F}$为$\mathcal{F}'$中方体对应的极大方体组成的集合, 则$\mathcal{F}$中任意两个不同的方体必然(内部)互不相交. 再利用上面所证, 不难得知$\cup_{Q \in \mathcal{F}} Q = U$. 这就证明了性质a). 由于$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, 所以性质b)也成立.

4. 设$Q_j, Q_k \in \mathcal{F}$互相接触, 那么注意到, 对$x \in Q_j \cap Q_k$, 成立$\operatorname{dist}(Q_j, F) \le \operatorname{dist}(x, F) \le \operatorname{diam}(Q_k) + \operatorname{dist}(Q_k, F)$, 那么

$$\sqrt{n} l(Q_j) \le \operatorname{dist}(Q_j, F) \le \sqrt{n} l(Q_k) + \operatorname{dist}(Q_k, F) \le \sqrt{n} l(Q_k) + 4\sqrt{n} l(Q_K) = 5\sqrt{n} l(Q_K).$$

利用Q_j,Q_k的对称性, 这就证明了c).

5. 最后, 注意到任意$Q\in D_k$必与3^n-1个D_k中其它方体与之相交(要考虑到两个方体共有顶点或棱, 面的情形. 这相当于将边长为Q三倍的方体边三等分, 则中间的小方体共有周围3^n-1个同边长方体与其相邻), 而每个$Q\in D_k$ 包含5^n 个边长为$l(Q)/5$ 的小方体, 从而利用c), 至多有$(3^n-1)5^n<15^n$ 个方体与Q 相交. □

由上述证明我们可以得到如下结果. 设$\mathcal{F}$为U的Whitney分解, 取定$0<\varepsilon<1/5$, 记$Q_k^*=(1+\varepsilon)Q_k$, 则Q_k与Q_j相接触当且仅当Q_k^*与Q_j相交. 由于U中每一点至少包含在一个方体Q_k中, 从而至多包含在15^n个Q_k^*之中.

二 $\mathcal{H}^1$空间的原子刻画

1. $(1,q)$原子与$H_1^{(q)}$ 空间的定义

定义1 ($(1,q)$原子). 设$1\le q\le\infty$, a是$\mathbb{R}^n$上的可测函数, 满足: 1) 支集条件: $\operatorname{supp} a\subset Q$; 2) 大小条件: $\|a\|_{L^q}\le|Q|^{\frac1q-1}$; 3)消失矩条件: $\int_Q a(x)\mathrm{d}x=0$, 则称$a(x)$是一个$(1,q)$原子.

利用Hölder不等式可知若$1\le r<q$,则$(1,q)$原子必为$(1,r)$原子. 此外还成立$\|a\|_{L^1}\le1$.

定义2 ($H_1^{(q)}$空间). 定义$H_1^{(q)}(\mathbb{R}^n)=\left\{f=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k: a_k\text{是}(1,q)\text{原子},\lambda_k\in\mathbb{C},\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|<\infty\right\}$, 其范数为

$$\|f\|_{H_1^{(q)}}=\inf\left\{\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|: f=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k, a_k\text{是}(1,q)\text{原子}\right\}.$$

不难验证这确实是个范数. 此外, $H_1^{(q)}$是连续嵌入到L^1的(注意这里等式$f=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k a_k$是在$L^1$意义下成立的).

定理2. $H_1^{(q)}(\mathbb{R}^n)$是Banach 空间.

证明. 1. 设$\{f_n\}$是$H_1^{(q)}$中的Cauchy列, 则可取子列$\{f_{n_k}\}$ 使得$f_{n_k}-f_{n_{k-1}}=\sum_{j=1}^\infty\lambda_j^{(k)}a_j^{(k)}$, 其中$\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j^{(k)}|\le\frac{1}{2^k}$. 利用$H_1^{(q)}\subset L^1$, 成立$\|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\|_{L^1}\le\frac{1}{2^k}$, 从而$\sum_k(f_{n_k}-f_{n_{k-1}})$在$L^1$中收敛. 由$L^1$的完备性可知存在$f\in L^1$使得$\sum_{k=1}^\infty(f_{n_k}-f_{n_{k-1}})=f-f_{n_0}$.

2. 下面证明$f\in H_1^{(q)}$. 事实上, 我们有分解$f-f_{n_0}=\sum_{k=1}^\infty(f_{n_k}-f_{n_{k-1}})=\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty\lambda_j^{(k)}a_j^{(k)}=\sum_{k=1}^\infty\mu_k b_k$ (级数绝对收敛, 从而可以重新排序), 这里$\mu_k\in\mathbb{C}$, b_k是$(1,q)$原子. 又因为$\sum_{j=k}^\infty|\mu_k|=\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j^{(k)}|\le\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}<\infty$, 所以根据定义, 就有$f=(f-f_{n_1})+f_{n_1}\in H_1^{(q)}$.

3. 最后证明按$H_1^{(q)}$范数成立$f_n\to f$ ($n\to\infty$ 时). 这是因为$\|f-f_{n_k}\|_{H_1^{(q)}}\le\sum_{i=k}^\infty\sum_{j=1}^\infty\lambda_j^{(i)}\le\sum_{i=k}^\infty\frac{1}{2^i}\le\frac{1}{2^{k-1}}$, 所以$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|_{H_1^{(q)}}=0$. 又因为$\{f_n\}$是$H_1^{(q)}$中的Cauchy列, 所以$\lim_{n\to\infty}f_n=f$. □

2. $H_1^{(q)}=H_1^{(\infty)}=\mathcal{H}^1$

下面的定理表明:$\forall 1<q\le\infty$, 空间$H_1^{(q)}$其实都是一样的. 这个空间就是Hardy空间$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

定理3. 对任意$1\le q\le\infty$, 都成立$H_1^{(q)}=H_1^{(\infty)}$, 即$\exists C_1,C_2$使得$\forall f\in H_1^{(q)}$, 成立$C_1\|f\|_{H_1^{(q)}}\le\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\le C_2\|f\|_{H_1^{(q)}}$.

证明. 1. 由于$(1,\infty)$原子一定是$(1,q)$原子, 所以按照定义, 由$f=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k\in H_1^{(\infty)}$可知$f\in H_1^{(q)}$, 即$H_1^{(\infty)}\subset H_1^{(q)}$. 再由定义, 显然成立

$$\begin{aligned}\|f\|_{H_1^{(q)}} &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| : f=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k, a_k\text{是}(1,q)\text{原子}\right\}\\ &\le \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| : f=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k, a_k\text{是}(1,\infty)\text{原子}\right\}=\|f\|_{H_1^{(\infty)}}.\end{aligned}$$

所以下面只需证明$H_1^{(q)}\subset H_1^{(\infty)}$及不等式$\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\le C_2\|f\|_{H_1^{(q)}}$.

这里证明的关键就是如何把一个$H_1^{(q)}$函数分解为$(1,\infty)$原子的和. 不失一般性, 下面仅对$q=2$给出证明. 一般情形只需对下面证明做适当修改即可.

2. 我们首先考虑如何把(1,2)原子分解为$(1,\infty)$原子的和. 设a是一个(1,2)原子, 且$\operatorname{supp} a\subset Q$. 记$M_2(f)(x)=(M(|f|^2)(x))^{\frac{1}{2}}$, 其中$M$为Hardy–Littlewood极大算子. 定义函数

$$b(x)=|Q|a(x).$$

它显然具有如下性质:

$$\|b\|_{L^2}^2\le|Q|,\quad \operatorname{supp}\, b\subset Q,\quad \int_Q b(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

3. $\forall\lambda>0$,记

$$U_\lambda=\{x:M_2(b)(x)>\lambda\}=\left\{x:M(|b|^2)(x)>\lambda^2\right\}.$$

这是一个开集. 当λ 充分大时, 有$U_\lambda\subset 2Q$. 事实上, 对任意$x\notin 2Q$, 因为

$$M(|b|^2)(x)=\sup_{x\in Q'}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|b(y)|^2\mathrm{d}y\le\frac{\|b\|_{L^2}^2}{|\operatorname{dist}(x,Q)|^n}\le\frac{|Q|}{(\sqrt{n}l(Q)/2)^n}=c_n^2,$$

所以若$\lambda>c_n$, 则必有$x\notin U_\lambda$.

4. 对U_λ应用 Whitney 分解定理, 得到$U_\lambda=\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j$, 且$\sqrt{n}l(Q_j)\le\operatorname{dist}(Q_j,U_\lambda^c)\le 4\sqrt{n}l(Q_j)$. 则$\operatorname{dist}(C_j,U_\lambda^c)\le(9/2)\sqrt{n}l(Q_j)$, ($C_j$是方体$Q_j$ 的中心,) 于是必有$(10Q_j)\cap(U_\lambda^c)\neq\emptyset$. 对$x\in(10Q_j)\cap(\mathbb{R}^n\setminus U_\lambda)$, 有$M(b^2)(x)\le\lambda^2$, 所以我们得到

$$\int_{Q_j}|b(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{10Q_j}|b(x)|^2\mathrm{d}x\le\lambda^2|10Q_j|\le c_n^2\lambda^2|Q_j|,$$

从而

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\le c_n\lambda. \tag{15.1}$$

5. 将b 关于$\{Q_j\}$ 做分解:

$$b(x)=g_0(x)+\sum_j h_j(x),$$

这里

$$\begin{aligned}g_0(x) &= b(x)\chi_{\mathbb{R}^n\setminus U_\lambda}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}b(x)\mathrm{d}x\right)\chi_{Q_j}(x),\\ h_j(x) &= \left(b(x)-\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}b(x)\mathrm{d}x\right)\chi_{Q_j}(x).\end{aligned}$$

从而利用Lebesgue微分定理和不等式(15.1)可得$|g_0(x)| \le c_n\lambda$. 又利用定义显然成立supp $g_0 \subset 2Q$, supp $h_j \subset Q_j$, 且$\int_{Q_j} h_j(x)\mathrm{d}x = 0$. 此外,

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|h_j(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le 2c_n\lambda.$$

最后, 利用$\int_{2Q} b(x)\mathrm{d}x = 0$以及$\int_{2Q} h_j(x)\mathrm{d}x = 0$, 就知道$\int_{2Q} g_0(x)\mathrm{d}x = 0$.

6. 令$b_j(x) = \frac{1}{2c_n\lambda}h_j(x)$, 则由上面的结论, $\forall j$, 成立如下性质:

$$\text{supp } b_j \subset Q_j, \quad \int_{Q_j} b_j(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \|b_j\|_{L^2}^2 \le |Q_j|.$$

所以b_j满足与b类似的条件. 对b_j进行与上述第3步到第5步类似的分解过程, 可归纳得到如下分解式:

$$\begin{aligned} b(x) \;=\; & g_0(x) + 2c_n\lambda g_{j_0}(x) + (2c_n\lambda)^2\sum_{j_0j_1} g_{j_0j_1}(x)\cdots + (2c_n\lambda)^k\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}} g_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}(x) \\ & +(2c_n\lambda)^{k+1}\sum_{j_0j_1\cdots j_k} h_{j_0j_1\cdots j_k}(x), \end{aligned}$$

这里supp $h_{j_0j_1\cdots j_k} \subset Q_{j_0j_1\cdots j_k}$, 且$j_k$不同时方体$Q_{j_0j_1\cdots j_k}$互不相交. 此外

$$\bigcup_{j_k} Q_{j_0j_1\cdots j_k} = \left\{x : M(|b_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}|^2)(x) > \lambda^2\right\},$$

$$\frac{1}{|Q_{j_0j_1\cdots j_k}|}\int_{Q_{j_0j_1\cdots j_k}} |h_{j_0j_1\cdots j_k}|^2\mathrm{d}x \le (2c_n\lambda)^2.$$

所以由H-L极大算子的弱(1,1)型可得:

$$\begin{aligned} & (2c_n\lambda)^{k+1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j_0j_1\cdots j_k}|h_{j_0j_1\cdots j_k}(x)|\mathrm{d}x \le (2c_n\lambda)^{k+1}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}j_k}|Q_{j_0j_1\cdots j_k}|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{Q_{j_0j_1\cdots j_k}}|h_{j_0j_1\cdots j_k}|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le\; & (2c_n\lambda)^{k+2}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}j_k}|Q_{j_0j_1\cdots j_k}| \le (2c_n\lambda)^{k+2}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}\left|\left\{x : M(|b_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}|^2)(x) > \lambda^2\right\}\right| \\ \le\; & (2c_n\lambda)^{k+2}\frac{c}{\lambda^2}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}\int_{\mathbb{R}^n}|b_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}(x)|^2\mathrm{d}x \le (2c_n\lambda)^{k+2}c\lambda^{-2}(2c_n\lambda)^{-2}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}\int_{\mathbb{R}^n}|h_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}(x)|^2\mathrm{d}x \\ =\; & (2c_n\lambda)^{k+1}c\lambda^{-2}(2c_n\lambda)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}|h_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}(x)|^2\mathrm{d}x \le \cdots \\ \le\; & (2c_n\lambda)^{k+1}(c\lambda^{-2})^k(2c_n\lambda)^{-k}\sum_{j_0}|Q_{j_0}| \le 2c_n|2Q|\lambda\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)^k. \end{aligned} \tag{15.2}$$

当$\lambda > \max\{1, c\}$时, 上式右端在$k \to \infty$时收敛到零. 这就是说, $(2c_n\lambda)^{k+1}\sum\limits_{j_0j_1\cdots j_k} h_{j_0j_1\cdots j_k}(x)$在$L^1$中收敛于0. 所以成立等式

$$b(x) = g_0(x) + 2c_n\lambda g_{j_0}(x) + (2c_n\lambda)^2\sum_{j_0j_1} g_{j_0j_1}(x)\cdots + (2c_n\lambda)^k\sum_{j_0j_1\cdots j_{k-1}} g_{j_0j_1\cdots j_{k-1}}(x) + \cdots$$

7. 由前面的分解, 可知成立如下事实: (1) supp $g_{j_0j_1\cdots j_k} \subset 2Q_{j_0j_1\cdots j_k}$; (2) $\int_{2Q_{j_0j_1\cdots j_k}} g_{j_0j_1\cdots j_k}\mathrm{d}x = 0$; (3) $|g_{j_0j_1\cdots j_k}| \le c_n\lambda$.

令$a_{j_0j_1\cdots j_k}(x)=\frac{1}{c_n\lambda}\frac{1}{|2Q_{j_0j_1\cdots j_k}|}g_{j_0j_1\cdots j_k}$. 因为$\|a_{j_0j_1\cdots j_k}\|_{L^\infty}\le|2Q_{j_0j_1\cdots j_k}|^{-1}$, 所以$a_{j_0j_1\cdots j_k}$是$(1,\infty)$原子. 由此我们还得到分解式

$$a(x)=\frac{c_n\lambda}{|Q|}\left\{|2Q|a_0+(2c_n\lambda)\sum_{j_0}|2Q_{j_0}|a_{j_0}+\cdots+(2c_n\lambda)^{k+1}\sum_{j_0j_1\cdots j_k}|2Q_{j_0j_1\cdots j_k}|a_{j_0j_1\cdots j_k}\right\}\triangleq\sum_k\lambda_ka_k.$$

注意到

$$\sum_k|\lambda_k|=\frac{2^nc_n\lambda}{|Q|}\left\{|Q|+(2c_n\lambda)\sum_{j_0}|Q_{j_0}|+\cdots+(2c_n\lambda)^{k+1}\sum_{j_0j_1\cdots j_k}|Q_{j_0j_1\cdots j_k}|\right\},$$

而在(15.2)中我们其实已经得到

$$\sum_{j_0j_1\cdots j_k}|Q_{j_0j_1\cdots j_k}|\le\frac{2^n|Q|}{2c_n\lambda}\left(\frac{c}{2c_n\lambda}\right)^k\lambda^{-2k}.$$

所以$\sum\limits_k|\lambda_k|\le 2^nc_n\lambda\left(1+2^n\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)^k\right)$. 取$\lambda$充分大就可使得$\sum\limits_k|\lambda_k|\le C_n<\infty$. 这就证明了$a\in H_1^{(\infty)}$且$\|a\|_{H_1^{(\infty)}}\le C_n$.

8. 最后证明对任意的$f\in H_1^{(2)}$, 有$f\in H_1^{(\infty)}$而且$\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\le C_n\|f\|_{H_1^{(2)}}$.

事实上, $\forall\epsilon>0$, 存在一族(1,2)原子$\{a_k\}$使得$f=\sum\limits_{k=1}^\infty\lambda_ka_k$, 且$\sum\limits_k|\lambda_k|\le\|f\|_{H_1^2}+\epsilon$. 因为$a_k=\sum_j\mu_jb_{jk}$, 其中$b_{jk}$是$(1,\infty)$原子, 而且$\sum_j|\mu_j|<C_n$, 所以$f$可表示为$(1,\infty)$原子的线性组合$\sum_{k,j}\lambda_k\mu_jb_{jk}$. 进一步, 还成立

$$\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\le\sum_{k,j}|\lambda_k||\mu_j|\le C_n\sum_k|\lambda_k|\le C_n(\|f\|_{H_1^{(2)}}+\epsilon)<\infty,$$

所以$H_1^{(2)}\subset H_1^{(\infty)}$. 由$\epsilon$的任意性即可推出所要证明的不等式. □

三 奇异积分算子的$(\mathcal{H}^1, L^1$型

定理4. 设T是由$C-Z$核K确定的奇异积分算子, 则$\exists C>0$使得$\forall f\in\mathcal{H}^1$, 成立$\|Tf\|_{L^1}\le C\|f\|_{H_1}$.

证明. 1. 设a是$(1,\infty)$原子, 则$a\in L^\infty\cap L^1$, 且Ta有定义. 由T是(2,2)型知存在与a无关的C使得$\|Ta\|_{L^2}\le C\|f\|_{L_2}$.

设supp $a\subset Q$. 记Q^*是以Q的中心C_Q为中心, 边长是Q的$2\sqrt{n}$倍的方体, 那么

$$\int_{Q^*}|T_a(x)|\mathrm{d}x\le\left(|Q^*|\int_{Q^*}|(Ta)(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\le C|Q|^{\frac12}\|a\|_{L^2}\le C.$$

又因为对$x\in\mathbb{R}^n\setminus Q^*$, $y\in Q$, 有$|x-C_Q|\ge\frac12 l(Q^*)=\sqrt{n}l(Q)\ge 2|y-C_Q|$, 所以根据Hörmander条件, 成立

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|K(x-y)-K(x-C_Q)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|K(x-C_Q-(y-C_Q))-K(x-C_Q)|\mathrm{d}x\\ &\le \int_{|x|\ge2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\le K_3,\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|Ta(x)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\left|\int_Q K(x-y)a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\left|\int_Q (K(x-y)-K(x-C_Q))a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\ &\le \int_Q\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|K(x-y)-K(x-C_Q)|\mathrm{d}x|a(y)|\mathrm{d}y\\ &\le K_3\int_Q|a(y)|\mathrm{d}y\le K_3.\end{aligned}$$

联合上面的两个估计式, 就证明了$\|Ta\|_{L^1}\le C$.

2. 现考虑一般情形. $\forall f\in\mathcal{H}^1$, $\forall\epsilon>0$, 我们有f的$(1,\infty)$原子分解式$f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k$, 且$\sum\limits_k|\lambda_k|\le\|f\|_{\mathcal{H}^1}+\epsilon$. 我们注意到和式$f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k$是在$L^1$意义下成立的, 所以利用$T$的弱$(1,1)$型, 我们可以建立点态意义下成立的等式

$$(Tf)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(Ta_k)(x),\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{15.3}$$

利用L^1范数的三角不等式, 就有

$$\|Tf\|_{L^1}\le\sum_k|\lambda_k|\|Ta_k\|_{L^1}\le C\sum_k|\lambda_k|\le C(\|f\|_{\mathcal{H}^1}+\epsilon),$$

由ϵ的任意性即可推出结论.

3. 下面证明(15.3). 对任意$\mu>0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|(Tf)(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(Ta_k)(x)\right|>\mu\right\}\right|\\ \le&\left|\left\{x:\left|(Tf)(x)-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(Ta_k)(x)\right|>\frac{\mu}{2}\right\}\right|+\left|\left\{x:\left|\sum_{k=N}^{\infty}\lambda_k(Ta_k)(x)\right|>\frac{\mu}{2}\right\}\right|\\ \le&\frac{\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}}{\mu/2}\left\|f-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k a_k\right\|_{L^1}+\left|\left\{x:\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k||(Ta_k)(x)|>\frac{\mu}{2}\right\}\right|\\ \le&C_\mu\left\|\sum_{k=N}^{\infty}\lambda_k a_k\right\|_{L^1}+\frac{1}{\mu/2}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k||(Ta_k)(x)|\mathrm{d}x=C'_\mu\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k|\to0\quad\text{当}\ N\to\infty\ \text{时}.\end{aligned}$$

这里利用了$\|a_k\|_{L^1}=1$以及Levi 引理. 于是(15.3)得证. □

四 $\mathcal{H}^1$和L^p 空间之间的算子插值

引理1. *设$f\in L^p$, $1<p<p_2\le\infty$, 则$\forall\alpha>0$,存在f的一个分解$f(x)=g(x)+b(x)$,使得$g\in L^{p_2}(R^n)$, $b\in\mathcal{H}^1(R^n)$, 且满足:*

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}\le C\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,\quad\|b\|_{\mathcal{H}^1}\le C\alpha^{1-p}\|f\|_p^p.$$

这里常数C与f及其分解无关.

证明. 1. 以下设f不是零函数. 对$|f|^p\in L^1$按高度α^p作C-Z分解, 我们有: (1) $\mathbb{R}^n=\Omega\cup F$, $\Omega\cap F=\emptyset$; (2) $\Omega=\bigcup\limits_j Q_j$, Q_j是互不相交的方体, 且满足$|\Omega|=\sum\limits_j|Q_j|\le\alpha^{-p}\|f\|_p^p$; (3) $\forall Q_j$,有$\alpha<\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le 2^{\frac{n}{p}}\alpha$; (4) 对几乎所有$x\in F$,有$f(x)\le C_n\alpha$. 我们取

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in F;\\ f_{Q_j}(x)=\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f(x)\mathrm{d}x, & x\in Q_j.\end{cases}\qquad b(x)=f(x)-g(x)=\sum_j(f(x)-f_{Q_j}(x))\chi_{Q_j}.$$

2. 利用Hölder不等式及上述性质, 就有

$$\sum_j|f_{Q_j}|^{p_2}|Q_j|\le\sum_j\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_2}{p}}|Q_j|\le\sum_j(2^{\frac{n}{p}}\alpha)^{p_2}|Q_j|\le 2^{\frac{np_2}{p}}\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,$$

所以

$$\begin{aligned}\|g\|_{p_2}^{p_2}&=\int_\Omega|g|^{p_2}\mathrm{d}x+\int_F|g|^{p_2}\mathrm{d}x\le\int_F|f|^p|f|^{p_2-p}\mathrm{d}x+\sum_j|f_{Q_j}|^{p_2}|Q_j|\\ &\le(C_n\alpha)^{p_2-p}\int_F|f|^p\mathrm{d}x+2^{\frac{np_2}{p}}\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p\le\alpha^{p_2-p}(2^{\frac{np_2}{p}}+C_n^{p_2-p})\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

3. 要证明$b\in\mathcal{H}^1$, 只需证明$a_j(x)=(2^{1+\frac{n}{p}}\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}(f(x)-f_{Q_j}(x))\chi_{Q_j}$是$(1,p)$原子. 事实上, 支集条件与消失矩条件是显然的, 而利用$(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$, 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|a_j(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&=(2^{1+\frac{n}{p}}\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f-f_{Q_j}|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le 2(2^{1+\frac{n}{p}}\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le 2(2^{1+\frac{n}{p}}\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}2^{\frac{n}{p}}\alpha\le|Q_j|^{-1},\end{aligned}$$

即大小条件也成立. 所以$b(x)=\sum\limits_j 2^{1+\frac{n}{p}}\alpha a_j(x)|Q_j|$, 且$\|b\|_{\mathcal{H}^1}\le\sum\limits_j 2^{1+\frac{n}{p}}\alpha|Q_j|\le C_{n,p}\alpha^{1-p}\|f\|_p^p$. □

定理5. 设$1<p_2<\infty$, T是$\mathbb{R}^n$上可测函数类上的次线性算子. 若T是弱(p_1,p_1)型, 又是弱$(\mathcal{H}^1,L^1)$型(即从$\mathcal{H}^1$到$L^{1,\infty}$连续), 则$\forall 1<p<p_2$, T是(p,p)型.

证明. 对$f\in L^p$, $1<p<p_1\le\infty$, 由引理1得分解$f(x)=g(x)+b(x)$, 其中$g\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $b\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. 由$T$的次线性可得$|(Tf)(x)|\le|(Tg)(x)|+|(Tb)(x)|$. 因为

$$\begin{aligned}|\{x:|(Tf)(x)|>\alpha\}|&\le|\{x:|(Tg)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}|+|\{x:|(Tb)(x)|>\frac{\alpha}{2}\}|\\ &\le C_1\frac{\|g\|_{p_1}^{p_1}}{(\frac{\alpha}{2})^{p_1}}+C_2\frac{\|b\|_{\mathcal{H}^1}}{\frac{\alpha}{2}}\le C\frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p},\end{aligned}$$

所以$\forall 1<p<p_2$, T是弱(p,p)型. 由Marcinkiewicz插值定理就知道T是(p',p')型, 其中$p<p'<p_1$. 由于p可以任意接近1, 所以$p'\in(1,p_1)$. □

五 BMO是$\mathcal{H}^1$的对偶空间

定理6. $(\mathcal{H}^1)^* = \mathrm{BMO}$ (即存在一个从$(\mathcal{H}^1)^*$到BMO的连续线性双射).

证明. 1. 先证明$\mathrm{BMO} \hookrightarrow (\mathcal{H}^1)^* = (H_1^{(q)})^*$, 其中$1 < q < \infty$. 基本思想是借助$\varphi \in \mathrm{BMO}$及$\mathcal{H}^1$的一个稠密子空间来构造$\mathcal{H}^1$上的一个有界线性泛函.

记

$$W = \{f \in H_1^{(q)} : f \text{ 是 } (1,q)\text{原子的有限线性组合}\}.$$

从定义不难知道W中函数具有紧支集, 且W 是$\mathcal{H}^1$ 的稠密子空间.

