微分几何讲义

袁海荣

2014年9月

引 言

这是基于参考文献(特别是[6])为本科生《微分几何》课程备课的讲义,供选课同学参考使用. 下面对讲义内容和学习要求作一简要说明.

1. 几何学和代数学(算术)一样, 是数学最古老的分支之一, 源于丈量土地、绘制地图、天文观测等实际问题. 二千三百多年前, 欧几里得在《几何原本》中用公理化方法"定义"了几何学最基本的研究对象, 如点、直线、平面、圆等, 及垂直、平行、相交、相切等概念, 运用严格的逻辑推理方法, 从若干公理出发, 研究了如直线、三角形、圆等几何对象之间的相互关系(如全等、相似) 和长度、面积等度量属性. 这种公理化方法是人类理性思维的第一个成功范例, 对人类历史发展产生了极为深远的影响, 但由于受其公理系统本身的限制, 只能研究直线、多边形、圆锥曲线等较为简单的对象. 到17 世纪, 笛卡尔和费马通过引入坐标系, 把(光滑)曲线、曲面等一般几何对象表示为函数的图像或映射, 开创了用代数方法研究几何问题的解析几何, 例如可以通过二次型或对称矩阵的合同标准形研究二次曲面的分类和标准形; 伴随着微积分的发展, 就可以使用分析工具(如极限、微分方程等)对光滑曲线、曲面等更一般的几何对象的局部性质加以深入的研究(微分几何) [1]; 在拓扑性质的帮助下, 还可以得到几何对象的若干重要整体性质(整体微分几何). 由此几何学的研究方法和研究对象都大大扩展了. [2] 然而, 解析几何方法都依赖于坐标系的选取, 而几何性质是客观的, 应该和坐标系(观察者)无关. 所以**学习解析几何最基本的一点就是要分清楚哪些量(概念)是依赖于坐标(系)的, 哪些是与坐标(系)无关的; 只有后者才是几何学的研究对象, 它们一般是通过公理化方法定义的**.

2. 本课程计划分三部分. 第一部分介绍三维仿射欧式空间中曲线与曲面的局部微分几何性质(在等距仿射变换下的不变性质), **目的是得到曲线论和曲面论基本定理, 即解决如何判定两个曲线(曲面)全等的问题**. 该理论不但可以指导我们解决工程实践中的某些应用问题, 还可以帮助我们熟悉和理解微分几何的基本思想及研究方法, 为进一步学习黎曼几何等现代微分几何知识打好基础.

第二部分介绍有关曲面上微积分的基本结果. 现代微分几何发展了一套优雅而深刻的语言, 可以把欧式空间$\mathbb{R}^n$ 上的微积分推广到弯曲空间中, 这在理论物理等学科中有着极其广泛而深刻的应用.

第三部分介绍曲面的内蕴性质, 主要目的是得到Gauss–Bonet公式.

本讲义目前仅包含第一部分内容, 可用约45课时讲完.

3. 总的来说, 微分几何是一门比较难学的课程. 这不但体现在其研究问题的抽象性上, 还体现在它的综合性上, 即需要数学分析、线性代数、常微分方程、偏微分方程、拓扑学等多方面的知识. 从我的教学经验看, 目前学生学习第一部分的主要难点还是在于高等代数学习不够到位, 特别是对其中线性空间、线性映射、多重线性函数等几何部分理解不够深入. 数学分析中微分学仅仅是提供了把非线性对象线性化的工具, 但如何解决线性问题, 则必须依赖于高等代数方法. 所以有必要进一步强调高等代数的基础课地位.

4. 学习中要特别把握这样几点: 首先是必须准确理解概念, 清醒地知道要解决什么问题, 为什么提这个问题; 其次是厘清解决问题的思想和思路, 比如引入了什么特征量、一个问题是如何转化成另一个更简单的问题的; 第三是分清几何量(与坐标系无关的量)和非几何量, 熟悉微分几何的术语和约定; 第四是微分几何往往涉及较多的运算, 必须熟练掌握一些典型的计算方法(如指标轮换); 第五是及时复习所用到的其他课程的知识, 并自学课堂上没有讲解,

[1]对于非光滑的曲线、曲面等, 可以推广测度论和实变函数的方法, 利用测度结构等加以研究, 称为几何测度论.

[2]为什么解析几何的解析方法比欧式几何的公理化方法更有效呢? 本质上来讲, 解析方法是建立在实数集(实直线)$\mathbb{R}$的基础之上的, 而$\mathbb{R}$ 有着丰富的相互兼容的算术、代数、拓扑、分析等结构, 这远比欧式几何公理所包含的内容要多, 所以可以使用的工具也就更多.

但教师明确必须要掌握的一些知识点.

5. 在数学学习和研究上开始成熟的一个标志, 可能就是会提出既有一定意义, 又结合自身能力可以解决的问题; 能辨别哪些问题简单,那些相对困难, 从而可以通过有效地把较难的问题转化为较简单的问题来解决难题.

袁海荣

E-mail: hryuan@math.ecnu.edu.cn
华东师范大学数学系

2014年12月

目 录

第一部分

三维欧式空间中的曲线论和曲面论

第一讲　仿射欧式空间及其标架

我们从最简单的(也往往是最重要的)几何对象－三维仿射欧式空间开始, 来理解微分几何最基本的问题: 几何量与坐标的无关性. 三维仿射欧式空间$\mathcal{E}$是我们生活的环境的一种数学抽象, 我们要研究的曲线和曲面都是它的子集. 为此, 我们先复习在线性代数和解析几何中已学过的有关三维欧式空间$\mathbb{E}$的一些知识.

一　三维欧式空间及其向量运算

1. 欧式空间

1. 对一个非空集合$\mathfrak{V}$, 在引入一个**线性结构**[1]后, 就称之为($\mathbb{R}$上的)线性空间. 这个空间的维数n是由其线性结构唯一确定的. 对有限维空间(即$n<\infty$), 在确定$\mathfrak{V}$的一组基向量之后, $\mathfrak{V}$就和$\mathbb{R}^n$ (即n维实向量构成的线性空间) 线性同构,[2] 也就是说, 向量间的线性关系在某种对应下是不变的－仅仅通过测量向量间的线性关系是无法分辨这两个空间(中的点)的.

2. 如果在$\mathfrak{V}$上引入**内积** $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$, 就称$\mathfrak{V}$是一个欧式空间. 在$\mathfrak{V}$上可以定义向量的长度$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}$, 并通过Cauchy–Schwartz 不等式定义非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 间的夹角θ, 使得$\cos\theta=\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)$. 由此可以定义正交(垂直)的概念: $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 当且仅当$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=0$. 为了体现内积结构, 我们在$\mathfrak{V}$上引入一组标准正交基$\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$. 设$\mathbf{a}=\sum_{j=1}^n a_j\mathbf{e}_j$, 称$(a_1,\cdots,a_n)$为$\mathbf{a}$在基$\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$下的**坐标**. 通过令$T(\mathbf{a})=(a_1,\cdots,a_n)$, 就可以把$\mathfrak{V}$与我们的模板$\mathbb{R}^n$ 等距同构, 即线性同构T还满足$|T(\mathbf{a})|=|\mathbf{a}|$ (毕达哥拉斯定理). 欧式空间具有内积诱导的拓扑和测度结构.

由极化恒等式, 欧式空间中的(线性)等距变换也保持向量内积, 所以$\mathbb{R}^n$中的等距变换对应的矩阵是正交阵. 记$\mathfrak{V}$上的所有等距变换(按变换复合)构成的群为$O(n)$, 它群同构与n阶正交矩阵按矩阵乘法构成的群. 这个群是一个不连通连续群(含有拓扑结构的群), 特别地, 其包含恒等映射的分支是一个子群, 记作$SO(n)$; 这也是所有行列式等于1的n阶正交矩阵组成的群. 注意$O(n)$ 由$n(n-1)/2$个参数确定.

3. 下面我们只考虑三维欧式空间, 记作$\mathbb{E}$. 在$\mathbb{E}$上还有一个微分拓扑性质, 即**可定向性**. 我们称向量组$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 按右手系定向(其中每个向量都不为零), 若它们在一个标准正交基下的坐标满足

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}>0. \tag{1.1}$$

可以验证这个性质在$SO(3)$中等距变换下是不变的. [3]

2. 外积

外积在空间解析几何中已经定义过. 这里以其为例说明通过坐标来定义几何量的方法. 取定$\mathbb{E}$中的右手单位正交基$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, 定义外积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

[1]即对$\mathfrak{V}$ 中两个元素(称作向量)$\mathbf{a},\mathbf{b}$定义加法$\mathbf{a}+\mathbf{b}$, 对$\mathbf{a}$ 和$k\in\mathbb{R}$ 定义数乘$k\mathbf{a}$, 使它们满足若干公理.

[2]即存在$\mathfrak{V}$到$\mathbb{R}^n$的一一对应T, 使得$T(k\mathbf{a}+\mathbf{b})=kT(\mathbf{a})+T(\mathbf{b})$.

[3]参见第二节第三小节.

我们需要说明该式与右手单位正交基$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$的选取无关. 为此, 记上式右端为$\mathbf{c}$. 直接计算得

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)^2,$$

于是$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, 其长度与坐标系选取无关. 其次, 不难验证$\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$, 且行列式(1.1)的值为$|\mathbf{c}|^2 > 0$. 所以$\mathbf{c}$的方向也是唯一确定的: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$成右手系. 所以$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$是与$\mathbf{a},\mathbf{b}$垂直, 成右手系且长度为$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$的向量, 其中$\theta\in(0,\pi)$为$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的夹角; 于是$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$也是$\mathbf{a},\mathbf{b}$张成平行四边形的有向面积.

由上述定义和行列式的性质, 可知$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times(k\mathbf{b}+\mathbf{c}) = k\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$. 此外由直接计算, 可以验证如下恒等式

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{d})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}), \tag{1.2}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})\mathbf{a}. \tag{1.3}$$

注意外积不满足结合律: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. 此外定义三个向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$的混合积$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$, 它就是行列式(1.1), 也就是$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$张成的六面体的有向体积. 显然$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面当且仅当$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$.

3. 向量值函数

称连续映射$\mathbf{r}:(a,b)\to\mathbb{E}$ 为向量值函数(或$\mathbb{E}$中一条参数曲线). 取定$\mathbb{E}$ 的一个右手标准正交基后, $\mathbf{r}(t)$可与其坐标$(x(t),y(t),z(t))\in\mathbb{R}^3$等距对应, 我们也写作$\mathbf{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$. [4] 注意坐标函数$x(t)$等都是数学分析中研究的普通的函数, 所以有可微性的概念. 定义

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} = (x'(t),y'(t),z'(t)).$$

注意该式左边是与坐标选取无关的, [5] 而第二个等式给出了给定坐标系下的表达式. 也可以利用Riemann 和定义积分

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{|\triangle t_i|\to 0}\sum_{i=1}^n \mathbf{r}(t_i')\triangle t_i = (\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t, \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t, \int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t),$$

其中$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$是$(a,b)$的一个划分, $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$, 而$t_i'\in(t_{i-1},t_i)$. 注意对求导成立Leibnitz 法则.

例1. *设r是一个处处非零的连续可微向量值函数, 则*

1) $|\boldsymbol{r}(t)|$是常数当且仅当$\boldsymbol{r}'(t)\bullet\boldsymbol{r}(t)\equiv 0$;

2) $\boldsymbol{r}(t)$方向不变当且仅当$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}(t)\equiv 0$;

2) $\boldsymbol{r}(t)$与某固定方向垂直, 则$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))\equiv 0$; 反之, 若$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}(t)\neq 0$, 则$\boldsymbol{r}(t)$与某固定方向垂直.

证明. 1). $0 = (|\mathbf{r}(t)|^2)' = 2\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)$.

2). 设$\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|\mathbf{a}$, 则$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{a}\frac{\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|} = \mathbf{r}(t)\frac{\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|^2}$. 所以$\mathbf{r}(t)$和$\mathbf{r}'(t)$处处共线.

[4]注意这里的等号其实代表这个特定的等距对应.

[5]假设该极限存在, 则只依赖于欧式空间的线性和度量公理, 与基选取无关.

反之, 若$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}(t)\equiv 0$, 则存在函数$m(t)$使得$\mathbf{r}'(t)=m(t)\mathbf{r}(t)$. 直接计算可得

$$\left(\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}\right)'=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|}-\frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^2}\frac{\mathbf{r}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|}=0.$$

3). 设$\mathbf{r}(r)\bullet\mathbf{a}=0$, 则$\mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{a}=0$, $\mathbf{r}''(t)\bullet\mathbf{a}=0$, 所以$\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t)$共面(线性相关).

反之, 由$\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)\neq 0$, 可置$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)$, 它与$\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t)$垂直. 由$(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}'(t),\mathbf{r}''(t))=0$可知$\mathbf{a}(t)$也和$\mathbf{r}''(t)$垂直. 所以由$0=(\mathbf{a}(t)\bullet\mathbf{r}(t))'=\mathbf{a}'(t)\bullet\mathbf{r}(t)+\mathbf{a}(t)\bullet\mathbf{r}'(t)=\mathbf{a}'(t)\bullet\mathbf{r}(t)$ 和$0=(\mathbf{a}(t)\bullet\mathbf{r}'(t))'=\mathbf{a}'(t)\bullet\mathbf{r}'(t)+\mathbf{a}(t)\bullet\mathbf{r}''(t)=\mathbf{a}'(t)\bullet\mathbf{r}'(t)$ 可知$\mathbf{a}'(t)$与$\mathbf{a}(t)$平行, 即$\mathbf{a}(t)\times\mathbf{a}'(t))=0$. 由2), 可知$\mathbf{a}(t)$方向不变. 所以$\mathbf{a}(t)/|\mathbf{a}(t)|$就是与$\mathbf{r}(t)$垂直的固定方向.[6] □

二 三维仿射欧式空间及其标架

回忆线性空间或欧氏空间的概念与欧氏几何研究的直线、平面、立体空间并不完全一样, 后者中并不存在特殊的哪个点来对应线性空间的零向量. 所以我们引入仿射空间的概念, 来对几何学研究的空间作出公理化的定义.

1. 仿射欧式空间

定义1 (仿射空间)**.** *设$\mathfrak{V}$是$\mathbb{R}$上的线性空间, 称集合$\mathfrak{P}$是对应于$\mathfrak{V}$的一个仿射空间, 如果对任意$v\in\mathfrak{V}$, $p\in\mathfrak{P}$, 存在唯一的$q\in\mathfrak{P}$ (记作$p+v$), 满足如下性质:*

1) $(p+v_1)+v_2=p+(v_1+v_2)$, 其中$v_1,v_2\in\mathfrak{V}$;

2) 对任意$q\in\mathfrak{P}$, 存在唯一的$v\in\mathfrak{V}$使得$p+v=q$. 我们记$v=\overline{pq}$.

我们把$\mathfrak{P}$中元素称作点. 例如非齐次线性代数方程组的解集就是一个仿射空间. 注意根据线性空间的公理, 线性空间$\mathfrak{V}$本身也是个仿射空间. 此外, 若$\mathfrak{V}$是一个欧式空间, 则称$\mathfrak{P}$是仿射欧式空间. 我们把三维仿射欧式空间记作$\mathcal{E}$.

例2. $\mathbb{R}^3=\{(a,b,c):a,b,c\in\mathbb{R}\}$ *是一个仿射欧式空间.*

2. 标架

1. 取定三维仿射欧式空间$\mathcal{E}$中不共面点的四个点O,P_1,P_2,P_3, 使得$\mathbf{e}_1=\overline{OP_1}$, $\mathbf{e}_2=\overline{OP_2}$和$\mathbf{e}_3=\overline{OP_3}$是欧式空间$\mathbb{E}$ 中一个右手标准正交基. 称$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$是$\mathcal{E}$在$O$点的一个右手标准正交标架, 简称**标架**.

对任意点$p\in\mathcal{E}$, 它在上述标架下的坐标就是向量$\overline{Op}$在基 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 下的坐标. 此时$\mathcal{E}$ 就和$\mathbb{R}^3$建立了等距对应. 所以在等距同构意义下, $\mathcal{E}$ 和$\mathbb{R}^3$ 是一样的.

2. 注记. 在研究曲面时, 一般不能得到附在曲面上的右手标准正交标架. 此时我们仅要求$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$线性无关, 而将$\overline{Op}$在该基下线性表示的系数叫做它在该(仿射)标架下的坐标. 称矩阵$g=(g_{ij})=(\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j)$为该标架的系数矩阵. 设向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$ 的坐标分别为$a=(a_1,a_2,a_3)^\top$和$b=(b_1,b_2,b_3)^\top$, 那么

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=a^\top gb.$$

[6]当然, 也可以直接计算

$$\left(\frac{\mathbf{a}(t)}{|\mathbf{a}(t)|}\right)'=\frac{\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)|}-\frac{\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)|^2}\frac{(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t))\bullet(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}''(t))}{|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)|}=0.$$

这里需要计算$\mathbf{r}''(t)$用$\mathbf{r}(t)$和$\mathbf{r}'(t)$线性表示的系数.