对任意给定的$\varphi \in \mathrm{BMO}$, 构造W上的连续线性泛函

$$\langle \varphi, f\rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \mathrm{d}x, \quad \forall f \in W. \tag{15.4}$$

这个定义是合理的. 事实上, 假设a是一个$(1,q)$原子, $\mathrm{supp}\ a \subset Q$. 记$a_Q$ 为a在Q上的积分平均值, 则利用原子的消失性条件, $a_Q = 0$. 计算就得到

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, a\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} a\varphi \mathrm{d}x\right| = \left|\int_Q a\varphi \mathrm{d}x\right| = \left|\int_Q (a - a_Q)\varphi \mathrm{d}x\right| = \left|\int_Q (\varphi - \varphi_Q) a \mathrm{d}x\right| \\
&\le |Q|^{1-\frac{1}{q}} \|a\|_{L^q} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\varphi - \varphi_Q|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}} \le C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}$$

对$f \in W$, $f = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k a_k$, 其中$a_k$是$(1,q)$原子, 从而

$$|\langle \varphi, f\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} a_k \varphi \mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

所以积分仍有意义. 但是由于$\sum_{k=1}^N |\lambda_k|$未必可被$\|f\|_{\mathcal{H}^1}$控制, 还得不到

$$|\langle \varphi, f\rangle| \le C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \|f\|_{\mathcal{H}^1}, \quad \forall f \in W. \tag{15.5}$$

否则, 线性泛函$\langle \varphi, \cdot\rangle$在$W$上连续. 通过$W$的稠密性, 此泛函可以唯一地延拓为$\mathcal{H}^1$上的连续线性泛函$\ell_\varphi$, 且$\|\ell_\varphi\| \le C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}$. 这就可以证明在映射$\varphi \mapsto \ell_\varphi$意义下成立$\mathrm{BMO} \hookrightarrow (\mathcal{H}^1)^*$.

2. 为此, 我们注意到当$\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$时, (15.4)对于$f \in \mathcal{H}^1 \subset L^1$仍有定义. 现在设$\varphi \in L^\infty \subset \mathrm{BMO}$, 对任意$f = \sum_k \lambda_k a_k \in \mathcal{H}^1$ (a_k是原子, 支集在Q_k上)且$\sum_k |\lambda_k| \le 2\|f\|_{\mathcal{H}^1}$, 注意到$\sum_k \lambda_k a_k$在$L^1$中收敛到$f$, 就成立

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, f\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_{Q_k} a_k(x)\big(\varphi(x) - \varphi_{Q_k}\big)\mathrm{d}x\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \left|\int_{Q_k} a_k(x)\big(\varphi(x) - \varphi_{Q_k}\big)\mathrm{d}x\right| \le 2C\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}$$

所以此时(15.5)成立.

3. 对$\varphi \in \mathrm{BMO}$, 记$\varphi_m = \varphi\chi_{|b| \le m} \in L^\infty$ (这里$m = 1, 2, 3, \cdots$), 则由BMO函数的性质,

$$\|\varphi_m\|_{\mathrm{BMO}} \le 3\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

又对于任意$f\in W$, 根据了Lebesgue控制收敛定理, 成立

$$\lim_{m'\to\infty}\langle\varphi_{m'},f\rangle=\langle\varphi,f\rangle.$$

这是因为, 若f是一个原子, 则$\varphi_{m'}f$几乎处处收敛到φf, 且$|\varphi_{m'}f|\le|\varphi f|$, 而$f\in L^2$有紧支集, φ局部平方可积, 从而φf在$\operatorname{supp}f$上可积. 于是

$$|\langle\varphi,f\rangle|\le\limsup_{m'\to\infty}|\langle\varphi_{m'},f\rangle|\le 2C\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|\varphi_{m'}\|_{\mathrm{BMO}}\le C\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

这就对一般情形证明了(15.5).

4. 反之, 下面我们要证明对任意给定的$\ell\in(\mathcal{H}^1)^*$, 存在唯一的$\varphi\in\mathrm{BMO}$, 使得$\ell_\varphi=\ell$. 思路仍是取适当测试函数空间使得ℓ显出原形.

为此, 任取方体I, 记

$$L_0^q(I)=\left\{f\in L^q(I):\int_I f\,\mathrm{d}x=0\right\}.$$

对任意$f\in L_0^q(I)$, 令$a(x)=\|f\|_q^{-1}|I|^{\frac{1}{q}-1}f(x)\chi_I(x)$, 则$a$是$(1,q)$原子. 显然$a\in H_1^{(q)}$, 而且$\|a\|_{H_1^{(q)}}\le 1$.

因为$\ell\in(H_1^{(q)})^*$, 所以可定义诱导映射

$$\tilde{l}_I(f)=\|f\|_q|I|^{1-\frac{1}{q}}\ell(a). \tag{15.6}$$

利用ℓ的线性, 不难验证这是$L^q(I)$上的连续线性映射. 特别地, 成立

$$|\tilde{l}_I(f)|\le\|\ell\||I|^{1-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q}.$$

由Riesz表示定理可知存在$g^{(I)}\in L^{q'}(I)$, 使得

$$\tilde{l}_I(f)=\int_I fg^{(I)}\mathrm{d}x. \tag{15.7}$$

5. 函数$g^{(I)}$在相差一个常数的意义下是唯一的. 事实上, 若有两个这样的函数, 记它们的差为h, 则对于任意$f\in L^q(I)$, 由于$f-f_I\in L_0^q$, 就成立$0=\int_I(f-f_I)h\,\mathrm{d}x=\int_I f(h-h_I)\,\mathrm{d}x$, 所以$h=h_I$就是个常数.

6. 重复上述第二步, 则可对满足$I_k\subset I_{k+1}$且$\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_k I_k$的一个方体族$\{I_k\}_k$, 得到一族相应的函数$\{g^{(I_k)}\}_k$, 使得$g^{(I_k)}$与$g^{(I_{k+1})}$只相差一个常数. 于是可定义函数$\varphi$使得$\varphi|_{I_k}=g^{(I_k)}$.

7. 现对于$\mathbb{R}^n$中任意方体I, 存在m使得$I\subset I_{m+1}$. 此外, $\forall f\in L^q(I)$, 成立

$$\left|\int_I(\varphi-\varphi_I)f\mathrm{d}x\right|=\left|\int_I(f-f_I)\varphi\mathrm{d}x\right|=\left|\tilde{l}_I(f-f_I)\right|\le\|l\||I|^{1-\frac{1}{q}}\|f-f_I\|_{L^q}\le 2|I|^{1-\frac{1}{q}}\|l\|\|f\|_{L^q}.$$

于是

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I(\varphi-\varphi_I)^{q'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}}=\sup_{\|f\|_{L^q}=1}|I|^{-(1-\frac{1}{q})}\left|\int_I(\varphi-\varphi_I)f\mathrm{d}x\right|\le 2\|l\|.$$

由于右端与I的选取无关, 可知$\varphi\in\mathrm{BMO}$, 且$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}\le 2\|l\|$.

8. 对任意的$(1,q)$原子a, 若$\operatorname{supp}a\in I$, 则显然$a\in L_0^q(I)$, 而且根据(15.6)和(15.7), 成立$\ell(a)=\int_I a\varphi\mathrm{d}x=\langle\varphi,a\rangle$. 由此不难推得若$f\in W$, 则依然成立$\ell(f)=\langle\varphi,f\rangle$. 这就证明了$\ell=\ell_\varphi$.

9. 最后说明对给定$\ell\in(\mathcal{H}^1)^*$, 上述φ的唯一性. 事实上, 若有$\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{BMO}$使得$\ell_{\varphi_1}=\ell_{\varphi_2}=\ell$, 则$\forall(1,q)$原子$a$, 成立$\langle\varphi_1-\varphi_2,a\rangle=0$. 利用第3步方法, 就可以证明在$\operatorname{supp}a$上$\varphi_1-\varphi_2$是常数. 利用$a$的任意性, 取原子$a_k$使得其支集满足第4步要求的$I_k$, 就可以证明在全空间$\varphi_1$和$\varphi_2$都只相差一个常数. 所以在BMO意义下$\varphi_1=\varphi_2$.

这样我们就证明了$\varphi\mapsto\ell_\varphi$是BMO与$(\mathcal{H}^1)^*$之间的线性的连续的同构. 定理证毕. □

最后我们特别注意, BMO和$\mathcal{H}^1$都不是自反空间, 所以$\mathrm{BMO}^*\ne\mathcal{H}^1$.

第十六讲　非卷积型奇异积分算子(一): Calderón–Zygmund 算子及其有界性

这一讲我们介绍非卷积型奇异积分算子的定义及其在L^p等基本函数空间上的有界性. 与卷积型奇异积分算子类似, 核心任务是尽可能通过积分来表示抽象的算子, 并通过积分核的相对简单的代数或函数性质来刻画算子的有界性等更复杂的性质. 与卷积型奇异积分算子的最大不同是, 由于不能用Fourier变换, 证明非卷积型奇异积分算子的L^2 有界性要困难得多. 所以在第十八讲至二十一讲, 我们将证明$T(1)$定理, 它给出了一类非卷积型奇异积分算子L^2有界的充分条件.

一　标准核与算子的Schwartz核

1. 标准核

定义1. *设$K(x,y)$ 是定义在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Lambda$ 上的局部可积函数, 其中$\Lambda=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}^n\}$. 若$K$ 满足以下条件:*

a) 奇性强度条件: 存在$A>0$使得

$$|K(x,y)|\le\frac{A}{|x-y|^n};\tag{16.1}$$

b) 正则性条件: 存在$\delta>0$使得当$|x-x'|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x'-y|)$ 时成立

$$|K(x,y)-K(x',y)|\le\frac{A|x-x'|^\delta}{(|x-y|+|x'-y|)^{n+\delta}},\tag{16.2}$$

当$|y-y'|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x-y'|)$ 时成立

$$|K(x,y)-K(x,y')|\le\frac{A|y-y'|^\delta}{(|x-y|+|x-y'|)^{n+\delta}},\tag{16.3}$$

*则称K 是具有常数δ,A的***标准核***. 所有具有常数δ,A 的标准核的集合记作$SK(\delta,A)$.*

设$K(x,y)\in SK(\delta,A)$, 则显然

$$K^t(x,y):=K(y,x)\in SK(\delta,A),\quad K^*(x,y):=\overline{K(y,x)}\in SK(\delta,A).$$

例1. 若$|x-x'|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x'-y|)$, 则

$$\max(|x-y|,|x'-y|)\le 2\min(|x-y|,|x'-y|).$$

证明. 由x 和x' 的对称性，不妨设$|x-y|\le|x'-y|$, 于是只需证明$|x'-y|\le 2|x-y|$. 由题设知$|x-x'|\le\frac{1}{2}|x'-y|$, 于是有

$$|x'-y|\le|x-x'|+|x-y|\le\frac{1}{2}|x'-y|+|x-y|$$

移项即得$|x'-y|\le 2|x-y|$. □

例2. 设$K(x,y)=|x-y|^{-n}(x\ne y)$, 则$K(x,y)\in SK(1,n4^{n+1})$.

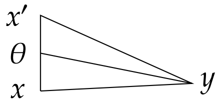

图 16.1

证明. $K(x,y)$ 显然满足奇性强度条件 (16.1). 由对称性, 我们只需证明$K(x,y)$ 满足正则性条件 (16.2).

1. 当$|x-x'| \le \frac{1}{2}\max(|x-y|,|x'-y|)$ 时, 由中值定理我们有

$$|K(x,y)-K(x',y)| = \frac{n}{|\theta-y|^{n+1}}|x-x'|, \tag{16.4}$$

其中$\theta = tx+(1-t)x', t\in(0,1)$. 我们断言成立

$$|\theta-y| \ge \frac{1}{2}\max(|x'-y|,|x-y|). \tag{16.5}$$

由此,

$$|\theta-y| \ge \frac{1}{4}(|x-y|+|x'-y|),$$

带入(16.4) 立得

$$|K(x,y)-K(x',y)| \le n4^{n+1}\frac{|x-x'|}{(|x-y|+|x'-y|)^{n+1}},$$

即$K(x,y)\in SK(1,n4^{n+1})$.

2. 下面证明断言(16.5). 如图16.1, 分别记$\angle x'xy, \angle xx'y, \angle x'yx$ 为α,β,γ. 不妨设$|x-y|\le|x'-y|$, 因此只需证明$|\theta-y|\ge\frac{1}{2}|x'-y|$. 由假设$|x-x'|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x'-y|)$ 有$|x-x'|\le\frac{1}{2}|x'-y|$, 又由例1可知有$|x-y|\le|x'-y|\le 2|x-y|$. 于是得到$|x-x'|\le|x-y|\le|x'-y|$, 故有$\alpha\ge\beta\ge\gamma$. 再看三角形$x'\theta y$. 我们注意到$\beta\ge\gamma\ge\angle x'y\theta$, 即有$|\theta-y|\ge|\theta-x'|$. 于是有$2|\theta-y|\ge|\theta-y|+|\theta-x'|\ge|x'-y|$, 即$|\theta-y|\ge\frac{1}{2}|x'-y|$. 断言得证. □

例3. *若$K(x,y)$ 满足*

$$|\nabla_x K(x,y)| \le \frac{A'}{|x-y|^{n+1}}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ x\ne y,$$

则$K(x,y)$ 满足正则性条件 (16.2).

证明. 由中值定理知成立

$$|K(x,y)-K(x',y)| \le A'\frac{|x-x'|}{|\theta-y|^{n+1}},$$

其中$\theta = tx'+(1-t)x, t\in(0,1)$. 由例2的证明过程可知我们有

$$|K(x,y)-K(x',y)| \le A'4^{n+1}\frac{|x-x'|}{(|x-y|+|x'-y|)^{n+1}},$$

于是$K(x,y)$ 满足正则性条件 (16.2). □

例4. *设A 为$\mathbb{R}$ 上的Lipschitz 函数, $|A(x)-A(y)|\le L|x-y|$. 定义*

$$K(x,y) = \frac{1}{(x-y)+i\big(A(x)-A(y)\big)}$$

则通过估计∇K, 不难验证$K\in SK(1,4+4L)$.

例5. 设A 满足上例中的条件, 对任意的整数$m\geq 1$, 定义m 阶*Calderón-Zygmund* 交换子

$$K_m(x,y)=\frac{1}{\pi i}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m\frac{1}{x-y},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

通过计算∇K_m, 不难验证$K_m\in SK(1,4(2m+1)L^m)$.

2. 标准核延拓的广义函数

定义2. 设$W\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 若$W|_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Lambda}=K(x,y)\in SK(\delta,A)$, 则称$W$ 为K 延拓得到的广义函数.

我们注意并不是所有的标准核都可以延拓为广义函数, 例如$\frac{1}{|x-y|^n}$就不行. 此外, 同一标准核有可能延拓为不同的广义函数W, 事实上, 若W 为K 延拓的广义函数, 那么$W+\delta_{\{x=y\}}$ 也是K 延拓的广义函数.

例6. 设$K(x,y)$ 满足奇性强度条件 (16.1) 和正则性条件 (16.2) , 且具有反对称性, 即

$$K(x,y)=-K(y,x)\quad\forall x\neq y,x,y\in\mathbb{R}^n.$$

则K 也满足条件 (16.3), 且可延拓为$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的广义函数.

证明. 由反对称性K 显然满足条件 (16.3). 下证其可延拓为$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的缓增广义函数.

1. 定义

$$\langle W,F\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\quad\forall F\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n).\tag{16.6}$$

下面说明上述极限存在. 我们只需证明$I=\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}K(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 存在. 由于

$$I=\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}K(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\iint_{\varepsilon<|y-x|\leq 1}K(y,x)F(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}K(x,y)F(y,x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

即有

$$I=\frac{1}{2}\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}K(x,y)\big(F(x,y)-F(y,x)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

2. 令

$$f(x,y)=(1+|x|^2+|y|^2)^{n+1}F(x,y),$$

则有

$$|f(x,y)-f(y,x)|=(1+|x|^2+|y|^2)^{n+1}\left|F(x,y)-F(y,x)\right|.$$

另一方面, 由中值定理及F速降的性质,

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(y,x)|&=|\nabla_{x,y}f(\xi,\eta)\cdot(x-y,y-x)|\\&\leq 2\|\nabla f\|_{L^\infty}|x-y|\\&\leq 2|x-y|\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left|\nabla\left[\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{n+1}F(x,y)\right]\right|\\&\leq C_n|x-y|.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}I&\leq C_n\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}\frac{K(x,y)|x-y|}{\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&\leq C_nA\iint_{\varepsilon<|x-y|\leq 1}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{1}{\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此知积分I 存在, 即(16.6)有意义.

3. 利用上面分析方法, 不难验证 (16.6) 确实给定了一个$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 中的广义函数(从而当然是$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$中广义函数). □

3. 算子的Schwartz 核

考虑连续线性算子$T:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 由Schwartz 核定理, 存在唯一的广义函数$W\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\langle T(f),\varphi\rangle=\langle W,f\otimes\varphi\rangle\quad\forall f,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\tag{16.7}$$

其中$(f\otimes\varphi)(x,y)=f(x)\varphi(y)$. 我们称广义函数$W$ 是算子T的Schwartz核.

我们主要研究这样的连续线性算子$T:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 其Schwartz 核在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Lambda$ 上的限制$K(x,y)\in SK(\delta,A)$. 这意味着式 (16.7) 有如下积分表示

$$\langle T(f),\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}k(x,y)f(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$f,g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 且满足$\operatorname{supp}(f)\cap\operatorname{supp}(g)=\emptyset$.

二 Calderón–Zygmund 算子

定义3. *设$T:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续线性算子. 称T 是Calderón–Zygmund 算子, 若*

a) T 可以延拓为$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界算子: $\|Tf\|_{L^2}\le B\|f\|_{L^2}$;

b) 存在$0<\delta,A<\infty$ 以及$K\in SK(\delta,A)$, 使得对任意$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$T(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,\quad a.e.\,x\notin\operatorname{supp}(f).$$

此时记为$T\in CZO(\delta,A,B)$, 并称K是T所关联的标准核.

习题 1. *若T 是与K 关联的算子, 则T 的Schwartz 核W 在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Lambda$ 上等于K.* □

例7. *$0\in SK(\delta,A)$, 与$K(x,y)=0$ 关联的算子有零算子0 以及恒等算子I.*

命题1. *设$T\in CZO(\delta,A,B)$ 是与$K\in SK(\delta,A)$ 关联的算子. 则对任意$f\in L_c^\infty$(即$f\in L^\infty$, 且f 具有紧支集) 以及几乎所有的$x\notin\operatorname{supp}(f)$, 成立如下积分表示*

$$T(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\tag{16.8}$$

证明. 1. 易知式 (16.8) 绝对收敛. 这是因为我们有

$$|K(x,y)f(y)|\le Ad_x^{-n}|f(y)|,\quad \text{其中}d_x=\operatorname{dist}(x,\operatorname{supp}(f)).$$

2. 设$f,\varphi\in L_c^\infty, d=\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f),\operatorname{supp}(\varphi))>0$. 则若

$$\int_{\mathbb{R}^n}T(f)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\tag{16.9}$$

利用φ的任意性就可得到 (16.8).

3. 下证 (16.9). 对给定的$f,\varphi\in L_c^\infty$, 取$f_j,\varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 分别支撑在$f,\varphi$ 的支集的小邻域上. 它们一致有界且$f_j\xrightarrow{L^2}f,\varphi_j\xrightarrow{L^2}\varphi$,

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f_j),\operatorname{supp}(\varphi_j))\geq\frac{d}{2}>0,\quad\forall\, j\geq 0.$$

显然式 (16.9) 对f_j,φ_j 成立, 即有

$$\int_{\mathbb{R}^n}T(f_j)(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f_j(y)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

由T 的L^2有界性可知$T(f_j)\xrightarrow{L^2}T(f)$, 进而

$$\int_{\mathbb{R}^n}T(f_j)(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^n}T(f)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\Big(f(y)\varphi(x)-f_j(y)\varphi_j(x)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\Big(\varphi(x)-\varphi_j(x)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\varphi_j(x)\Big(f(y)-f_j(y)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\=&I_1+I_2\end{aligned}$$

再由$\Big|K(x,y)f(y)\Big(\varphi(x)-\varphi_j(x)\Big)\Big|\leq C_NAd^{-n}|f||\varphi|$, 利用控制收敛定理可知$I_1\to 0(j\to\infty)$. 同样地, 我们也有$I_2\to 0(j\to\infty)$. 于是式 (16.9)得证. □

三 Calderón–Zygmund 算子在$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上作用的定义

由于$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$在$L^\infty(\mathbb{R}^n)$中不稠密, 所以不能简单地通过算子保范延拓来定义奇异积分算子在$L^\infty(\mathbb{R}^n)$上的作用. 为了给出Calderón–Zygmund 算子在$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上作用的恰当定义, 我们定义函数空间

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n):\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=0\right\},$$

并赋予其与$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 一样的拓扑. 记$\mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$ 为$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ 上连续线性泛函全体. 注意成立$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$.

例8. $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$.

证明. 取定$b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 定义$\ell(\varphi)\triangleq\int_{\mathbb{R}^n}b(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. 将$b$ 换为$b+c,c$ 为常数, 上式右端积分不变, 所以定义合理. 只需再证明$\ell(\cdot)$ 定义了$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性泛函. 线性是显然的. 下面说明其连续性. 注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}b(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}(b-b_Q)\varphi(x)\,\mathrm{d}x|Q|\right|\\&\leq\|\varphi\|_{L^\infty}|Q|\|b\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

设$\varphi_k \to \varphi(\text{ in } \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n))$, 即$\exists K \subset\subset \mathbb{R}^n$ 为方体, $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset K, \forall k$, 且$\varphi_k$及其任意阶导数都在$K$上一致收敛到$\varphi$及其相应导数. 现要证$\ell(\varphi_k) \to \ell(\varphi)$. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} b(\varphi_k - \varphi)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_K |b - b_K|\,\mathrm{d}x \|\varphi_k - \varphi\|_{L^\infty}\\ &\le |K|\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|\varphi_k - \varphi\|_{L^\infty} \to 0 (k \to \infty).\end{aligned}$$

证毕. □

定义4. 设$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是连续线性算子, 其*Schwartz* 核为W, 且$W|_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Lambda} = K(x,y) \in SK(\delta,A)$. 对$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义$T(f) \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$ 如下: $\forall\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, 设$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq B(x_0,R)$. 取$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \eta \le 1$, 且$\eta|_{B(x_0,2R)} \equiv 1$. 定义

$$\langle T(f),\varphi\rangle = \langle T(f\eta),\varphi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x f(y)\big(1-\eta(y)\big)\,\mathrm{d}y. \tag{16.10}$$

为说明该定义是合理的, 必须说明:

- (16.10)右端有意义;
- 右端与η 选取无关;
- 若$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 则此定义与以前定义相同.

下面我们逐项说明.

1. 由$f \in L^\infty \cap C^\infty$ 知$f\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. 又$T$ 是从$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 到$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的连续线性算子, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 故$\langle T(f\eta),\varphi\rangle$ 有意义. 再说明积分$I = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x f(y)\big(1-\eta(y)\big)\,\mathrm{d}y$ 收敛.

注意当$y \in \mathrm{supp}(f(1-\eta))$ 时, $|x_0 - y| \ge 2R \ge 2|x - x_0|$, 故利用消失性和正则性条件,

$$\begin{aligned}
|I| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\big(1-\eta(y)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n}\big(K(x,y)-K(x_0,y)\big)f(y)\big(1-\eta(y)\big)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y-x_0|\ge 2|x-x_0|}|K(x,y)-K(x_0,y)||f(y)|\big(1-\eta(y)\big)\,\mathrm{d}y|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y-x_0|\ge 2|x-x_0|} A\frac{|x-x_0|^\delta}{|x_0-y|^{n+\delta}}\cdot 2|f(y)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\le 2A\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^\delta|\varphi(x)|\int_{|y-x_0|\ge 2|x-x_0|}\frac{1}{|x_0-y|^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\le C_{A,n}\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^\delta|\varphi(x)|\left(\int_{2|x-x_0|}^\infty r^{-n-\delta+n-1}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}x\\
&= C_{A,n}\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^\delta|\varphi(x)|\left(\frac{1}{-\delta}r^{-\delta}\Big|_{2|x-x_0|}^\infty\right)\mathrm{d}x\\
&= C_{A,n,\delta}\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^\delta|\varphi(x)||x-x_0|^{-\delta}\,\mathrm{d}x\\
&\le C_{A,n,\delta}\|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1},
\end{aligned}$$

即 (16.10) 右端有意义. 这种估计将在下面经常出现.

2. 另取$\xi \in C_0^\infty, \xi|_{B(x_0,2R)} \equiv 1, 0 \le \xi \le 1$. 则$\varphi$与$f(\eta-\xi)$的支集互不相交, 根据命题1, 就成立

$$\left\langle T\left(f(\eta-\xi)\right), \varphi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)(\eta-\xi)(y)\,\mathrm{d}y\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边移项, 即得(16.10) 右端无论取η还是ξ都是一样的, 与选取无关.

3. 当$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 时, 则$f\eta, f(1-\eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 故有

$$\langle T(f), \varphi\rangle = \langle T(\eta f), \varphi\rangle + \langle T(f(1-\eta)), \varphi\rangle.$$

右端第二项利用命题1可由积分表示, 即知$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 时这里的定义与原定义一致.

最后, 我们注意到, 若T 可延拓为L^2 到自身的有界算子, 则由命题1, 对任意$f \in L^\infty$ 均可定义

$$\langle T(f), \varphi\rangle = \langle T(\eta f), \varphi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x f(y)\left(1-\eta(y)\right)\mathrm{d}y.$$

而且有估计式

$$\left|\langle T(f), \varphi\rangle\right| \le \|T(\eta f)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + C_{\delta,A,n}\|\varphi\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty} < \infty.$$

这是我们下面就要用的结果.

四 Calderón–Zygmund 算子的有界性

定理1. *设$K(x,y) \in SK(\delta, A)$, T 是关联$K(x,y)$ 的Calderón-Zygmund 算子, 满足$\|T\|_{L^2\to L^2} \le B$ (即$T \in CZO(\delta, A, B)$). 则*

(1) T 可延拓为$L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 的连续线性算子,

$$\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \le C_{n,\delta}(A+B); \tag{16.11}$$

(2) T 为(p,p) 型$(1<p<\infty)$,

$$\|T\|_{L^p\to L^p} \le C_{n,\delta}\max\left\{\frac{1}{p-1}, p\right\}(A+B); \tag{16.12}$$

(3) T 为$(\mathcal{H}^1, L^1)$ 型,

$$\|T\|_{\mathcal{H}^1\to L^1} \le C_{n,\delta}(A+B); \tag{16.13}$$

(4) T 为(L^∞, BMO) 型,

$$\|T\|_{L^\infty\to \mathrm{BMO}} \le C'_{n,\delta}(A+B). \tag{16.14}$$

弱(1,1)型的证明

我们用第九讲介绍过的BCP 原理.

现设$f(x) \in L^\infty$ 且具有紧支集, $\mathrm{supp} f \subset B(x_0, r)$, 且$\int f = 0$. 若$x \notin B(x_0, c_2 r)(c_2 > 1)$, 那么由前面命题1证明的积分表示,

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{B(x_0,r)} K(x,y) f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{B(x_0,r)} (K(x,y) - K(x,x_0)) f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,c_2r)^c}|Tf(x)|\mathrm{d}x &\le \int_{B(x_0,c_2r)^c}\int_{B(x_0,r)}|K(x,y)-K(x,x_0)||f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \int_{B(x_0,r)}|f(y)|\left(\int_{B(x_0,c_2r)^c}|K(x,y)-K(x,x_0)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&\le \int_{B(x_0,r)}|f(y)|\left(\int_{B(x_0,c_2r)^c}\frac{A|y-x_0|^\delta}{(|x-y|+|x-x_0|)^{n+\delta}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&\quad (\text{当}|y-x_0|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x-x_0|)\text{ 时, 上面不等式成立. 事实上,}\\
&\quad \text{取}c_2=2,\text{则有}|y-x_0|\le r\le\frac{1}{2}|x-x_0|\le\frac{1}{2}\max(|x-x_0|,|x-y|))\\
&\le A\int_{B(x_0,r)}|f(y)||y-x_0|^\delta\left(\int_{B(x_0,c_2r)^c}(|x-x_0|)^{-n-\delta}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&= A\int_{B(x_0,r)}|f(y)||y-x_0|^\delta\left(\omega_n\int_{2r}^\infty s^{-n-\delta}s^{n-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\\
&\le A\int_{B(x_0,r)}|f(y)|r^\delta\frac{\omega_n}{\delta}(2r)^{-\delta}\mathrm{d}y\\
&\le \frac{A}{\delta}C_n\|f\|_{L^1},
\end{aligned}$$

由BCP 原理即知T 为弱(1,1) 型.

(p,p) 型$(1<p<\infty)$的证明

现在我们已经知道T 是(2,2) 型, 弱(1,1) 型, 由Marcinkiewicz 插值定理可知, T为(p,p) 型$(1<p<2)$. 由于T 是$L^p(1<p\le 2)$ 上的有界线性算子, 故它有定义在$L^{p'}$ 上的伴随算子T^*, 这里$\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$. 注意到$T^*$ 对应的核为$\overline{K(y,x)}$, 且$\overline{K(y,x)}\in SK(\delta,A)$ 仍为标准核. 又T^*是(2,2)型, $\|T^*\|_{L^2\to L^2}=\|T\|_{L^2\to L^2}=B$, 所以$T^*\in CZO(\delta,A,B)$. 重复上述讨论可知$T^*$ 是(p,p) 型$(1<p\le 2)$. 此时再利用$(T^*)^*=T$, 可知T 是(p',p') 型$(2\le p'<\infty)$. 综上可知, T 是(p,p) 型$(1<p<\infty)$, 且有相应算子范数估计.

$(\mathcal{H}^1,L^1)$ 型的证明

我们需要如下命题. 与命题1类似, 它对$f\in L^p$时的Tf给出了某种积分表达式.

命题2. *设$T\in CZO(\delta,A,B)$关联的标准核是$K(x,y)$, 则$\forall g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 如果$\mathrm{supp}g$是$\mathbb{R}^n$的真子集, 那么对于a.e. $x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathrm{supp}g$, 成立*

$$(Tg)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{16.15}$$

证明. 1. 由于$\mathrm{supp}g\subset\subset\mathbb{R}^n$, 则对$x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathrm{supp}g$, 成立

$$\mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}g)=r>0.$$

由奇性强度条件$|K(x,y)|\le\frac{A}{|x-y|^n}$ 可知(16.15) 中$K(x,y)$ 有界, 从而(16.15) 右端积分绝对收敛.

2. 令$g_k(x)=g(x)\chi_{\{|g(x)|\le k\}}\chi_{\{|x|\le k\}}$, 则$g_k(x)\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,并且$g_k(x)$ 满足$\mathrm{supp}g_k\subseteq\mathrm{supp}g$, 以及在$L^p(\mathbb{R}^n)(1\le p<\infty)$中$g_k\to g$ $(k\to\infty$, 利用Lebesgue 控制收敛定理).

3. 由命题1,

$$Tg_k(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)g_k(y)\mathrm{d}y,\ x\notin\mathrm{supp}g.$$

由于已证T 是弱(p,p) 型, 则

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |T(g_k-g)(x)|>\lambda\right\}\right| \le \left(C\frac{\|g_k-g\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p,$$

那么$Tg_k(x)$依测度收敛于$Tg(x)$, $k\to\infty$, 从而存在一个子列(不妨设就是Tg_k), 使得$k\to\infty$时$Tg_k(x)$几乎处处收敛于$Tg(x)$.

4. 另一方面, 对固定的x, 若$1<p<\infty$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(g_k(y)-g(x))\mathrm{d}y\right| \\
\le\ & \left(\int_{\mathrm{supp}g}|K(x,y)|^{p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g_k(y)-g(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \quad [\text{这里}\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1] \\
\le\ & A\left(\int_{\mathrm{supp}g}|x-y|^{-np'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\|g_k-g\|_{L^p} \\
\le\ & AC_{n,p}\left(\int_r^\infty s^{-np'}s^{n-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\|g_k-g\|_{L^p} \\
\le\ & C_{n,p,r}\|g_k-g\|_{L^p}\to 0.
\end{aligned}$$

对$p=1$成立类似的结论. 所以, $Tg(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y$ 几乎处处成立. □

1. 设a 为$\mathcal{H}^1$ 中的L^2 原子(即(1,2)原子)满足$\mathrm{supp}a\subset Q$. 记C_Q 为方体Q 的中心, $Q^*=2\sqrt{n}Q$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Ta(x)|\mathrm{d}x=\int_{Q^*}|Ta(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|Ta(x)|\mathrm{d}x=I+II.$$

对于I, 成立

$$\begin{aligned}
I &\le |Q^*|^{1/2}\left(\int_{Q^*}|Ta(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&\le C_n|Q|^{1/2}B\|a\|_{L^2} \\
&\le C_nB. \quad [\text{因为}\|a\|_{L^2}\le|Q|^{-1/2}]
\end{aligned}$$

对于II, 利用命题2 有

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\left|\int_Q K(x,y)a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\left|\int_Q (K(x,y)-K(x,C_Q))a(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\int_Q|K(x,y)-K(x,C_Q)||a(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_Q|a(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}|K(x,y)-K(x,C_Q)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&\le \int_Q|a(y)|\mathrm{d}y\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\frac{A|y-C_Q|^\delta}{(|x-y|+|x-C_Q|)^{n+\delta}}\mathrm{d}x\right) \\
&\quad [\text{当}|y-C_Q|\le\frac{1}{2}\max(|x-y|,|x-C_Q|)\text{ 时,上面不等式成立.} \\
&\quad \text{事实上,}\ |y-C_Q|\le\frac{\sqrt{n}}{2}l_Q, |x-C_Q|\ge\frac{1}{2}l_{Q^*}=\sqrt{n}l_Q] \\
&\le A\int_Q|a(y)|\mathrm{d}y\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}\frac{|y-C_Q|^\delta}{|x-C_Q|^{n+\delta}}\mathrm{d}x\right) \\
&\le C_{n,\delta}A\|a\|_{L^1}\le C_{n,\delta}A.
\end{aligned}$$

最后一步是由于$\|a\|_{L^2} \le |Q|^{-1/2}$, 那么$\|a\|_{L^1} \le |Q|^{1/2}(\int_Q |a|^2 \mathrm{d}x)^{1/2} \le 1$.

综上可知, 对任意(1,2) 原子a, 都成立$\|Ta(x)\|_{L^1} \le C_{n,\delta}(A+B)$.

2. $\forall f \in \mathcal{H}^1$, 对任意给定的$\varepsilon > 0$, 设$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$($\mathcal{H}^1$收敛), 其中$a_j$ 为$\mathcal{H}^1$ 中的L^2 原子, $\sum_j |\lambda_j| \le \|f\|_{\mathcal{H}^1} + \varepsilon$. 注意到, 由于$\mathcal{H}^1 \subseteq L^1$ 及T 是弱(1,1) 型, 则$Tf \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

我们先假设对几乎所有的x, 成立

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Ta_j)(x). \tag{16.16}$$

注意到由上一步,其右边每一项都属于L^1,且由于$\sum_j |\lambda_j| < \infty$,故右边依$L^1$ 收敛,从而$Tf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 在(16.16) 两边取L^1 范数, 得

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^1} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Ta_j) \right\|_{L^1} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \left\| Ta_j \right\|_{L^1} \\ &\le C_{n,\delta}(A+B) \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \le C_{n,\delta}(A+B)(\|f\|_{\mathcal{H}^1} + \varepsilon).\end{aligned}$$

由ε任意小性, 就得到$\|T\|_{\mathcal{H}^1 \to L^1} \le C_{n,\delta}(A+B)$, 即$T$ 为$(\mathcal{H}^1, L^1)$ 型.

3. (16.16) 的证明. 我们有

$$\begin{aligned}\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Ta_j)(x)| > \mu \right\} \right| &\le \left| \left\{ |Tf(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (Ta_j)(x)| > \frac{\mu}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ |\sum_{j=N}^{\infty} \lambda_j (Ta_j)(x)| > \frac{\mu}{2} \right\} \right| \\ &\le \left| \left\{ |T(f - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j)| > \frac{\mu}{2} \right\} \right| + \frac{2}{\mu} \left\| \sum_{j=N}^{\infty} \lambda_j T a_j \right\|_{L^1} \\ &\le \frac{2}{\mu} \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \left\| f - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j \right\|_{L^1} + \frac{2}{\mu} \sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j| \left\| Ta_j \right\|_{L^1} \\ &\le \frac{2}{\mu} \left(\|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \left\| f - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j \right\|_{L^1} + C_{n,\delta}(A+B) \sum_{j=N}^{\infty} |\lambda_j| \right).\end{aligned}$$

令$N \to \infty$, 由于$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j \to f$ 在L^1拓扑下也成立, 所以

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Ta_j)(x)| > \mu \right\} \right| = 0, \quad \forall \mu \ge 0.$$

这也就是(16.16).

(L^∞,BMO) 型型的证明

1. 记$L^2_{0,c}$ 为$\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集且积分平均为0 的L^2 函数全体. 易知$L^2_{0,c}$ 在$\mathcal{H}^1$ 中稠密, 原因在于: 任意L^2 原子均属于$L^2_{0,c}$, 从而L^2 原子的有限线性组合也属于$L^2_{0,c}$, 同时L^2 原子的有限组合在$\mathcal{H}^1$ 中稠密.

此外, 回忆$\forall f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, Tf 已有定义, 从而$\langle Tf,\varphi\rangle,\forall\varphi\in L^2_{0,c}$ 也有定义.

我们还需要用到如下结论.

命题3. 设$f\in L^\infty,\varphi\in L^2_{0,c}$, 则成立

$$\langle Tf,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}T^t(\varphi)(x)f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16.17}$$

证明. 首先由T(或T^t 是$(\mathcal{H}^1,L^1)$ 型可知$T^t\varphi\in L^1$, 因此(16.17) 右边积分绝对收敛, 即(16.17) 有意义.

现取$\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足$0\le\eta\le 1$ 及在$\mathrm{supp}\varphi$ 上$\eta\equiv 1$. 此时

$$\begin{aligned}\text{(16.17)式右边}\quad &= \int_{\mathbb{R}^n}T^t(\varphi)\eta f\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}T^t(\varphi)(1-\eta)f\,\mathrm{d}x\\ &= \langle T(\eta f),\varphi\rangle+\int_{\mathbb{R}^n}T^t(\varphi)(1-\eta)f\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以, 现在只需证明

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}T^t(\varphi)(x)(1-\eta)(x)f(x)\,\mathrm{d}x\\ =\ &\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))\varphi(x)\,\mathrm{d}x f(y)(1-\eta(y))\,\mathrm{d}y,\quad \forall x_0\in\mathrm{supp}\varphi.\end{aligned} \tag{16.18}$$

由上式右边的实际积分区域, 可不妨设$y\notin\mathrm{supp}\varphi$，从而内层积分

$$\int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛, 而且, 根据命题2,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}K^t(y,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=T^t\varphi(y).$$

由此(16.18)显然成立. □

2. 利用(16.17)式可得

$$|\langle Tf,\varphi\rangle|\le\|f\|_{L^\infty}\|T^t\varphi\|_{L^1}\le\|f\|_{L^\infty}C_{n,\delta}(A+B)\|\varphi\|_{\mathcal{H}^1},$$

即Tf是$L^2_{0,c}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{H}^1$ 上的有界线性泛函. 由Banach 泛函延拓定理, Tf 可延拓为$\mathcal{H}^1$ 上有界线性泛函. 再利用Riesz 表示定理(即$(\mathcal{H}^1)^*=\mathrm{BMO}$), 可知$\exists b_f\in\mathrm{BMO}$, 使得

- $\langle Tf,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}b_f\varphi\,\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in L^2_{0,c}(\mathbb{R}^n)$;
- $\|b_f\|_{\mathrm{BMO}}=\|Tf\|_{(\mathcal{H}^1)^*}\le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^\infty}$.

第一式表明$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$广义函数$Tf$其实就是$b_f\in\mathrm{BMO}$; 第二式表明$\|Tf\|_{\mathrm{BMO}}\le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^\infty}$, 即$T$是$(L^\infty,\mathrm{BMO})$型算子. 定理1证毕.

第十七讲　非卷积型奇异积分算子(二): 极大算子的有界性

上一讲虽然完整地介绍了C-Z算子的有界性, 可是对于一般的$f \in L^p$, Tf仅仅是通过抽象的算子延拓定义的. 这对于具体计算Tf很不方便. 这一讲我们证明可以用截断积分算子来点态地逼近Tf. 这就需要对相关极大算子得到有界性估计.

一　极大算子的有界性: Cotlar定理

定义1 (截断核与截断算子). 给定$K \in SK(\delta, A)$, 对任意$\varepsilon > 0$, 定义截断核

$$K^{(\varepsilon)}(x,y) = K(x,y)\chi_{|x-y|>\varepsilon}.$$

给定连续线性算子$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 设它关联核$K$. 对任意$\varepsilon > 0$, 定义其截断算子为

$$T^{(\varepsilon)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^{(\varepsilon)}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

定义相应极大算子为

$$T^{(*)}(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T^{(\varepsilon)}(f)(x)|.$$

注意$T^{(\varepsilon)}, T^{(*)}$ 都是关于$f \in \bigcup_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 良好定义的.

定理1 (Cotlar). 设$K(x,y) \in SK(\delta, A)$, $T \in CZO(\delta, A, B)$ 是关联$K(x,y)$ 的*Calderón–Zygmund* 算子. 给定$r \in (0,1)$, 则$\exists C(n,\delta,r)$ 使得对$\forall f \in \bigcup\limits_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$|T^* f(x)| \le C(n,\delta,r)\Big[M\Big(|Tf|^r\Big)(x)^{1/r} + (A+B)Mf(x)\Big],$$

其中, M 是*Hardy–Littlewood* 极大算子.

证明. 1. 取定$r \in (0,1)$ 以及$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. 对$\varepsilon > 0$, 定义

$$f_0^{\varepsilon,x}(z) = f(x)\chi_{B(x,\varepsilon)}(x), \quad f_\infty^{\varepsilon,x}(z) = f(z)\chi_{\complement(B(x,\varepsilon))}(z).$$

这里及以下$\complement(B)$表示集合B的补集.

2. 由于$x \notin \operatorname{supp} f_\infty^{\varepsilon,x}$, 利用上一讲命题2,

$$T(f_\infty^{\varepsilon,x})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f_\infty^{\varepsilon,x}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = T^\varepsilon(f)(x).$$

3. 对$z \in B(x, \varepsilon/2)$, 有$|z-x| \le |x-y|/2$, 从而利用积分核的正则性条件,

$$\begin{aligned}
\Big|(T(f_\infty^{\varepsilon,x}))(x) - (T(f_\infty^{\varepsilon,x}))(z)\Big| &= \left|\int_{|y-x|\ge\varepsilon} \Big(K(z,y) - K(x,y)\Big) f(y)\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le A|z-x|^\delta \int_{|x-y|\ge\varepsilon} \frac{|f(y)|}{\Big(|x-y| + |z-y|\Big)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y \\
&\le A\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^\delta \int_{|x-y|\ge\varepsilon} \frac{|f(y)|}{\Big(|x-y| + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y \\
&\le C_{n,\delta} A (Mf)(x).
\end{aligned}$$

关于最后一个不等号, 这里定义

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{\varepsilon^\delta}{\left(|x|+\varepsilon\right)^{n+\delta}}, & |x|\ge\varepsilon,\\ 0, & |x|<\varepsilon,\end{cases}$$

则它有径向对称连续递减可积控制函数

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+|x|)^{n+\delta}}, & |x|\ge 1,\\ \frac{1}{2^{n+\delta}}, & |x|\le 1.\end{cases}$$

所以前面估计式倒数第二式可被$A|f|*\Phi_\varepsilon(x)\le AC_{n,\delta}Mf(x)$控制.

4. 从而, $\forall z\in B(x,\varepsilon/2)$, 有

$$\begin{aligned}|(T^\varepsilon f)(x)| &= |T(f_\infty^{\varepsilon,x})(x)|\\ &= \left|T(f_\infty^{\varepsilon,x})(x)-T(f_\infty^{\varepsilon,x})(z)\right|+|T(f_\infty^{\varepsilon,x})(z)|\\ &\le C_{n,\delta}AMf(x)+|T(f_0^{\varepsilon,x})(z)|+|(Tf)(z)|.\end{aligned}$$

当$r\in[0,1]$时对$a,b\ge 0$成立不等式$(a+b)^r\le a^r+b^r$, 从而

$$|(T^\varepsilon f)(x)|^r \le C_{n,\delta}^r A^r Mf(x)^r+|T(f_0^{\varepsilon,x})(z)|^r+|(Tf)(z)|^r.$$

将此式关于z在$B(x,\varepsilon/2)$上作积分平均, 就得到

$$|(T^\varepsilon f)(x)|^r \le C_{n,\delta}^r A^r Mf(x)^r+\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\int_{B(x,\varepsilon/2)}|T(f_0^{\varepsilon,x})(z)|^r\,\mathrm{d}z+M|[(Tf)|^r](x).$$

从而利用$(a+b+c)^p\le 3^p(a^p+b^p+c^p)$ $(p=\frac{1}{r}\ge 1, a,b,c>0)$, 得

$$|(T^\varepsilon f)(x)| \le 3^{\frac{1}{r}}\left(C_{n,\delta}AMf(x)+\left(\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\int_{B(x,\varepsilon/2)}|T(f_0^{\varepsilon,x})(z)|^r\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{r}}+\left(M|[(Tf)|^r](x)\right)^{\frac{1}{r}}\right).$$

5. 现只需要估计上式右端中间项. 先看它的r次幂的估计: [1]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\int_{B(x,\varepsilon/2)}|T(f_0^{\varepsilon,x})(z)|^r\,\mathrm{d}z=\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}r\int_0^\infty \lambda^{r-1}d_{Tf_0^{\varepsilon,x}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\\ \le\ &\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\left(r\int_N^\infty\lambda^{r-1}\frac{\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda+r\int_0^N\lambda^{r-1}|B(x,\varepsilon/2)|\,\mathrm{d}\lambda\right)\\ &\qquad\left[\text{取参数}N=\frac{r}{1-r}\frac{\|T\|\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}}{|B(x,\varepsilon/2)|}\ \text{使得括号内两项相等}\right]\\ =\ &\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\left(N^r|B(x,\varepsilon/2)|+\frac{r}{1-r}N^{r-1}\|T\|\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}\right)\\ =\ &\frac{2}{|B(x,\varepsilon/2)|}\left(\frac{r}{1-r}\right)^r\frac{\|T\|^r\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}^r}{|B(x,\varepsilon/2)|^{r-1}}=2\left(\frac{r}{1-r}\right)^r\frac{\|T\|^r\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}^r}{|B(x,\varepsilon/2)|^r}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\text{中间项} &\le 2^{\frac{1}{r}}\frac{r}{1-r}\frac{\|T\|\left\|f_0^{\varepsilon,x}\right\|_{L^1}}{|B(x,\varepsilon/2)|}\\ &\le C_{n,\delta,r}(A+B)\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\int_{B(x,\varepsilon)}|f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\le C_{n,\delta,r}(A+B)Mf(x).\end{aligned}$$

[1] 由此可以看出引入r的用处.

定理证毕. □

推论1. T^* 是弱(1,1) 型和(p,p) 型$(1<p<\infty)$. 即$\exists C_n$使得

$$\|T^*f\|_{L^{1,\infty}} \le C_n(A+B)\|f\|_{L^1},$$
$$\|T^*f\|_{L^p} \le C_n(A+B)\max(p,\frac{1}{p-1})\|f\|_{L^p}, \quad (1<p<\infty).$$

证明. 1. 首先我们断言: 若$0<p,q<\infty$, 则$\left\||f|^q\right\|_{L^{p,\infty}}=\left\|f\right\|^q_{L^{pq,\infty}}$. 这是因为

$$\begin{aligned}\left\||f|^q\right\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{r>0}\left\{rd_{|f|^q}(r)^{\frac{1}{p}}\right\}=\sup_{r>0}\left\{r\left|\{|f|>r^{\frac{1}{q}}\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\\ &= \sup_{r>0}\left\{r^q\left|\{|f|>r\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}=\left(\sup_{r>0}\left\{r\left|\{|f|>r\}\right|^{\frac{1}{pq}}\right\}\right)^q\\ &= \left\|f\right\|^q_{L^{pq,\infty}}.\end{aligned}$$

从而, 回忆第八讲已经证明H-L 极大算子在$L^{p,\infty}$ $(1\le p\le\infty)$上有界,

$$\begin{aligned}\left\|[M(|Tf|^r)]^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{1,\infty}} &= \left\|M(|Tf|^r)\right\|^{\frac{1}{r}}_{L^{\frac{1}{r},\infty}} \le C_{n,r}\left\||Tf|^r\right\|^{\frac{1}{r}}_{L^{\frac{1}{r},\infty}}\\ &= C_{n,r}\left\|Tf\right\|_{L^{1,\infty}} \le C'_{n,r}(A+B)\left\|f\right\|_{L^1}.\end{aligned}$$

结合T,M是弱(1,1)型, 这就证明了T^*也是弱(1,1)型.

2. 取$r=\frac{1}{2}$, 则对$1<p<\infty$, 利用T的(p,p)型, 以及

$$\begin{aligned}\left\|[M(|Tf|^{\frac{1}{2}})]^2\right\|_{L^p} &= \left\|M(|Tf|^{\frac{1}{2}})\right\|^2_{L^{2p}} \le C_{n,p}\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)\left\||Tf|^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{L^{2p}}\\ &= C_{n,p}\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)\left\|Tf\right\|_{L^p} \le C'_{n,r}(A+B)\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)\left\|f\right\|_{L^p}.\end{aligned}$$

这就证明了T^*也是(p,p)型. □

二 截断算子的收敛性

定理2. 设$K\in SK(\delta,A), T\in CZO(\delta,A,B)$ 是关联K的C-Z算子. 若K满足条件: 对几乎所有$x\in\mathbb{R}^n$, 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x-y|\le 1}K(x-y)\,\mathrm{d}y$$

存在, 则对任意$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T^\varepsilon f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

几乎处处存在. 进一步, 存在$b(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$Tf(x)=b(x)f(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

几乎处处成立, 并且当$1<p<\infty$时上式在$L^p(\mathbb{R}^n)$意义下也成立.

证明. 1. 首先证明, 对$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 极限$T^\varepsilon\varphi(x)$几乎处处存在. 由$|K(x,y)| \le A/|x-y|^n$可知积分$\int_{|x-y|\ge 1} K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$绝对收敛. 而

$$\begin{aligned}&\int_{\varepsilon\le|x-y|\le 1} K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\\ =\ &\int_{\varepsilon\le|x-y|\le 1} K(x,y)[\varphi(y)-\varphi(x)]\,\mathrm{d}y+\varphi(x)\int_{\varepsilon\le|x-y|\le 1} K(x,y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中后一项根据定理条件, 对几乎所有x都收敛, 而前一项中被积函数被$\frac{\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}}{|x-y|^{n-1}}$控制, 因而绝对收敛. 这就证明了$\lim_{\varepsilon\to 0}(T^\varepsilon\varphi)(x)$几乎处处存在. 记此极限为$(T_0\varphi)(x)$, 其中$T_0$是上述极限过程确定的一个线性算子.

2. 由于$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$在$L^p(\mathbb{R}^n)$中稠密, 利用点态收敛的极大函数法可知, 对$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 都成立点态收敛

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T^\varepsilon f)(x) = (T_0 f)(x), \quad \text{对几乎所有的 } x \in \mathbb{R}^n.$$

这里T_0已被延拓到L^p上, 且是(p,p)型$(1<p<\infty)$和弱$(1,1)$型.

3. 再证明在$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$中也成立$\lim_{\varepsilon\to 0}(T^\varepsilon f) = (T_0 f)$, 即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |T^\varepsilon f(x) - T_0 f(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0.$$

首先, 被积函数点态收敛到零; 其次, 利用T^*和T_0的(p,p)型, $|T^\varepsilon f(x)-T_0 f(x)|^p \le 2^p(T^*f(x)^p + T_0 f(x)^p)$是可积函数. 所以由Lebesgue控制收敛定理即得结论.

4. 注意到当$\mathrm{supp}(f)\cap\mathrm{supp}(g)=\emptyset$时, 它们之间的距离有正的下界, 从而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} T_0(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} T^{(\varepsilon_j)}(f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K^{(\varepsilon_j)}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon_j\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K^{(\varepsilon_j)}(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此

$$T_0(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

即我们证明了:T_0也是与K关联的C-Z算子. 我们称T_0为T对应的Calderón–Zygmund 奇异积分算子(CZSIO).

5. 最后证明$Tf(x) - T_0 f(x) = b(x)f(x)$, 其中$b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

设g有界且有紧支集, $Q \subset \mathbb{R}^n$为方体, 我们断言成立

$$\left(T^{(\varepsilon)} - T\right)(g\chi_Q)(x) = \chi_Q(x)\left(T^{(\varepsilon)} - T\right)(g)(x), \quad \forall x \notin \partial Q,\ \varepsilon \text{ 充分小}. \tag{17.1}$$

事实上, 若$x \notin \overline{Q}$, 则$x \notin \mathrm{supp}(g\chi_Q)$. 于是

$$\begin{aligned}\left(T^{(\varepsilon)} - T\right)(g\chi_Q)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(K^{(\varepsilon)}(x,y) - K(x,y)\right)(g\chi_Q)(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{|x-y|\le\varepsilon} K(x,y)(g\chi_Q)(y)\,\mathrm{d}y \qquad (17.2)\\ &\to 0\ (\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

上式最后一行成立是因为当$\varepsilon < \operatorname{dist}\big(x, \operatorname{supp}(g\chi_Q)\big)$ 时, 式 (17.2) 总为零. 从而当$x \notin \overline{Q}$ 时断言 (17.1) 成立.

若$x \notin \overline{\complement Q} = \operatorname{IntQ}$, 有

$$\begin{aligned}\big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_{\complement Q})(x) &= \int_{|x-y|\le\varepsilon} K(x,y)(g\chi_{\complement Q})(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 0, \ (\text{当}\varepsilon < \operatorname{dist}(x, \overline{\complement Q})\ \text{时})\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g)(x) &= \big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_{\complement Q} + g\chi_Q)(x) \\ &= \big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_{\complement Q})(x) + \big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_Q)(x) \\ &= \big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_Q)(x),\end{aligned}$$

即

$$\chi_Q\big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g) = \big(T^{(\varepsilon)} - T\big)(g\chi_Q),$$

断言 (17.1) 仍然成立.