3. 不同标架下的坐标变换规律

1. 对$k=1,2$, 设$F_k=\{O_k;\mathbf{e}_1^k,\mathbf{e}_2^k,,\mathbf{e}_3^k\}$是$\mathcal{E}$中两个右手标准正交标架. 设$p$在$F_k$下的坐标是$a^k=(a_1^k,a_2^k,a_3^k)^\top$. 我们要推导向量$a^1$和$a^2$之间的关系.

2. 根据基的定义, 存在三阶数字矩阵A使得

$$(\mathbf{e}_1^2,\mathbf{e}_2^2,,\mathbf{e}_3^2)=(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,,\mathbf{e}_3^1)A. \tag{1.4}$$

由于

$$\overline{O_1p}=(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,\mathbf{e}_3^1)a^1,\quad \overline{O_2p}=(\mathbf{e}_1^2,\mathbf{e}_2^2,\mathbf{e}_3^2)a^2=(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,\mathbf{e}_3^1)Aa^2,$$

从而

$$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1p}-\overline{O_2p}=(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,\mathbf{e}_3^1)(a^1-Aa^2).$$

记$\overline{O_1O_2}$在基$\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,\mathbf{e}_3^1$下的坐标是$b\in\mathbb{R}^3$, 那么我们就得到

$$a^1=Aa^2+b,\quad 或\quad a^2=A^{-1}(a^1-b). \tag{1.5}$$

注意向量的坐标变换规律(1.5)与基向量变换规律(1.4)相反, 所以向量是一种反变张量.

反之, 除了用公理化方法先验地定义向量, 也可以利用坐标变换定义向量, 即向量是一个数组的类, 其中任一个数组可通过满足上述规律(1.5)的变换变成另一个该类中的数组.

3. (1.4)中过渡矩阵A是正交阵. 事实上,

$$I_3=(\mathbf{e}_1^2,\mathbf{e}_2^2,,\mathbf{e}_3^2)^\top\bullet(\mathbf{e}_1^2,\mathbf{e}_2^2,,\mathbf{e}_3^2)=A^\top(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,,\mathbf{e}_3^1)^\top\bullet(\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_2^1,,\mathbf{e}_3^1)A=A^\top I_3A=A^\top A.$$

注意这里左边矩阵元素间乘法是向量内积, 第三个等号用了内积的线性以及矩阵乘法的结合律. 由于F^1和F^2都是右手标架, 所以$\det A=1$, 即$A\in SO(3)$.

三　三维仿射欧式空间中的刚体运动

为了明确两个图形“全等”的概念, 我们引入仿射欧式空间的等距变换及刚体运动的概念, 由此还可以刻画$\mathcal{E}$中所有右手标准正交标架构成的集合.

1. 等距变换和刚体运动

定义2 (仿射变换). *称仿射空间$\mathfrak{P}$上的变换T是仿射变换, 若存在对应n维线性空间$\mathfrak{V}$上的线性变换φ使得对任意$p,q\in\mathfrak{P}$, 成立$\overline{T(p)T(q)}=\varphi(\overline{pq})$.*

定义3 (等距变换, 刚体运动). *称仿射欧式空间$\mathfrak{P}$上的仿射变换T是等距变换, 如果对任意点$p,q\in\mathfrak{P}$, 都成立$|\overline{T(p)T(q)}|=|\overline{pq}|$; 即$T$是保持两点间距离不变的仿射变换. 显然此时对应的$\varphi$是欧式空间上的等距变换, 即$\varphi\in O(n)$. 如果$\varphi\in SO(3)$, 则称等距变换$T$是$\mathfrak{P}$上的一个刚体运动.*

对刚体运动T和固定的$O\in\mathcal{E}$, 及任意的$P\in\mathcal{E}$, 都成立$T(P)=T(O)+\overline{T(O)T(P)}=T(O)+\varphi(\overline{OP})$, 其中$\varphi\in SO(3)$. 所以$\mathcal{E}$上刚体运动$T$都可以分解为平移和旋转的复合; 刚体运动群就是$\mathcal{E}\times SO(3)$. 这是一个李群.

2. 刚体运动与标架变换间的关系

定理1. *刚体运动把仿射欧式空间的右手标准正交标架变为右手标准正交标架; 反之, 任给仿射欧式空间的两个右手标准正交标架, 存在唯一的刚体运动, 把其中一个标架变到另一个标架.*

这个定理表明仿射欧式空间的右手标准正交标架和刚体运动是一一对应的. 所以$\mathcal{E}$上右手标准正交标架的集合就是$\mathcal{E}\times SO(3)$.

证明. 1. 设$F=\{O;P_1,P_2,P_3\}=\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$是一个右手标准正交标架, T 是一个等距变换. 我们证明$T(F)=\{T(O);T(P_1),T(P_2),T(P_3)\}$也是一个右手标准正交标架. 注意$\overline{T(O)T(P_k)}=\varphi(\overline{OP_1})=\varphi(\mathbf{e}_k)$ $(k=1,,2,3)$, 所以由等距变换保持内积的性质, $\overline{T(O)T(P_1)},\overline{T(O)T(P_2)},\overline{T(O)T(P_3)}$也是一组标准正交基向量; 由于$\varphi\in SO(3)$, 它们还是右手系.

2. 反之, 对$k=1,2$, 设$F^k=\{O^k;P^k_1,P^k_2,P^k_3\}=\{O^k;\mathbf{e}^k_1,\mathbf{e}^k_2,\mathbf{e}^k_3\}$ 是右手标准正交标架. 设P在F^1下的坐标是$(a_1,a_2,a_3)^\top$, 令$T(P)=O^2+a_1\mathbf{e}^2_1+a_2\mathbf{e}^2_2+a_3\mathbf{e}^2_3$. 注意$T(O^1)=O^2$, $T(P^1_k)=P^2_k$, $k=1,2,3$. 不难看出T对应的线性变换是$\varphi(\mathbf{e}^1_k)=\mathbf{e}^2_k$, 所以$T$ 是一个等距变换. 利用(1.4)还可写出T在基F^1下对应的矩阵, 这也证明了这种刚体运动的唯一性. □

第二讲　曲线的Frenet标架和Frenet公式

这一讲我们介绍三维仿射欧式空间$\mathcal{E}$中正则曲线的Frenet标架及其Frenet公式, 基本的研究方法就是求导(微分), 用直线或二次曲线等较为简单的几何对象在局部逼近一般的光滑曲线. 学习中特别注意如何区分(判定)与标架无关的量.

一　曲线的参数表示

1. 我们定义$\mathcal{E}$中的曲线为连续向量值函数$p(t):\mathbb{R}\supset(a,b)\to\mathcal{E}$ 的像集. 这种观点使得我们可以利用动态的分析工具来研究静态的点集, 但缺点是同一条曲线可以是不同的向量值函数的像集. 为了排除这种不确定性, 我们需要如下约定.

定义1 (容许参数变换). *设对$u\in(c,d)$, 有三次连续可微函数$t(u)$使得$t'(u)>0$, 且$t(c)=a$, $t(d)=b$, 则称$t(u)$是向量值函数$p(t)$的一个容许参数变换; $\tilde{\boldsymbol{r}}(u)=\boldsymbol{r}(t(u))$与$\boldsymbol{r}(t)$表示同一条曲线.*

于是我们研究的曲线(几何对象)其实是连续向量值函数(分析和拓扑对象)在容许参数变换下的等价类. [1] 我们称$p(t)$ 是一条参数曲线.

2. 取定$\mathcal{E}$中的一个右手标准正交标架(以后均简称为标架) $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, 那么点$p(t)$就完全等同于欧式空间$\mathbb{E}$中的向量$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{e}_1+y(t)\mathbf{e}_2+z(t)\mathbf{e}_3$ [2]; 在等距变换意义下, 可以写$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^\top$. 所以对曲线$p(t)$ 的研究就转换为对$\mathbb{R}^3$中参数曲线$\mathbf{r}(t)$ 的研究.

注意$\mathbb{R}^3$本身也是一个三维仿射欧式空间. 如果给定$(a,b)\subset\mathbb{R}$到$\mathbb{R}^3$的连续向量值函数$\mathbf{r}(t)$, 我们也就得到一条参数曲线. **这也是我们最常见的给定曲线的方式.**[3]

例1. *所谓圆柱螺线就是映射$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$的轨迹; 它是圆柱面$x^2+y^2=a^2$ 上间距为$2\pi b$的一条螺旋上升的曲线.*

3. 总结: **我们的研究对象是$\mathbb{R}^3$中的参数曲线(映射)$\mathbf{r}(t)$, 目的是找到在$\mathbb{R}^3$的平移和保向正交变换下, 以及参数t 的任意容许变换下, 该曲线(映射)的所有不变量; 由此解决判定两条曲线是否可以通过$\mathbb{R}^3$的刚体运动全等的问题, 并证明符合特定要求的曲线的存在性.**

4. 本课程限于研究如下正则曲线:

定义2 (正则曲线). *如果$x(t),y(t)$ 和$z(t)$都是三次连续可微函数,[4] 且$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 对$t\in(a,b)$ 恒不为零, 则称$\boldsymbol{r}$ 是一条正则曲线; $\boldsymbol{r}'(t)$ 叫做曲线$\boldsymbol{r}(t)$ 点的切向量.*

注意利用复合函数求导和等距变换的光滑性, 可知曲线的正则性是个几何概念(与参数和标架选取无关); 曲线切向量方向与标架和参数选取无关, 但切向量长度与参数有关.

5. 下面定义仅依赖与曲线本身性质的特殊参数－弧长参数.

[1]所以从某种角度讲, 几何学是对非线性光滑映射的研究, 但是与微积分研究一个个具体映射不同, 微分几何研究的是一个映射等价类里映射的共同的性质.

[2]此时可以认为点或向量是对同一集合中元素的两个不同称呼.

[3]举个例子. 在古代, 人们将宇宙看作是一个仿射欧式空间$\mathcal{E}$, 为了记录星星在天空的运动轨迹($\mathcal{E}$中的一条曲线), 天文学家选取地球和三颗遥远的恒星(例如北极星, 天狼星和大角星)作为标架(不是标准正交标架), 这样星星的运动轨迹就可以用$\mathbb{R}^3$中参数方程来描述, 其中参数就是时间. 第谷就是通过多年的观测记录了火星等行星的运动资料(图表形式给出的参数方程). 此后, 数学家(例如开普勒和牛顿)为了研究此运动轨迹(它显得非常复杂), 就以该$\mathbb{R}^3$ 中参数方程为基础, 认为它是公理化定义的; 再用推理方法考虑其它坐标系, 比如以太阳为中心的坐标系, 发现此轨迹变得相当简单, 就是椭圆. 当然, 与解析几何不同, 微分几何研究的方法不是通过做坐标变换把曲线参数方程化简, 而是通过微分等工具, 直接对该曲线参数方程加以研究, 找到曲线或曲面的与坐标系(刚体运动)无关的量, 再根据这些不变量, 通过积分或微分方程等工具, 在新的坐标系下重新构建此曲线; 理论保证了这些曲线是全等的.

[4]*要求三次连续可微是由于在三维欧式空间中, 基向量组包括三个向量, 所以对$\mathbf{r}$求导三次就可以得到闭合的方程组, 即Frenet公式.*

定义3. 对正则曲线$\boldsymbol{r}(t)$, 称$s=\int_a^b|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$为曲线$\boldsymbol{r}(t)$的弧长, $s=s(t)=\int_a^t|\boldsymbol{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$为$\boldsymbol{r}(t)$的弧长参数, $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t|$为弧长微元.

不难验证, 曲线$\mathbf{r}(t)$的参数t是弧长参数当且仅当$|\mathbf{r}'(t)|\equiv 1$.

二 曲率和Frenet标架

1. 设曲线$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$是以弧长为参数的正则曲线, 置其单位切向量为

$$\alpha(s)=\mathbf{r}'(s). \tag{2.1}$$

定义4 (曲率)**.** 曲线的单位切向量关于弧长的变化率称为曲线的曲率:

$$\kappa(s)=|\alpha'(s)|=|\boldsymbol{r}''(s)|. \tag{2.2}$$

2. 以下假设曲率均不为零. 则$\alpha'(s)$是非零向量, 且$\alpha'(s)\bullet\alpha(s)\equiv 0$, 即$\alpha'(s)$ 与切向量垂直. 定义$\beta(s)$为$\alpha'(s)$ 方向的单位向量, 称为C在$\mathbf{r}(s)$点的主法向量. 于是

$$\alpha'(s)=\kappa(s)\beta(s). \tag{2.3}$$

称$\gamma(s)=\alpha(s)\times\beta(s)$为$C$在$\mathbf{r}(s)$点的次法向量.

定义5 (Frenet标架)**.** 称$F_s=\{\boldsymbol{r}(s);\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)\}$是曲线$C$在$\boldsymbol{r}(s)$点的*Frenet*标架. 平面$(X-\boldsymbol{r}(s))\cdot\alpha(s)=0$ 称作法平面, $(X-\boldsymbol{r}(s))\cdot\beta(s)=0$ 称作从切平面, $(X-\boldsymbol{r}(s))\cdot\gamma(s)=0$ 称作密切平面.

3. 注意曲率、主法向、次法向、法平面、从切平面、密切平面这些概念是几何量, 即与$\mathcal{E}$中标架的选取无关. 所以Frenet标架是附在曲线C上的几何结构, [5] 它是李群$\mathcal{E}\times SO(3)$ 中的一条参数曲线. 下面的Frenet 公式就是这条曲线F_s 满足的微分方程. [6]

三 挠率和Frenet公式

1. 次法向量$\gamma(s)$关于弧长的变化率$\gamma'(s)$反映了密切平面转动的快慢, 即曲线C偏离(密切)平面曲线的程度.[7] 由于$\gamma'(s)\perp\gamma(s)$, 且$\alpha'(s)\,/\!/\,\beta(s)$, 则$\gamma'(s)=\alpha'(s)\times\beta(s)+\alpha(s)\times\beta'(s)=\alpha(s)\times\beta'(s)$, 于是$\gamma'(s)$与$\beta(s)$共线. 由此定义**挠率** $\tau(s)$:

$$\gamma'(s)=-\tau(s)\beta(s),\quad \tau(s)=-\gamma'(s)\bullet\beta(s),\quad |\tau(s)|=|\gamma'(s)|. \tag{2.4}$$

注意$\tau(s)$的定义与标架无关(注意外积定义与标架无关).

2. 下面计算$\beta'(s)$. 设$\beta'(s)=a(s)\alpha(s)+b(s)\beta(s)+c(s)\gamma(s)$, 则$a(s)=\beta'(s)\bullet\alpha(s)=-\beta(s)\bullet\alpha'(s)=-\kappa(s)$, $b(s)=0$, $c(s)=\beta'(s)\bullet\gamma(s)=-\beta(s)\bullet\gamma'(s)=\tau(s)$. 于是我们得到如下Frenet 公式: [8]

$$\begin{cases}\mathbf{r}'(s)=\alpha(s),\\ \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}'=B\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\end{cases}\qquad B=\begin{pmatrix}0&\kappa(s)&0\\ -\kappa(s)&0&\tau(s)\\ 0&-\tau(s)&0\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

注意B是反对称阵. [9]

[5] Frenet标架可以认为是曲线的线性化结构, 但它不像内蕴几何中, 如微分流形的切空间或切从那样简单; 原因是现在曲线落在三维空间中, 仅仅确定切线不足以确定曲线在空间的位置(可以绕切线旋转).

[6] 注意F_s 在$\mathcal{E}\times SO(3)$ 中任一个元素作用下不变. 联系李群上不变向量场.

[7] 这来自对平面曲线的观察, 其密切平面不改变.

[8] 从这是线性方程组也可以体现理解Frenet标架是曲线的线性化结构.

[9] 李群$O(n)$的生成元就是反对称阵.