在 (17.1) 中令$\varepsilon \to 0$, 可知几乎处处成立等式

$$(T_0 - T)(g\chi_Q) = \chi_Q(T_0 - T)(g).$$

6. 利用$T_0 - T$ 的线性, 对任意简单函数$f = \sum_{\text{有限个}} a_Q\chi_Q$, 以及有界且有紧支集的函数$g$, 几乎处处成立

$$(T_0 - T)(gf) = f(T_0 - T)(g). \tag{17.3}$$

再由$T_0 - T$是(2,2)型以及简单函数在$L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性, 知上式对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 及有界且有紧支集的g 都成立.

7. 以$B(0,j)$ 记以原点为心, j 为半径的球. 当$j \le j'$ 时成立

$$(T_0 - T)(\chi_{B(0,j)}) = (T_0 - T)(\chi_{B(0,j)}\chi_{B(0,j')}) = \chi_{B(0,j)}(T_0 - T)(\chi_{B(0,j')}).$$

这表明存在一个良定义的函数b 使得

$$b(x) = (T_0 - T)(\chi_{B(0,j)}), \quad x \in B(0,j).$$

将$g = \chi_{B(0,j)}$ 以及支撑在$B(0,j)$ 上的函数f 带入 (17.3) 得到

$$(T_0 - T)(f) = f(T_0 - T)(\chi_{B(0,j)}) = b(x)f(x).$$

由此立知映射$b: f \to bf$ 为$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子且有$\|b\|_{L^2\to L^2} \le \|T_0\|_{L^2\to L^2} + \|T\|_{L^2\to L^2}$. 由第七讲 Fourier 乘子性质, $\|b\|_{L^\infty} \le \|T_0\|_{L^2\to L^2} + \|T\|_{L^2\to L^2}$. 至此我们完成了定理2的证明. □

第十八讲　Carleson 测度与BMO函数

从这一讲开始我们介绍有关非卷积型奇异积分算子的L^2有界性的结果. 在下一讲要研究的仿积算子是一种典型的非卷积型算子. 它的L^2有界性是通过Carleson测度的性质证明的; 而结合算子列的几乎正交性以及仿积算子的L^2有界性, 就可以证明保证非卷积型积分算子L^2有界的著名的$T(1)$定理.

一　Carleson 测度的定义

定义1 (帐篷)**.** 给定$\mathbb{R}^n$ 中球$B = B(x_0, r)$, 称$T(B) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : y \in B, 0 \le t \le r\}$ 为B 的柱形帐篷. 类似地, 记$Q = Q(C_Q, l(Q))$ 是中心在C_Q, 边长为$l(Q)$ 的方体, 称$T(Q) = Q \times [0, l(Q)]$ 为Q 的帐篷.

定义2 (Carleson 测度与Carleson 函数)**.** $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的测度μ 称为*Carleson* 测度, 如果

$$\|\mu\|_C \triangleq \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \mu(T(Q)) < \infty.$$

称函数

$$C(\mu)(x) \triangleq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \mu(T(Q))$$

为*Carleson* 函数. 显然$\left\|\mu\right\|_C = \|C(\mu)\|_{L^\infty}$.

我们也可定义

$$\|\mu\|_C^{\text{cylinder}} \triangleq \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{B} \mu(\mathrm{T}(B)),$$

则不难证明: 存在C_n, C_n' 使得$C_n\|\mu\|_C \le \|\mu\|_C^{\text{cylinder}} \le C_n'\|\mu\|_C$.

例1. $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上*Lebesgue* 测度不是*Carleson* 测度.

这是因为, 由$|Q| = (l(Q))^n$, $|\mathrm{T}(Q)| = (l(Q))^{n+1}$, 就可知$\sup_Q \frac{|\mathrm{T}(Q)|}{|Q|} = \sup_Q l(Q) = \infty$.

例2. 设L 是$\mathbb{R}^2$ 上一条给定的直线. 对$\mathbb{R}^2_+$上的可测集A, 定义$\mu(A)$ 为$A \bigcap L$ 的一维*Lebesgue* 测度, 则μ 为*Carleson* 测度.

证明. 易知$|\mathrm{T}(Q) \bigcap L| \le \sqrt{2} l(Q)$, 从而$\sup_Q \frac{|\mathrm{T}(Q)|}{|Q|} \le \sup_Q \frac{\sqrt{2} l(Q)}{l(Q)} \le \sqrt{2}$, 故$\mu$ 为Carleson 测度. □

例3. 类似的, 设L 为$\mathbb{R}^{n+1}$ 中n 维超平面. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_+$ 是可测集, 定义$\mu(A) = A \bigcap L$ 的n 维*Lebesgue* 测度, 则μ 为*Carleson* 测度.

二　非切向极大函数与Carleson 测度

设$F(x,t)$ 是$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的可测函数. 对$x \in \mathbb{R}^n$, 记$\Gamma(x)$ 是以x 为顶点, 开口大小为1 的锥体:

$$\Gamma(x) = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : |y - x| < t\right\}.$$

称$\mathbb{R}^n$ 上函数

$$F^*(x) = \sup_{(y,t) \in \Gamma(x)} |F(y,t)| \tag{18.1}$$

为F 的**非切向极大函数.** 这个概念我们在第八讲已经介绍过. 显然$F^*(x) \equiv 0$ $a.e.$ $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow F(y,t) \equiv 0$.

这一节我们建立非切向极大函数与Carleson测度间的联系. 为此, 先回忆第十五讲介绍过的Whitney 分解定理: 设开集$U\subset\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^n\setminus U\neq\emptyset$, 则存在可列个内部互不相交的二进方体$\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ 满足: 1) $U=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}Q_j$; 2) $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $\sqrt{n}l(Q_k)\le\operatorname{dist}(Q_k,F)\le 4\sqrt{n}l(Q_k)$; 3) 若两方体$Q_j\bigcap Q_k\neq\emptyset$, 则$\frac{1}{5}\le\frac{l(Q_j)}{l(Q_k)}\le 5$; 4) 对给定的$Q_j$, 至多有$15^n$ 个方体Q_k 与之相交.

接下来, 我们给出如下结论:

定理1. $\exists C_n>0$, 使得对$\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上非负测度μ 及任何一个$\mu-$可测函数F, 都成立

$$\mu\Big(\Big\{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:|F(x,t)|>\alpha\Big\}\Big)\le C_n\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:F^*(x)>\alpha\}}C(\mu)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{18.2}$$

这里$\alpha>0$且$\{x\in\mathbb{R}^n:F^*(x)>\alpha\}$是$\mathbb{R}^n$的真子集.

证明. 1. 记$\Omega_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:F^*(x)>\alpha\}$. 先证明它是开集.

设$x_0\in\Omega_\alpha$, 则$F^*(x_0)>\alpha$, 从而$\exists(y_0,t_0)\in\Gamma(x_0)$使得$F(y_0,t_0)>\alpha$. 此时若取$z\in\mathbb{R}^n$ 使得$\Gamma(z)\ni(y_0,t_0)$, 则有$F^*(z)>\alpha$. 若$(y_0,t_0)\in\Gamma(z)$, 则z 满足$|z-y_0|<t_0$, 即$z\in B(y_0,t_0)\subset\mathbb{R}^n$. 从而有结论: $\forall z\in B(y_0,t_0)$, $F^*(z)>\alpha$, 即$B(y_0,t_0)\subset\Omega_\alpha$. 另一方面, 由$|x_0-y_0|<t_0$ 可知x_0 为$B(y_0,t_0)$ 的内点, 所以存在x_0 的某个邻域包含于Ω_α. 故Ω_α 是开集.

2. 现在对Ω_α 做 Whitney 分解, 得到一族二进方体$\{Q_k\}_{k=1}^\infty$. 对任意$x\in\Omega_\alpha$, 定义$\delta_\alpha(x)=\operatorname{dist}(x,\complement\Omega_\alpha)$, 则$\forall z\in Q_k$, 有

$$\delta_\alpha(z)\le\sqrt{n}l(Q_k)+\operatorname{dist}(Q_k,\complement\Omega_\alpha)\le 5\sqrt{n}l(Q_k).$$

对于Q_k, 我们记$B_k=B(C_k,\frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_k))$ 为包含Q_k 的最小球. 对任意$z\in Q_k$, 由于$|z-C_k|\le\frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_k)$ 以及$\delta_\alpha(z)\le 5\sqrt{n}l(Q_k)$, 故$\forall y\in B(z,\delta_\alpha(z))$, 成立

$$|y-C_k|\le\frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_k)+5\sqrt{n}l(Q_k)\le 6\sqrt{n}l(Q_k).$$

这就意味着

$$B(z,\delta_\alpha(z))\subset 12B_k=B(C_k,6\sqrt{n}l(Q_k)),$$

从而

$$\mathsf{T}(B(z,\delta_\alpha(z)))\subset\mathsf{T}(12B_k),$$

于是$\bigcup\limits_{z\in Q_k}\mathsf{T}(B(z,\delta_\alpha(z)))\subset\mathsf{T}(12B_k)$. 进一步对所有$k$ 取并, 就得到

$$\bigcup_{z\in\Omega_\alpha}\mathsf{T}(B(z,\delta_\alpha(z)))\subset\bigcup_k\mathsf{T}(12B_k).$$

3. 下面证明

$$\Big\{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:|F(x,t)|>\alpha\Big\}\subset\bigcup_{z\in\Omega_\alpha}\mathsf{T}(B(z,\delta_\alpha(z))). \tag{18.3}$$

事实上, 设$(x,t)\in\{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:|F(x,t)|>\alpha\}$, 即$|F(x,t)|>\alpha$. 从前面证明可知$F^*(y)>\alpha$, $\forall y\in B(x,t)$. 因此, $B(x,t)\subset\Omega_\alpha\Rightarrow\delta_\alpha(x)\ge t$. 由帐篷的定义, $(x,t)\in\mathsf{T}(B(x,\delta_\alpha(x)))$. 再由$(x,t)$ 的任意性, 就知(18.3)成立.

4. 通过前面的讨论, 就得到$\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |F(x,t)|>\alpha\right\}\subset\bigcup_k \mathsf{T}(12B_k)$. 由$\mu$ 为非负测度, 就得到

$$\mu\left(\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |F(x,t)|>\alpha\right\}\right)\le\sum_k\mu(\mathsf{T}(12B_k)).$$

由Carleson 函数的定义$C(\mu)(x)\triangleq\sup\limits_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\mu(\mathsf{T}(Q))$, 可知

$$C(\mu)(x)\ge\frac{1}{|12B_k|}\mu(\mathsf{T}(12B_k)),\quad \forall x\in Q_k\subset 12B_k.$$

因此,

$$\mu(\mathsf{T}(12B_k))\le|12B_k|\inf_{x\in Q_k}C(\mu)(x),$$

从而

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |F(x,t)|>\alpha\right\}\right) &\le \sum_k|12B_k|\inf_{x\in Q_k}C(\mu)(x)\\ &\le \sum_k|12B_k|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}C(\mu)(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_k 12^n\frac{|B_k|}{|Q_k|}\int_{Q_k}C(\mu)(x)\,\mathrm{d}x\\ &= C_n\sum_k\int_{Q_k}C(\mu)(x)\,\mathrm{d}x\\ &= C_n\int_{\Omega_\alpha}C(\mu)(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

定理得证. □

推论1. 若μ 为Carleson 测度, 则

$$\mu\left(\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ : |F(x,t)|>\alpha\right\}\right)\le C_n\left\|\mu\right\|_C\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : F^*(x)>\alpha\right\}\right|.$$

证明. 当$\{x\in\mathbb{R}^n : F^*(x)>\alpha\}=\mathbb{R}^n$时结论显然成立; 当$\{x\in\mathbb{R}^n : F^*(x)>\alpha\}$是$\mathbb{R}^n$的真子集时利用定理1和Carleson测度定义即得. □

推论2. 对任一Carleson 测度μ 及$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上任何一个μ–可测函数F, 有

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|F(x,t)|^p\,\mathrm{d}\mu(x,t)\le C_n\left\|\mu\right\|_C\int_{\mathbb{R}^n}|F^*(x)|^p\,\mathrm{d}x,\quad 0<p<\infty.$$

证明. 利用分布函数和等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(\{x:|f(x)>\lambda|\})\,\mathrm{d}\lambda.$$

□

下面定理是这一讲的第一个主要结果.

定理2. 设φ 为$\mathbb{R}^n$ 上的函数, 且存在$0<C,\delta<\infty$ 使得

$$|\varphi(x)|\le\frac{C}{(1+|x|)^{n+\delta}}.\tag{18.4}$$

设μ 为$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的*Carleson* 测度, 则$\forall 1<p<\infty$, $\exists C_{p,n}(\mu)$ 使得$\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|\varphi_t*f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x,t)\le C_{p,n}(\mu)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x, \tag{18.5}$$

其中常数$C_{p,n}(\mu)=C(p,n)\|\mu\|_C$.

反之, 设$\varphi\ge 0$ 满足(18.4) 式且$\int_{\{|x|\le 1\}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x>0$. 若$\mu$ 为$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的非负测度, 且存在某个$p\in(1,\infty)$, $\exists C_{p,n}(\mu)$ 使得(18.5) 式对任一$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 都成立, 则μ 为*Carleson* 测度, 且$\|\mu\|_C\le C_{p,n}(\mu)$.

证明. 1. 设μ 是$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的Carleson 测度. 对$F(x,t)\triangleq\varphi_t*f(x)$, 由第八讲, 可知其非切向极大函数

$$F^*(x)=\sup_{t>0}\sup_{|y-x|<t}|\varphi_t*f(y)|$$

能被Hardy–Littlewood 极大函数$Mf(x)$ 所控制: $F^*(x)\le C_nMf(x)$. 于是由Hardy–Littlewood 极大算子是(p,p) 型$(1<p<\infty)$ 可得$\|F^*\|^p_{L^p}\le C(p,n)\|f\|^p_{L^p}$. 从而由推论2,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|F(x,t)|^p\,\mathrm{d}\mu(x,t) &\le C_n\|\mu\|_C\int_{\mathbb{R}^n}|F^*(x)|^p\,\mathrm{d}x\\ &\le C_{p,n}(\mu)\|f\|^p_{L^p}.\end{aligned}$$

2. 现证定理第二个结论. 取$B=B(x_0,r)\subseteq\mathbb{R}^n$, 对$\forall(x,t)\in\mathsf{T}(B)$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi_t*\chi_{2B})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(y)\chi_{2B}(x-y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{y\in x-2B}\varphi_t(y)\,\mathrm{d}y\\ &\ge \int_{B(0,t)}\varphi_t(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{B(0,1)}\varphi(y)\,\mathrm{d}y=C_0>0\end{aligned}$$

上述不等式用到结论: 若$(x,t)\in\mathsf{T}(B)$, 则$B(0,t)\subset x-2B$. 事实上, 对$\forall z\in B(0,t)$, 由于$|x-z-x_0|\le|x-x_0|+|z|\le r+t$ 以及$t\le r$, 就有$x-z\in 2B$, 即$z\in x-2B$.

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|\varphi_t*\chi_{2B}(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x,t) &\ge \int_{\mathsf{T}(B)}|\varphi_t*\chi_{2B}(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x,t)\\ &\ge C_0^p\mu(\mathsf{T}(B)).\end{aligned}$$

又

$$C_{p,n}(\mu)\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{2B}(x)|^p\,\mathrm{d}x\le C_{p,n}(\mu)|2B|,$$

利用(18.5) 式, 取$f=\chi_{2B}$ 就有

$$C_0^p\mu(\mathsf{T}(B))\le C_{p,n}(\mu)2^n|B|,$$

从而$\dfrac{\mu(\mathsf{T}(B))}{|B|}\le 2^n\dfrac{C_{p,n}(\mu)}{C_0^p}$. 再由$B$ 的任意性, 就知道μ 是Carleson 测度, 而且

$$\|\mu\|_C\le 2^nC_0^{-p}C_{p,n}(\mu).$$

□

三 BMO函数与Carleson测度

下面证明本节第二个主要结果.

定理3. 设$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, ψ 为$\mathbb{R}^n$ 上平均值为0 的可积函数

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \, \mathrm{d}x = 0, \quad |\psi(x)| \le \frac{A}{(1+|x|)^{n+\delta}}. \tag{18.6}$$

记$\psi_t(x) = t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$, $\Delta_j(f) = f * \psi_{2^{-j}}$.

a) 设

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \le B^2 < \infty, \tag{18.7}$$

并记$\delta_{2^{-j}}(t)$ 是$t = 2^{-j}$ 点的*Dirac* 测度. 则$\exists C_{n,\delta}$ 使得

$$\mathrm{d}\mu(x,t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_{2^{-j}} * b(x)|^2 \mathrm{d}x \, \delta_{2^{-j}}(t) \tag{18.8}$$

是$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的*Carleson* 测度, 且$\|\mu\|_C \le C_{n,\delta}(A+B)^2 \|b\|^2_{\mathrm{BMO}}$.

b) 设

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \le B^2 < \infty,$$

则上述$\mathrm{d}\mu(x,t)$ 可写为连续形式$\mathrm{d}\upsilon(x,t)$:

$$\mathrm{d}\upsilon(x,t) = |\psi_t * b(x)|^2 \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

它是$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的*Carleson* 测度, 且$\|\upsilon\|_C \le C_{n,\delta}(A+B)^2 \|b\|^2_{\mathrm{BMO}}$.

c) 设$\delta, A > 0$, $\{K_t\}_{t>0}$ 为$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的函数, 且$\forall t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x \ne y$, 成立$|K_t(x,y)| \le \frac{At^\delta}{(t+|x-y|)^{n+\delta}}$.

记R_t 为线性算子

$$(R_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x,y) f(y) \mathrm{d}y, \tag{18.9}$$

它对任意$f \in \bigcup\limits_{1 \le p < \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$ 均有定义. 又设$R_t(1) = 0, \forall t > 0$, 且$\exists B > 0$ 使得

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |R_t f(x)|^2 \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t} \le B \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{18.10}$$

则$\forall b \in \mathrm{BMO}$, 测度$|R_t(b)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ 为*Carleson* 测度, 且其模至多为$C_{n,\delta}(A+B)^2 \|b\|^2_{\mathrm{BMO}}$.

证明. 1. 首先证a). 对μ–可测函数$F(x,t)$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,t) \, \mathrm{d}\mu(x,t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, 2^{-j}) |(\psi_{2^{-j}} * b)(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{18.11}$$

对$\mathbb{R}^n$中任意的方体Q, 记$Q^* = 3Q$. 取$F(x,t) = \chi_{\mathsf{T}(Q)}(x,t)$, 则从(18.11) 就得到

$$\mu(\mathsf{T}(Q)) = \sum_{2^{-j} \le l(Q)} \int_Q |(\psi_{2^{-j}} * b)(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{2^{-j} \le l(Q)} \int_Q |(\Delta_j b(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

2. 现将b分解为

$$b=(b-b_Q)\chi_{Q^*}+(b-b_Q)\chi_{\complement Q^*}+b_Q.$$

由于$\int\psi\,\mathrm{d}x=0$, 那么$\psi_{2^{-j}}*b_Q=0$. 于是

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{T}(Q)) &= \sum_{2^{-j}\le l(Q)}\int_Q|\psi_{2^{-j}}*((b-b_Q)\chi_{Q^*})+\psi_{2^{-j}}*((b-b_Q)\chi_{(\complement Q^*)})|^2\,\mathrm{d}x\\ &\le 2\sum_{2^{-j}\le l(Q)}\int_Q|\psi_{2^{-j}}*((b-b_Q)\chi_{Q^*})|^2\,\mathrm{d}x+2\sum_{2^{-j}\le l(Q)}\int_Q|\psi_{2^{-j}}*((b-b_Q)\chi_{(Q^*)^c})|^2\,\mathrm{d}x\\ &\triangleq I+II.\end{aligned}$$

3. 因为

$$\begin{aligned}|b_{Q^*}-b_Q| &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q|b-b_{Q^*}|\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{|Q|}\int_{Q^*}|b-b_{Q^*}|\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{C_n}{|Q^*|}\int_{Q^*}|b-b_{Q^*}|\,\mathrm{d}x\\ &\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}},\end{aligned}$$

所以, 由Plancherel定理和Levi单调收敛定理, 并利用条件(18.7), 成立

$$\begin{aligned}I &\le 2\sum_{2^{-j}\le l(Q)}\int_Q\left|\Delta_j\Big[(b-b_Q)\chi_{Q^*}\Big](x)\right|^2\mathrm{d}x\le 2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\Delta_j[(b-b_Q)\chi_{Q^*}]\right|^2\mathrm{d}x\\ &\le 2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)\right|^2\left|[(b-b_Q)\chi_{Q^*}]^\wedge\right|^2\mathrm{d}\xi\le 2B^2\int_{\mathbb{R}^n}\left|\Big[(b-b_Q)\chi_{Q^*}\Big]^\wedge\right|^2\mathrm{d}\xi\\ &= 2B^2\int_{\mathbb{R}^n}|(b-b_Q)\chi_{Q^*}|^2\,\mathrm{d}x=2B^2\int_{Q^*}|b-b_Q|^2\,\mathrm{d}x\\ &= 2B^2\int_{Q^*}|(b-b_{Q^*})+(b_{Q^*}-b_Q)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\le 4B^2|Q^*|\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|b-b_{Q^*}|^2\,\mathrm{d}x\right)+4B^2|Q^*||b_{Q^*}-b_Q|^2\\ &\le C_nB^2|Q|\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2.\end{aligned}$$

这里还用了第十四讲关于BMO函数等价定义的定理3.

4. 再估计积分II. 首先, 利用条件(18.6), 我们有

$$\begin{aligned}\left|\psi_{2^{-j}}*\Big[(b-b_Q)\chi_{(Q^*)^c}\Big]\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\psi_{2^{-j}}(x-y)[(b-b_Q)\chi_{(Q^*)^c}](y)\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le A\int_{(Q^*)^c}\frac{2^{-j\delta}|b(y)-b_Q|}{(2^{-j}+|x-y|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到若$x\in Q$, $y\in\complement Q^*$, 则由于$|y-C_Q|\ge 3\sqrt{n}l_Q/2$, 就有

$$\begin{aligned}2^{-j}+|x-y| &\ge |x-y|\ge|y-C_Q|-|x-C_Q|\\ &\ge \frac{1}{2}|y-C_Q|+\frac{3\sqrt{n}}{4}l_Q-\frac{\sqrt{n}}{2}l_Q\\ &= \frac{1}{2}\left(|y-C_Q|+\frac{\sqrt{n}}{2}l_Q\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
II &\leq C_n A^2 \sum_{2^{-j}\leq l(Q)} 2^{-2j\delta} \int_Q \left| \int_{(Q^*)^c} \frac{|b(y)-b_Q|}{(|y-C_Q|+|l_Q|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq C_{n,\delta} A^2 (l_Q)^{2\delta} \int_Q \left(\int_{(Q^*)^c} \frac{|b(y)-b_Q|}{(|y-C_Q|+l_Q)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= C_{n,\delta} A^2 (l_Q)^{2\delta} |Q| \left(\int_{(Q^*)^c} \frac{|b(y)-b_Q|}{(|y-C_Q|+l_Q)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}y \right)^2 \\
&\leq C_{n,\delta} A^2 |Q|\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2 .
\end{aligned}$$

这里最后一个不等号利用了第十四讲的定理1.

5. 最终我们得到

$$\mu(\mathsf{T}(Q)) \leq C_{n,\delta}(A^2+B^2)|Q|\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2,$$

从而μ是Careleson测度,且$\|\mu\|_C \leq C_{n,\delta}(A+B)^2\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2$.

6. b) 可类似地证明.

7. 对c), 写$b=(b-b_Q)\chi_{Q^*}+(b-b_Q)\chi_{(Q^*)^c}+b_Q$. 利用$R_t(1)=0$, 只需对$R_t[(b-b_Q)\chi_{Q^*}]$在$Q^*$上做$L^2$估计, 对$R_t[(b-b_Q)\chi_{(Q^*)^c}]$在$\complement(Q^*)$上做$L^2$估计. 细节与a)的证明类似. □

习题 1. 证明: 若ψ 满足(18.6) 式且$|\psi|+|\nabla\psi(x)|\leq A(1+|x|)^{-n-\delta}$, 则(18.7)式成立. □

第十九讲　仿积

仿积算子是一种特殊而典型的非卷积型奇异积分算子(也是典型的仿微分算子). 我们将通过Carleson测度证明它是(2,2)型, 并验证它的核是C-Z核. 这可以用来证明一般的$T(1)$ 定理. 为此, 本讲最后我们计算仿积算子及其共轭(转置)算子在1 上的作用.

一　仿积的定义

仿积是通过对函数的 Littlewood–Paley 分解定义的. 为此, 我们先简要介绍L-P分解.

1. Littlewood–Paley 分解

设$\varphi(\xi)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)=C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是一个径向对称且单调递减的函数, 且满足条件

$$\begin{aligned} \varphi(\xi)&=1, &&\text{若}\quad |\xi|\le \frac{1}{2},\\ 0\le\varphi(\xi)&\le 1, &&\text{若}\quad \frac{1}{2}\le|\xi|<1,\\ \varphi(\xi)&=0, &&\text{若}\quad |\xi|\ge 1. \end{aligned}$$

我们定义

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi/2)-\varphi(\xi)\ge 0 \quad \text{和} \quad \psi_p(\xi)=\psi(2^{-p}\xi),\quad p\in\mathbb{Z}.$$

容易验证

$$\operatorname{supp}\psi\subset\left\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\right\},\quad \operatorname{supp}\psi_p\subset\left\{2^{p-1}\le|\xi|\le 2^{p+1}\right\},$$

$$\operatorname{supp}\psi_p\cap\operatorname{supp}\psi_q=\emptyset,\ (\psi_p\psi_q=0,)\ \text{若}\ |p-q|\ge 2,$$

以及如下除原点外点点成立的等式

$$1=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\psi_p(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}.$$

由此可得[1]

$$\frac{1}{2}\le\sum_{q\in\mathbb{Z}}\psi_q^2\le 1.$$

对于$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 当$\xi\neq 0$时成立

$$\hat{u}=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\psi_p(\xi)\hat{u}, \tag{19.1}$$

其中$\hat{u}=\mathcal{F}(u)$是u的Fourier 变换. 注意如果假设u在$\mathbb{R}^d$的积分平均为零, 那么$\hat{u}(0)=0$, 则(19.1)对于$\xi\in\mathbb{R}^d$都成立.

定义L-P算子

$$\triangle_p u=\mathcal{F}^{-1}(\psi_p(\xi)\hat{u}),\quad p\in\mathbb{Z},$$

[1] 记$I_0=\sum_{p=\text{偶数}}\psi_p(\xi), I_1=\sum_{p=\text{奇数}}\psi_p(\xi)$, 那么$1=(I_0+I_1)^2\le 2(I_0^2+I_1^2)$. 但是$I_0^2=\sum_{p=\text{偶数}}\psi_p(\xi)^2, I_1^2=\sum_{p=\text{奇数}}\psi_p(\xi)^2$. 再由$\psi_p$的非负性即得结论.

我们就得到广义函数u的齐次Littlewood–Paley (L-P) 分解:

$$u=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\triangle_p u.$$

注意对$u\in\mathcal{S}'$, 这里每一项$\triangle_p u$ 都是光滑函数. 对$q\in\mathbb{Z}$, 我们定义部分和为

$$S_q u=\sum_{p=-\infty}^{q-1}\triangle_p u=\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\hat{u}).$$

注意$\operatorname{supp}\mathcal{F}(S_q u)\subset\{|\xi|\le 2^q\}$.

由定义, 对任何$u\in\mathcal{S}'$,

$$\mathcal{F}(\triangle_q u)=\psi_q\hat{u},\ \ \text{且}\ \mathcal{F}(S_q u)=\varphi_q\hat{u},$$

其中$\varphi_q=\varphi(2^{-q}\xi)$. 现设速降函数$\Psi$和$\Phi$使得$\hat{\Psi}=\psi$, $\hat{\Phi}=\varphi$. 利用公式$(\mathcal{F}(\Phi_t))(\xi)=\hat{\varphi}(t\xi)$, 其中$\Phi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t), t>0$, 就有

$$\triangle_j u=\Psi_{2^{-j}}*u,\quad S_j u=\Phi_{2^{-j}}*u.$$

由于Φ,Ψ都是径向对称的, 所以$\triangle_j$ 和S_j都是对称算子(与其转置算子相等). 最后, 由于$\psi(0)=0$, 从而$\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(x)\,\mathrm{d}x=0$.

2. 仿积

我们知道, 一般说来, 对两个广义函数$u,v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 它们的乘积$uv$ 是没有定义的. 然而, 利用L-P分解, 我们可以在某种近似的意义下定义两个广义函数的积.

设$u=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\triangle_p u,\ \ v=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\triangle_q v$ 分别为u,v的L-P分解. 那么形式上就有[2]

$$\begin{aligned}uv &= \sum_{p,q\in\mathbb{Z}}\triangle_p u\triangle_q v\\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{p-3}\triangle_p u\triangle_q v+\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{q-3}\triangle_p u\triangle_q v+\sum_{|p-q|\le 2}\triangle_p u\triangle_q v\\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty}\triangle_p u S_{p-2}v+\sum_{q=-\infty}^{\infty}\triangle_q v S_{q-2}u+\sum_{|p-q|\le 2}\triangle_p u\triangle_q v.\end{aligned}$$

定义1. 给定g, 定义仿积算子$P_g(f)$为

$$P_g(f)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\triangle_q g S_{q-2}f. \tag{19.2}$$

于是在形式上我们有如下对称的分解$uv=P_v(u)+P_u(v)+R(u,v)$, 其中余项

$$R(u,v)=\sum_{|p-q|\le 2}\triangle_p u\triangle_q v.$$

[2]尽管即使当$u,v\in\mathcal{S}'$ 时前两项都有定义, 但如下原因使得uv 一般来说没有意义. 首先是最后一项仅有有界支集(支集不在环中); 其次, 这个等式隐含着极限换序, 而这一般是不允许的.

仿积定义的合理性 为了说明上述仿积的定义是合理的, 我们来看各项的谱(其Fourier变换后的支集). [3] 事实上, $\operatorname{supp}\mathcal{F}(\triangle_q v) \subset \{2^{q-1} \le |\xi| \le 2^{q+1}\}$, $\operatorname{supp}\mathcal{F}(S_{q-2}u) \subset \{\xi| \le 2^{q-2}\}$, 于是根据卷积的性质, 成立

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}(\triangle_q v S_{q-2}u) \subset \left\{\frac{1}{4}2^q \le |\xi| \le \frac{9}{4}2^q\right\}. \tag{19.3}$$

这就说明至少对$u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, (19.2)中的级数在$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$广义函数的意义下是收敛的, 从而(19.2)有意义.

二 仿积算子的(2,2)型

定理1. 取定$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ 和$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 则级数$\sum_{|j|\le M} \triangle_j b S_{j-2} f$ 当$M \to \infty$时在L^2中收敛.记此极限为$P_b(f)$. 由此定义的算子P_b 在L^2上有界, 并且成立

$$\|P_b\|_{L^2 \to L^2} \le C_d \|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

证明. 1. 对$b \in \mathrm{BMO}$, 定义测度

$$\mathrm{d}\mu(x,t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\triangle_j(b)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \delta_{2^{-(j-2)}}(t).$$

由上一讲知道μ是$\mathbb{R}^{n+1}_+$上的Carleson测度, 且$\|\mu\|_C \le C_n \|b\|^2_{\mathrm{BMO}}$. 对给定的$f \in L^2$, 我们再定义函数

$$F(x,t) = (\Phi_t * f)(x).$$

注意对任意$k \in \mathbb{Z}$, 成立$F(x, 2^{-k}) = S_k(f)(x)$.

2. 下面估计有限项$\triangle_j(b)S_{j-2}(f)$和的L^2范数. 对$M, N \in \mathbb{Z}$ 且$M \ge N$, 由Plancherel定理, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{N \le |j| \le M} \triangle_j(b)(x) S_{j-2}(f)(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{N \le |j| \le M} \left(\triangle_j(b)(x) S_{j-2}(f)(x)\right)^{\wedge}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi. \tag{19.4}$$

由于每个固定的ξ至多包含在四个形如(19.3)的环形区域中, 从而对此ξ, 后一式的被积分和式中至多有四项不为零. [4] 于是通过 Carleson 测度的性质, 得到

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{N \le |j| \le M} \left(\triangle_j(b)(x) S_{j-2}(f)(x)\right)^{\wedge}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
\le\ & 4 \sum_{N \le |j| \le M} \int_{\mathbb{R}^n} |(\triangle_j(b) S_{j-2}(f))^{\wedge}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\
\le\ & 4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |(\triangle_j(b) S_{j-2}(f))^{\wedge}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\
\le\ & 4 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |\triangle_j(b)(x) S_{j-2}(f)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
=\ & 4 \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |F(x,t)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x,t) \le C_n \|b\|^2_{\mathrm{BMO}} \int_{\mathbb{R}^n} |F^*(x)|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

[3]我们注意到下面各定理证明中的一个关键点, 就是考察各项的谱的支集性质.

[4]利用内积的 Cauchy–Schwartz 不等式, 成立$(\sum_{k=1}^n a_k)^2 \le n \sum_{k=1}^n a_k^2$.

进一步, 回忆$\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 从而存在径向对称的单调递减的可积的控制函数: $|\Phi(x)|\le C_n/(1+|x|)^{n+1}$. 于是$F^*(x)\le C_nMf(x)$, 从而$\int_{\mathbb{R}^n}|F^*(x)|^2\,\mathrm{d}x\le C_n\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)|^2\,\mathrm{d}x\le C_n\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$. 于是我们得到不等式

$$4\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}|(\triangle_j(b)S_{j-2}(f))^\wedge(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{19.5}$$

3. 利用上面的不等式, 可知对于任意$\varepsilon>0$, 存在N_0 使得当$M\ge N\ge N_0$时

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{N\le|j|\le M}\triangle_j(b)(x)S_{j-2}(f)(x)\right|^2\mathrm{d}x\le 4\sum_{N\le|j|\le M}\int_{\mathbb{R}^n}|(\triangle_j(b)S_{j-2}(f))^\wedge(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\le\varepsilon.$$

这就是说序列$\left\{\sum_{|j|\le M}\triangle_j(b)(x)S_{j-2}(f)(x)\right\}_{M=1}^\infty$ 是L^2中的Cauchy列. 记其极限为$P_b(f)$, 显然它关于f是线性的. 此外, 利用不等式(19.4) 和(19.5), 取$N=0$, 就得到

$$\left\|P_b(f)\right\|_{L^2}^2=\lim_{M\to\infty}\left\|\sum_{|j|\le M}\triangle_j(b)S_{j-2}(f)\right\|_{L^2}^2\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\left\|f\right\|_{L^2}^2,$$

从而P_b是L^2上有界线性算子且其算子范数不大于$C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}$. □

三 仿积算子的核

对给定$b\in\mathrm{BMO}$, 仿积算子P_b是一种典型的非卷积型Calderon–Zygmend 积分算子. 事实上, 下面我们将说明它的Schwarz核限制在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{(x,x):x\in\mathbb{R}^n\}$上是一个标准核.

我们首先对固定的j, 计算算子$f\mapsto\triangle_jbS_{j-2}f$ 的核. 不难得到

$$\triangle_jb(x)S_{j-2}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}L_j(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$L_j(x,y)=b*\Psi_{2^{-j}}(x)2^{n(j-2)}\Phi(2^{j-2}(x-y))$$

是个局部可积函数. 为了估计它的大小, 我们需要如下简单结论.

命题1. 对$b\in\mathrm{BMO}$, 成立$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left\|\Delta_jb\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

证明. 记$Q=Q(x_0,2^{-j})$ 是以x_0为中心, 边长为$\ell=2^{-j}$的方体, b_Q 为b在Q上的积分平均. 由于Ψ是速降函数, 而且积分平均为零, 我们有

$$\begin{aligned}|\Delta_jb(x_0)| &= \left|2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}b(x_0-y)\Psi(2^jy)\,\mathrm{d}y\right|=\left|2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}(b(x_0-y)-b_Q)\Psi(2^jy)\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}|\big(b(x_0-y)-b_Q\big)||\Psi(2^jy)|\,\mathrm{d}y\le\ell^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|(b(x_0-y)-b_Q)|\frac{C_n}{1+(\ell^{-1}|y|)^{n+1}}\,\mathrm{d}y\\ &= \ell\int_{\mathbb{R}^n}|(b(z)-b_Q)|\frac{C_n}{\ell^{n+1}+|z-x_0|^{n+1}}\,\mathrm{d}z\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

这里最后一个不等式利用了第十四讲的定理1. 命题得证. □

根据上述命题, 以及Φ的速降性, 就成立

$$|L_j(x,y)|\le C_n\|b\|_{\mathrm{BMO}}\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}},$$

并且对任意重指标α 和β, 根据Leibniz法则, 不难验证

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta L_j(x,y)| \le C_{n,\alpha,\beta,N}\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}\,\frac{2^{j(n+\alpha+\beta)}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1+N}},$$

这里$N \ge |\alpha|+|\beta|$.

当$x \ne y$时, 我们分解

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}} = \sum_{j:2^j|x-y|\le 1} \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}} + \sum_{j:2^j|x-y|\ge 1} \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}} = I + II.$$

对第一项, 根据等比级数求和得到

$$I \le \sum_{j:2^j|x-y|\le 1} 2^{jn} \le C_n |x-y|^{-n}.$$

对第二项, 得到

$$II \le |x-y|^{-n-1} \sum_{j:2^j|x-y|\ge 1} 2^{-j} \le C_n |x-y|^{-n}.$$

于是$\sum_j L_j(x,y)$ 绝对收敛, 而且

$$\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} L_j(x,y)\right| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|L_j(x,y)\right| \le C_n\,\|b\|_{\mathrm{BMO}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1}} \le C_n\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}\,|x-y|^{-n}.$$

我们记

$$L_b(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} L_j(x,y).$$

与前面类似, 对$x \ne y$, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta L_j(x,y)\right| &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta L_j(x,y)\right| = C_{n,\alpha,\beta,N}\,\|b\|_{\mathrm{BMO}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2^{j(n+\alpha+\beta)}}{(1+2^j|x-y|)^{n+1+N}} \\ &\le C_{n,\alpha,\beta}\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}\,|x-y|^{-(n+|\alpha|+|\beta|)}.\end{aligned}$$

于是$L_b(x,y)$ 可逐项求导, 而且我们最终证明了

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta L_b(x,y)\right| \le C_{n,\alpha,\beta}\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}\,|x-y|^{-(n+|\alpha|+|\beta|)}. \tag{19.6}$$

由此, 取定$x \notin \operatorname{supp} f$, 且设$\operatorname{supp} f$是紧集, 则由 Lesbegue 控制收敛定理,

$$(P_b f)(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\triangle_j b)(x)(S_{j-2} f)(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} L_j(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} L_b(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

所以我们知道了算子P_b的核就是$L_b(x,y)$, 而且它满足不等式(19.6). 这样我们就证明了

定理2. *仿积算子P_b的核是标准核, 即P_b是CZO算子.*

这样, 我们知道P_b的转置算子P_b^t也是C-Z算子, 而且核$L_b^t(x,y)=L_b(y,x)$. 另一方面, 根据转置算子定义,

$$\begin{aligned}(g,P_b^t(f)) &= (P_b(g),f)=\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j bS_{j-2}g,f\right)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\Delta_j bS_{j-2}g,f\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(S_{j-2}g,(\Delta_j b)f\right)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(g,S_{j-2}((\Delta_j b)f)\right)\\ &= \left(g,\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{j-2}((\Delta_j b)f)\right),\end{aligned}$$

所以$P_b^t(f))=\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{j-2}((\Delta_j b)f)$. 特别地, P_b^t是$(\mathcal{H}^1,L^1)$型.

四 仿积算子在1上的作用

为了证明$T(1)$定理, 我们需要如下结论.

定理3. 给定$b\in\mathrm{BMO}$, P_b是对应的仿积算子, 则$P_b(1)=b\in\mathrm{BMO}$, $P_b^t(1)=0\in\mathrm{BMO}$.

证明. 1. 取定 $\varphi\in\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ (积分为零的$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$函数), 以及一族一致有界的具有紧支集的光滑函数 $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$, 使得当 $N\to\infty$ 时, $\eta_N\to 1$. 不失一般性, 可设所有的 η_N 在 $B(y_0,3R)$ 上值为 1. 这里 $B(y_0,R)\supset\operatorname{supp}\varphi$. 我们可以定义 $P_b(1)$ (与 η_N 的选取无关), 使得 $\forall N\geq 1$, 成立(参见十六讲(16.10)式)

$$\begin{aligned}\langle P_b(1),\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j b(x)S_{j-2}(\eta_N)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}L_b(x,y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)(1-\eta_N(y))\,\mathrm{d}y\\ &= I+II.\end{aligned}$$

2. 先看积分II. 由于$\int\varphi\,\mathrm{d}x=0$, 则

$$\begin{aligned}|\mathrm{II}| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(L_b(x,y)-L_b(y_0,y)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)(1-\eta_N(y))\,\mathrm{d}y\right|\\ &\leq \int\limits_{|y-y_0|\geq 3R}\int\limits_{|x-y_0|<R}\frac{A|y_0-x|}{|y_0-y|^{n+1}}|1-\eta_N(y)|\cdot|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leq \int\limits_{|x-y_0|\leq R}A|x-y_0|\cdot|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\int\limits_{|y-y_0|\geq 3R}\frac{1-\eta_N(y)}{|y-y_0|^{n+1}}\,\mathrm{d}y\\ &\leq AR\|\varphi\|_{L^1}\int\limits_{|y-y_0|\geq 3R}\frac{1-\eta_N(y)}{|y-y_0|^{n+1}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于$N\to\infty$时$\dfrac{1-\eta_N(y)}{|y-y_0|^{n+1}}$关于$y$几乎处处收敛于零, 且$\dfrac{1-\eta_N(y)}{|y-y_0|^{n+1}}\leq\dfrac{2}{|y-y_0|^{n+1}}\in L^1(\complement B(y_0,3R))$, 由Lebesgue控制收敛定理, $\mathrm{II}\to 0$.

3. 再估计I. 只需证明 $I\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}b(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\quad(N\to\infty)$.

我们注意成立 $S_{j-2}(1)\equiv 1$, $\forall j\in\mathbb{Z}$. 事实上,

$$S_j(1)=1*\Phi_{2^{-j}}=\int\Phi_{2^{-j}}(y)\,\mathrm{d}y=1.$$

又 S_j和Δ_j都是对称算子, 利用卷积的性质, 成立

$$\int f S_j(g)\,\mathrm{d}x = \int g S_j(f)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^1,\ g \in L^\infty.$$

现在, 对 $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\Delta_j b) S_{j-2}(\eta_N)\varphi\,\mathrm{d}x \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_j b) S_{j-2}(\eta_N)\varphi\,\mathrm{d}x \quad [\eta_N \in L^2, \text{所以级数在} L^2 \text{中收敛, 又} \varphi \in L^2] \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_N S_{j-2}((\Delta_j b)\varphi)\,\mathrm{d}x \quad [S_j\text{是对称算子}] \\
=\ & \int_{\mathbb{R}^n} \eta_N \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-2}((\Delta_j b)\varphi)\,\mathrm{d}x \quad [\text{级数在}L^1\text{中收敛, 利用算子}P_b^t\text{的}(\mathcal{H}^1, L^1)\text{ 型}] \\
\to\ & \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-2}\Big((\Delta_j b)\varphi)\Big)\,\mathrm{d}x \ \ (N \to \infty). \quad [\text{控制收敛定理}] \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} S_{j-2}(\Delta_j b(\varphi))\,\mathrm{d}x \quad [\text{级数在}L^1\text{中收敛}] \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} S_{j-2}(1)(\Delta_j b)\varphi\,\mathrm{d}x \quad [S_j\text{是对称算子}] \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_j b)\varphi\,\mathrm{d}x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} b\Delta_j\varphi\,\mathrm{d}x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle b, \Delta_j\varphi\rangle \\
=\ & \langle b, \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j\varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

这里最后一个等号是因为$\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j\varphi$ 在$\mathcal{H}^1$中收敛到φ.[5] 于是积分$I \to \langle b, \varphi\rangle$. 这样我们就证明了$\forall \varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, 成立$\langle P_b(1), \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle$, 即在BMO空间中$P_b(1) = b$.

4. 接着证明 $P_b^t(1) = 0$. 由定义,

$$\langle P_b^t(1), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-2}(\Delta_j(b)\eta_N)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} L_b^t(x,y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right)(1 - \eta_N(y))\,\mathrm{d}y = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

与第2步一样, 可以证明$N \to \infty$时$\mathrm{II} \to 0$

5. 由于 φ 是 $\mathcal{H}^1$ 中的一个 (1,2) 原子的某个倍数, 又P_b和P_b^t 都是 $(\mathcal{H}^1, L^1)$ 型, 所以$P_b(\varphi) \in L^1$, 从而$N \to \infty$ 时$\int \eta_N P_b(\varphi) dx \to \int P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$\mathrm{I} = \int P_b^t(\eta_N)\varphi\mathrm{d}x = \int \eta_N P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x \to \int P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

所以下面只需证明$\int P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x = 0$.

[5]将在以后证明.

6. 由于P_b是$(\mathcal{H}^1,L^1)$型, $\varphi\in\mathcal{H}^1$, 所以级数 $\sum\limits_{j\in Z}\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)$ 在 L^1 中收敛. (这将在下面第7步直接证明.) 由此,

$$\int_{\mathbb{R}^n}P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)\,\mathrm{d}x=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

对每一项$j\in\mathbb{Z}$, 利用$\Delta_j(b)$和$S_{j-2}(\varphi)$的Fourier变换的支集不相交, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)\,\mathrm{d}x &= \Big(\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)\Big)^{\wedge}(0)=c_n\widehat{\Delta_j(b)}*\widehat{S_{j-2}(\varphi)}(0)\\ &= c_n\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\Delta_j(b)}(y)\widehat{S_{j-2}(\varphi)}(-y)\,\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

这就证明了 $\int P_b(\varphi)\,\mathrm{d}x=0$.

7. 下面证明积分与求和可以换序, 即级数 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j(b)S_{j-2}(\varphi)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中收敛. 由于$\varphi\in L^2$, 我们知道这个级数在L^2中收敛.

取球 $B=B(y_0,R)\supset\operatorname{supp}\varphi$, 则级数在 $L^2(3B)$ 中收敛, 从而在 $L^1(3B)$ 中收敛.

取定 $x\in\complement(3B)$, 又取 $\mathbb{Z}$ 的有限子集 F, 则利用对L_j及其导数的估计,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in F}\left|\int_{\mathbb{R}^n}L_j(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| &= \sum_{j\in F}\left|\int_B(L_j(x,y)-L_j(x,y_0)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|\\ &\le C_n\int_B\sum_{j\in F}\frac{|y-y_0|2^{nj}2^j}{(1+2^j|x-y_0|)^{n+2}}|\varphi(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\le C_n\frac{1}{|x-y_0|^{n+1}}\int_B|y-y_0|\cdot|\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \qquad \text{[此步待证]}\\ &\le C_nR\|\varphi\|_{L^1}\frac{1}{|x-y_0|^{n+1}}\end{aligned}$$

将上式两边关于$x\in\complement(3B)$积分, 就得到

$$\sum_{j\in F}\|\Delta_jbS_{j-2}(\varphi)\|_{L^1((3B)^c)}\le C_n\|\varphi\|_{L^1},$$

从而$\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jbS_{j-2}(\varphi)$在$L^1(\mathbb{R}^n)$中收敛.

8. 下面证明 $\sum\limits_{j\in F}\dfrac{2^{nj}2^j}{(1+2^j|x-y_0|)^{n+2}}\le C_n\dfrac{1}{|x-y_0|^{n+1}}$.

令 $J_1=\{j:2^j|x-y_0|\ge1\}\cap F, J_2=\{j:2^j|x-y_0|<1\}\cap F$, 则左边和式可分解为$\sum\limits_{J_1}+\sum\limits_{J_2}$两部分. 利用等比级数求和, 就有

$$\begin{aligned}\sum_{J_1} &\le \sum_{J_1}\frac{2^{(n+1)j}}{2^{(n+2)j}|x-y_0|^{n+2}}=\frac{1}{|x-y_0|^{n+2}}\sum_{J_1}\frac{1}{2^j}\\ &\le \frac{1}{|x-y_0|^{n+2}}(C_n|x-y_0|)=\frac{C_n}{|x-y_0|^{n+1}},\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{J_2}\le\sum_{J_2}2^{(n+1)j}\le C_n\left(\frac{1}{|x-y_0|}\right)^{n+1}.$$

从而不等式得证. □

第二十讲　几乎正交与算子可加性

独立与前面的内容, 这一讲我们介绍调和分析中研究 Hilbert 空间中线性算子有界性的常用的一个方法: 将算子分解为一列算子的和, 利用这列算子本身的有界性及它们之间的几乎正交性来求和, 证明和算子的有界性. 我们首先介绍基于泛函分析的 Cotlar–Knapp–Stein 几乎正交算子列收敛定理, 然后讨论一类用积分核函数性质刻画的算子列的求和, 后者将和仿积算子一起, 用来证明下一讲的关于C-Z算子L^2 有界性的$T(1)$ 定理.

一　Cotlar–Knapp–Stein 几乎正交定理

定理1. *设 $\{T_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一族有界线性算子. 设存在函数 $\gamma:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^+$ 使得*

$$\left\|T_j^*T_k\right\|_{H\to H}+\left\|T_jT_k^*\right\|_{H\to H}<\gamma(j-k),\quad \forall\ j,k\in\mathbb{Z}. \tag{20.1}$$

又设 $A=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sqrt{\gamma(j)}<\infty$. 则以下结论成立:

a) 对 $\mathbb{Z}$ 的任何一个有限子集Λ, 都成立 $\left\|\sum_{j\in\Lambda}T_j\right\|_{H\to H}\le A$;

b) $\forall x\in H$, 成立 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|T_j(x)\right\|_H^2\le A^2\|x\|_H^2$;

c) $\forall x\in H$, 当$N\to\infty$时序列 $\sum_{|j|\le N}T_j(x)$ 在 H 中收敛到某个 $T(x)$. 由此定义的线性算子T在H上有界, 而且$\|T\|_{H\to H}\le A$.

证明. 1. 先证明a). 回顾泛函分析结论: 记S^*为S的共轭算子, 则$\|S^*\|_{H\to H}=\|S\|_{H\to H}$, $\|S^*S\|_{H\to H}=\|SS^*\|_{H\to H}=\|S\|_{H\to H}^2$. 在条件(20.1)中, 取$j=k$, 就得到 $2\left\|T_jT_j^*\right\|_{H\to H}\le\gamma(0)\Rightarrow\left\|T_j\right\|\le\sqrt{\gamma(0)}$. 又若 $S=S^*$, 则 $\left\|S^2\right\|=\|S\|^2$. 更一般地, $\|S^m\|=\|S\|^m$, 其中, $m=2^k$. 于是对 $S=\left(\sum_{j\in\Lambda}T_j\right)\left(\sum_{j\in\Lambda}T_j^*\right)$, 由于$S=S^*$, 成立

$$\left\|\sum_{j\in\Lambda}T_j\right\|^2=\left\|\left[\left(\sum_{j\in\Lambda}T_j\right)\left(\sum_{j\in\Lambda}T_j^*\right)\right]^m\right\|^{\frac{1}{m}}=\left\|\sum_{j_1,\cdots,j_{2m}\in\Lambda}(T_{j_1}T_{j_2}^*)(T_{j_3}T_{j_4}^*)\cdots(T_{j_{2m-1}}T_{j_{2m}}^*)\right\|^{\frac{1}{m}}.$$

我们分两种方法估计右端表达式. 一是

$$\begin{aligned}\left\|(T_{j_1}T_{j_2}^*)(T_{j_3}T_{j_4}^*)\cdots(T_{j_{2m-1}}T_{j_{2m}}^*)\right\| &\le \left\|T_{j_1}T_{j_2}^*\right\|\left\|T_{j_3}T_{j_4}^*\right\|\cdots\left\|T_{j_{2m-1}}T_{j_{2m}}^*\right\|\\ &\le \gamma(j_1-j_2)\gamma(j_3-j_4)\cdots\gamma(j_{2m-1}-j_{2m}),\end{aligned}$$

再是写为

$$\begin{aligned}\left\|T_{j_1}(T_{j_2}^*T_{j_3})\cdots(T_{j_{2m-2}}^*T_{j_{2m-1}})T_{j_{2m}}^*\right\| &\le \left\|T_{j_1}\right\|\cdot\left\|T_{j_2}^*T_{j_3}\right\|\cdots\left\|T_{j_{2m-2}}^*T_{j_{2m-1}}\right\|\cdot\left\|T_{j_{2m}}^*\right\|\\ &\le \sqrt{\gamma(0)}\gamma(j_2-j_3)\gamma(j_4-j_5)\cdots\gamma(j_{2m-2}-j_{2m-1})\sqrt{\gamma(0)}.\end{aligned}$$

两式相乘再开方, 就得到

$$\left\|T_{j_1}T_{j_2}^*\cdots T_{j_{2m-1}}T_{j_{2m}}^*\right\|\le\sqrt{\gamma(0)}\sqrt{\gamma(j_1-j_2)\gamma(j_2-j_3)\gamma(j_3-j_4)\cdots\gamma(j_{2m-1}-j_{2m})}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j\in\Lambda}T_j\right\|^2 &\le \left(\sum_{j_1,j_2,\cdots j_{2m}\in\Lambda}\sqrt{\gamma(0)}\sqrt{\gamma(j_1-j_2)}\cdots\sqrt{\gamma(j_{2m-1}-j_{2m})}\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\le \left(\sqrt{\gamma(0)}\sum_{j_{2m}\in\Lambda}\sum_{j_{2m-1}\in\Lambda}\left(\cdots\left(\sum_{j_2\in\Lambda}\left(\sum_{j_1\in\Lambda}\sqrt{\gamma(j_1-j_2)}\right)\sqrt{\gamma(j_2-j_3)}\right)\cdots\sqrt{\gamma(j_{2m-1}-j_{2m})}\right)\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\le \left(\sum_{j_{2m}\in\Lambda}A^{2m-1}\sqrt{\gamma(0)}\right)^{\frac{1}{m}}=\gamma(0)^{\frac{1}{2m}}A^{\frac{2m-1}{m}}|\Lambda|^{\frac{1}{m}}\to A^2.\ \ (m\to\infty)
\end{aligned}$$

注意左边与m无关, 这就证明了$\left\|\sum\limits_{j\in\Lambda}T_j\right\|\le A$.