四 计算公式和例

定理1. 对给定参数曲线$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, 其*Frenet*标架和曲率、挠率有如下公式确定:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|},\\ \beta=\dfrac{|\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}''-\dfrac{\boldsymbol{r}'\bullet\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\boldsymbol{r}',\\ \gamma=\dfrac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|},\end{cases}\qquad \begin{cases}\kappa=\dfrac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3},\\ \tau=\dfrac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}.\end{cases}\tag{2.6}$$

证明. 1. 由$\mathbf{r}'=|\mathbf{r}'|\alpha$求导得

$$\mathbf{r}''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}'(t)|\alpha+|\mathbf{r}'|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}'(t)|\alpha+|\mathbf{r}'|^2\kappa(t)\beta(t),$$

于是

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''=|\mathbf{r}'|^3\kappa(t)\alpha\times\beta=|\mathbf{r}'|^3\kappa(t)\gamma.$$

由此得到κ与γ的表达式. 进而

$$\beta=\gamma\times\alpha=\frac{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''||\mathbf{r}'|}=\frac{|\mathbf{r}'|^2\mathbf{r}''-(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'')\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''||\mathbf{r}'|}=\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}\mathbf{r}''-\frac{(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''||\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'.$$

2. 再计算τ. 将$\gamma(t)$关于弧长参数求导, 利用Frenet公式, 有

$$\gamma'(t)=\gamma'(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\tau(t)\beta(t)|\mathbf{r}'(t)|,$$

以及

$$\gamma'(t)=\frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}\right)\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''.$$

利用β的表达式, 与其作内积, 就得到等式

$$-\tau|\mathbf{r}'|=\frac{|\mathbf{r}'|(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''')\bullet\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|^2}.$$

由此就得到τ. □

例2. 称圆周上曲线$\boldsymbol{r}(\tilde{s})=\alpha(s)$是曲线$\boldsymbol{r}$的切线像, $\tilde{s}$为其弧长参数. 则$\mathrm{d}\tilde{s}=|\alpha'(s)|\mathrm{d}s=\kappa(s)\mathrm{d}s$. 从而曲率是曲线切线像参数微元与曲线弧长微元的比值. 这一性质可以推广到曲面, 定义曲面的*Gauss*曲率.

例3. 曲线C是直线当且仅当$\kappa(s)\equiv 0$.

证明. 若C是直线$\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}_0+\alpha s$, 则$\kappa(s)=|\mathbf{r}''(s)|=0$. 反之, 由$\mathbf{r}''(s)\equiv 0$积分就得到$C$是直线. □

例4. 半径为R的圆的曲率是$1/R$.

这可通过对参数方程$x(s)=R\cos(s/R), y(s)=R\sin(s/R)$计算可得.

例5. 曲线$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$是平面曲线当且仅当$\tau\equiv 0$.

证明. 若C是平面直线, 则$\mathbf{r}$与某一固定方向垂直, 从而$(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')=0$, 即$\tau=0$. 反之, 设$\tau=0$, 则$\gamma\equiv\gamma_0$是常向量. 从而$(\mathbf{r}\bullet\gamma)'=\alpha\bullet\gamma_0=0$, 于是$(\mathbf{r}-\mathbf{r}(0))\bullet\gamma_0=0$, 即$\mathbf{r}$是平面曲线. □

例6. 设以弧长s为参数的曲线$C: r = r(t)$的曲率和挠率处处非零. 若C是曲线球面, 则

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) = \text{常数}. \tag{2.7}$$

反之, 若该式成立, τ处处非零且κ不是常数, 则C是球面曲线.

证明. 1. 设$|\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}_0|^2 = a^2$, 则$(\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}_0)\bullet\alpha(s) = 0$, 从而$\mathbf{r}(s)-\mathbf{r}_0 = \lambda(s)\beta(s)+\mu(s)\gamma(s)$. 注意$\lambda^2+\mu^2 = a^2$. 求导并利用Frenet 公式得

$$\alpha(s) = -\lambda\kappa\alpha + (\lambda' - \mu\tau)\beta + (\mu' + \lambda\tau)\gamma.$$

于是

$$\lambda = -\frac{1}{\kappa}, \qquad \mu = -\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right).$$

这就证明了等式(2.7).

2. 令$\mathbf{a}(s) = \lambda(s)\beta(s)+\mu(s)\gamma(s)$, 其中$\lambda, \mu$如前定义. 对(2.7)两边求导, 可知$\mu'+\lambda\tau = 0$. 所以$\mathbf{a}' = \alpha$, 即$(\mathbf{a}-\mathbf{r})'(s) = 0$, 积分得到$\mathbf{a} = \mathbf{r}-(\mathbf{a}(0)-\mathbf{r}(0))$. 所以利用(2.7)和毕达哥拉斯定理, $|\mathbf{r}-(\mathbf{a}(0)-\mathbf{r}(0))| =$ 常数. □

五 曲线的局部近似

我们利用Frenet公式研究曲线的局部形态. 将弧长参数曲线$\mathbf{r}(s)$在$s = s_0$处Taylor展开到三阶. 为书写简单起见, 不妨设$s_0 = 0$, 且$\mathbf{r}(0) = 0$. 那么[10]

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(s) &= \mathbf{r}'(0)s + \mathbf{r}''(0)\frac{s^2}{2} + \mathbf{r}'''(0)\frac{s^3}{6} + o(s^3)\\
&= s\alpha(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\beta(0) + \frac{s^3}{6}(-\kappa(0)^2\alpha(0) + \kappa(0)\tau(0)\gamma(0) + \kappa'(0)\beta(0)) + o(s^3)\\
&= \left(s - \frac{s^3}{6}\kappa(0)^2\right)\alpha(0) + \left(\frac{s^2}{2}\kappa(0) + \frac{s^3}{6}\kappa'(0)\right)\beta(0) + \frac{s^3}{6}\kappa(0)\tau(0)\gamma(0) + o(s^3).
\end{aligned}$$

所以在标架$\{O;\alpha(0),\beta(0),\gamma(0)\}$下曲线$C$有如下形式:

$$x(s) = s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3 + o(s^3),\ \ y(s) = \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 + o(s^3),\ \ z(s) = \frac{\tau(0)}{6}s^3 + o(s^3).$$

习题 1. 计算曲线$\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$的曲率和挠率.

---

[10]注意$\mathbf{r}'(0) = \alpha(0)$, $\mathbf{r}''(0) = \kappa(0)\beta(0)$, $\mathbf{r}'''(0) = \kappa(0)(-\kappa(0)\alpha(0) + \tau(0)\gamma(0)) + \kappa'(0)\beta(0)$.

第三讲　曲线论基本定理

这一讲我们介绍三维曲线论基本定理, 并简要介绍对应平面曲线的Frenet标架和Frenet公式.

一　曲线论基本定理

我们已经说明了弧长参数、曲率和挠率是正则曲线在仿射欧式空间刚体运动(或标架变换)下的不变量. 这一讲我们进一步用常微分方程理论证明: 这三个量在相差刚体运动下唯一地确定了一条正则曲线.

定理1 (唯一性)**.** *设$C_1: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(s)$和$C_2: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(s)$是$\mathcal{E}$中两条以弧长$s \in [0, s_0]$为参数的正则曲线. 如果它们的曲率和挠率处处相等, 而且曲率恒大于零.* [1] *则存在$\mathcal{E}$中一个刚体运动σ, 它把曲线C_1变为C_2.*

证明. 1. 根据条件, 两条曲线各有完全确定的Frenet标架. 对$k = 1, 2$, 记C_k在$s = 0$处的标架为$F_k(0)$. 则存在唯一的刚体运动σ使得$\sigma(F_1) = F_2$. 不妨仍记$\sigma(C_1)$为C_1. 则C_1和C_2在$s = 0$有相同的Frenet标架. 下面要证明$C_1 = C_2$.

2. 令$f(s) = |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|^2 + |\beta_1(s) - \beta_2(s)|^2 + |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|^2$. 对$s$求导, 利用Frenet公式, 并注意到$\kappa_1 = \kappa_2, \tau_1 = \tau_2$, 则

$$f'(s) = (\alpha_1 - \alpha_2 \quad \beta_1 - \beta_2 \quad \gamma_1 - \gamma_2) B (\alpha_1 - \alpha_2 \quad \beta_1 - \beta_2 \quad \gamma_1 - \gamma_2)^\top = 0.$$

这里B是(2.5)中的反对称阵. [2] 再由第1步, $f(0) = 0$, 所以$f(s) \equiv 0$.

3. 令$g(s) = |\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_2(s)|^2$, 则$g'(s) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \bullet (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.由$g(0) = 0$得到$\mathbf{r}_1(s) \equiv \mathbf{r}_2(s)$. □

定理2 (存在性)**.** *设$\kappa(s), \tau(s) \in C^1([0, s_0])$且$\kappa(s) > 0$. 则存在$\mathcal{E}$中以$s$为弧长参数的正则参数曲线$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 其曲率和挠率分别是$\kappa(s)$和$\tau(s)$. 这样的曲线在相差一个刚体运动下是唯一的.*

证明. 1. 我们求解齐次线性变系数常微分方程组(2.5), 其初值条件是$\mathbf{r}(0) = O, \alpha = \mathbf{e}_1, \beta = \mathbf{e}_2, \gamma = \mathbf{e}_3$, 其中$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$是$\mathcal{E}$的一个标架. 由常微分方程的Picard存在唯一性定理, [3]该问题的解可表示为

$$(\alpha(s) \quad \beta(s) \quad \gamma(s))^\top = \Phi(s)(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)^\top \in C^2, \quad \mathbf{r}(s) = \int_0^s \alpha(s)\,\mathrm{d}s \in C^3.$$

其中$Phi(s)$是(2.5)中第二个方程组的标准基解矩阵.

2. 令$H(s) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^\top \bullet (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$, 则

$$H'(s) = BH + HB^T = BH - HB, \qquad H(0) = I_3.$$

利用标准的线性齐次常微分方程组解的唯一性, 就知道$H(s) \equiv I_3$. 注意混合积$(\alpha, \beta, \gamma) = \pm 1$, 由解的连续性, 可知$\alpha, \beta, \gamma$仍是右手系. 于是$\{\mathbf{r}(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\}$是右手标准正交标架. 特别地, $\mathbf{r}$是正则参数曲线.

3. 不难知道$\{\mathbf{r}(s); \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\}$就是曲线$\mathbf{r}(s)$的Frenet标架, 从而$\mathbf{r}(s)$的曲率和挠率分别是$\kappa(s)$和$\tau(s)$. □

---

[1] *注意按定义, 曲率是非负函数.*

[2] 注意$x^\top Bx = x_i B_{ij} x_j = x_i (B_{ij} + B_{ji}) x_j / 2 = 0$. 该式即使对$x_j$是向量也成立.

[3] 注意这里的未知量是$\mathbb{R}^3$中向量函数, 共12个未知数, 从而方程组(2.5) 其实是矩阵微分方程, 可以转化为标准的常微分方程理论处理.

二 平面曲线

鉴于平面曲线在研究曲面上曲线的测地曲率中的重要性, 我们简单介绍平面曲线的Frenet标架及其相对曲率的概念.

1. 假设平面曲线$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$在平面$\mathbb{R}^2$的标准直角坐标系下可表示为

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)),$$

其中s是弧长参数, 因此它的单位切向量是

$$\alpha(s) = (x'(s), y'(s)).$$

将$\alpha(s)$旋转$\pi/2$得到单位法向量

$$\beta(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

于是平面曲线有一个定义好的右手正交单位标架场$\{\mathbf{r}(s); \alpha(s), \beta(s)\}$. 这类似于三维空间中曲线的Frenet标架.

2. 注意到$\alpha'(s) \perp \alpha(s)$, 成立

$$\alpha'(s) = \kappa_r(s)\beta(s),$$

其中

$$\kappa_r(s) = \alpha'(s) \cdot \beta(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}$$

称作平面曲线$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$的*相对曲率*. 它与曲率可能相差一个符号(注意曲率按主法向量的取法总是正的).

由于$\beta' \perp \beta$, 设$\beta'(s) = b(s)\alpha(s)$. 两边与$\alpha(s)$作内积, 得到$b(s) = \beta'(s) \cdot \alpha(s) = -\beta(s) \cdot \alpha'(s) = -\kappa_r(s)$. 于是得到如下平面曲线的Frenet公式:

$$\mathbf{r}'(s) = \alpha(s), \quad \alpha'(s) = \kappa_r(s)\beta(s), \quad \beta'(s) = -\kappa_r(s)\alpha(s). \tag{3.1}$$

对平面曲线, 也成立和本讲定理1及定理2类似的基本定理.

3. 一般参数. 设平面曲线方程是$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, 则曲线弧长元素是

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

曲线单位切向量就是

$$\alpha(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \quad \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \right),$$

法向量是

$$\beta(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \quad \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \right),$$

从而相对曲率就是

$$\kappa_r(t) = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}s} \cdot \beta(t) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\alpha'(t) \cdot \beta(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

三　例题

例1. *求适合$\tau = c\kappa$ (c是常数, $\kappa > 0$)的曲线$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.*

解. 1. 当$c = 0$时$\tau = 0$, 则C就是平面曲线.

2. 以下设$c \neq 0$. 将Frenet公式

$$\alpha' = \kappa\beta, \quad \beta' = -\kappa\alpha + c\kappa\gamma, \quad \gamma' = -c\kappa\beta$$

通过参数变换$t(s) = \int_0^s \kappa(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ 转换为

$$\alpha'(t) = \beta, \quad \beta'(t) = -\alpha + c\gamma, \quad \gamma'(t) = -c\beta. \tag{3.2}$$

于是$\beta''(t) = -\omega^2\beta$, 其中$\omega = \sqrt{1+c^2}$. 由此解得$\beta(t) = \cos(\omega t)\mathbf{a} + \sin(\omega t)\mathbf{b}$, 从而积分第一式得$\alpha(t) = \frac{1}{\omega}(\sin(\omega t)\mathbf{a} - \cos(\omega t)\mathbf{b} + c\mathbf{c})$. 这里$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$都是常向量. 代入第二式, 就可解出$\gamma = -\frac{c}{\omega}(\sin(\omega t)\mathbf{a} - \cos(\omega t)\mathbf{b}) + \frac{1}{\omega}\mathbf{c}$. 由此验证第三式也成立. 这样就得到了常微分方程组(3.2)的通解.

3. 在$s = 0$ (即$t = 0$) 时$\alpha(0), \beta(0), \gamma(0)$须是右手标准正交基. 注意

$$\alpha(0) = \frac{-1}{\omega}\mathbf{b} + \frac{c}{\omega}\mathbf{c}, \quad \beta(0) = \mathbf{a}, \quad \gamma(0) = \frac{c}{\omega}\mathbf{b} + \frac{1}{\omega}\mathbf{c},$$

其过渡矩阵是行列式为1的正交阵:$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega} & \frac{c}{\omega} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\omega} & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}$, 从而只需选$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$是标准正交向量组.

最后, 对$\mathbf{r}'(s) = \alpha(s)$积分就得到所要曲线的参数方程

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\omega}\left(\mathbf{a}\int_0^s \sin(\omega t(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma - \mathbf{b}\int_0^s \cos(\omega t(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma + cs\mathbf{c}\right) + \mathbf{d},$$

其中$\mathbf{d}$是常向量. 当$\kappa > 0$和τ都是常数时该曲线就是圆柱螺线; 它与$\mathbf{r}_1(s) = (r\cos\omega s, r\sin\omega s, h\omega s)$相差一个刚体运动. □

例2. *设$\{\boldsymbol{r}(t); \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)\}$是沿曲线$\boldsymbol{r}(t)$定义的一个单位正交标架场. 假定*

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) & e_2'(t) & e_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(t) & e_2(t) & e_3(t) \end{pmatrix} B(t),$$

其中$B(t)$是3×3实矩阵. 证明$B(t)$是反对称的: $B(t) + B(t)^\top \equiv 0$.

证明. 注意到

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(t) \\ \mathbf{e}_2(t) \\ \mathbf{e}_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(t) & \mathbf{e}_2(t) & \mathbf{e}_3(t) \end{pmatrix},$$

两边求导就得到$B(t)^\top + B(t) = 0$. □

第四讲　正则曲面

从这一讲开始我们研究三维仿射欧式空间$\mathcal{E}$中的曲面, 最终目的是证明曲面论基本定理: 给出判定两个曲面在$\mathcal{E}$的刚体运动下全等的充分必要条件, 并证明符合特定要求的曲面的存在性. 曲面要比曲线复杂得多, 这可能是由于$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}$在拓扑和算术等方面诸多不同造成的.

这一讲我们首先给曲面一个严格的定义, 并介绍一些常见的曲面的例子. 下面几讲介绍由把三维欧式空间的度量限制在曲面上得到的第一基本形式确定的曲面的内蕴性质, 以及借助由曲面在空间中位置确定的第二基本形式定义的刻画曲面弯曲程度的曲率的概念;最后叙述并证明曲面论基本定理: 满足适当相容性条件的第一基本形式和第二基本形式就是确定曲面的基本不变量; 作为相容性条件的一个推论, 就得到Gauss 的绝妙定理, 即第一基本形式确定了Gauss 曲率. 这个定理的影响十分深远, 它表明可以仅仅通过对曲面本身的测量就知道曲面偏离欧式空间的某种弯曲程度. 所用方法除微分和线性代数外, 还用到一阶超定偏微分方程组的适定性理论.