2. 接着证明b). 我们要用到 Rademacher 函数

$$r_j(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2^j\pi t),\quad j\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ t\in[0,1].$$

不难验证这族函数满足如下性质:

- 正交性: $\displaystyle\int_0^1 r_j(\omega)r_k(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0 & j\ne k,\\ 1 & j=k;\end{cases}$
- $r_j(\omega)$ 取值或为 1, 或为 -1.

现在, 固定$x\in H$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left\|\sum_{j\in\Lambda}r_j(\omega)T_j(x)\right\|_H^2\mathrm{d}\omega &= \int_0^1\left\langle\sum_{j\in\Lambda}r_j(\omega)T_j(x),\sum_{k\in\Lambda}r_k(\omega)T_k(x)\right\rangle_H\mathrm{d}\omega\\
&=\sum_{j\in\Lambda}\left\|T_j(x)\right\|_H^2+\int_0^1\sum_{j,k\in\Lambda,\ j\ne k}r_j(\omega)r_k(\omega)\left\langle T_j(x),T_k(x)\right\rangle_H\mathrm{d}\omega\\
&=\sum_{j\in\Lambda}\left\|T_j(x)\right\|_H^2.
\end{aligned}$$

对固定的 $\omega\in[0,1]$, 对算子族 $r_j(\omega)T_j$ 用结论a) (注意条件(20.1)仍然成立, 因为$r_j(\omega)=\pm1$), 就得到 $\left\|\sum_{j\in\Lambda}r_j(\omega)T_j(x)\right\|_H\le A\|x\|_H$, 从而

$$\sum_{j\in\Lambda}\left\|T_j(x)\right\|_H^2=\int_0^1\left\|\sum_{j\in\Lambda}r_j(\omega)T_j(x)\right\|_H^2\mathrm{d}\omega\le A^2\|x\|_H^2.$$

由Λ任意性, 就得到$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|T_jx\right\|_H^2\le A^2\|x\|_H^2$. b)得证.

3. 下面我们用反证法证明c). 假设$\left\{\sum_{j=-N}^N T_j(x)\right\}_N$不是$H$ 中的Cauchy 列, 则$\exists\varepsilon>0$, $1\le N_1<N_2<\cdots$ 使得

$$\|\widetilde{T}_k(x)\|_H\ge\varepsilon,$$

这里$\widetilde{T}_k(x)=\displaystyle\sum_{N_k\le|j|<N_{k+1}}T_j(x)$.

对固定的$\omega\in[0,1]$, 置$S_j(x)=r_k(\omega)T_j$, 其中$N_k\le|j|<N_{k+1}$. 易知对S_j 成立a), 从而

$$\left\|\sum_{l=1}^{k} r_l(\omega)\widetilde{T}_l(x)\right\|_H=\left\|\sum_{l=1}^{k}\sum_{N_l\le|j|<N_{l+1}} r_l(\omega)T_j(x)\right\|_H\le A\|x\|_H.$$

将上式两边平方并关于ω 在$[0,1]$ 上积分, 则

$$\int_0^1\left\|\sum_{l=1}^{k} r_l(\omega)\widetilde{T}_l(x)\right\|_H^2 \mathrm{d}\omega\le A^2\|x\|_H^2.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\|\sum_{l=1}^{k} r_l(\omega)\widetilde{T}_l(x)\right\|_H^2 \mathrm{d}\omega &= \int_0^1\left\langle\sum_{l=1}^{k} r_l(\omega)\widetilde{T}_l(x),\sum_{m=1}^{k} r_m(\omega)\widetilde{T_m}(x)\right\rangle \mathrm{d}\omega\\ &= \int_0^1\sum_{l=1}^{k} r_l(\omega)^2\langle\widetilde{T}_l(x),\widetilde{T}_l(x)\rangle\,\mathrm{d}\omega\\ &= \sum_{l=1}^{k}\|\widetilde{T}_l(x)\|_H^2,\end{aligned}$$

因此, 我们证明了$\sum\limits_{l=1}^{k}\|\widetilde{T}_l(x)\|_H^2\le A^2\|x\|_H^2$, 即级数$\sum\limits_{l\in\mathbb{N}}\|\widetilde{T}_l(x)\|_H^2$ 收敛. 这与$\|\widetilde{T}_k(x)\|_H^2\ge\varepsilon^2$ 矛盾!

所以我们得知$\left\{\sum_{j=-N}^{N}T_j(x)\right\}_N$是Hilbert空间$H$ 中的Cauchy列. 于是极限存在, 记为

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}T_j(x)=T(x).\quad H \text{ 中收敛}$$

由已证明的性质a), 就有

$$\|Tx\|_H=\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{j=-N}^{N}T_j(x)\right\|_H\le\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{j=-N}^{N}T_j\right\|_{H\to H}\|x\|_H\le A\,\|x\|_H.$$

即$\|T\|_{H\to H}\le A$. □

二 积分算子的可加性

下面我们利用 Cotlar–Knapp–Stein 几乎正交性定理来证明如下用积分核刻画的相应的算子的和的收敛的结论. 下一讲中$T(1)$ 定理是基于这个结论证明的.

定理2. 对$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的一族函数$K_j(x,y)(j\in\mathbb{Z})$, 设存在常数$0<\delta,A,\gamma<\infty$ 使得$K_j(x,y)$ 满足

1) 奇性强度条件:

$$|K_j(x,y)|\le\frac{A2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}};$$

2) 正则性条件:

$$|K_j(x,y)-K_j(x,y')|\le A2^{\gamma j}2^{nj}|y-y'|^{\gamma},\quad 若\ 2^j|y-y'|<1,$$

$$|K_j(x,y)-K_j(x',y)|\le A2^{\gamma j}2^{nj}|x-x'|^{\gamma},\quad 若\ 2^j|x-x'|<1;$$

3) 消失性条件: $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

定义$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 则级数$\sum_{j\in\mathbb{Z}} T_j(f)$ 在L^2 中收敛于某个函数Tf. 由此定义的T 为L^2 上的有界线性算子: $\|T\|_{L^2\to L^2} \le C_{n,\delta,\gamma} A$.

为证明这个定理, 我们需要如下 Schur 定理:

定理3 (Schur 定理)**.** 设$K(x,y)$ 是乘积测度空间$(X\times Y, \mu\times\nu)$上的局部可积函数, 且

$$\sup_{x\in X} \int_Y |K(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = A < \infty, \quad \sup_{y\in Y} \int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) = B < \infty.$$

则$Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$($f \in L^\infty(Y,\nu)$具有紧支集) 可延拓为$L^p(Y,\nu) \mapsto L^p(X,\mu)$ 上的有界线性算子, 且

$$\|T\| \le A^{1-\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p \le \infty).$$

证明. 由条件易知

$$|(Tf)(x)| \le A\|f\|_{L^\infty}, \quad \forall x \in X,$$

从而算子T 是(∞,∞) 型. 下证T 为$(1,1)$ 型:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^1} &\le \int_X \left| \int_Y K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \\
&\le \int_Y \left(\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) |f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&\le B\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

利用Riesz 插值定理即得结论. □

由Schur 定理易知定理2中定义的每个算子T_j 都是$L^2(Y) \mapsto L^2(X)$ 的有界线性算子. 下面是定理2的证明.

证明. 1. 我们要证明

$$\|T_j^* T_k\| \le cA^2 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)|j-k|}, \tag{20.2}$$

$$\|T_j T_k^*\| \le cA^2 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)|j-k|}. \tag{20.3}$$

这里$0 < c = c(n,\gamma,\delta) < \infty$.

如果式(20.2)(20.3) 都成立, 则可定义函数$\gamma(j)$为

$$\gamma(j) = 2cA^2 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)|j|},$$

它满足

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sqrt{\gamma(j)} = \sqrt{2c}A \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-B|j|} < \infty,$$

这里$B = \frac{1}{8}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)$. 于是利用Cotlar–Knapp–Stein 几乎正交性定理我们就证明了结论.

2. 我们只需证明(20.2)式. 这是因为可在(20.2) 式中将T_j 换成T_j^*, 而T_j^* 的积分核满足与$K_j(x,y)$ 相同的条件. 因此(20.3) 式可由(20.2) 式直接推出.

3. 对(20.2)式, 我们只需证明$j \ge k$ 的情形. 事实上, 当$j \le k$时, 我们有

$$\|T_j^* T_k\| = \|(T_k^* T_j)^*\| = \|T_k^* T_j\| \le cA^2 2^{-2B|k-j|},$$

同样得到了(20.2) 式.

4. 下面对$j \geq k$ 的情形证明(20.2) 式. 事实上, 由

$$T_k f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_k(y,z) f(z)\,\mathrm{d}z, \quad T_j^* f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_j(y,x)} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

我们得到

$$\begin{aligned}(T_j^* T_k)(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_j(y,x)} K_k(y,z) f(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_j(y,x)} K_k(y,z)\,\mathrm{d}y f(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

从而$T_j^* T_k$ 的积分核是$L_{jk}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_j(z,x)} K_k(z,y)\,\mathrm{d}z$.

利用Schur 定理可知, 我们只需证明:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |L_{jk}(x,y)|\,\mathrm{d}y \leq cA^2 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)|j-k|},$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |L_{jk}(x,y)|\,\mathrm{d}x \leq cA^2 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)|j-k|}.$$

5. 为此, 我们证明: 对$k \leq j$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{nj}\min(1, 2^{k\gamma}|u|^\gamma)}{(1+2^j|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u \leq C_{n,\delta} 2^{-\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)(j-k)}.$$

事实上, 我们只需证明$j = 0\,(k \leq 0)$ 的情形. 这是因为当$j \neq 0$ 时, 可令$\tilde{u} = 2^j u$, 从而

$$\begin{aligned}\text{等式左边} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min(1, 2^{k\gamma}|\tilde{u}2^{-j}|^\gamma)}{(1+|\tilde{u}|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}\tilde{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min(1, 2^{\tilde{k}\gamma}|\tilde{u}|^\gamma)}{(1+|\tilde{u}|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}\tilde{u} \quad (\tilde{k} = k - j \leq 0) \\ &\leq C_{n,\delta} 2^{-\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)(-\tilde{k})} = C_{n,\delta} 2^{-\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)(j-k)},\end{aligned}$$

即得一般情形.

当$j = 0\,(k \leq 0)$时, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min(1, 2^{k\gamma}|u|^\gamma)}{(1+|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u \\ =\ & \int_{|u|\leq 2^{-k}} \frac{\min(1, (2^k|u|)^\gamma)}{(1+|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u + \int_{|u|>2^{-k}} \frac{\min(1, (2^k|u|)^\gamma)}{(1+|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u \\ \leq\ & \int_{|u|\leq 2^{-k}} \frac{(2^k|u|)^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)}}{(1+|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u + \int_{|u|>2^{-k}} \frac{1}{(1+|u|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u \\ \leq\ & 2^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)k} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|u|)^{n+\delta/2}}\,\mathrm{d}u + \int_{|u|>2^{-k}} \frac{1}{|u|^{n+\delta}}\,\mathrm{d}u \\ =\ & C_{n,\delta} 2^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)k} + C_{n.\delta} 2^{k\delta} \\ \leq\ & C_{n,\delta} 2^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)k}. \quad [\text{注意}\ \ (k \leq 0)]\end{aligned}$$

这里第二个"≤"是因为$|u|^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)k} \leq (1+|u|)^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)k} \leq (1+|u|)^{\frac{\delta}{2}}$.

6. 回到第4步的问题. 当$k \le j$ 时,

$$\begin{aligned} |L_{j,k}(x,y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_j(z,x)} K_k(z,y)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\le \left|\int_{\mathbb{R}^n} [K_k(z,y)-K_k(x,y)]\overline{K_j(z,x)}\,\mathrm{d}z\right| \\ &\le 2A^2 \int_{\mathbb{R}^n} 2^{nk} \min(1,(2^k|x-z|)^\gamma) \frac{2^{nj}}{(1+2^j|z-x|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

事实上, 当$(2^k|x-z|)^\gamma \le 1$时, 利用正则性条件, 可得

$$|K_k(z,y)-K_k(x,y)| \le A2^{nk}(2^k|x-z|)^\gamma;$$

当$(2^k|x-z|)^\gamma > 1$时, 利用奇性强度条件, 可得

$$|K_k(z,y)-K_k(x,y)| \le |K_k(z,y)|+|K_k(x,y)| \le 2A2^{nk};$$

再对$K_j(z,x)$ 运用奇性强度条件即可得到上述关于$L_{j,k}(x,y)$ 的不等式.

于是利用第5步所证的不等式, 可得

$$|L_{j,k}(x,y)| \le CA^2 2^{nk} 2^{-\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)(j-k)}. \tag{20.4}$$

7. 另一方面, 对$k \le j$,

$$\begin{aligned} |L_{j,k}(x,y)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{K_j(z,x)}||K_k(z,y)|\,\mathrm{d}z \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A2^{nj}}{(1+2^j|z-x|)^{n+\delta}} \frac{A2^{nk}}{(1+2^k|z-y|)^{n+\delta}}\,\mathrm{d}z \\ &\le CA^2 \frac{2^{nk}}{(1+2^k|y-x|)^{n+\delta}}. \end{aligned} \tag{20.5}$$

这里用到了以下事实:

引理1. $\forall a,b \in \mathbb{R}^n$, $\forall \mu,\nu \in \mathbb{R}$, $\forall M,N \in \mathbb{R}, M,N > n$, 成立

$$\begin{aligned} I[a,\mu,M,b,\nu,N] &\triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{\mu n}}{(1+2^\mu|x-a|)^M} \frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|x-b|)^N}\,\mathrm{d}x \\ &\le C\frac{2^{\min(\mu,\nu)n}}{(1+2^{\min(\mu,\nu)}|a-b|)^{\min(M,N)}}, \end{aligned}$$

其中$C = \omega_n\left(\frac{M4^N}{M-n}+\frac{N4^M}{N-n}\right)$.

8. 利用对$L_{j,k}(x,y)$ 的两个估计, 即(20.4) 和(20.5), 我们得到

$$\begin{aligned} |L_{jk}(x,y)| &\le \left(CA^2 2^{nk} 2^{-\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta)(j-k)}\right)^{\frac{\frac{\delta}{2}}{n+\delta}} \left(CA^2 \frac{2^{nk}}{(1+2^k|y-x|)^{n+\delta}}\right)^{\frac{n+\frac{\delta}{2}}{n+\delta}} \\ &= \frac{CA^2 2^{nk} 2^{-\frac{1}{4}\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)(j-k)}}{(1+2^k|x-y|)^{n+\frac{\delta}{2}}}. \end{aligned}$$

所以, 我们计算得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|L_{jk}(x,y)|\mathrm{d}y &\le CA^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^{nk}}{(1+2^k|x-y|)^{n+\frac{\delta}{2}}}\mathrm{d}y\,2^{-\frac14\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)(j-k)}\\ &\le cA^2 2^{-\frac14\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)(j-k)},\\ \int_{\mathbb{R}^n}|L_{jk}(x,y)|\mathrm{d}x &\le CA^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^{nk}}{(1+2^k|x-y|)^{n+\frac{\delta}{2}}}\mathrm{d}x\,2^{-\frac14\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)(j-k)}\\ &\le cA^2 2^{-\frac14\frac{\delta}{n+\delta}\min(\gamma,\delta)(j-k)}.\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明. □

最后我们给出引理1的证明概要.

证明. 1. 首先我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^M}\le\frac{\omega_n}{M-n}\,(M>n).$$

这里ω_n 是$n-1$ 维单位球面表面积.

不妨设$\nu\le\mu$, 以下分两种情形讨论.

2. 当$2^\nu|a-b|\le 1$ 时, 有

$$\frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|x-b|)^N}\le 2^{\nu n}\le\frac{2^{\nu n}2^{\min(M,N)}}{(1+2^\nu|a-b|)^{\min(M,N)}},$$

从而

$$\begin{aligned}I[a,\mu,M,b,\nu,N] &\le \frac{2^{\nu n}2^{\min(M,N)}}{(1+2^\nu|a-b|)^{\min(M,N)}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^{\mu n}}{(1+2^\mu|x-a|)^M}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^{\min(M,N)}}2^{\min(M,N)}\frac{\omega_n}{M-n}.\end{aligned}$$

3. 当$2^\nu|a-b|>1$ 时, 我们记$H_a=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-a|<|x-b|\}$, $H_b=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-b|<|x-a|\}$分别是包含$a$和$b$的以线段$\overline{ab}$中垂平面为分界面的半空间. 下面将积分分别在$H_a$和$H_b$ 上估计.

$\forall x\in H_b$, 注意到成立$|x-a|>\frac12|a-b|$, 再利用$2^{\mu-1}|a-b|=2\cdot2^\nu|a-b|2^{\mu-\nu-2}\ge 2^{\mu-\nu-2}(2^\nu|a-b|+1)$, 我们有

$$\frac{2^{\mu n}}{(1+2^\mu|x-a|)^M}\le\frac{2^{\mu n}}{(2^\mu\frac12|a-b|)^M}\le\frac{4^M2^{(\nu-\mu)(M-n)}2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^M}.$$

所以, 注意到我们假设$\nu\le\mu$, $M>n$, 则

$$\begin{aligned}\int_{H_b}\frac{2^{\mu n}}{(1+2^\mu|x-a|)^M}\frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|x-b|)^N}\mathrm{d}x &\le \frac{4^M2^{(\nu-\mu)(M-n)}2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^M}\int_{H_b}\frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|x-b|)^N}\mathrm{d}x\\ &\le \frac{\omega_n}{N-n}\frac{4^M2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^M}\\ &\le \frac{\omega_n4^M}{N-n}\frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^{\min(M,N)}}.\end{aligned}\tag{20.6}$$

4. $\forall x\in H_a$, 可类似证明. 事实上, 根据$2^{\nu-1}|a-b|=2\cdot2^\nu|a-b|2^{-2}\ge 2^{-2}(2^\nu|a-b|+1)$, 并注意$|x-b|\ge\frac12|a-b|$, 可得

$$\frac{2^{\nu n}}{(1+2^\nu|x-b|)^N}\le\frac{2^{\nu n}}{(2^\nu\frac12|a-b|)^N}\le\frac{4^N2^{\nu n}}{(1+2^\nu|a-b|)^N}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{H_a}\frac{2^{\mu n}}{(1+2^{\mu}|x-a|)^M}\frac{2^{\nu n}}{(1+2^{\nu}|x-b|)^N}\,\mathrm{d}x &\le \frac{4^N2^{\nu n}}{(1+2^{\nu}|a-b|)^N}\int_{H_a}\frac{2^{\mu n}}{(1+2^{\mu}|x-a|)^M}\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{\omega_n}{M-n}\frac{4^N2^{\nu n}}{(1+2^{\nu}|a-b|)^N}\\ &\le \frac{\omega_n4^N}{M-n}\frac{2^{\nu n}}{(1+2^{\nu}|a-b|)^{\min(M,N)}}.\end{aligned}\tag{20.7}$$

将(20.6)和(20.7)相加就得所证. □

三 几乎正交算子列求和的其它结果

下面介绍一个较 Cotlar–Knapp–Stein 定理简单的关于几乎正交算子列求和的结果. 我们将在第二十二讲证明一类拟微分算子的L^2有界性时用到它.

定理4. *设$\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是Hilbert空间H上的一族有界线性算子, 且存在常数A和函数$\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ 使得$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma(j)\le A$, 并且*

1) $\|T_j\|_{H\to H}\le A$;

2) $T_jT_k^*=0$, 若$j\ne k$;

3) $\|T_j^*T_k\|_{H\to H}\le\gamma(j)\gamma(k)$, 若$j\ne k$.

那么$T=\sum_j T_j$也是H上的有界线性算子, 且$\|T\|_{H\to H}\le\sqrt{2}A$.

证明. 1. 由2), T_j^*的象空间$\mathrm{R}(T_j)$是互相正交的. 事实上, $\forall f,g\in H$, $j\ne k$, 成立

$$\langle T_j^*f,T_k^*g\rangle=\langle T_kT_j^*f,g\rangle=0.$$

记E_j是H到$\mathrm{R}(T_j)$的投影算子, 那么$\{E_j\}$相互正交, 而且成立$T_j^*=E_jT_j^*$, 即$T_j=T_jE_j$. 从而

$$\sum_j\|T_jf\|^2\le A^2\sum_j\|E_jf\|^2\le A^2\|f\|^2.$$

2. 现在考虑算子$\sum_{N<|j|\le M}T_j$. 根据

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{N\le|j|<M}T_jf\Big\|^2 &= \sum_{N\le|i|<M,\ N\le|j|<M}\langle T_if,T_jf\rangle=\sum_{N\le|i|<M}\|T_if\|^2+\sum_{N\le|i|<M,\ N\le|j|<M,\ i\ne j}\langle T_j^*T_if,f\rangle\\ &\le \sum_{N\le|i|<M}\|T_if\|^2+\sum_{N\le|i|<M,\ N\le|j|<M,\ i\ne j}\gamma(i)\gamma(j)\|f\|^2\\ &\le \sum_{N\le|i|<M}\|T_if\|^2+\Big(\sum_{N\le|i|<M}\gamma(i)\Big)\Big(\sum_{N\le|j|<M}\gamma(j)\Big)\|f\|^2\le 2A^2\|f\|^2,\end{aligned}$$

不难看出$\sum_{N\le|j|<M}T_jf$是H中的Cauchy列, 从而和式$\sum_jT_j$确定了H上一个有界线性算子T. 取$N=0$, 从上式就可得$\|Tf\|^2\le 2A^2\|f\|^2$, 即$\|T\|\le\sqrt{2}A$. □

第二十一讲　$T(1)$ 定理

在这一讲, 我们将利用前面的几乎正交性定理和仿积算子的性质证明保证非卷积型奇异积分算子(2,2)型的$T(1)$定理.

一　$T(1)$ 定理

定义1. 称一个支集在$B(0,10)$ 内的$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数φ 为标准包, 若$\forall|\alpha|\le 2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1$, 成立

$$\sup_x|\partial_x^\alpha\varphi(x)|\le 1.$$

回忆记号$f_R(x)=\frac{1}{R^n}f(\frac{x}{R})$, $\tau^{x_0}f(x)=f(x-x_0)$. 我们有

$$\begin{aligned}\|\tau^{x_0}f_R\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{R^{2n}}\left|f(\frac{x-x_0}{R})\right|^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{R^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\left(\frac{x-x_0}{R}\right)\right|^2\mathrm{d}\left(\frac{x}{R}\right)=R^{-n}\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

定义2. 称连续线性算子$T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\mapsto\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 满足**弱有界性条件**, 如果$\exists C$ 使得对任意标准包f,g, $\forall x_0\in\mathbb{R}^n,R>0$, 都成立

$$|\langle T(\tau^{x_0}f_R),\tau^{x_0}g_R\rangle|\le CR^{-n}.$$

我们记使上式成立的最小的C 为$\|T\|_{\mathrm{WB}}$.

易知C-Z算子满足弱有界性条件. 事实上, 若$T:L^2\to L^2$ 为C-Z 算子, 则

$$\begin{aligned}|\langle T(\tau^{x_0}f_R),\tau^{x_0}g_R\rangle| &\le \|T(\tau^{x_0}f_R)\|_{L^2}\|\tau^{x_0}g_R\|_{L^2}\\ &\le \|T\|_{L^2\to L^2}R^{-n}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\\ &\le C_n\|T\|_{L^2\to L^2}R^{-n}\quad(f,g\text{均为标准包}),\end{aligned}$$

且$\|T\|_{\mathrm{WB}}\le C_n\|T\|_{L^2\to L^2}$.

定理1 (T(1)定理)**.** 设$K\in SK(\delta,A)$, T: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是从属于K 的的连续线性算子. 则T 可延拓为L^2 上有界线性算子的充分必要条件是

$$\|T(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\|T^t(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\|T\|_{\mathrm{WB}}\le B<\infty.$$

此时$\|T\|_{L^2\to L^2}\le C_{n,\delta}(A+B)$.

回忆由第十六讲定义4, 这里的$T(1),T^t(1)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$都是有意义的.

证明.　定理的必要性显然成立. 事实上, 若T 为L^2 上有界线性算子, 则T 为C-Z 算子, 从而$\|T(1)\|_{\mathrm{BMO}}$, $\|T^t(1)\|_{\mathrm{BMO}}$, $\|T\|_{\mathrm{WB}}$ 均有界. 下面是充分性的证明.

1. 对仿积算子$P_{T(1)}$ 和$P_{T^t(1)}$, 我们有

$$P_{T(1)}(1)=T(1),\quad P_{T^t(1)}(1)=T^t(1),\quad P^t_{T(1)}(1)=0,\quad P^t_{T^t(1)}(1)=0.$$

若定义$L=T-P_{T(1)}-P^t_{T^t(1)}$, 则

$$\begin{aligned}L(1)=T(1)-P_{T(1)}(1)-P^t_{T^t(1)}(1)=0,\\ L^t(1)=T^t(1)-P^t_{T(1)}(1)-P_{T^t(1)}(1)=0.\end{aligned}$$

又根据仿积算子核的估计, 可知L对应的积分核仍满足奇性强度条件及正则性条件, 属于类$SK(\delta, A+\|T(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\|T^t(1)\|_{BMO})$. 这里注意我们有

$$\begin{aligned}\|L\|_{\mathrm{WB}} &\le C_n\left(\|T\|_{\mathrm{WB}}+\|P_{T(1)}\|_{L^2\to L^2}+\|P^t_{T^t(1)}\|_{L^2\to L^2}\right)\\ &\le C_n\left(\|T\|_{\mathrm{WB}}+\|T(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\|T^t(1)\|_{\mathrm{BMO}}\right)\\ &\le C_n(A+B).\end{aligned}$$

所以下面只需证明L 为L^2 有界的.