一　参数曲面

1. 参数曲面的定义

1. 我们在婴幼儿时期就通过眼的观察和手的触摸, 形成了对于曲面的一些直观认识, 感觉到了皮球的表面和水杯的表面是不相同的. 为了定量的辨别曲面, 就需要在数学上严格地定义曲面. [1]

在立体几何中, 我们可以用公理化方法定义一些特殊的曲面, 例如球面定义为到一固定点距离等于常数的点的集合. 但这种方法的缺点是很难描述复杂一点的曲面, 例如奶瓶的表面.

在解析几何中, 曲面的概念由于函数观点的引进而大大扩展了. 设D是欧式平面$\mathbb{R}^2$ 中的一个区域, 我们认为连续一一映射$S: D \to \mathcal{E}$ 的像集就是一个曲面. 这种曲面叫做参数曲面, 其中S的自变量$(u,v) \in D$就是参数. 这种把曲面看成是映射的观点的优越性不但体现在可以定义很复杂的曲面, 而且有助于引入分析工具研究曲面. 但是注意, 定义在不同的参数范围D上的(不同的)连续映射S的像集可能是一样的, 所以S本身携带的某些信息可能并不是所代表曲面本身的性质. 为了精确化这种映射S的不确定性, 我们有如下概念:

定义1 (容许参数变换). *设$\tilde{D}$和D是平面上两个区域, 若$\varphi: \tilde{D} \to D, (\tilde{u},\tilde{v}) \mapsto (u,v)$是$C^3$ 的映射, 且该变换的Jacobi行列式*

$$J = \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\right) > 0,$$

则称φ 是容许参数变换. [2] *此时$S(u,v)$ 和$\tilde{S}(\tilde{u},\tilde{v}) = S(\varphi(\tilde{u},\tilde{v}))$ 代表相同曲面.*

2. 在$\mathcal{E}$中取定一个标架$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, 则点$S(u,v)$等同于向量$\overline{OS(u,v)}$, 而后者可以用基表示为

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{e}_1 + y(u,v)\mathbf{e}_2 + z(u,v)\mathbf{e}_3, \tag{4.1}$$

[1]数学的进步, 不仅体现在一些重要猜想得到证明, 还体现在对于研究对象概念的精确化.

[2]由隐函数定理, $J \neq 0$保证了φ存在C^3的逆映射, 所以是一个C^3同胚.

其中坐标函数$x(u,v)$等都是数学分析中研究过的普通多元函数. 如果用等号代表$\mathcal{E}$在此标架下与$\mathbb{R}^3$的等距同构, 那么参数曲面可以写为[3]

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)). \tag{4.2}$$

这就把对曲面的研究转化为对两自变量的向量值函数的研究. 当然, 是要研究这个函数的与标架$\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$和容许参数变换无关的那些性质(即所谓几何性质).

反过来, 我们也可以对给定的函数$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$, 利用(4.2)定义仿射欧式空间$\mathbb{R}^3$ 中的一个参数曲面, 这也是通常给定曲面的方式.

2. 参数曲线网和曲纹坐标

考虑曲面(4.2), 对固定点$(u_0,v_0)\in D$, 可得到在曲面上的u-曲线$\mathbf{r}(u,v_0)$ 和v-曲线$\mathbf{r}(u_0,v)$. 随着(u_0,v_0)的变动, 就得到曲面上的参数曲线网. 我们也称参数(u,v)为曲面S上$\mathbf{r}(u,v)$点的曲纹坐标.

3. 正则性

1. 曲面上u-曲线(v-曲线)在(u,v)点的切向量就是

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{r}_u(u,v)=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=(\partial_u x(u,v),\partial_u y(u,v),\partial_u z(u,v)), quad \mathbf{r}_v=\mathbf{r}_v(u,v)=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(\partial_v x(u,v),\partial_v y(u,v),\partial_v z(u,v)),$$

它们是$\mathcal{E}$中的向量(根据定义, 左边不依赖于$\mathcal{E}$的标架, 但长度依赖于参数选取).

定义2 (正则性). *设曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$的坐标函数$x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^3(D)$. 若$S$在$\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$点处的切向量$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$线性无关, 即$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq=0$, 则称$S$在该点是正则的; 处处正则的参数曲面称作正则参数曲面.*

2. 正则性是个与坐标和参数无关的概念: 设$(u,v)=\varphi(\tilde{u},\tilde{v})$, 注意$\varphi\in C^3$, 所以由复合函数性质, 坐标函数$x(\varphi(\tilde{u},\tilde{v}))$等仍是$C^3$的; 此外, 根据链式法则,

$$\mathbf{r}_{\tilde{u}}=\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}+\mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}},\quad \mathbf{r}_{\tilde{v}}=\mathbf{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{v}}+\mathbf{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{v}},$$

所以

$$\mathbf{r}_{\tilde{u}}\times\mathbf{r}_{\tilde{v}}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v J\neq 0.$$

二　微分流形

参数曲面的概念已经可以很好地描述我们熟知的曲面的局部部分了, 但尚不能表示所有我们熟知的曲面(整体). 例如球面就不可能用参数曲面来表示, 这是由于球面和$\mathbb{R}^2$的拓扑不同造成的. 为了今后学习和理解整体微分几何的需要, 我们引入微分流形的概念.

定义3 (拓扑流形). *设M是一个Hausdorff拓扑空间.[4] 若M 的每一点p 都有一个开邻域$U\subset M$使得U和n维欧式空间$\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集是拓扑同胚的, 则称M是一个n维拓扑流形.*

设在上述定义中提到的同胚是$\varphi:U\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$, 其中$\varphi(U)$ 是$\mathbb{R}^n$中的开集, 则称(U,φ)是流形M的一个坐标卡, 并把象点$\varphi(p)$在$\mathbb{R}^n$中的坐标$x=(x^1,\cdots,x^n)$称作点$p\in U$的一个局部坐标; 也称$(U;x)$ 是流形M的一个局部坐标系.

[3] 再次强调, 该式左边是公理化定义的量, 右边是它的某个坐标表示, 等号代表等距变换下相等; 而(4.1)中的等号确实是代表集合元素相同的本意. 特别地, 如果取$\mathcal{E}$, 则这里等号也就是元素相同的意思.

[4] 即其中两个不同的点有两个不交的开邻域.

定义4 (坐标卡相关性). 设M是一个n维拓扑流形, (U,φ) 和(V,ψ)是它的两个坐标卡. 若当$U\cap V\neq\emptyset$时, $\psi\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\psi^{-1}$都是$C^r$的($r$是正整数, 或$\infty$, 或解析), 则称坐标卡$(U,\varphi)$ 和(V,ψ)是C^r相关的.

定义5 (微分结构). 设M是一个n维拓扑流形, 假定$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$ (I是一个指标集)是M的坐标卡的一个集合, 并且满足以下条件:

a) $\{U_\alpha:\alpha\in I\}$构成M的一个开覆盖;

b) 属于$\mathcal{A}$的任意两个坐标卡都是C^r相关的;

c) $\mathcal{A}$是C^r极大的: 如果(U,φ)是M的一个坐标卡, 且(U,φ) 与$\mathcal{A}$中的每一个成员都是C^r相关的, 则$(U,\varphi)\in\mathcal{A}$.

此时我们称坐标卡集$\mathcal{A}$是流形M上的一个C^r微分结构.

定义6 (微分流形). 设M是一个n维拓扑流形, 若在M上指定了一个C^r微分结构$\mathcal{A}$, 则称$(M,\mathcal{A})$是一个n维C^r微分流形. 属于$\mathcal{A}$的坐标卡(U,φ)称作该微分流形的容许坐标卡.

定义7 (可定向微分流形). 称M是一个n维可定向微分流形, 若M上的C^r微分结构$\mathcal{A}$满足如下性质: 对$\mathcal{A}$)中任意两个C^r相关的坐标卡(U,φ) 和(V,ψ), 坐标变换$\psi\circ\varphi^{-1}$的*Jacobi*行列式总是正的.

二维微分流形就是曲面. 球面是可定向的, 而莫比乌斯带是不可定向的.

三 常见曲面的例子

例1 (旋转面). 考虑Oxz平面上一条曲线

$$x=f(u),\quad y=0,\quad z=g(u),\qquad u\in(a,b),$$

其中$f(u)>0$. 将该曲线绕x-轴旋转所得的曲面就是旋转面

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u)).$$

例2 (旋转面的例).

- 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$: 参数方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=(R\cos\varphi\cos\theta,R\cos\varphi\sin\theta,R\sin\varphi)$.
- 圆柱面$x^2+y^2=R^2$: 参数方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(R\cos u,R\sin u,v)$.

例3 (直纹面). 一条直线在空间运动扫过的曲面(即单参数直线族形成的曲面)叫做直纹面. 记$\boldsymbol{a}(u)$是动直线上一个固定点在时刻u的位置(该曲线叫做准线), $\boldsymbol{l}(u)$ 是动直线在该时刻的方向(过$\boldsymbol{a}(u)$沿$\boldsymbol{l}(u)$方向的直线叫母线), 则直纹面方程就是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{l}(u).$$

例4 (直纹面的例子).

- 正螺旋面: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,av)$, 其中$a>0$是常数;
- 锥面: 存在函数$v=\lambda(u)$使得$\boldsymbol{a}(u)+\lambda(u)\boldsymbol{l}(u)=\boldsymbol{r}_0$的直纹面;
- 切线面: 以准线的切线为母线的直纹面: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{a}'(u)$.

柱面、锥面和切线面都是所谓可展曲面.

第五讲　第一基本形式

我们通过把$\mathcal{E}$的度量限制在曲面上来计算曲面上曲线的长度, 曲面上向量间的夹角, 以及曲面片的面积等"内蕴量".

一　切空间和切平面

1. 设$S:\mathbb{R}^2\supset D\to\mathcal{E},\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$是一个正则参数曲面. 考虑$\mathcal{E}$ 中位于S 之上的参数曲线[1]

$$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(t),v(t)),\quad \text{其中}\quad (u(t),v(t))\quad \text{是}D\text{上的正则参数曲线,} \tag{5.1}$$

且记$(u(0),v(0))=(u_0,v_0),S((u_0,v_0))=p_0$. 我们考虑曲线$C$在$p_0$点的切向量, 利用复合函数求导得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(u(t),v(t))\bigg|_{t=0}=(u'(t)\mathbf{r}_u+v'(t)\mathbf{r}_v)|_{t=0}.$$

不难验证此切向量与曲面的表示无关(即和参数(u,v)的选取无关, 也和$\mathcal{E}$的标架无关).

2. 曲面上经过p_0点的任意一条连续可微正则曲线在p_0点的切向量叫做曲面在该点的一个*切向量*. 由上式可知曲面S在p_0点的切向量都可以用坐标曲线的切向量$\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$ 线性表示, 系数就是$u'(0)$和$v'(0)$. 反之, 对任意$a,b\in\mathbb{R}$, 可以作曲线$u(t)=u_0+at,v(t)=v_0+bt$使得S上对应曲线确定的切向量就是$a\mathbf{r}_u(u_0,v_0)+b\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$. 所以$S$在一点$p$的切向量的集合$T_pS$与$\mathbb{R}^2$是一一对应的. 由此我们可以把$\mathbb{R}^2$上线性结构迁移到$T_pS$ 上, 使得后者也成为一个线性空间,[2]称为S 在p 点的**切空间**; 称$\mathcal{E}$ 中平面

$$X(\lambda,\mu)=\mathbf{r}(u,v)+\lambda\mathbf{r}_u(u,v)+\mu\mathbf{r}_v(u,v)$$

为S在p点的**切平面**. 切平面是曲面在一点的线性化近似.

3. 定义曲面在p点的单位法向量为

$$\mathbf{n}(u,v)=\frac{\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)|}.$$

由此可确定曲面在该点的法向直线

$$X(s)=\mathbf{r}(u,v)+s\mathbf{n}(u,v).$$

注意$\mathbf{n}$是与曲面的表示无关的量.

4. 由此, 在曲面上每一点我们都得到了其**自然标架** $\{\mathbf{r}(u,v);\mathbf{r}_u(u,v),\mathbf{r}_v(u,v),\mathbf{n}(u,v)\}$. 这个标架族与曲面的表示无关. 但一般来说, 它们不是正交标架.

二　第一基本形式

下面考虑切空间上的内积结构. 这是通过把$\mathbb{R}^3$的内积限制在切空间上得到的.

[1]研究曲面的方法之一就是把曲面看成是由曲线组成的; 或者更深刻地, 通过考虑$\mathbb{R}\to S$ 的连续映射, 用$\mathbb{R}$ 来探测S 的拓扑性质或微分几何性质.

[2]至于其欧式空间的结构将在下一节讨论. 在微分流形或现代微分几何中, 切向量是看作曲线的等价类的, 或者是作用在流形的光滑函数类上的导算子.

1. 曲面上内蕴量的计算

1. 计算曲面上曲线的弧长和曲面上区域的面积在实际工作中有很多用处(如山路的长度和山地的面积).

为计算弧长, 先考虑切向量的长度. 为此定义

$$E=E(u,v)=\mathbf{r}_u(u,v)\bullet\mathbf{r}_u(u,v),\quad F=F(u,v)=\mathbf{r}_u(u,v)\bullet\mathbf{r}_v(u,v),\quad G=G(u,v)=\mathbf{r}_v(u,v)\bullet\mathbf{r}_v(u,v),\tag{5.2}$$

称为第一基本形式系数, [3]则

$$\begin{aligned}(a_1\mathbf{r}_u+b_1\mathbf{r}_v)\bullet(a_2\mathbf{r}_u+b_2\mathbf{r}_v) &= (a_1\ \ b_1)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix},\\ |a\mathbf{r}_u+b\mathbf{r}_v| &= \sqrt{a^2E+2abF+b^2G}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

也就是说, 由此可以在切空间引入内积, 而这个内积是通过把切向量看作外围空间$\mathcal{E}$的向量, 由后者的内积确定的. 注意内积(5.3)和曲面的表示无关. 于是对曲线(5.1), 其弧长是

$$\begin{aligned}s &= \int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(u(t),v(t))\right|\mathrm{d}t=\int_a^b|u'(t)\mathbf{r}_u(u(t),v(t))+v'(t)\mathbf{r}_v(u(t),v(t))|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b\sqrt{u'^2E+2u'v'F+v'^2G}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{5.4}$$

通过直接计算可以验证, 该式与曲面的表示及参数t的选取无关.

2. 下面再计算曲面上两条相交曲线在交点的夹角.

设$\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{r}(u_1(t),v_1(t))$ 和$\mathbf{r}_2(s)=\mathbf{r}(u_2(s),v_2(s))$ 是(当$t=0,s=0$ 时)经过曲面上$\mathbf{r}(u_0,v_0)$点的两条曲线. 它们在该点的夹角$\theta\in[0,\pi)$定义为对应切向量$\mathbf{r}_u(u_0,v_0)u_1'(0)+\mathbf{r}_v(u_0,v_0)v_1'(0)$与$\mathbf{r}_u(u_0,v_0)u_2'(0)+\mathbf{r}_v(u_0,v_0)v_2'(0)$的夹角, 即

$$\cos\theta=\frac{\begin{pmatrix}u_1'(0) & v_1'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2'(0)\\ v_2'(0)\end{pmatrix},}{\sqrt{|u_1'(0)^2E+2u_1'(0)v_1'(0)F+v_1'(0)^2G|}\sqrt{|u_2'(0)^2E+2u_2'(0)v_2'(0)F+v_2'(0)^2G|}}.$$

由此, 可知坐标曲线网处处正交的充分必要条件就是$F=0$.

3. 面积.

对在$\mathbf{r}(u_0,v_0)$点的一个曲面微元, 即$(u_0,u_0+\triangle u)\times(v_0,v_0+\triangle u)$ 在$\mathbf{r}$下的像, 其面积用由切向量$\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\triangle u$和$\mathbf{r}_v(u_0,v_0)\triangle v$张成的平行四边形面积来代替, [4]就得到曲面面积微元是

$$|(\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\triangle u)\times(\mathbf{r}_v(u_0,v_0)\triangle v)|=|\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)|\triangle u\triangle v=\sqrt{EG-F^2}\triangle u\triangle v.$$

这里利用了三维欧式空间外积及其运算性质(1.3). 于是曲面的面积就定义为

$$S=\int_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

---

[3]注意根据Cauchy-Schwarz不等式, 对称矩阵$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$是正定阵.

[4]注意过(u_0,v_0) 和$(u_0+\triangle u,v_0)$的u-曲线的弧长微元就是$\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\triangle u$. 所以这里切向量长度与弧长微元是一样长度的.