2. 引入算子Δ_j 和S_j. 取C^∞ 径向对称实值函数Φ, 设

$$\operatorname{supp}\Phi\subseteq B(0,1/2), \text{ 且} \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

又定义

$$\Psi(x)=\Phi(x)-2^{-n}\Phi(x/2),$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Psi(x)\,\mathrm{d}x=0, \operatorname{supp}\Psi\subseteq B(0,1),$$

且Φ,Ψ 均为标准包的常数倍. 记

$$\Phi_{2^{-j}}(x)=2^{jn}\Phi(2^jx), \Psi_{2^{-j}}(x)=2^{jn}\Psi(2^jx).$$

定义

$$\Delta_j(u)=u*\Psi_{2^{-j}},\quad S_j(u)=u*\Phi_{2^{-j}}.$$

我们有$\Delta_j(1)=0, S_j(1)=1$, 以及$\Delta_j=S_j-S_{j-1}$. 注意到

$$S_jLS_j=S_{j-1}LS_{j-1}+\Delta_jLS_j+S_{j-1}L\Delta_j,$$

从而对任意$N<M$, 成立

$$\begin{aligned}S_MLS_M-S_{N-1}LS_{N-1}&=\sum_{j=N}^{M}(S_jLS_j-S_{j-1}LS_{j-1})\\ &=\sum_{j=N}^{M}\Delta_jLS_j+\sum_{j=N}^{M}S_{j-1}L\Delta_j.\end{aligned}$$

注意根据缓增广义函数与速降函数的卷积,若$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,每一项$S_MLS_M(f),\Delta_jLS_j(f)$ 和$S_{j-1}L\Delta_j(f)$ 都是光滑函数.

3. 取定$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得$\hat{f}$ 在原点的一个邻域内为零. 利用Fourier变换的性质不难证明这样的函数在L^2 中是稠密的. 我们断言

$$\sup_{M\in\mathbb{Z}}\sup_{N<M}\|S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f)\|_{L^2}\le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^2}, \tag{21.1}$$

且当$M\to+\infty, N\to-\infty$ 时, 有算子$\tilde{L}$ 使得在L^2中

$$S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f)\to\tilde{L}(f). \tag{21.2}$$

一旦上述论断得证, 则必有$\tilde{L}(f)=L(f)$.

为此, 只需证在$M\to+\infty, N\to-\infty$时$S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f)$ 在L^2 中弱收敛到$L(f)$. 令$g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}&\langle S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f),g\rangle-\langle L(f),g\rangle\\=&\langle S_MLS_M(f)-L(f),g\rangle-\langle S_{N-1}LS_{N-1}(f),g\rangle\\=&I-II.\end{aligned}$$

首先说明当$M\to+\infty$ 时, $I\to 0$. 注意到

$$\begin{aligned}&\langle S_MLS_M(f)-L(f),g\rangle\\=&\langle LS_M(f),S_M(g)\rangle-\langle L(f),g\rangle\\=&\langle L(S_M(f)-f),S_M(g)\rangle+\langle L(f),S_M(g)-g\rangle\\=&\langle L(S_M(f)-f),g\rangle+\langle L(S_M(f)-f),S_M(g)-g\rangle+\langle L(f),S_M(g)-g\rangle.\end{aligned}$$

因为$g\in\mathcal{S}$, 故$M\to+\infty$ 时$S_M(g)$ 在$\mathcal{S}$ 中收敛到g. 因此有

$$\langle L(f),S_M(g)-g\rangle\to 0.$$

同样地$S_M(f)\to f$ (在$\mathcal{S}$中), 又L 是$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的连续线性算子, 则$L(S_M(f)-f)\to 0$ (在$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中), 从而$\langle L(S_M(f)-f),g\rangle\to 0$. 再由Schwartz 核定理, 设$L$确定的核是$W$, 则

$$\langle L(S_M(f)-f),S_M(g)-g\rangle=\langle W,(S_M(f)-f)\otimes(S_M(g)-g)\rangle\to 0.$$

因此$M\to+\infty$时$I\to 0$.

4. 再考虑II. 取$f,g\in\mathcal{S}$, 且$\hat{f},\hat{g}$ 的支集不含原点, 则当$N\to-\infty$ 时, 不难证明$S_{N-1}(f)\to 0$(在$\mathcal{S}$中). 从而

$$\langle S_{N-1}LS_{N-1}(f),g\rangle=\langle LS_{N-1}(f),S_{N-1}(g)\rangle=\langle W,S_{N-1}(f)\otimes S_{N-1}(g)\rangle.$$

注意到在$\mathcal{S}$中$S_{N-1}g\to 0$, 于是

$$\begin{aligned}&\left|\langle W,S_{N-1}(f)\otimes S_{N-1}(g)\rangle\right|\\\le&C\sum_{|\alpha|,|\beta|\le M}\rho_{\alpha,\beta}(S_{N-1}(f))\sum_{|\gamma|,|\delta|\le Q}\rho_{\gamma,\delta}(S_{N-1}(g))\\\to&0.\end{aligned}$$

这样, 我们证明了对于任意属于$\mathcal{S}$ 且Fourier 变换的支集不含原点的f, 成立$\tilde{L}(f)=L(f)$. 利用这样的函数的稠密性我们有$\tilde{L}=L$. 即有

$$S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f)\to L(f),\quad (\text{在}\,L^2\,\text{中})$$

再利用式 (21.1)立得$\|L(f)\|_{L^2}\le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^2}$, 从而定理得证.

下面只需证明(21.1)和(21.2).

5. 记$L_j=\Delta_j L S_j$, $L_j'=S_{j-1}L\Delta_j$, $j\in\mathbb{Z}$. 由定义, 积分$f*\Phi_{2_{-j}}$ 的Riemann 和在$\mathcal{S}$拓扑下收敛, 则

$$\begin{aligned}
L_j(f)(x)&=L(f*\Phi_{2^{-j}})*\Psi_{2^{-j}}(x)\\
&=\left\langle L\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\Phi_{2^{-j}}(u-y)\,\mathrm{d}y\right),\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\right\rangle\\
&=\left\langle W,\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\Phi_{2^{-j}}(u-y)\,\mathrm{d}y\right)\otimes\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\right\rangle\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\langle W,f(y)\Phi_{2^{-j}}(u-y)\otimes\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\langle W,\Phi_{2^{-j}}(u-y)\otimes\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\langle L(\Phi_{2^{-j}}(u-y)),\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\langle L(\tau^y(\Phi_{2^{-j}}),\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

从而L_j 的积分核$K_j(x,y)$ 是

$$K_j(x,y)=\langle L(\tau^y(\Phi_{2^{-j}}),\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle.$$

类似地, L_j' 的积分核$K_j'(x,y)$ 为

$$K_j'(x,y)=\langle L(\tau^y(\Psi_{2^{-j}}),\tau^x(\Phi_{2^{-(j-1)}})\rangle.$$

6. 我们断言

$$|K_j(x,y)|+2^{-j}|\nabla K_j(x,y)|\le C_{n,\delta}(A+B)2^{nj}(1+2^j|x-y|)^{-(n+\delta)}. \tag{21.3}$$

对$K_j'(x,y)$ 也成立类似估计.

在证明断言 (21.3)之前, 我们先利用 (21.3)证明先前的断言 (21.1)和 (21.2). 为此, 我们验证上一讲定理2的条件($\gamma=1$ 情形). 由 (21.3), 我们有

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)|&\le C_{n,\delta}(A+B)\frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{(n+\delta)}},\\
|K_j(x,y)-K_j(x',y)|&\le|\nabla K_j(\tilde{x},y)||x-x'|\le C_{n,\delta}(A+B)\frac{2^{(n+1)j}|x-x'|}{(1+2^j|\tilde{x}-y|)^{(n+\delta)}}\\
&\le C_{n,\delta}(A+B)2^{nj}2^j|x-x'|,\\
|K_j(x,y)-K_j(x,y')|&\le C_{n,\delta}(A+B)2^{nj}2^j|x-x'|.
\end{aligned}$$

此外, 由于$S_j(1)=1$, $\Delta_j(1)=0$, 以及$L(1)=L^t(1)=0$, 则

$$\begin{aligned}
&L_j(1)=\Delta_jLS_j(1)=0,\quad L_j^t(1)=S_jL^t\Delta_j(1)=0;\\
&L_j'(1)=S_{j-1}L\Delta_j(1)=0,\quad L_j'^t(1)=\Delta_jL^tS_{j-1}(1)=0.
\end{aligned}$$

这表明消失性条件也成立. 于是由上一讲定理2,

$$\sum_{j=N}^{M}(L_j+L_j')=S_MLS_M-S_{N-1}LS_{N-1}$$

当$M\to+\infty, N\to-\infty$ 时, 在L^2 中强收敛于某个$\tilde{L}$, 且有

$$\|S_MLS_M(f)-S_{N-1}LS_{N-1}(f)\|_{L^2}\le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^2},\quad\forall M\in\mathbb{Z},\quad N<M.$$

这就证明了断言 (21.1) 和 (21.2).

7. 下面证明断言 (21.3). 分两种情形.

情形a): $|x-y|\le 5\cdot 2^{-j}$. 利用L 的弱有界性, 就有

$$\begin{aligned}
&\left|\langle L(\tau^y(\Phi_{2^{-j}})),\tau^x(\Psi_{2_{-j}})\rangle\right|\\
=&\left|\langle L(\tau^x((\tau^{2^j(y-x)}\Phi)_{2^{-j}})),\tau^x(\Psi_{2_{-j}})\rangle\right|\\
\le& C2^{nj}\|L\|_{WB}\\
\le& C(A+B)2^{nj}\frac{(1+5)^{n+\delta}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}\\
=&C_{n,\delta}(A+B)2^{nj}(1+2^j|x-y|)^{-(n+\delta)}.
\end{aligned}$$

情形b): $|x-y|>5\cdot 2^{-j}$. 此时$\tau^y(\Phi_{2^{-j}})$ 与$\tau^x(\Psi_{2_{-j}})$ 支集互不相交. 故

$$K_j(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{2^{-j}}(v-y)K(u,v)\Psi_{2^{-j}}(u-x)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

再利用Ψ 积分平均为0, 则

$$K_j(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{2^{-j}}(v-y)(K(u,v)-K(x,v))\Psi_{2^{-j}}(u-x)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{21.4}$$

注意到

$$|u-x|\le 2^{-j},|v-y|\le 2^{-j},|x-y|\ge 5\cdot 2^{-j},$$

于是$|u-v|\ge|x-y|-|y-v|-|x-u|\ge 3\cdot 2^{-j}$, 进而有$|u-x|\le\frac{1}{2}|u-v|$, 以及$|u-v|\ge|x-y|-2\cdot 2^{-j}\ge|x-y|-\frac{2}{5}|x-y|=\frac{3}{5}|x-y|$. 由此, 利用$K\in SK(\delta,A)$, 我们有

$$|K(u,v)-K(x,v)|\le A\frac{|x-u|^\delta}{|u-v|^{n+\delta}}\le C_{n,\delta}A\frac{2^{-j\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}.$$

将上式代入 (21.4)即得

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &\le C_{n,\delta}A\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^{-j\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}|\Phi_{2^{-j}}(v-y)||\Psi_{2^{-j}}(u-x)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&\le C_{n,\delta}A\frac{2^{-j\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}\\
&\le C_{n,\delta}(A+B)\frac{2^{nj}}{2^{(n+\delta)j}|x-y|^{n+\delta}}\\
&\le C_{n,\delta}(A+B)\frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}\left(\frac{1+2^j|x-y|}{2^j|x-y|}\right)^{n+\delta}\\
&\le C_{n,\delta}(A+B)\frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\delta}}.
\end{aligned}$$

类似地, 由于$\partial_xK_j(x,y)=\langle L(\tau^y(\Phi_{2^{-j}})),2^j\tau^x(\tilde\Psi_{2^{-j}})\rangle$, $\partial_yK_j(x,y)=\langle L(2^j\tau^y(\tilde\Phi_{2^{-j}})),\tau^x(\Psi_{2^{-j}})\rangle$, (这里$\tilde\Psi=-\partial_x\Psi,\tilde\Phi=-\partial_x\Phi$), [1] 我们也可证明

$$2^{-j}|\nabla K_j(x,y)|\le C_{n,\delta}(A+B)2^{nj}(1+2^j|x-y|)^{-(n+\delta)}$$

于是我们证明了断言 (21.3).

至此, 我们完成了T(1) 定理的证明. □

[1]关于y求导, 与L交换时用到了$(\tau^{y+h}\Phi-\tau^y\Phi)/h$当$h\to 0$ 时在$\mathcal{S}$中收敛以及$L:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ 的连续性.

二 应用举例

例1. 设$K\in SK(\delta,A)$, 且K 反对称: $\forall x\neq y, K(x,y)=-K(y,x)$. 设$T$ 为从属于K 的连续线性算子, 则T 在L^2 上有界当且仅当$T(1)\in \mathrm{BMO}$.

证明. 由于$T^t=-T$, 所以只需证明T 满足弱有界性条件:

$$\begin{aligned}
&|\langle T(\tau^{x_0}f_R),\tau^{x_0}g_R\rangle|\\
=&\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\Big([\tau^{x_0}(f_R)](y)[\tau^{x_0}(g_R)](x)-[\tau^{x_0}(f_R)](x)[\tau^{x_0}(g_R)](y)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\text{[反对称]}\\
=&\left|\frac{1}{2R^{2n}}\int_{B(x_0,10R)}\int_{B(x_0,10R)}K(x,y)\Big(f(\frac{y-x_0}{R})g(\frac{x-x_0}{R})-f(\frac{x-x_0}{R})g(\frac{y-x_0}{R})\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\frac{1}{2}\int_{B(0,10)}\int_{B(0,10)}K(x_0+Rx,x_0+Ry)\Big(f(y)g(x)-f(x)g(y)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\\
\leq& C_nA\frac{1}{R^n}\int_{B(0,10)}\int_{B(0,10)}\frac{1}{|x-y|^n}[|g(x)||f(y)-f(x)|+|f(x)||g(x)-g(y)|]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\leq&\frac{C_nA}{R^n}\int_{B(0,10)}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y\int_{B(0,10)}(|f(x)|+|g(x)|)\,\mathrm{d}x\\
\leq&\frac{C_n'A}{R^n}.
\end{aligned}$$

这里利用了微分中值定理, 从而$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$. □

例2 (Calderon交换子). 设$A(x)$是$\mathbb{R}$上的实值 *Lipschitz* 连续的函数, 且

$$L\triangleq\sup_{x\neq y}\frac{|A(x)-A(y)|}{|x-y|}<1.$$

那么有级数展开

$$\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}=\frac{1}{x-y}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-i\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m.$$

定义*Calderon*交换子为

$$(L_mf)(x)=\frac{1}{i\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m\frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y.$$

证明: 对于任意$m\geq0$, L_m都是L^2上有界线性算子, 而且存在$R>0$使得成立$\|L_m\|_{L^2\to L^2}\leq CR^mL^m$. 这里$C$是个绝对常数.

证明. 数学归纳法结合$T(1)$定理.

1. $m=0$时, L_0 就是Hilbert变换H的某个倍数, 从而$\|L_0\|_{L^2\to L^2}\leq C$.
2. 设估计式对$m\geq0$成立, 现证明$m+1$情形.

由$T(1)$定理及L_m积分核的反对称性, 成立

$$\|L_{m+1}\|_{L^2\to L^2}=C_1\left(\|L_{m+1}(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\left\|L_{m+1}^t(1)\right\|_{\mathrm{BMO}}+\|L_{m+1}\|_{\mathrm{WB}}\right)=C_1(2\|L_{m+1}(1)\|_{\mathrm{BMO}}+\|L_{m+1}\|_{\mathrm{WB}}).$$

又直接验证可知L_m的积分核属于类$SK(1,16(2m+1)L^m)$, 从而由例1,

$$\|L_{m+1}\|_{\mathrm{WB}}\leq C_316(2m+3)L^{m+1}.$$

再注意到成立

$$L_{m+1}(1) = L_m(A'),$$

这里$A' \in L^\infty(\mathbb{R})$是$A(x)$的导数. (从形式上计算, 成立

$$\begin{aligned}
& \int_{|x-y|>\varepsilon} \left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^{m+1} \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}y = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{(A(x)-A(y))^{m+1}}{(x-y)^{m+2}}\,\mathrm{d}y \\
= \ & \frac{1}{m+1} \int_{|x-y|>\varepsilon} (A(x)-A(y))^{m+1} \left(\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right)'_y \mathrm{d}y \\
= \ & \frac{-1}{m+1} \int_{|x-y|>\varepsilon} [(A(x)-A(y))^{m+1}]'_y \left(\frac{1}{(x-y)^{m+1}}\right) \mathrm{d}y \\
= \ & \int_{|x-y|>\varepsilon} (A(x)-A(y))^m \left(\frac{A'(y)}{(x-y)^{m+1}}\right) \mathrm{d}y \\
= \ & \int_{|x-y|>\varepsilon} \left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m \frac{A'(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这里分部积分忽略了边界项. 但从奇异积分算子在L^∞上的定义及广义函数出发, 可严格证明.) 于是$\|L_{m+1}(1)\|_{\mathrm{BMO}} = \|L_m(A')\|_{\mathrm{BMO}} \le L\|L_m\|_{L^\infty\to\mathrm{BMO}}$. 又已证$\|L_m\|_{L^\infty\to\mathrm{BMO}} \le C_2(16(2m+1)L^m + \|L_m\|_{L^2\to L^2})$, 从而得到

$$\begin{aligned}
\|L_{m+1}\|_{L^2\to L^2} &\le C_1[2LC_2(16(2m+1)L^m + \|L_m\|_{L^2\to L^2}) + C_3 16(2m+3)L^{m+1}] \\
&\le C_1[2C_2(16(2m+1) + CR^m + C_3 16(2m+3)]L^{m+1} \\
&\le CR^{m+1}L^{m+1}.
\end{aligned}$$

这里显然可以取到与m无关的常数R使得

$$R \ge 3C_1,\ \ R^{m+1} > (96C_1C_2/C)(2m+1),\ \ R^{m+1} > (48C_1C_3/C)(2m+3),$$

从而最后一个不等式成立. □

第二十二讲　拟微分算子及其L^p连续性

作为非卷积型 Calderón-Zygmend 积分算子理论的一个应用, 这一讲我们介绍拟微分算子的基本概念及其在L^p空间上的连续性. 拟微分算子的象征演算是它之所以在偏微分方程中具有广泛应用的另一个重要因素, 我们将在以后专门讨论.

一　拟微分算子及其象征

1. 拟微分算子的定义

定义1. 设$m\in\mathbb{R}$, $0\le\rho,\delta\le 1$. 称函数$\sigma(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ 为$S^m_{\rho,\delta}$类象征, 若对任意重指标α,β, 存在常数$C_{\alpha,\beta}$使得

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}. \tag{22.1}$$

对$\sigma\in S^m_{\rho,\delta}$, 线性算子

$$T_\sigma(f)(x)\triangleq\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{22.2}$$

称为具象征σ的拟微分算子. 算子T_σ也被记作$\sigma(x,D)$. m称为象征σ或其对应算子T_σ的阶.

为了说明上述定义中(22.2)的合理性, 我们需要如下命题.

命题1. 设$\sigma(x,\xi)\in C^\infty$, 而且对任何重指标$\alpha,\beta$, 都存在常数$C_{\alpha,\beta},m_{\alpha,\beta}$使得

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_{\alpha,\beta}},\qquad x,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

那么T_σ是$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的连续线性算子.

证明.　首先, 若$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 不难看出$\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)$被关于$\xi$的一个可积函数控制, 所以$T_\sigma f\in L^\infty\cap C(\mathbb{R}^n)$. 其次, 利用Fourier变换的性质不难证明如下等式:

$$[\sigma(x,D),D_j]=i\sigma_{(j)}(x,D),\qquad[\sigma(x,D),x_j]=-i\sigma^{(j)}(x,D).$$

这里$[A,B]=AB-BA$是算子A,B的交换子, 而$\sigma^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)$. 由此即知$\sigma(x,D)f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 还可看出当$f_n$在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中收敛到零时, $\sigma(x,D)f_n$也在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中收敛到零, 从而连续. 证毕. □

例1. 设$m,t\in\mathbb{R}$, 则$(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m+it)}\in S^m_{0,0}$.

例2. 对仿积算子P_b, 其"象征"$\sigma_b(x,\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j(b)(x)\varphi(2^{-(j-2)}\xi)\notin S^m_{\rho,\delta}$.

事实上, 从

$$P_b(f)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jbS_{j-2}f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jb(x)\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\varphi(2^{-(j-2)}\xi)\hat{f}(\xi))=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jb(x)(\varphi(2^{-(j-2)}\xi)\hat{f}(\xi))]$$

即得$\sigma_b(x,\xi)$. 由于$\partial_x^\alpha\Delta_jb(x)=2^{j|\alpha|}((\partial^\alpha\Psi)_{2^{-j}}*b)\backsim 2^{j|\alpha|}$, 以及$\partial_\xi^\beta\varphi(2^{-(j-2)}\xi)=2^{-j|\beta|}(\partial^\beta\varphi)(2^{-(j-2)}\xi)\backsim 2^{-j|\beta|}$. 又由$\varphi$的支集性质, $2^j\backsim|\xi|$, 从而得到$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\sigma_b(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}|\xi|^{-|\beta|+|\alpha|}$. 由于$\xi=0$处的奇性, σ_b 不属于任何类$S^m_{\rho,\delta}$. 但如果只对$j\ge 0$求和, 则ξ有正下界, 从而$\sigma_b\in S^0_{1,1}$.

例3. 写出拟微分算子的共轭算子.

解.可以把(22.2)改写为

$$T_\sigma(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x,\xi)f(y)e^{i\xi\cdot(x-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

有共轭算子的定义, $\langle T_\sigma f, g\rangle = \langle f, T_\sigma^* g\rangle$, (考虑复$L^2$中内积), 可以算得

$$T_\sigma^*(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\sigma(z,\eta)}g(z)e^{i\eta\cdot(x-z)}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta.$$

□

2. 结论概览

这一讲我们介绍有关零阶拟微分算子在L^p空间连续性的一些结果. 由此不难得到一般m阶算子在Soblev空间或Hölder空间上的连续性. 对$S^0_{\rho,\delta}$类象征, 主要有以下几种典型情形.

禁闭象征$S^0_{1,1}$: 这类象征对应的拟微分算子的Schwartz核是C-Z核(见下面定理3), 但一般来说未必L^2有界, 所以未必是C-Z算子. 这类算子是仿微分算子理论的基础.

$S^0_{\rho,\delta}$ $(0 \le \rho < \delta \le 1)$ **类象征**: 这类象征对应的拟微分算子一般不是L^2上连续的.

奇异象征$S^0_{\rho,\rho}$ $(0 \le \rho < 1)$: 这类象征对应的拟微分算子是L^2有界的(见下面定理2), 但其Schwartz 核未必是C-Z 核, 所以也未必是C-Z算子. 还有一个缺点是它们关于象征演算的渐近展开一般不适用. 这类算子出现在对热方程及多复变函数中Cauchy–Szegö 投影算子等的研究中.

$S^0_{\rho,\delta}$ $(0 \le \delta < \rho \le 1)$ **类象征**: 由于$S^0_{\rho,\delta} \subset S^0_{\delta,\delta}$, 这类象征对应的拟微分算子是$L^2$上连续的, 但$\rho < 1$时未必是C-Z算子. 此外成立象征演算.

$S^0_{1,\delta}$ $(0 \le \delta < 1)$**类象征**: 由于$S^0_{1,\delta} \subset S^0_{\delta,\delta} \cap S^0_{1,1}$, 这类象征对应的拟微分算子是C-Z算子. 此外, 成立算子的象征演算, 使得我们可以利用象征间的代数运算研究算子间的共轭, 复合等运算. 这可视为是Fourier乘子理论的推广,

标准象征$S^0_{1,0}$: 这类象征对应的是最简单, 也是应用最广泛的一类拟微分算子. 显然这类算子是C-Z算子.

二　$S^0_{1,1}$类拟微分算子的Schwartz核

我们证明$S^0_{1,1}$类拟微分算子的Schwartz核是标准核. 为此我们先引入非齐次 Littlewood–Paley 分解来分解算子. 与第十九讲中我们已经介绍的齐次 Littlewood–Paley 分解相比, 只是在原点附近不再用环形支集分解.

取定径向对称且单调递减的函数$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得在单位球$B_1(0)$上$\eta = 1$, 在$B_2(0)$外$\eta = 0$. 定义函数$\delta(\xi) = \eta(\xi) - \eta(2\xi) \ge 0$, 那么容易验证成立

$$1 = \eta(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty}\delta(2^{-j}\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

显然$\operatorname{supp}\delta(2^{-j}\xi) \subset \{2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}$.

设$\Phi=\eta^\vee\in\mathcal{S}$, 则$\int\Phi\,\mathrm{d}x=1$. 又记$\Psi=\delta^\vee\in\mathcal{S}$, 则$\int\Psi\,\mathrm{d}x=0$. 回忆$\widehat{\Phi_{2^{-j}}}(\xi)=\eta(2^{-j}\xi)$, $\widehat{\Psi_{2^{-j}}}(\xi)=\delta(2^{-j}\xi)$, 则$\Psi_{2^{-j}}=\Phi_{2^{-j}}-\Phi_{2^{-j+1}}$.

定义部分和算子$S_j(f)=f*\Phi_{2^{-j}}$, 以及$\Delta_j(f)=S_j(f)-S_{j-1}(f)=f*\Psi_{2^{-j}}$. 那么我们有如下非齐次L-P分解: [1]

$$I=S_0+\sum_{j=1}^{\infty}\Delta_j.$$

对$f\in\mathcal{S}'$, 不难证明该式部分和$S_l(f)$当$l\to\infty$时在$\mathcal{S}'$中收敛到f.

下面是这一讲的第一个重要结果.

定理1. *设$\sigma\in S^0_{1,1}$, 则存在函数$K(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\setminus(x,x):x\in\mathbb{R}^n)$满足如下性质:*

1) 对任何重指标α,β, 存在常数$A_{\alpha,\beta}$使得

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y)|\le A_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|};\tag{22.3}$$

2) 对$f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 和$x\notin\operatorname{supp}f$, 成立

$$(T_\sigma f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

证明. 1. 我们将$T=T_\sigma$分解为

$$T_\sigma=TS_0+\sum_{j=1}^{\infty}T\Delta_j\triangleq\sum_{j=0}^{\infty}T_{\sigma_j}.$$

这里$\sigma_0(x,\xi)=\sigma(x,\xi)\eta(\xi)$, $\sigma_j(x,\xi)=\sigma(x,\xi)\delta(2^{-j}\xi)$, $j=1,2,\dots.$ 注意到对$j=1,2,\cdots$, σ_j关于ξ的支集在$\{2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}\}$中, 从而根据$\sigma\in S^0_{1,1}$, 不难验证

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma_j(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}2^{j(|\beta|-|\alpha|)}.$$

2. 我们可将拟微分算子T_{σ_j}写为如下奇异积分算子形式

$$(T_{\sigma_j}f)(x)=\int k_j(x,x-z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

事实上, 由于σ_j关于ξ具有紧支集, 而且关于ξ是光滑的, 所以

$$T_{\sigma_j}f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint\sigma_j(x,\xi)e^{-i(z-x)\cdot\xi}f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(\int\sigma_j(x,\xi)e^{i(x-z)\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)f(z)\,\mathrm{d}z,$$

即

$$k_j(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\sigma_j(x,\xi)e^{iy\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

3. 我们证明, 对$M\ge0$, 对任意重指标α,β, 存在常数$A_{M,\alpha,\beta}$使得成立不等式

$$|\partial_x^\beta\partial_y^\alpha k_j(x,y)|\le A_{M,\alpha,\beta}|y|^{-M}2^{j(n-M+|\alpha|+|\beta|)}.\tag{22.4}$$

事实上, 注意到等式

$$(-iy)^\gamma\partial_x^\beta\partial_y^\alpha[k_j(x,y)]=C_n\int\partial_\xi^\gamma[(i\xi)^\alpha\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)]e^{i\xi\cdot y}\,\mathrm{d}\xi,\tag{22.5}$$

[1]回忆齐次分解是$I=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Delta_j$.