2. 第一基本形式

1. 一个自然的问题是, 上面定义的曲面上的弧长、面积等量是与曲面的表示无关的吗? 为此, 考虑曲面的微分

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \mathrm{d}u + \mathbf{r}_v \mathrm{d}v,$$

根据数学分析中熟知的一阶微分的形式不变性, 它和曲面的表示无关. 我们定义曲面的第一基本形式为

$$I = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

注意这里用到了欧式空间$\mathcal{E}$的内积, 从而第一基本形式与曲面的表示无关. 由此不难验证曲面上曲线弧长及夹角都与曲面表示无关,也和曲线参数选取无关.

2. 第一基本形式系数在参数变换下的变换规律. 设正规参数曲面$S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$有一个容许参数变换$u=u(\tilde{u},\tilde{v})$, $v=v(\tilde{u},\tilde{v})$, 其中$(\tilde{u},\tilde{v})\in\tilde{D}$. 由上一讲知道

$$(\mathbf{r}_{\tilde{u}},\mathbf{r}_{\tilde{v}}) = (\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})},$$

于是[5]

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}^{\top} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}. \tag{5.5}$$

从而由行列式乘法和积分的变量替换公式, 得到

$$\int_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\tilde{D}} (\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}|J|^{-1})(|J|\,\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v}) = int_{\tilde{D}}\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\,\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v},$$

其中$J=\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$. 所以曲面面积的定义也与参数无关.

3. 评论

我们注意到, 这里的第一基本形式是由曲面外围空间$\mathcal{E}$的内积和线性结构决定的. 但是, 另一方面, 只要给定了第一基本形式(或E,F,G, 它们在曲面参数变换下满足变换规律(5.5)), 就可以直接在参数平面(u,v)上计算曲面曲线弧长和曲面面积等, 完全不需要知道曲面在外围空间的形状. 所以这些由第一基本形式确定的量称作内蕴量. 以后Gauss定理还表明仅仅通过第一基本形式还可以知道曲面的某些弯曲的性质. 这些就是黎曼几何的肇源, 那时已不再需要外围空间$\mathcal{E}$了. (当然, 为了使切向量和切空间等概念不依赖于外围空间, 需要对这些概念作适当的修正. 比如切向量就定义为作用在定义在曲面上的函数类的微分算子等, 这就比较抽象一点; 曲面面积微元直接定义为用第一基本形式系数所成矩阵的行列式与参数微分相乘所得的微分形式等.) 所以学习本课程有助于理解现代微分几何语言和术语的来源.

三 曲面上正交参数曲线网的存在性

曲面上如果存在正交参数曲线网, 那么由于$F=0$, 往往可以简化运算. 为此, 我们用常微分方程结论证明曲面上局部正交参数曲线网的存在性.

[5]于是对于给定第一基本形式, 要把它通过容许参数变换化成对角形, 即标准欧式度量, 需要满足三个偏微分方程, 而只有两个未知函数. 这一般是没有解的超定问题; 其有解的必要条件是适当相容性条件成立; 这个相容性条件就是曲率张量为零. 黎曼当初就是通过对n维情形计算这个相容性条件而得到他的曲率张量表达式的.

定理1 (一次微分式积分因子的存在性). 设$f(x,y)$和$g(x,y)$是定义在区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的两个连续可微函数, 且在点$(x_0,y_0)\in D$处不为零. 那么存在该点的邻域$U\subset D$, 以及U上的处处不为零的连续函数λ, 使得$\lambda(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$是个全微分.

证明. 不妨设$(x_0,y_0)=(0,0)$, 且f,g在D 上处处不为零.

1. 我们要寻找λ使得$(\lambda f)_y-(\lambda g)_x=0$, 并不妨设$\lambda(x,0)=1$. 这就相当于求解一阶偏微分方程

$$\lambda_y-\frac{g}{f}\lambda_x+\frac{f_y-g_x}{f}\lambda=0.$$

考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)},\quad x(0)=\tilde{x},$$

由常微分方程解的存在唯一性和连续依赖性定理, 存在O的邻域U充满积分曲线. 也就是说, 若记解为$x=h(y,\tilde{x})$, 则h 是$y,\tilde{x}$的连续函数, 且$(\tilde{x},y)\mapsto(x,y)$是双射, 其逆映射也连续. [6]

2. 沿着积分曲线, 我们求解

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(h(y,\tilde{x}),y)}{\mathrm{d}y}=-\frac{f_y-g_x}{f}\lambda((h(y,\tilde{x}),y),\quad \lambda(g(0,\tilde{x}),0)=\lambda(\tilde{x},0)=1,$$

由此就可以得到$\lambda(g(y,\tilde{x}),y)$, 从而对$(x,y)\in U$得到$\lambda(x,y)$. □

定理2. 设在正则参数曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上有两个处处线性无关的连续可微的切向量场$\boldsymbol{a}(u,v),\boldsymbol{b}(u,v)$. 则对于任意$p\in S$, 存在一个$p$的邻域$U\subset S$, 以及$U$上的新的参数系$(\tilde{u},\tilde{v})$, 使得$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}//\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}//\boldsymbol{b}$.

证明. 设$\mathbf{a}=a_1\mathbf{r}_u+a_2\mathbf{r}_v,\mathbf{b}=b_1\mathbf{r}_u+b_2\mathbf{r}_v$. 考虑微分式$b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v$和$-a_2\mathrm{d}u+a_1\mathrm{d}v$. 由前面定理, 存在邻域$U$以及$U$上的函数$\xi,\eta$, 以及$\tilde{u},\tilde{v}$ 使得$\mathrm{d}\tilde{u}=\xi(b_2\mathrm{d}u-b_1\mathrm{d}v)$, $\mathrm{d}\tilde{v}=\eta(-a_2\mathrm{d}u+a_1\mathrm{d}v)$. 于是

$$\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\xi b_2 & -\xi b_1\\ -\eta a_2 & \eta a_1\end{pmatrix},\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}=\frac{1}{\xi\eta(a_1b_2-a_2b_1)}\begin{pmatrix}\eta a_1 & \xi b_1\\ \eta a_2 & \xi b_2\end{pmatrix},$$

从而$\mathbf{r}_{\tilde{u}}=\frac{1}{\xi(a_1b_2-a_2b_1)}\mathbf{a},\mathbf{r}_{\tilde{v}}=\frac{1}{\eta(a_1b_2-a_2b_1)}\mathbf{b}$. □

定理3 (曲面上正交参数曲线网的存在性). 正则参数曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$的每一点都有一个邻域$U\subset S$, 以及$S$上的新参数$(\tilde{u},\tilde{v})$, 使得新参数对应的切向量场$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}},\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}$是彼此正交的.

证明. 对切空间自然基$\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$作施密特正交化,就可以得到$S$上的正交向量场; 再利用前一定理解出对应正交参数曲线网的存在性. □

习题 1. 已知曲面的第一基本形式为$\mathrm{I}=(\mathrm{d}u)^2+(u^2+a^2)(\mathrm{d}v)^2$. 求: (1) 曲面上曲线$u=v$从$v_1$ 到v_2的弧长; (2) 曲面上曲线$u+v=0$和$u-v=0$之间的夹角; (3) 曲面上由曲线$u=av,u=-av,v=1$围成的区域的面积.

[6]该变换的Jacobi矩阵的行列式是$\partial x/\partial\tilde{x}=\partial h(y,\tilde{x})/\partial\tilde{x}$, 由于$h(0,\tilde{x})=\tilde{x}$, 即$\partial h(0,\tilde{x})/\partial\tilde{x}=1$, 于是在原点该行列式就是1, 从而它在平面原点的一个邻域内非零.

第六讲　切空间和余切空间

1. 我们说过，微分几何与微积分本质都在研究非线性映射, 所不同的是, 微分几何研究的是一类映射(即相差一个容许参数变换的非线性映射)所共有的性质, 即所谓几何性质. 微分法研究光滑的非线性映射的最重要的手段就是局部地线性化，把问题转化为对线性映射的研究(例如隐函数定理就是这种类型). 这就对应着许多局部的微分几何性质都是通过线性映射在相似变换下的不变量体现的. 于是为了学好微分几何, 需要对线性代数的概念、思想和方法有较好的掌握是很自然的要求.

2. 函数的微分是数学分析中的一个基本概念, 然而数学分析教材中并没有给出微分的任何严格的定义. 所以上一讲对第一基本形式的定义其实并不严格. 对微分概念的本质的理解，需要利用线性代数中线性空间上线性泛函或对偶空间的概念.

3. 这一讲的目的，就是利用线性代数中线性空间、对偶空间、多重线性函数、张量积等概念来严格地定义正则参数曲面在一点的切空间、余切空间，以及作为切空间上对称正定二重线性函数的第一基本形式. 这些概念不依赖于曲面的表示，也不需要假设曲面放在某个外围空间$\mathcal{E}$中；它们是学习现代微分几何的基础，对于理解下一讲介绍的曲面间映射也非常重要.

一　线性空间及其对偶空间、多重线性函数、线性映射及其共轭映射

1. 设V是数域K上的n维线性空间. 线性映射$V \to K$称作V也常被称作V上的线性泛函. V上所有线性泛函的全体记作V^*, 它也可做成K上的一个线性空间：$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V^*, k \in K$, 可定义$(k\varphi_1 + \varphi_2)(v) = k\varphi_1(v) + \varphi_2(v), \forall v \in V$. 称这样得到的线性空间$V^*$为$V$的对偶空间. [1]

2. 取定V中基底向量$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$, 我们定义$V^*$中泛函$\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n$如下：

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

不难验证$\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n$构成$V^*$的一组基，称作$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$的对偶基. 特别的，设$v = \sum_{k=1}^n v^k \mathbf{e}_k$, 则$\mathbf{e}^j(v) = v^j$.

注意到对固定的$v \in V$, 通过定义$v(\varphi) = \varphi(v)$, $\forall \varphi \in V^*$, 也可以定义V^*上线性泛函v. 所以可以把V中元素通过上述方式看作$(V^*)^*$中元素, 即我们建立了$V \to (V^*)^*$的线性映射. 从而根据线性映射基本定理, $\dim (V^*)^* \leq \dim V = n$. 但根据上一段讨论, $\dim (V^*)^* = n$, 于是V与$(V^*)^*$是线性同构的. 为了体现出V与$(V^*)^*$之间这种关系, 我们也把$\varphi(v)$ 记作$\langle \varphi, v \rangle$.

3. 多重线性函数. 称映射$T : V \times V \to K$是V上双线性函数, 如果对任意固定的$v \in V$, $T(\cdot, v)$和$T(v, \cdot)$都是V上的线性函数. 此外, 如果对任意$u, v \in V$, 还成立$T(u, v) = T(v, u)$, 则称T是对称双线性函数(如果对任意$u, v \in V$, 还成立$T(u, v) = -T(v, u)$, 则称T是反对称双线性函数). 例如内积就是一种对称双线性函数, 而以后介绍的二次微分形式就是一种反对称双线性函数.

所有V上双线性函数可以自然地定义加法与数乘运算, 从而构成K上的一个线性空间, 记作$\bigotimes^2 V^*$.

类似地可以定义V上m-重线性函数$T : V^m \to K$: T在固定任意$m-1$个自变量后关于余下的那个变量是个线性函数. 它的全体记作$\bigotimes^m V^*$, 是K上的n^m维线性空间. 如果对任意m阶

[1]把我们的模板空间$\mathbb{R}$映到待研究空间X或把X映到$\mathbb{R}$是将X 与$\mathbb{R}$比较的两种常用方法. 虽然前一种较为直观，但后一种由于值域在$\mathbb{R}$中，从而可以做多种运算，反而更便于应用. 所以通过对偶空间往往能反映出原空间的许多性质出来. 这一点在泛函分析及代数拓扑上同调等理论中会有更多体现.

置换σ和任意$v_1,\cdots,v_m\in V$, 成立$T(v_1,\cdots,v_m)=T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$, 则称$T$是对称$m$-重线性函数; 如果$T(v_1,\cdots,v_m)=\mathrm{sign}(\sigma)T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$ (其中$\mathrm{sign}(\sigma)=1$, 如果σ是偶置换; $\mathrm{sign}(\sigma)=-1$, 如果σ是奇置换), 则称T是反对称m-重线性函数, 或m-次**外形式**.

类似可定义V^*上多重线性函数.

4. 张量积. 设$\varphi_1,\varphi_2\in V^*$, 我们可定义$V$上双线性函数$\varphi_1\otimes\varphi_2$ (称作φ_1与φ_2的张量积) 如下:

$$\varphi_1\otimes\varphi_2(v_1,v_2)=\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2),\qquad \forall v_1,v_2\in V.$$

V上任何双线性函数构成的线性空间是n^2维的, 其一组基就是$\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j$, $1\le i,j\le n$. 事实上, 设$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j=0$, 则$0=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l)=a_{ij}\delta^i_k\delta^j_l=a_{kl}$, 所以$\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j$线性无关. 其次, 置$a_{ij}=T(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$, 则不难验证$T=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j$.

5. 线性映射及其共轭映射. 设V,W都是数域K上线性空间, $T:V\to W$是线性映射. 则按如下方式定义的线性映射$T^*:W^*\to V^*$称作T的共轭映射:

$$(T^*(w^*))(v)=w^*(T(v)),\qquad \forall v\in V,w^*\in W^*.$$

设$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$是$V$的一组基,$\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_m$是$W$的一组基,则$T$可表示为矩阵$A_{m\times n}$,其元素$a_{ki}$由$T(\mathbf{e}_i)=\sum_{k=1}^m a_{ki}\mathbf{f}_k$ 确定(即A的第i列元素就是$T(\mathbf{e}_i)$在$\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_m$下的坐标). 设$\mathbf{e}^1,\cdots,\mathbf{e}^n$ 是V^*上的对偶基, $\mathbf{f}^1,\cdots,\mathbf{f}^m$是$W^*$上的对偶基,则$T^*$对应的矩阵就是$A^\top$. 事实上, 记$T^*$对应的矩阵是$B=(b_ij)$, 则$B$是$n\times m$ 矩阵, 且b_{ij}是$T^*(\mathbf{f}^j)$关于$\mathbf{e}^i$的坐标, 从而

$$b_{ij}=(T^*(\mathbf{f}^j))(\mathbf{e}_i)=\mathbf{f}^j(T(\mathbf{e}_i))=\mathbf{f}^j(\sum_{k=1}^m a_{ki}\mathbf{f}_k)=a_{ji}.$$

于是$B=A^\top$.

二 余切空间

1. 我们把上面的线性代数理论应用于微分几何问题. 这里取数域K为$\mathbb{R}$, 线性空间V为曲面S上某点p的切空间T_pS, 其对偶空间V^*记作T_p^*S, 称作曲面S在p点的余切空间. 下面我们结合微分几何背景把余切空间具体化.

2. 设曲面S的参数表示为$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v):D\to\mathbb{R}^3$. [2] 考虑定义在$S$上的函数$f:S\to\mathbb{R}$. 我们称$f$是$C^k$ $(k\ge 3)$次可微的, 如果二元函数$\tilde{f}=f\circ\mathbf{r}:D\to\mathbb{R}$是$C^k$的. 不难验证这里$C^k$的概念与曲面表示无关.

S上C^k函数全体记作$C^k(S)$, 它是一个$\mathbb{R}$上的线性空间.

3. 设$f\in C^\infty(S)$, 我们按如下方式作T_pS上的一个线性泛函T_f: 对于T_pS中切向量$\mathbf{v}=a\mathbf{r}_u+b\mathbf{r}_v$, 设曲线$\psi(t)=\mathbf{r}(u(t),v(t)):\mathbb{R}\to S$ 在$t=0$时经过p点且其切向量$\psi'(0)=\mathbf{v}$, 则定义

$$\langle T_f,\mathbf{v}\rangle\triangleq\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f(\psi(t))=\partial_u\tilde{f}(u(0),v(0))u'(0)+\partial_v\tilde{f}(u(0),v(0))v'(0)=\partial_u\tilde{f}(u(0),v(0))a+\partial_v\tilde{f}(u(0),v(0))b.$$

注意右端$f(\psi(t))=\tilde{f}(u(t),v(t))$是关于$t$的普通一元可微函数,所以右端有定义,且与曲线$\psi$的选取无关. 由于切向量与外围空间$\mathcal{E}$中标架变换无关,不妨设$p$为原点,那么通过考虑曲线$(u_1(t),v_1(t))=(a_1t,b_1t)$, $(u_2(t),v_2(t))=(a_2t,b_2t)$ 以及$(u(t),v(t))=((a_1+b_1)t,(a_2+b_2)t)$, $(u(t),v(t))=(ka_1t,ka_2t)$, 可以证明$T_f$是线性的. 此外不难验证$T_f$的定义与参数$(u,v)$的选取无关, 因为$f$和曲线$\psi$都和$(u,v)$参数无关.

[2]事实上用微分流形的定义及坐标卡就可以使下面讨论有意义, 不需要S落在某个外围空间中.

4. 现在对S的一个参数表示$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, 取$f$分别为$f_1,f_2$, 使得对应$\tilde{f}_1(u,v)=u$, $\tilde{f}_2(u,v)=v$, 那么从上面定义可得

$$\langle T_{f_1},\mathbf{v}\rangle=a,\quad \langle T_{f_2},\mathbf{v}\rangle=b,\qquad \mathbf{v}=a\mathbf{r}_u+b\mathbf{r}_v.$$

所以T_{f_1}和T_{f_2}是T_p^*S中与$\mathbf{r}_u$和$\mathbf{r}_v$对偶的一组基, 并且

$$T_f=\partial_u\tilde{f}(u(0),v(0))T_{f_1}+\partial_v\tilde{f}(u(0),v(0))T_{f_2}.$$

注意如果把T_f换个记号, 写作$\mathrm{d}f$, 把$\mathrm{d}f_1$ 和$\mathrm{d}f_2$ 分别记作$\mathrm{d}u$ 和$\mathrm{d}v$, 就得到如下“熟悉”的微分公式[3]

$$\mathrm{d}f=\partial_u\tilde{f}\mathrm{d}u+\partial_v\tilde{f}\mathrm{d}v. \tag{6.1}$$

注意在数学分析中函数的微分并没有严格定义过. 所以这个式子可以看作微分的严格定义: 函数的微分是作用在切向量上的线性泛函; 或者, 微分$\mathrm{d}f$可以看作是f的线性化函数. [4] 所以今后函数的微分$\mathrm{d}f$都应当视作一个线性泛函, 而用这个记号的好处是和数学分析中虽不严格, 但大家熟悉的微分公式相符, 在计算上很方便. 选取好的记号是数学很重要的一部分, 请大家仔细体会.

5. 利用导数的链式法则, 可以严格证明微分的形式不变性, 从而(6.1)左端与参数选取无关.

三 切空间

下面给出表示切向量的现代记号. 固定$\mathbf{v}=a\mathbf{r}_u+b\mathbf{r}_v\in T_pS$, 以及曲面$S$ 上经过点p的曲线ψ, 使得$\psi(0)=p$, $\psi'(0)=\mathbf{v}$. 对于任意函数$f\in C^\infty(S)$, 定义

$$\langle\mathbf{v},f\rangle\triangleq\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f(\psi(t))=a\partial_u\tilde{f}(u(0),v(0))+b\partial_v\tilde{f}(u(0),v(0))=(a\partial_u+b\partial_v)\tilde{f}(u(0),v(0)).$$

特别地, 分别取$\mathbf{v}=\mathbf{r}_u$以及$\mathbf{v}=\mathbf{r}_v$, 就得到

$$\langle\mathbf{r}_u,f\rangle=\partial_u\tilde{f}(u(0),v(0)),\quad \langle\mathbf{r}_v,f\rangle=\partial_v\tilde{f}(u(0),v(0)).$$

这建议我们可以用偏导算子∂_u和∂_v分别表示$\mathbf{r}_u$和$\mathbf{r}_v$, 其好处是不再依赖于外围空间. 另一方面, 利用链式法则不难验证它们关于容许参数变换具有相同的变换规律. 所以在现代微分几何中, 常用$\{\partial_u,\partial_v\}$表示切空间的自然基底.

四 第一基本形式是切空间上的对称双线性型

回顾双线性函数及张量积的定义, 我们发现第一基本形式其实应该写作

$$I=E\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+F\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+F\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v.$$

它是定义在切空间上的对称正定双线性型. 设$\mathbf{a}=a_1\partial_u+a_2\partial_v$, $\mathbf{b}=b_1\partial_u+b_2\partial_v$, 则

$$I(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

[3]注意到如果S就是参数平面D, 那么$\tilde{f}=f$, 从而这就是数学分析中的微分公式$\mathrm{d}\tilde{f}=\partial_u\tilde{f}\mathrm{d}u+\partial_v\tilde{f}\mathrm{d}v$.

[4]在数学分析情形下, 就成立$\mathrm{d}f(\mathbf{v})=\mathrm{grad}f\cdot\mathbf{v}$.

第七讲　曲面间的保长映射和保角映射

这一讲我们介绍曲面间的光滑映射及其诱导的曲面上任意给定点的切空间和余切空间上的线性化映射. 我们还讨论两种特别的映射: 保长映射和保角映射.

一　曲面间的光滑映射及其线性化

设$S_1:\mathbf{r}^1=\mathbf{r}^1(u_1,v_1)$ 和$S_2:\mathbf{r}^2=\mathbf{r}^2(u_2,v_2)$ 是两个正则参数曲面, 其中$(u_1,v_1)\in D_1$, $(u_2,v_2)\in D_2$. 又设$\sigma:S_1\to S_2$是一个连续映射, 那么可以得到$D_1\to D_2$的映射

$$\tilde{\sigma}:(\mathbf{r}^2)^{-1}\circ\sigma\circ\mathbf{r}^1,\quad u_2=u_2(u_1,v_1),\ \ v_2=v_2(u_1,v_1).$$

我们称σ是C^k的, 如果上述映射是C^k的. 利用链氏法则不难验证这个说法与曲面的C^k的容许参数变换无关, 所以是个几何性质.

1. 切映射

设$C:\mathbf{r}^1(u_1(t),v_1(t))$是$t=0$时经过曲面$S_1$上$p$点的一条光滑曲线, 则

$$\sigma(\mathbf{r}^1(u_1(t),v_1(t)))=\mathbf{r}^2(\tilde{\sigma}(u_1(t),v_1(t)))=\mathbf{r}^2((u_2(t),v_2(t)))$$

是$t=0$时经过曲面S_2 上$q=\sigma(p)$ 点的一条光滑曲线. 我们定义切映射$\sigma_{*p}:T_pS_1\to T_qS_2$为

$$\sigma_{*p}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}^1(u_1(t),v_1(t))\bigg|_{t=0}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}^2(\tilde{\sigma}(u_1(t),v_1(t)))\bigg|_{t=0}\right),$$

即将曲线C在T_pS_1上的切向量映到像曲线$\sigma(C)$在T_pS_1处的切向量. 这个定义是合理的: 它只和$u_1'(0),v_1'(0)$有关, 而与确定切向量的参数曲线无关. 由此不难得到切映射的矩阵:

$$\sigma_{*p}\begin{pmatrix}\partial_{u_1}\mathbf{r}^1\\ \partial_{v_1}\mathbf{r}^1\end{pmatrix}=\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}^{\top}\begin{pmatrix}\partial_{u_2}\mathbf{r}^2\\ \partial_{v_2}\mathbf{r}^2\end{pmatrix}.\tag{7.1}$$

于是切映射是可逆的, 当且仅当映射$\tilde{\sigma}$的Jacobi矩阵可逆. 这样就可以把$\tilde{\sigma}$看作是一个容许参数变换. 所以做这样的参数变换后, σ就成了具有相同曲纹坐标的点之间的对应了.

2. 余切映射

1. σ_{*p}的伴随映射σ_p^*称作σ在$p\in S_1$的余切映射, 它把T_qS_2上的微分形式拉回为T_pS_1的微分形式, 可定义为[1]

$$\sigma_p^*\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_2\\ \mathrm{d}v_2\end{pmatrix}=\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}v_1\end{pmatrix}.\tag{7.2}$$

2. 设

$$\varphi=A\mathrm{d}u_2\otimes\mathrm{d}u_2+B\mathrm{d}u_2\otimes\mathrm{d}v_2+B\mathrm{d}u_2\otimes\mathrm{d}v_2+C\mathrm{d}v_2\otimes\mathrm{d}v_2$$

是$T_{\sigma(p)}S_2$上的对称双线性型. 为计算方便, 我们可以把它写作

$$\varphi=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_2 & \mathrm{d}v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_2\\ \mathrm{d}v_2\end{pmatrix},$$

[1]对S_2上函数f, 可定义$\sigma_p^*(f)=f(\sigma(p))$; 此外, 余切映射与外微分算子可交换.

不过其中乘法应当理解为张量积$\otimes$. 对于$T_{\sigma(p)}S_2$上切向量$\mathbf{X}=a_1\partial_{u_2}+b_1\partial_{v_2}$, $\mathbf{Y}=a_2\partial_{u_2}+b_2\partial_{v_2}$, 成立

$$\varphi(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

这里是普通的矩阵乘法.

如果我们要求余切映射σ_p^*是线性的, 且关于张量积可以分配, 例如

$$\sigma_p^*(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v)=\sigma_p^*(\mathrm{d}u)\otimes\sigma_p^*(\mathrm{d}v),$$

那么通过σ_p^*还可以得到T_pS_1上对称双线性型

$$\sigma_p^*\varphi=\begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 & \mathrm{d}v_1 \end{pmatrix}\left[\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}^{\top}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right]\begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}v_1 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

由此, 根据(7.1)和(7.4), 不难验证, 对任意$p\in S_1$ 及$\mathbf{X},\mathbf{Y}\in T_pS_1$, 成立如下等式

$$\varphi(\sigma_{*p}(\mathbf{X}),\sigma_{*p}(\mathbf{Y}))=(\sigma_p^*\varphi)(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{7.5}$$

二 保长映射

定义1. *设σ是从正则曲面S_1到S_2的3次连续可微映射. 如果对S_1上任意一点p, 其切映射$\sigma_{*p}: T_pS_1\to T_{\sigma(p)}S_2$都保持切向量长度不变: 对任意$\mathbf{X}\in T_pS_1$, 成立$|\sigma_{*p}(\mathbf{X})|=|\mathbf{X}|$, 则称$\sigma: S_1\to S_2$是保长映射(保长对应).*

利用极化恒等式$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2)$, 可知保长映射一定是保内积的, 即$\sigma_{*p}(\mathbf{X})\cdot\sigma_{*p}(\mathbf{Y})=\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$. 保长对应类似三角形全等.

定理1. *设S_1和S_2的第一基本形式分别是I_1和I_2. 则$\sigma: S_1\to S_2$是保长映射的充要条件是$\sigma^*I_2=I_1$, 即成立如下公式:*

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1,v_1) & F_1(u_1,v_1) \\ F_1(u_1,v_1) & G_1(u_1,v_1) \end{pmatrix}=J^{\top}\begin{pmatrix} E_2(u_2,v_2) & F_2(u_2,v_2) \\ F_2(u_2,v_2) & G_2(u_2,v_2) \end{pmatrix}J,\quad J=\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}. \tag{7.6}$$

证明. 由(7.5), 取φ为S_2的第一基本形式, 那么σ是保长映射当且仅当

$$(\sigma_p^*I_2)(\mathbf{X},\mathbf{X})=I_2(\sigma_{*,p}\mathbf{X},\sigma_{*,p}\mathbf{X})=I_1(\mathbf{X},\mathbf{X}),\qquad \forall\mathbf{X}\in T_pS_1.$$

利用极化恒等式(这只需要二次型是对称的), 就得到

$$(\sigma_p^*I_2)(\mathbf{X},\mathbf{Y})=I_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\qquad \forall\mathbf{X},\mathbf{Y}\in T_pS_1.$$

这就证明了$I_1=\sigma^*(I_2)$. □

注意为了求得保长变换σ, 根据(7.6), 需要求解含两个未知函数u_2,v_2的以u_1,v_1为自变量的三个非线性偏微分方程. 这是相当困难的. 所以思路是考虑保长变换下的不变量, 例如Gauss曲率, 它是上述超定偏微分方程组的可解性(或相容性)条件, 由此可以比较方便地求解保长变换的存在性问题. [2]

[2]黎曼当初是考虑n维($n\geq 2$)情形类似需要的相容性条件发现了后来以他命名的曲率张量的, 即高斯曲率的高维推广.

定理2. *在正则曲面S_1和S_2之间存在保长映射的充要条件是, 能够在S_1和S_2上去适当的参数系, 都记为(u,v), 并且在此参数系下两个曲面有相同的第一基本量, 即*

$$E_1(u,v)=E_2(u,v),\ F_1(u,v)=F_2(u,v),\ G_1(u,v)=G_2(u,v).$$

证明. 充分性显然. 必要性: 注意到保长变换对应的切映射是线性同构, 所以$\tilde{\sigma}$是容许参数变换, 可以选取(u_2,v_2)为S_1的参数. 这样一来, 由上一定理的公式, 第二基本形式系数必然处处相同. □

三 保角映射

这一节我们都设σ是从正则曲面S_1到S_2的一一映射, 且它和它的逆映射都是3次连续可微的.

定义2. *如果对S_1 上任意一点p, $\sigma: S_1\to S_2$的切映射$\sigma_{*p}: T_pS_1\to T_{\sigma(p)}S_2$ 都保持切向量夹角不变: 对任意$X,Y\in T_pS_1$, 成立$\angle(\sigma_{*p}(X),\sigma_{*p}(Y))=\angle(X,Y)$, 则称$\sigma: S_1\to S_2$是保角映射(保角对应或共形映射).*

显然这个概念是三角形相似的推广.

定理3. *设正则参数曲面S_1和S_2的第一基本形式分别是I_1和I_2, 则$\sigma: S_1\to S_2$是保角对应的充要条件是: 在S_1上存在正的连续函数λ, 使得$\sigma^*I_2=\lambda^2I_1$. 特别地, 对保角对应σ, 存在S_1和S_2的适当的参数系(u,v), 以及正的连续函数λ, 使得*

$$E_2(u,v)=\lambda^2(u,v)E_1(u,v),\ F_2(u,v)=\lambda^2(u,v)F_1(u,v),\ G_2(u,v)=\lambda^2(u,v)G_1(u,v).$$

证明. 1. 充分性. 首先, 根据(7.5), 对任意$p\in S_1$ 及$\mathbf{X},\mathbf{Y}\in T_pS_1$, 成立

$$I_2(\sigma_{*p}(\mathbf{X}),\sigma_{*p}(\mathbf{Y}))=(\sigma^*I_2)(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\cos\angle(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \frac{\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}}{|\mathbf{X}||\mathbf{Y}|}=\frac{I_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\sqrt{I_1(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{I_1(\mathbf{Y},\mathbf{Y})}},\\
\cos\angle(\sigma_{*p}\mathbf{X},\sigma_{*p}\mathbf{Y}) &= \frac{I_2(\sigma_{*p}\mathbf{X},\sigma_{*p}\mathbf{Y})}{\sqrt{I_2(\sigma_{*p}\mathbf{X},\sigma_{*p}\mathbf{X})}\sqrt{I_2(\sigma_{*p}\mathbf{Y},\sigma_{*p}\mathbf{Y})}}=\frac{\sigma^*I_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\sqrt{\sigma^*I_2(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{\sigma^*I_2(\mathbf{Y},\mathbf{Y})}}\\
&= \frac{\lambda^2I_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\sqrt{\lambda^2I_1(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{\lambda^2I_1(\mathbf{Y},\mathbf{Y})}}=\cos\angle(\mathbf{X},\mathbf{Y}).
\end{aligned}$$

2. 必要性. 设$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$分别是$S_1,S_2$的参数方程, σ是保角对应, 则根据定义, 可以取(u,v)为S_1和S_2的共同的参数系. 于是$\sigma(\mathbf{r}_1(u,v))=\mathbf{r}_2(u,v)$, 且

$$\sigma_*(\partial_u\mathbf{r}_1)=\partial_u\mathbf{r}_2,\ \sigma_*(\partial_v\mathbf{r}_1)=\partial_v\mathbf{r}_2,\ \sigma_*(\partial_u\mathbf{r}_1+\partial_v\mathbf{r}_1)=\partial_u\mathbf{r}_2+\partial_v\mathbf{r}_2,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_1,\partial_v\mathbf{r}_1)=\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_2,\partial_v\mathbf{r}_2),\\
&\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_1+\partial_v\mathbf{r}_1,\partial_u\mathbf{r}_1)=\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_2+\partial_v\mathbf{r}_2,\partial_u\mathbf{r}_2),\\
&\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_1+\partial_v\mathbf{r}_1,\partial_v\mathbf{r}_1)=\cos\angle(\partial_u\mathbf{r}_2+\partial_v\mathbf{r}_2,\partial_v\mathbf{r}_2).
\end{aligned}$$

由此得到[3]

$$\frac{F_1}{\sqrt{E_1G_1}} = \frac{F_2}{\sqrt{E_2G_2}}, \tag{7.7}$$
$$\frac{E_1+F_1}{\sqrt{E_1+2F_1+G_1}\sqrt{E_1}} = \frac{E_2+F_2}{\sqrt{E_2+2F_2+G_2}\sqrt{E_2}}, \tag{7.8}$$
$$\frac{F_1+G_1}{\sqrt{E_1+2F_1+G_1}\sqrt{G_1}} = \frac{F_2+G_2}{\sqrt{E_2+2F_2+G_2}\sqrt{G_2}}. \tag{7.9}$$

(7.8)和(7.9)相除得到

$$\frac{\sqrt{E_1}+\frac{F_1}{\sqrt{E_1}}}{\sqrt{G_1}+\frac{F_1}{\sqrt{G_1}}} = \frac{\sqrt{E_2}+\frac{F_2}{\sqrt{E_2}}}{\sqrt{G_2}+\frac{F_2}{\sqrt{G_2}}},$$

展开后利用(7.7), 就得到

$$\sqrt{E_1G_2}+\frac{F_1F_2}{\sqrt{E_1G_2}} = \sqrt{E_2G_1}+\frac{F_1F_2}{\sqrt{E_2G_1}},$$

从而

$$(\sqrt{E_1G_2}-\sqrt{E_2G_1})\left(1-\frac{F_1}{\sqrt{E_1G_1}}\frac{F_2}{\sqrt{E_2G_2}}\right)=0.$$

再次利用(7.7), 得到

$$(\sqrt{E_1G_2}-\sqrt{E_2G_1})\left(1-\frac{F_1^2}{E_1G_1}\right)=0.$$

由第一基本形式系数矩阵的非奇异性, $1-\frac{F_1^2}{E_1G_1}\neq 0$, 于是$E_1G_2=E_2G_1$. 代入(7.7)就得到

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{F_2}{F_1}=\frac{G_2}{G_1}=\lambda^2.$$

□

关于保角映射有如下深刻的定理, 它在地图测绘中也有重要应用.