对$j=1,2,\cdots$, 积分区域是$\{2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}\}$, 从而积分区域体积至多是$c_n 2^{jn}$, 而被积函数又被$2^{j(|\alpha|+|\beta|-|\gamma|)}$控制, 所以

$$|y^\gamma||\partial_x^\beta\partial_y^\alpha[k_j(x,y)]|\le 2^{j[n+|\alpha|+|\beta|-|\gamma|]}.$$

对$|\gamma|=M$的所有重指标γ求和, 由于$|y|^M\le C_n\sum_{|\gamma|=M}|y^\gamma|$, 就得到(22.4).

又当$j=0$时(22.5)中被积函数支集在$\{|\xi|\le 1\}$中, 从而有界. 于是(22.4)仍然成立.

4. 记

$$k(x,\cdot)=\sum_{j=0}^\infty k_j(x,\cdot).$$

我们证明$k(x,z)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$, 而且成立

$$|\partial_x^\beta\partial_z^\alpha k(x,z)|\le A_{\alpha,\beta}|z|^{-n-|\alpha|-|\beta|},\quad z\ne 0. \tag{22.6}$$

为此, 只需对$z\ne 0$证明

$$\sum_{j=0}^\infty|\partial_x^\beta\partial_z^\alpha k_j(x,z)|\le A_{\alpha,\beta}|z|^{-n-|\alpha|-|\beta|}.$$

对满足$2^j|z|\le 1$的整数j, 在(22.4)中取$M=0$, 那么注意到$n+|\alpha|+|\beta|>0$, 就有

$$\sum_{j:2^j\le 1/|z|}|\partial_x^\beta\partial_z^\alpha k_j(x,z)|\le A_{\alpha,\beta}2^{j(n+|\alpha|+|\beta|)}\le A_{\alpha,\beta}|z|^{-(n+|\alpha|+|\beta|)}.$$

当j满足$2^j|z|>1$时, 取M使得$n+|\alpha|+|\beta|-M<0$, 那么

$$\sum_{j:2^j>1/|z|}|\partial_x^\beta\partial_z^\alpha k_j(x,z)|\le A_{\alpha,\beta}|z|^{-M}2^{j(n+|\alpha|+|\beta|-M)}\le A_{\alpha,\beta}|z|^{-M}|z|^{-(n+|\alpha|+|\beta|-M)}=A_{\alpha,\beta}|z|^{-(n+|\alpha|+|\beta|)}.$$

这就证明了(22.6).

5. 对$f\in\mathcal{D}$, 分解$f=S_0f+\sum_{j=1}^\infty\Delta_jf$在$\mathcal{S}$中收敛. 从而根据命题1, $\sum_{j=0}^\infty T_{\sigma_j}f$在$\mathcal{S}$中收敛到$T_\sigma f$. 另一方面, 对$x\notin\operatorname{supp}f$, $\sum_j k_j(x,x-z)$关于$z\in\operatorname{supp}f$处处收敛且部分和函数一致有界. 所以从Lebesgue控制收敛定理得到

$$\sum_{j=0}^\infty T_{\sigma_j}f=\sum_{j=0}^\infty\int k_j(x,x-z)f(z)\,\mathrm{d}z=\int k(x,x-z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这就表明

$$T_\sigma f(x)=\int K(x,z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这里$K(x,z)=k(x,x-z)$. 利用复合函数求导, 从(22.6)就可以得到(22.3). □

三 $S_{0,0}^0$类拟微分算子的L^2有界性

下面我们利用CKS算子列几乎正交性定理和Schur定理来证明$S_{0,0}^0$类拟微分算子的L^2有界性.

定理2. 设$\sigma\in S_{0,0}^0$, 则具象征σ的拟微分算子T_σ可从最初定义在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上延拓为$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子.

证明. 1. 由Plancherel定理, 只需证明算子

$$(\tilde{T}_\sigma f)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi) f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

是L^2上有界的.

取定非负C_0^∞ 函数$\varphi(\xi)$, 它的支集在$Q_1 = [-1,1]^n$上, 而且[2]

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-j) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

对$j,k \in \mathbb{Z}^n$, 定义象征

$$\sigma_{jk}(x,\xi) = \varphi(x-j)\sigma(x,\xi)\varphi(x-k)$$

及相应的算子

$$(T_{jk} f)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{jk}(x,\xi) f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

那么成立

$$\tilde{T}_\sigma = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^n} T_{jk}.$$

不难证明此双重和式在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中算子强收敛, 即$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中成立

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|j|,|k|\le N} T_{jk} f = \tilde{T}_\sigma f.$$

2. 为了应用CKS几乎正交性定理, 我们需证明: $\forall N \in \mathbb{Z}^+$, 成立

$$\left\| T_{jk}^* T_{j'k'} \right\|_{L^2\to L^2} \le C_N \Big(1+|j-j'|+|k-k'|\Big)^{-2N}, \tag{22.7}$$

$$\left\| T_{jk} T_{j'k'}^* \right\|_{L^2\to L^2} \le C_N \Big(1+|j-j'|+|k-k'|\Big)^{-2N}, \tag{22.8}$$

其中C_N只依赖于N和n, 而与j, j', k, k'无关.

我们注意到$(1+t)(1+s) \le (1+t+s)^2$ $(t,s\ge 0)$, 从而当$N \ge 2(n+1)$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}^n} \sqrt{\frac{1}{(1+|j|+|k|)^{2N}}} &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|j|+|k|)^N} \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|j|)^{N/2}} \frac{1}{(1+|k|)^{N/2}} \\ &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|j|)^{N/2}}\right)^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{N/2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 < \infty.\end{aligned}$$

于是从CKS几乎正交性定理即得结论.

3. 下面证明(22.7)和(22.8). 我们有

$$(T_{jk}^* T_{j'k'} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_{jkj'k'}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中核就是

$$K_{jkj'k'}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\sigma_{jk}(z,x)}\sigma_{j'k'}(z,y) e^{iz\cdot(y-x)}\,\mathrm{d}z. \tag{22.9}$$

[2]这样的φ是存在的. 例如取定一个非负的$\varphi_0 \in C_0^\infty(Q_1)$使得$\varphi_0$在$\frac{1}{2}Q_1$上取值是1. 那么$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \varphi_0(x-j)$点点收敛而且大于零, 是关于自变量各个方向都具有周期1的光滑函数. 于是取$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\varphi_0(x)}$ 即可.

利用恒等式

$$e^{iz\cdot(y-x)} = \frac{(I-\Delta_z)^N(e^{iz\cdot(y-x)})}{(1+|y-x|^2)^N}$$

对(22.9)作分部积分, 就得到

$$|K_{jkj'k'}(x,y)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|x-y|^2)^N} \left|(I-\Delta_z)^N\Big(\varphi(z-j)\overline{\sigma(z,x)}\sigma(z,y)\varphi(z-j')\Big)\right| \mathrm{d}z.$$

利用φ的支集性质, 则当$|j-j'| \ge C_n$ (可取$4\sqrt{n}$) 时$\varphi(z-j)$ 和$\varphi(z-j')$ 关于z的支集互不相交, 从而得到$K_{jkj'k'}(x,y) \equiv 0$.

当$|j-j'| < C_n$时, 再次利用φ的支集性质, 便有$|x-y| \backsim |k-k'|$, 从而

$$\frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|x-y|^2)^N} \le C_n \frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|k-k'|^2)^N} \le C_n \frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|k-k'|)^{2N}}.$$

由于σ及φ的所有导数的最大值都被某固定常数控制, 且$\operatorname{supp}\varphi$是测度有限集, 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|(I-\Delta_z)^N\Big(\varphi(z-j)\overline{\sigma(z,x)}\sigma(z,y)\varphi(z-j')\Big)\right| \mathrm{d}z \le C_n.$$

所以我们得到估计

$$|K_{jkj'k'}(x,y)| \le C_n \frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|k-k'|)^{2N}}.$$

把上述两种情形综合起来, 就得到

$$|K_{jkj'k'}(x,y)| \le C_n \frac{\varphi(x-k)\varphi(y-k')}{(1+|j-j'|+|k-k'|)^{2N}}.$$

4. 现在不难估计出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{jkj'k'}(x,y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{C_N}{(1+|j-j'|+|k-k'|)^{2N}},$$
$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{jkj'k'}(x,y)|\,\mathrm{d}x \le \frac{C_N}{(1+|j-j'|+|k-k'|)^{2N}}.$$

所以根据Schur定理,

$$\left\|T_{jk}^*T_{j'k'}\right\|_{L^2\to L^2} \le \frac{C_{n,N}}{(1+|j-j'|+|k-k'|)^{2N}}.$$

这就是(22.7). 由于$\rho=\delta=0$, 故σ中x与ξ的位置完全对称, 则(22.8) 的证明是类似的. □

四 $S^0_{\rho,\rho}$类拟微分算子的L^2有界性

最后我们利用第二十讲定理4, Schur定理, 以及上面$S^0_{0,0}$类拟微分算子的L^2有界性, 来证明$S^0_{\rho,\rho}$ $(0<\rho<1)$类拟微分算子的L^2有界性.

定理3. 设$a \in S^0_{\rho,\rho}$ $(0 \le \rho < 1)$, 则具象征a的拟微分算子T_a 可从最初定义在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上延拓为$L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子.

证明. 1. 象征截断. 设$\gamma(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$且当$|x| \le 1, \xi \le 1$时$\gamma=1$, 当$|x| \ge 2, |\xi| \ge 2$时$\gamma=0$. 对$\varepsilon \in (0,1]$, 置

$$a_\varepsilon(x,\xi) = a(x,\xi)\gamma(\varepsilon x, \varepsilon\xi).$$

那么当$|\xi|\geq 1$时, 由于$|\xi|\geq(1+|\xi|)/2$, 以及$a_\varepsilon(x,\xi)$的支集满足在$\varepsilon|x|\leq 2,\varepsilon|\xi|\leq 2$, 从而

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a_\varepsilon(x,\xi)| &\leq C_{\alpha,\beta}\sum_{\beta_1\leq\beta}\sum_{\alpha_1\leq\alpha}|\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\alpha_1}a(x,\xi)|\varepsilon^{|\alpha|-|\alpha_1|+|\beta|-|\beta_1|}|\partial_x^{\beta-\beta_1}\partial_\xi^{\alpha-\alpha_1}\gamma(\varepsilon x,\varepsilon\xi)| \\
&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{\beta_1\leq\beta}\sum_{\alpha_1\leq\alpha}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha_1|+\rho|\beta_1|}\varepsilon^{|\alpha|-|\alpha_1|+|\beta|-|\beta_1|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{\beta_1\leq\beta}\sum_{\alpha_1\leq\alpha}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha_1|+\rho|\beta_1|}|\xi|^{-|\alpha|+|\alpha_1|-|\beta|+|\beta_1|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{\beta_1\leq\beta}\sum_{\alpha_1\leq\alpha}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha_1|+\rho|\beta_1|-|\alpha|+|\alpha_1|-|\beta|+|\beta_1|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\rho|\beta|}.
\end{aligned}$$

当$|\xi|\leq 1$时, 利用$1\leq 1+|\xi|\leq 2$, 以及$\varepsilon\leq 1$, 在上式第二行中直接忽略ε, 也可得到一样的不等式. 这就表明$a_\varepsilon\in S^0_{\rho,\rho}$, 而且相关常数与$\varepsilon$无关.

此外, 对$f\in\mathcal{S}$, 利用$\varepsilon\to 0$时点态成立$\gamma(\varepsilon x,\varepsilon\xi)\to 0$, 用$\hat{f}$的速降性质以及$a(x.\xi)$的缓增性, 利用控制收敛定理不难验证在$\mathcal{S}$中, 当$\varepsilon\to 0$时成立$T_{a_\varepsilon}(f)\to T_a(f)$.

因此, 在以下证明中我们都假设$a(x,\xi)$关于x和ξ都具有紧支集(从而可用分部积分得到衰减性估计), 而且可省略ε, 因为所得估计均可与ε无关.

2. 算子分解. 利用L-P分解, 我们有

$$T_a=\sum_{j=0}^\infty T_{a_j}=T_aS_0+\sum_{j=1}^\infty T_a\Delta_j,$$

其中$a_0(x,\xi)=a(x,\xi)\eta(\xi)$, 支集在$|\xi|\leq 2$中, 而对$j\geq 1$, $a_j(x,\xi)=a(x,\xi)\hat{\Psi}(2^{-j}\xi)$, 支集在$2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}$中. 由此不难验证$a_j\in S^0_{\rho,\rho}$, 且相关常数与$j$无关.

3. 以下为利用第二十讲定理4, 我们需要证明$\{T_{a_j}\}$的几乎正交性和一致有界性.

为利用L-P分解的支集性质, 我们把T_a分解为

$$T_a=\sum_{j\text{是偶数}}T_{a_j}+\sum_{j\text{是奇数}}T_{a_j}.$$

只需对每个和式分别证明L^2有界性. 注意这样分解的好处是每个和式中任何两项的Fourier变换的支集不相交.

4. 几乎正交性. 考虑j是奇数的求和式. 首先证明: 若$j\neq k$, 则

$$T_{a_j}T^*_{a_k}=0.$$

这是因为$T_{a_j}T^*_{a_k}=T_a\Delta_j\Delta_kT^*_a$, 而对应于$\Delta_j$和$\Delta_k$的乘子的支集互不相交.

5. 几乎正交性(续). 下面估计$\left\|T^*_{a_j}T_{a_k}\right\|_{L^2\to L^2}$. 由于

$$\begin{aligned}
T_{a_j}(f)(z) &= c_n\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}a_j(z,\xi)e^{i\xi\cdot(z-y)}f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi, \\
T^*_{a_k}(g)(x) &= c_n\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\overline{a_k(z,\eta)}e^{i\eta\cdot(x-z)}g(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

则

$$(T^*_{a_k}T_{a_j})(f)(x)=\int K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$K(x,y)=c_n\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)e^{i[\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}\,dz\,d\eta d\xi. \tag{22.10}$$

由Schur定理, 只需估计$K(x,y)$.

6. 这里的积分是一种振荡积分, 与前面定理证明类似, 处理其衰减的基本技巧就是对个积分变量z,η,ξ 都做分部积分(回忆被积函数有紧支集). 由于对$N\in\mathbb{N}$成立

$$\frac{(I-\Delta_z)^N}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}e^{i(\xi-\eta)\cdot z}=e^{i(\xi-\eta)\cdot z},$$

代入(22.10), 分部积分后就得到

$$K(x,y)=c_n\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}(I-\Delta_z)^N[\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)]e^{i[\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}\,dz\,d\eta d\xi. \tag{22.11}$$

利用

$$\frac{(I-\Delta_\eta)^N}{(1+|x-z|^2)^N}e^{i(x-z)\cdot\eta}=e^{i(x-z)\cdot\eta},$$

代入(22.11), 分部积分后就得到

$$\begin{aligned}K(x,y) &= c_n\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x-z|^2)^N}(I-\Delta_\eta)^N\left(\frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}(I-\Delta_z)^N[\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)]\right)\\ &\quad\times e^{i[\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}\,dz\,d\eta d\xi. \end{aligned}\tag{22.12}$$

最后, 利用

$$\frac{(I-\Delta_\xi)^N}{(1+|y-z|^2)^N}e^{i(z-y)\cdot\xi}=e^{i(z-y)\cdot\xi},$$

代入(22.12), 分部积分后就得到

$$\begin{aligned}K(x,y) &= c_n\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x-z|^2)^N}\frac{1}{(1+|y-z|^2)^N}\\ &\quad (I-\Delta_\xi)^N\left\{(I-\Delta_\eta)^N\left(\frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}(I-\Delta_z)^N[\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)]\right)\right\}\\ &\quad\times e^{i[\xi\cdot(z-y)-\eta\cdot(z-x)]}\,dz\,d\eta d\xi. \end{aligned}\tag{22.13}$$

7. 考察$(I-\Delta_\xi)^N\left\{(I-\Delta_\eta)^N\left(\frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}(I-\Delta_z)^N[\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)]\right)\right\}$. 利用$a_j\in S^0_{\rho,\rho}$, 可知对$\xi$和$\eta$的任何导数作用并不破坏该式关于$\xi,\eta$的衰减性(总有衰减因子$(1+|\xi-\eta|^2)^{-N}$得以保留), 而对$z$的每阶导数会导致增加一个因子$(1+|\xi|+|\eta|)^\rho$. 于是由$a_j$的支集性质, $|\xi|\backsim 2^j,|\eta|\backsim 2^k$, 于是成立

$$\begin{aligned}&\left|(I-\Delta_\xi)^N\left\{(I-\Delta_\eta)^N\left(\frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}(I-\Delta_z)^N[\overline{a_k(z,\eta)}a_j(z,\xi)]\right)\right\}\right|\\ \le\ & C_N\frac{(1+|\xi|+|\eta|)^{2N\rho}}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}\le C_N 2^{2\max(k,j)N\rho}2^{-2\max(k,j)N}.\end{aligned}$$

这里利用了

$$(1+|\xi-\eta|)^{-1}\backsim 2^{-\max(k,j)},\quad (1+|\xi|+|\eta|)\backsim 2^{\max(k,j)}.$$

另外, 关于ξ,η积分区域测度上界分别是是$c_n 2^{jn}$和$c_n 2^{kn}$。

8. 由此, 我们证明了, 若$k \neq j$, 则

$$|K(x,y)| \leq C_N 2^{2\max(k,j)N\rho} 2^{-2\max(k,j)N} 2^{2\max(k,j)n} \int_{\mathbb{R}^n} Q(x-z)Q(y-z)\,\mathrm{d}z,$$

其中$Q(x) = (1+|x|^2)^{-N}$. 记$K_0(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(x-z)Q(y-z)\,\mathrm{d}z$, 那么

$$\int K_0(x,y)\,\mathrm{d}y = \int K_0(x,y)\,\mathrm{d}x = \left[\int \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^N \mathrm{d}x\right]^2 < \infty,$$

若$2N > n$. 这样, 根据Schur定理, 就有

$$\left\|T^*_{a_k} T_{a_j}\right\| \leq C_{n,N} 2^{2\max(k,j)[N\rho - N + n]}.$$

再取N使得$N > n/(1-\rho)$, 并记$\epsilon = N(1-\rho) - n > 0$, $\gamma(j) = C_{n,N} 2^{-\epsilon j}$, 那么

$$\left\|T^*_{a_k} T_{a_j}\right\| \leq C_{n,N} 2^{-2\epsilon \max(k,j)} \leq \gamma(j)\gamma(k).$$

又注意到对j是正奇数, 和式$\sum_j \gamma^j$有限. 这就完成了几乎正交性部分的论证.

9. 一致有界性. 下面证明T_{a_j}的L^2上的算子范数一致有界. 为此, 将象征

$$a_j(x,\xi) = a(x,\xi)\hat{\Psi}(2^{-j}\xi) \in S^0_{\rho,\rho}$$

做尺度变换:

$$\tilde{a}_j(x,\xi) = a_j(2^{-j\rho}x, 2^{j\rho}\xi) = a(2^{-j\rho}x, 2^{j\rho}\xi)\hat{\Psi}(2^{-j+j\rho}\xi).$$

那么不难验证$\tilde{a}_j \in S^0_{0,0}$而且相关常数与$j$无关.[3]

另外, 置算子

$$\Lambda_j(f)(x) = f(2^{j\rho}x),$$

容易验证

$$T_{a_j} = \Lambda_j T_{\tilde{a}_j} \Lambda_j^{-1},$$

以及

$$\left\|\Lambda_j f\right\|_{L^2} = 2^{-nj\rho/2}\left\|f\right\|_{L^2}, \qquad \left\|\Lambda_j^{-1} f\right\|_{L^2} = 2^{nj\rho/2}\left\|f\right\|_{L^2},$$

所以由$S^0_{0,0}$类拟微分算子的L^2有界性, 成立$\left\|T_{a_j}\right\| \leq \left\|T_{\tilde{a}_j}\right\| \leq A < \infty$, 其中$A$与$j$无关. 这就证明了$\sum_{k=0}^{\infty} T_{a_{2k+1}}$是$L^2$上有界线性算子.

10. 类似可证得$\sum_{k=0}^{\infty} T_{a_{2k}}$是$L^2$上有界线性算子. 从而$T_a$是$L^2$上有界线性算子. □

[3]注意此时关于ξ的支集范围是$|\xi| \backsim 2^{j\rho - j}$.

文献注记

第一讲

这一讲的内容是非常经典的, 参见[9]第4.3.1节, 5.8.5节. 这里需要特别注意的是偏微分方程,拟微分算子等理论中习惯用定义1中的方式定义Fourier变换, 而调和分析书中大多采用

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

来定义Fourier变换. 由此会导致某些定理或公式(如第十一讲中的Riesz变换等)相差一个常数因子.

第二讲

关于高维双曲型方程组的初值问题或初边值问题的系统理论, 参看[7]. 为处理变系数问题, 就需要进一步引入拟微分算子/仿微分算子技巧. 如同我们在这一讲感受到的, 处理这类问题需要对线性代数和矩阵理论有较好的掌握. 这也提示我们偏微分方程是一门综合性极强的学科, 需要在问题引导下, 尽量掌握纯粹数学多方面的知识. 关于跨音速接触间断的介绍取自论文[19].

第三讲　第四讲

关于广义函数已有很多专著介绍(例如[1, 3]). 这两讲的主要内容取自[11]2.2 和2.3 节. Paley-Wiener-Schwartz定理的证明取自[1]1.3.4节. 该定理本书后面不会用到, 但是作为刻画紧支广义函数的重要定理, 是有必要了解的.

第五讲

关于基本解的更多介绍, 可见[1]2.4节. 平移不变算子的卷积表示定理取自[11]2.5.1节. Schwartz核定理及其证明取自[14]第5章.

第六讲

这讲内容主要取自[11]1.3节.

第七讲

这部分内容主要取自[11]2.5.2—2.5.5节.

第八讲

这部分是调和分析实变方法的核心内容, 主要取自[11]2.1节和4.3.1节. 关于调和函数边值的非切向收敛问题, 还可参看[4]4.2节.

第九讲

这是有关卷积型奇异积分算子的核心内容, 取自[11]4.3.2节和4.4节, 以及[4]4.2节和5.4节. 这里我们特别强调从广义函数的卷积的角度定义奇异积分算子, 避免了通过截断等形式定义奇异积分算子可能带来的不严格.

第十讲

极大算子的有界性证明取自[11]4.4.4节. Hörmander–Mihlin乘子定理的证明取自[11]5.2.3节. 关于Marcinkiewicz乘子定理及其证明(用到了Littlewood-Paley分解), 可参见该书第5.2.1 节和5.2.2节. 有关Bochner-Riesz乘子定理, 参见[8]第8.5节. 有关Hörmander–Mihlin乘子定理的应用可见[13]4.2.1节.

第十一讲

这部分内容取自[11]4.1节和[4]5.4节.

第十二讲

这一讲内容取自[4]第2章5.1和5.2节, 以及[16].

第十三讲　第十四讲

这部分内容取自[4]第7章,以及[2]. Sharp极大定理的证明取自[12]7.4.2节,

第十五讲

Whitney分解定理取自[11]附录J, 其余内容取自[2].

第十六讲　第十七讲

这部分内容取自[12]8.1和8.2节.

第十八讲

这部分内容取自[12]7.3节.

第十九讲

这部分内容取自[12]8.4节.

第二十讲

这部分内容取自[12]8.5.1和8.5.2节; 定理4取自[17]第7章2.3节.

第二十一讲

这部分内容取自[12]8.3.1和8.5.3节.

第二十二讲

这部分内容取自[12]8.5.4节和[17]第6章, 第7章. 关于各类拟微分算子在给类空间的有界性结果, 可见[17]及[5]等在注记或习题中的讨论及所引文献.

本书没有涉及的重要内容

本书没有涉及的有关调和分析及偏微分方程的重要内容有:

(一) 函数光滑性的Littlewood-Paley分解刻画及相关Besov空间等的理论. 这是将调和分析应用于各类发展型方程初值问题适定性的主要方法之一, 可参考[6].

(二) 拟微分算子和仿微分算子理论. 可参考[5]及[15]. 关于振荡积分, 参看[17].

(三) A_p权理论. 这在加权Sobolev空间, 退化椭圆方程等方面有许多应用, 参见[12][4][8][17]等.

参考文献

[1] 陈恕行. 现代偏微分方程导论. 大学数学科学丛书, 6. 科学出版社, 2005.

[2] 程民德, 邓东皋, 龙瑞麟. 实分析. 第二版. 高等教育出版社, 2008.

[3] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用. 第二版. 科学出版社, 2004.

[4] 周民强. 调和分析讲义(实变方法). 北京大学出版社, 1999.

[5] Alinhac, Serge; Gérard, Patrick. *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem.* Translated from the 1991 French original by Stephen S. Wilson. Graduate Studies in Mathematics, 82. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[6] Bahouri, Hajer; Chemin, Jean-Yves; Danchin, Raphaël. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 343. Springer, Heidelberg, 2011.

[7] Benzoni-Gavage, S.; Serre, D. *Multidimensional Hyperbolic Partial Differential Equations: First-order Systems and Applications.* Oxford Mathematical Monographs. Clarendon press, Oxford, 2007.

[8] Duoandikoetxea, Javier. *Fourier analysis.* Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[9] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[10] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[11] Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2008.

[12] Grafakos, Loukas. *Modern Fourier analysis.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2009.

[13] Grisvard, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[14] Hörmander, Lars. *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis.* Reprint of the second (1990) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[15] Hörmander, Lars. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations.* Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], 26. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] Majda, Andrew J.; Bertozzi, Andrea L. *Vorticity and incompressible flow.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 27. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[17] Stein, Elias M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* With the assistance of Timothy S. Murphy. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[18] Walter, Wolfgang. *Ordinary differential equations.* Translated from the sixth German (1996) edition by Russell Thompson. Graduate Texts in Mathematics, 182. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.

[19] Wang, Ya-Guang; Yuan, Hairong. *Weak Stability of Transonic Contact Discontinuities in Three-Dimensional Steady Full Compressible Euler Flows.* Z. Angew. Math. Phys. (DOI: 10.1007/s00033-014-0404-y), 2014.

[20] Yosida, Kôsaku. *Functional Anlysis*. Sixth edition. Classics in Mathematics. vol. 325. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1980.