定理4. *任意一个正则参数曲面S的每一点p, 都有一个邻域U可以和平面上的一个开区域建立保角对应. 换言之, 任意两个正则参数曲面在局部都可以建立保角对应.*

这个定理的证明比较复杂, 在此略去. [4] 该定理保证了在U上存在参数(u,v)使得曲面的第一基本形式变为$I=\lambda(u,v)^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$. 这样的参数系称作曲面$S$的*等温参数系*.

[3]这里的想法是: 两个三角形的三个角对应相等, 则它们相似, 从而三个边成比例. 所用的三角形就是$\partial_u\mathbf{r}_1,\partial_v\mathbf{r}_1,\partial_u\mathbf{r}_1+\partial_v\mathbf{r}_1$.

[4]由于多了一个未知函数λ, 所以该定理本质是求解含三个未知函数的由三个一阶偏微分方程构成的方程组.

第八讲　第二基本形式 法曲率

这一讲我们介绍如何利用曲面相对其切空间的位置来刻画其弯曲性, 由此引入第二基本形式, 并探讨其基本性质和一些应用. 这些依赖于将曲面及其切平面在外围空间做对比, 不是内蕴性质.

一　第二基本形式和法曲率

1. 设$S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$是一个正则参数曲面, 它在点$(u_0,v_0)$ 处切平面Π的单位法向量是$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\Big|_{(u_0,v_0)}$. 记$(u_0,v_0)$附近的点$(u_0+\triangle u,v_0+\triangle v)$到$\Pi$的有向距离为$\delta$, 那么在直观上, S在(u_0,v_0)附近的弯曲程度可以用$|\delta|$与邻近点$(u_0+\triangle u,v_0+\triangle v)$到$(u_0,v_0)$的距离[1] 之比来刻画. 该比值越大, 那么曲面就越弯曲.

2. 下面具体计算. 有向距离是

$$\delta(\triangle u,\triangle v)=(\mathbf{r}(u_0+\triangle u,v_0+\triangle v)-\mathbf{r}(u_0,v_0))\cdot\mathbf{n},$$

而根据Taylor展开,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u_0+\triangle u,v_0+\triangle v)-\mathbf{r}(u_0,v_0)=(\mathbf{r}_u\triangle u+\mathbf{r}_v\triangle v)+\frac{1}{2}\Big(\mathbf{r}_{uu}(\triangle u)^2+2\mathbf{r}_{uv}\triangle u\triangle v+\mathbf{r}_{vv}(\triangle v)^2\Big)\\+o\Big((\triangle u)^2+(\triangle v)^2\Big),\end{aligned}$$

所以若记(注意$\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}=0,\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}=0$)

$$L=\mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_u,\quad M=\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_v=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_u,\quad N=\mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_v,\tag{8.1}$$

为第二类基本量, 那么

$$2\delta(\triangle u,\triangle v)=L(\triangle u)^2+2M\triangle u\triangle v+N(\triangle v)^2+o\Big((\triangle u)^2+(\triangle v)^2\Big).$$

当$\triangle u,\triangle v\to 0$时, 其主要部分就是第二基本形式

$$II=\mathrm{d}^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=-\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n}=L(\mathrm{d}u)^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(\mathrm{d}v)^2.\tag{8.2}$$

注意到当$\triangle u,\triangle v\to 0$时, $(u_0+\triangle u,v_0+\triangle v)$到$(u_0,v_0)$的曲面上的弧长距离的平方的主要部分就是$I=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$, 定义$S$在$(u,v)$点沿方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$的**法曲率**为

$$\kappa_n=\frac{II}{I}=\frac{L(u,v)\mathrm{d}u^2+2M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(u,v)\mathrm{d}v^2}{E(u,v)\mathrm{d}u^2+2F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(u,v)\mathrm{d}v^2}.\tag{8.3}$$

3. 由第二基本形式的定义式((8.2)的左端), 可知它和$\mathcal{E}$的标架变换无关, 也和曲面的保持定向的容许参数变换无关(利用一次微分的形式不变性). 若曲面定向改变, 则$\mathbf{n}$将变号, 从而第二基本形式也变号. 所以, 特别地, 法曲率是个几何量.

例1. *平面的第一基本形式是*$I=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$, *第二基本形式*$II=0$. *对圆柱面*$\boldsymbol{r}=(a\cos\frac{u}{a},a\sin\frac{u}{a},v)$, *其第一基本形式是*$I=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$, *第二基本形式*$II=-\frac{1}{a}(\mathrm{d}u)^2$.

[1]这里的距离是这两个点在曲面上的距离. 由于距离涉及第一基本形式开方, 运算不够方便, 所以下面实际定义法曲率时用的是$|\delta|$与该距离平方之比, 从而曲率带有(1/长度)的量纲.

二 例题

例2. 一块正则曲面是平面的一部分, 当且仅当其第二基本形式恒等于零.

证明. 只需证充分性. 注意到$|\mathbf{n}|=1$, 所以$\mathbf{n}_u\cdot\mathbf{n}=0$; 又$L=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_u=0, M=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_u=0$, 从而$\mathbf{n}_u$在基$\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{n}$下坐标都是零, 即$\mathbf{n}_u=0$. 类似可知$\mathbf{n}_v=0$, 于是$\mathbf{n}$是常向量. 由此即知$(\mathbf{r}-\mathbf{r}(u_0,v_0))\cdot\mathbf{n}\equiv 0$. □

例3. 一块正则曲面是球面的一部分, 当且仅当其上任意一点沿任意方向的法曲率是非零函数.

证明. 1. 必要性. 设球面方程是$|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u_0,v_0)|^2=R^2$, 其单位外法向量就是$\mathbf{n}=\frac{1}{R}(\mathbf{r}-\mathbf{r}(u_0,v_0))$, 从而$II=-\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n}=-\frac{1}{R}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=-\frac{1}{R}I$, 即法曲率是$-1/R$.

2. 充分性. 设$II=c(u,v)I$, $c(u,v)\neq 0$, 则二次型$(L-cE)\mathrm{d}u^2+2(M-cF)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(N-cG)\mathrm{d}v^2\equiv 0$, 于是$L=cE,\quad M=cF,\quad N=cG$, 即

$$(\mathbf{n}_u+c\mathbf{r}_u)\cdot\mathbf{r}_u=0,\ \ (\mathbf{n}_u+c\mathbf{r}_u)\cdot\mathbf{r}_v=(\mathbf{n}_v+c\mathbf{r}_v)\cdot\mathbf{r}_u=0,\ \ (\mathbf{n}_v+c\mathbf{r}_v)\cdot\mathbf{r}_v=0.$$

又$\mathbf{n}$是单位法向量, 所以

$$(\mathbf{n}_u+c\mathbf{r}_u)\cdot\mathbf{n}=0,\quad (\mathbf{n}_v+c\mathbf{r}_v)\cdot\mathbf{n}=0.$$

由于$\{\mathbf{r};\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{n}\}$是标架, 上面式子表明

$$\mathbf{n}_u+c\mathbf{r}_u=0,\quad \mathbf{n}_v+c\mathbf{r}_v=0. \tag{8.4}$$

分别对v,u求导得

$$\mathbf{n}_{uv}+c_v\mathbf{r}_u+c\mathbf{r}_{uv}=0,\quad \mathbf{n}_{uv}+c_u\mathbf{r}_v+c\mathbf{r}_{uv}=0,$$

相减得到$c_v\mathbf{r}_u-c_u\mathbf{r}_v=0$. 注意$\mathbf{r}_u$和$\mathbf{r}_v$线性无关, 于是$c_u=c_v=0$, 从而$c=c(u,v)$是常数. 由此, 从(8.4)可得$\mathrm{d}(\mathbf{n}+c\mathbf{r})=(\mathbf{n}_u+c\mathbf{r}_u)\mathrm{d}u+(\mathbf{n}_v+c\mathbf{r}_v)\mathrm{d}v=0$, 即$\mathbf{n}+c\mathbf{r}=c\mathbf{r}_0$是个常向量, 于是$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=-\frac{1}{c}\mathbf{n}$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2=1/c^2$. □

例4. 圆柱面的法曲率是$\kappa_n=-\frac{1}{a}\cos^2\theta$, 其中$\cos\theta=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}}$, 即$\theta$表示切方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$与$u$-曲线的夹角.

三 法曲率

1. 法曲率的几何解释

1. 设$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(s),v(s))$是曲面$S$上的弧长参数曲线, 则其切向量是$\alpha(s)=u'(s)\mathbf{r}_u+v'(s)\mathbf{r}_v$, [2]从而曲率向量是

$$\alpha'(s)=\kappa\beta=\mathbf{r}_{uu}u'(s)^2+2\mathbf{r}_{uv}u'(s)v'(s)+\mathbf{r}_{vv}v'(s)^2+\mathbf{r}_u u''(s)+\mathbf{r}_v v''(s),$$

它沿曲面法向$\mathbf{n}$的正交投影就是S在该点沿α方向的法曲率

$$\kappa_n=\kappa\beta\cdot\mathbf{n}=Lu'(s)^2+2Mu'(s)v'(s)+Nv'(s)^2=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}=\frac{II}{I}.$$

这里第三个等号的好处是计算时不需要取曲线的弧长参数.

[2]注意此时成立$Eu'(s)^2+2Fu'(s)v'(s)+Gv'(s)^2=1$.

2. 法截面和法截线. 过曲面S上(u,v)点, 由切方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$和法向量$\mathbf{n}$确定的平面称为曲面$S$在$(u,v)$点由沿$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$方向的*法截面*; S与其法截面的交线称作一条*法截线*. 注意法截线是平面曲线. 对法截面, 规定$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$到$\mathbf{n}$的方向为其定向.

3. 综之, 曲面S在(u,v)处沿切方向$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$的法曲率$\kappa_n$等于相应法截线作为有向法截面上平面曲线的相对曲率.

2. 主曲率和主方向

1. 注意曲面上一点处的法曲率与切方向选取有关. 下面利用曲面S上正交参数网(u,v)计算法曲率与切方向的方向角的关系.

设曲面第一基本形式和第二基本形式分别是

$$I = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2, \qquad II = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2,$$

又记θ为$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$与$u$-曲线切方向的夹角, 即

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{E}\mathrm{d}u}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{G}\mathrm{d}v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}},$$

则(利用二倍角公式$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$)

$$\begin{aligned}\kappa_n(\theta) &= \frac{L}{E}\cos^2\theta + \frac{2M}{\sqrt{EG}}\cos\theta\sin\theta + \frac{N}{G}\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)\cos 2\theta + \frac{M}{\sqrt{EG}}\sin 2\theta.\end{aligned}$$

置

$$A = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)^2 + \frac{M^2}{EG}}, \quad \cos 2\theta_0 = \frac{1}{2A}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right), \quad \sin 2\theta_0 = \frac{M}{A\sqrt{EG}},$$

则

$$\kappa_n(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) + A\cos 2(\theta-\theta_0).$$

从而当$\theta=\theta_0$时法曲率$\kappa_n(\theta)$取到最大值

$$\kappa_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)^2 + \frac{M^2}{EG}};$$

当$\theta=\theta_0+\frac{\pi}{2}$时$\kappa_n(\theta)$最小值是

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)^2 + \frac{M^2}{EG}};$$

当$A=0$时, 法曲率与θ无关, 即

$$\kappa_n(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right).$$

曲面上这样的点叫做脐点.

定理1. *对正则参数曲面上任意固定点, 其法曲率必在两个彼此正交的切方向(称为主方向)上分别取到最大值和最小值(称为主曲率).*

2. 欧拉公式. 由前面三个公式, 沿方向θ的法曲率是

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2(\theta - \theta_0) + \kappa_2 \sin^2(\theta - \theta_0).$$

所以确定了一个主方向, 以及两个主曲率后, 就确定了曲面上一点的所有法曲率.

3. 主曲率的平均值$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$称为平均曲率:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right).$$

主曲率的乘积$K = \kappa_1\kappa_2$称为Gauss曲率:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG}.$$

4. 一般参数系下主曲率和主方向的计算将在下一讲讨论.

3. 渐近方向和渐近曲线

定义1. *在曲面上一点, 其法曲率为零的切方向称为曲面S在该点的渐近方向. 如果曲面上一条曲线的切方向都是曲面在该点的渐近方向, 则称该曲线是曲面S上的渐近曲线.*

显然渐近方向满足

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L} = \frac{N}{-M \mp \sqrt{M^2 - LN}}.$$

定理2. *曲面上参数曲线网是渐近曲线网的充要条件是$L = N = 0$.*

证明. 若u-曲线和v-曲线都是渐近曲线, 则(1,0)和(0,1)都是渐近方向. 代入上面第一个式子就得到$L = 0 = N$. 反之, 若$L = 0 = N$, 则$M\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$. 显然$\mathrm{d}u = 0$和$\mathrm{d}v = 0$都是解, 故而$u$-曲线和$v$-曲线都是渐近曲线. □

定理3. *曲面上一条曲线是渐近曲线, 当且仅当它是一条直线, 或者它的密切平面就是曲面的切平面.*

证明. 曲面上一条曲线的法曲率是$\kappa_n = \kappa\cos\theta$, 其中$\kappa$是曲线的曲率, θ为其主法向β与曲面法向量$\mathbf{n}$的夹角. 于是$\kappa_n = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$或$\theta = \pi/2$. 若$\kappa \equiv 0$, 曲线就是直线; 否则, β与$\mathbf{n}$垂直, 即密切平面与曲面切平面重合. □

第九讲　Weingarten映射和主曲率的计算

上一讲介绍了欧拉利用曲面上曲线的曲率来研究曲面曲率的方法. 这一讲我们介绍高斯基于高斯映射研究曲面弯曲程度的方法. 通过高斯映射可以定义曲面切平面上的Weingarten映射, 这是一个自共轭算子, 它的特征值和特征向量恰好就是主曲率和主方向. 由此可以给出自然基底下计算主曲率和主方向的公式.

一　Gauss映射和Weingarten映射

1. 设$S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$是一块正则曲面, $\mathbf{n}(u,v)$是它在(u,v)点确定的单位法向量($\{\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{n}\}$构成右手系). 将$\mathbf{n}(u,v)$视作起点在原点的向量, 则$\mathbf{n}(u,v)$ 终点落在单位球面$\Sigma=\{|\mathbf{a}|=1\}$上. 定义高斯映射

$$g:S\to\Sigma,\quad \mathbf{r}(u,v)\mapsto\mathbf{n}(u,v).$$

显然当S弯曲得比较厉害时其法向量的变化也比较剧烈, 所以法向量在Σ上扫过的面积与曲面上点扫过的面积的比值就比较大, 可由此刻画曲面的弯曲程度. 这是高斯研究曲面的出发点.

2. 高斯映射诱导从切平面$T_p(S)$到球面在$g(p)$点切平面$T_{g(p)}\Sigma$的切映射:

$$g_*:T_p(S)\to T_{g(p)}\Sigma,\quad g_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(u(t),v(t))\bigg|_{t=0}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{n}(u(t),v(t))\bigg|_{t=0},\qquad ((u(0),v(0))=p),$$

于是

$$g_*(\mathbf{r}_u)=\mathbf{n}_u,\quad g_*(\mathbf{r}_v)=\mathbf{n}_v.$$

注意$\mathbf{n}$同时是$T_p(S)$和$T_{g(p)}\Sigma$的法向量, 所以可以通过$\mathcal{E}$将$T_{g(p)}\Sigma$ 平移到S上p点使得与$T_p(S)$重合. 于是$\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v$也可以看作$S$在$p$点的切向量, 从而$g_*$可看作$T_p(S)$到自身的映射. 命

$$W=-g_*:T_p(S)\to T_p(S),$$

称为曲面S在p点的Weingarten映射.

3. 利用线性性不难计算得到$W(\mathrm{d}\mathbf{r})=-\mathrm{d}\mathbf{n}$, 从而得到Weigarten映射与第二基本形式的关系: $II=W(\mathrm{d}\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

4. Weingarten映射是自共轭映射:

$$W(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot W(\mathbf{b}),\qquad \forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in T_p(S).$$

事实上, 设$\mathbf{a}=a_1\mathbf{r}_u+a_2\mathbf{r}_v,\mathbf{b}=b_1\mathbf{r}_u+b_2\mathbf{r}_v$, 则$W(\mathbf{a})=-(a_1\mathbf{n}_u+a_2\mathbf{n}_v),\quad W(\mathbf{b})=-(b_1\mathbf{n}_u+b_2\mathbf{n}_v)$, 就得到

$$\begin{aligned}W(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}&=-(a_1\mathbf{n}_u+a_2\mathbf{n}_v)\cdot(b_1\mathbf{r}_u+b_2\mathbf{r}_v)=La_1b_1+M(a_1b_2+a_2b_1)+a_2b_2N\\&=-(a_1\mathbf{r}_u+a_2\mathbf{r}_v)\cdot(b_1\mathbf{n}_u+b_2\mathbf{n}_v)=\mathbf{a}\cdot W(\mathbf{b}).\end{aligned}$$

5. 由线性代数知识, W可以对角化: 它有两个实特征值κ_1, κ_2, 且对应特征方向$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$是正交的. 注意到

$$\kappa=\frac{W(\mathrm{d}\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}}=\frac{II}{I}$$

恰好是曲面沿$\mathrm{d}\mathbf{r}$方向的法曲率. 进一步, 有如下结论.

定理1. *Weingarten映射的两个特征值恰好是曲面在这一点的主曲率, 对应特征方向是曲面的主方向.*

证明. 设$\kappa_1 \geq \kappa_2$. 在T_pS的标准正交特征向量基底$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$下, 设$\mathrm{d}\mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$, 注意它是单位长度的, 就得到欧拉公式

$$\kappa(\theta) = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta = \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2)\sin^2\theta,$$

所以$\kappa(\theta)$在$\theta = 0$时取到最大, 在$\theta = \pi/2$时取到最小. □

6. 脐点: 曲面上$\kappa_1 = \kappa_2$的点. 这样的点构成闭集. 此时法曲率与方向无关, 从而

$$(L - \kappa_n E)\mathrm{d}u^2 + 2(M - \kappa_n F)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (N - \kappa_n G)\mathrm{d}v^2 = 0$$

是与$\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$无关的等式. 那么

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

如果这个比例是零, 称这样的脐点是平点, 否则, 称为圆点. 上一讲的例题中事实上已经证明了这样的结论: 曲面S是平面, 当且仅当S上的点都是平点; 曲面S是球面, 当且仅当S上的点都是圆点.

二 Gauss曲率和平均曲率

下面我们介绍如何利用Weingarten变换来计算主曲率和主方向.

1. Weingarten映射在自然基底下的矩阵

根据Weingarten变换的定义,

$$W(\mathbf{r}_u) = -\mathbf{n}_u, \quad W(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{n}_v,$$

所以关键是找到$\mathbf{n}_u$和$\mathbf{n}_v$关于$\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$的线性表示. 设

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{n}_u & -\mathbf{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{pmatrix} A, \tag{9.1}$$

用$(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^\top$ 左乘该式(作内积), 利用结合律[1]得到

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_u & -\mathbf{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A,$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & MG - NF \\ -LF + ME & -MF + NE \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

这就是Weingarten变换在曲面的切平面的自然基底$\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$下的矩阵. 注意到$\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$不是标准正交基底, 所以这个矩阵不一定是对称阵.

[1]请利用内积性质予以证明.

2. 平均曲率、高斯曲率、主曲率和主方向的计算

1. 矩阵的迹和行列式是对应线性映射的不变量, 所以定义

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},\quad K=\det A=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

分别为曲面在该点的**平均曲率**和**高斯曲率**.

2. 注意到计算主曲率就是计算A的特征值, 这相当于计算行列式

$$\det\begin{pmatrix}\lambda E-L & \lambda F-M\\ \lambda F-M & \lambda G-N\end{pmatrix}=0.$$

根据第一基本形式系数和第二基本形式系数在容许参数变换下的变换规律, 特征值λ与参数表示无关. 所以主曲率与参数表示无关, 根据其定义, 也和$\mathcal{E}$标架选择无关. 所以平均曲率和高斯曲率和曲面的表示无关. 以后要证明的高斯绝妙定理还表明高斯曲率与第二基本形式无关, 是个内蕴量.

3. 主曲率满足$\lambda^2-2H\lambda+K=0$, 从而有计算公式

$$\kappa_1=H+\sqrt{H^2-K},\quad \kappa_2=H-\sqrt{H^2-K}.$$

定理2. *曲面的主曲率是定义在曲面上的连续函数, 且在每个非脐点的某个邻域内, 它们是连续可微函数.*

证明. 由假设$\mathbf{r}\in C^3$可知$L,M,N,E,F,G\in C^1$, 于是, 由于总成立$H^2\geq K$, 可知κ_1,κ_2连续, 且当$H^2>K$时连续可微. □

4. 主方向的计算公式. 当求得主曲率κ_1,κ_2后, 若$\kappa_1=\kappa_2$, 则任意方向都是主方向. 若$\kappa_1\neq\kappa_2$, 考虑线性方程组

$$\begin{pmatrix}\kappa E-L & \kappa F-M\\ \kappa F-M & \kappa G-N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\end{pmatrix}=0,\tag{9.3}$$

其系数矩阵秩是1, 可以解出主方向

$$\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{M-\kappa F}{L-\kappa E}=-\frac{N-\kappa G}{M-\kappa F}.$$

5. 也可以不用主曲率而直接通过基本形式的系数确定主方向. 为此, 将(9.3)展开得到

$$(L\delta u+M\delta v)-\kappa(E\delta u+F\delta v)=0,\quad (M\delta u+N\delta v)-\kappa(F\delta u+G\delta v)=0,$$

解得主曲率满足

$$\kappa=\frac{L\delta u+M\delta v}{E\delta u+F\delta v}=\frac{M\delta u+N\delta v}{F\delta u+G\delta v};\tag{9.4}$$

展开就得到

$$(LF-ME)(\delta u)^2+(LG-NE)\delta u\delta v+(MG-NF)(\delta v)^2=0,$$

即

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{d}v)^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & (\mathrm{d}u)^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0.\tag{9.5}$$

3. Gauss曲率的几何意义

根据(9.1), 直接计算可知$\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v=\det A\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=K\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$, 从而

$$|\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v|=|K||\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|.$$

注意到$\mathrm{d}\sigma=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$是$S$上由参数曲线$u=u_0,u=u_0+\mathrm{d}u,v=v_0,v=v_0+\mathrm{d}v$围成的小区域的面积, 它在高斯映射下的像的面积就是$\mathrm{d}\sigma_0=|\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 于是得到$\mathrm{d}\sigma_0=K\mathrm{d}\sigma$. 设$D$是曲面$S$上$p$点的一个开邻域, $g(D)$是它在高斯映射下的像集, 则$g(D)$的面积

$$|g(D)|=\int_{g(D)}\mathrm{d}\sigma_0=\int_D|K|\mathrm{d}\sigma,$$

于是利用微分中值定理,

$$K(p)=\lim_{D\to p}\frac{|g(D)|}{|D|}.$$

这是曲线论中一个类似结论的推广.

三　曲率线参数网

下面我们以曲面上曲率线参数网为工具, 介绍曲面在一点的局部展开, 从而理解平均曲率和高斯曲率对曲面局部形态的影响.

1. 曲率线

定义1. *设$C:\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$是正则曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上的一条曲线, 如果$C$在每一点的切向量都是曲面在该点的主方向, 则称$C$是$S$上的一条曲率线.*

曲率线也就是曲面上主方向场的积分曲线. 利用Weingarten变换对主方向的刻画,存在函数λ使得

$$W\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\right)=\lambda\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t};$$

另一方面, 根据Weingarten变换的定义, 成立

$$W\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}.$$

所以我们有如下判别准则:

定理3 (Rodriques定理)**.** *C是S上曲率线当且仅当曲面S沿C的法向量场$\boldsymbol{n}(u(t),v(t))$沿曲线$C$的导数与曲线$C$相切, 即$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\ /\!/\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}$.*

2. 曲率线参数网

定理4. *对曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上任意一个固定点$(u,v)$, 参数曲线的方向是彼此正交的主方向当且仅当在该点有$F=M=0$. 此时, u-曲线方向的主曲率是$\kappa_1=L/E$, v-曲线方向的主曲率是$\kappa_2=N/G$.*

证明. 必要性. 因为$\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$正交, 所以$E=0$; 由于$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=(1,0)$是主方向, 代入(9.5)得知$M=0$ (注意E总大于零).

充分性. 在此条件下(9.5)化简为$(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$, 显然$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=(1,0)$和$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=(0,1)$都是解, 从而是主方向. 再由(9.4), 就可解出对应如定理所示主曲率. □

推论1. 曲面S的参数曲线网是正交的曲率线网的充要条件是$F=M=0$. 此时S的基本形式为

$$I=E(\mathrm{d}u)^2+G(\mathrm{d}v)^2,\quad II=\kappa_1E(\mathrm{d}u)^2+\kappa_2G(\mathrm{d}v)^2.$$

由第五讲定理2, 有如下存在性结论.

定理5. 正则曲面的每一个非脐点的某个邻域上都存在参数系(u,v), 使得参数曲线构成彼此正交的曲率线网.

四 曲面的局部展开

设曲面S在点p有两个彼此正交的主方向单位切向量$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$, 且$\mathbf{n}=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$. 由第五讲定理2, 再结合在$p$点参数系的适当伸缩, 我们可以取点$p$附近的参数系$(u,v)$使得在$p$点成立$\mathbf{r}_u=\mathbf{e}_1,\mathbf{r}_v=\mathbf{e}_2$. 于是在$p$点成立

$$E=G=1,\ \ F=M=0,\ \ L=\kappa_1,\ \ N=\kappa_2.$$

不妨设p点对应参数值为$(u,v)=(0,0)$. 利用Taylor展开式, 我们有

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(0)+\mathbf{r}_u(0)u+\mathbf{r}_v(0)v+\frac{1}{2}\Big(\mathbf{r}_{uu}(0)u^2+2\mathbf{r}_{uv}(0)uv+\mathbf{r}_{vv}(0)v^2\Big)+o(u^2+v^2).$$

将$\mathbf{r}_{uu},\mathbf{r}_{uv},\mathbf{r}_{vv}$按切向和法向分解, 并注意到

$$\mathbf{r}_{uu}(0)\cdot\mathbf{n}=L=\kappa_1,\ \ \mathbf{r}_{uv}(0)\cdot\mathbf{n}=M=0,\ \ \mathbf{r}_{vv}(0)\cdot\mathbf{n}=N=\kappa_2,$$

我们得到

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(0)+(u+o(\sqrt{u^2+v^2}))\mathbf{e}_1+(v+o(\sqrt{u^2+v^2}))\mathbf{e}_2+\frac{1}{2}\Big(\kappa_1u^2+\kappa_2v^2+o(u^2+v^2)\Big)\mathbf{n}.$$

现在把$\{p;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{n}\}$取作$\mathbb{E}$的标架, 那么$S$的参数方程就是

$$x=u+o(\sqrt{u^2+v^2}),\ \ y=v+o(\sqrt{u^2+v^2}),\ \ z=\frac{1}{2}\Big(\kappa_1u^2+\kappa_2v^2+o(u^2+v^2)\Big),$$

或者

$$z=\frac{1}{2}\Big(\kappa_1x^2+\kappa_2y^2+o(x^2+y^2)\Big).$$

这叫做曲面在p点的标准展开.

如果κ_1,κ_2不全为零, 且$u^2+v^2\to 0$, 就得到近似曲面S^*:

$$z=\frac{1}{2}\Big(\kappa_1x^2+\kappa_2y^2\Big).$$

显然S和S^*在p点相切, 有共同的主方向和主曲率, 从而沿任意方向的法曲率也都相同. 当κ_1,κ_2同号时, S^*是个椭圆抛物面. 当κ_1,κ_2异号时, S^*是个双曲抛物面. 当κ_1,κ_2之中一个为零时, S^*是一个抛物柱面.

例1. 计算环面$\boldsymbol{r}=\Big((a+r\cos u)\cos v,(a+r\cos u)\sin v,r\sin u\Big)$上各点的高斯曲率, 其中$0<r<a$是常数.

事实上, 直接计算可知

$$E=r^2,\ \ F=0,\ \ G=(a+r\cos u)^2,\ \ L=r,\ \ M=0,\ \ N=\cos u(a+r\cos u),$$

故

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\cos u}{r(a+r\cos u)}.$$

所以$u=\pi/2$或$3\pi/2$时, $K=0$ (抛物点), 它们落在环面最上面和最下面的平行圆周上; $\pi/2<u<3\pi/2$时, $K<0$ (双曲点), 它们在环面的内侧; $0\le u<\pi/2$或$3\pi/2<u\le 2\pi$时, $K>0$ (椭圆点), 它们在环面的外侧.

习题 1. 求双曲抛物面

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix} a(u+v) & b(u-v) & 2uv \end{pmatrix}$$

的高斯曲率K, 平均曲率H, 主曲率κ_1,κ_2及其所对应的主方向.

第十讲　曲面上自然标架的运动公式

1. 基本问题: 我们已经知道, 曲面的第一基本形式I和第二基本形式II 与曲面的保持定向的容许参数变换无关, 也和$\mathcal{E}$中右手单位正交标架的变换无关. 所以当曲面在空间作刚体运动时其第一基本形式和第二基本形式不变; 也就是说, 它们是曲面的两个不变量. 反之, 我们问: I和II是否足以确定曲面的形状, 即它们构成曲面的完全的不变量系统?

2. 思路: 为此, 我们仿照曲线的Frenet公式, 首先给出曲面的自然标架的运动公式, 它们是一类一阶非线性超定偏微分方程组; 这类方程组当满足适当可解性条件时才有唯一解. 这个可解条件就是Gauss-Codazzi方程组, 即曲面论基本方程组. 若I和II满足这个方程组, 根据一阶非线性超定偏微分方程组的可解性定理就可以(在相差一个刚体运动下)解出唯一的具有给定I和II的曲面. 这就是曲面论基本定理. Gauss-Codazzi方程组的一个重要推论就是Gauss绝妙定理, 即高斯曲率完全由I确定, 所以可以仅仅通过第一基本形式研究曲面的某种弯曲性, 而不需要把这个曲面放在某个欧式空间内.

3. 研究进展: 实际问题中, 往往是给定一个平面区域上的第一基本形式(一个二阶对称正定矩阵), 再通过Gauss-Codazzi方程组求解出第二基本形式系数, 根据曲面论基本定理就得到$\mathcal{E}$ 中的一张曲面. 这就是微分几何中的曲面实现问题. Gauss-Codazzi方程组是个关于第二基本形式系数的含有两个方程的一阶拟线性方程组; 当高斯曲率$K>0$时它是椭圆型的, 当$K<0$时它是双曲型的, 当K变号时它是某种混合型的. 近几年来陈贵强、王德华、Slemrod等学者通过适当的未知函数替换把Gauss-Codazzi方程组与流体力学中可压缩欧拉方程组联系了起来, 可以用双曲守恒律理论建立起Gauss-Codazzi方程组弱解的存在性. 这是很有意思的新进展.

如果曲面是通过函数图像形式给出的, 那么 Gauss-Codazzi 方程组可以转化为 Monge–Ampére 方程, 后者是一个二阶完全非线性方程: 当$K>0$, $K<0$ 和K变号时分别是椭圆型、双曲型和混合型的. 对这个方程的研究极大地促进了对二阶完全非线性椭圆型方程理论的发展.

4. 这一讲会引入若干张量记号, 如爱因斯坦求和约定, 以及指标轮换等计算技巧. 这是现代微分几何常见的术语和方法, 应当熟练掌握.

5. 记号: 曲面的参数方程记作$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$, u^1,u^2是参数. 置$\mathbf{r}_\alpha=\frac{\partial\mathbf{r}(u^1,u^2)}{\partial u^\alpha}$, 其中$\alpha=1,2$. 于是法向量$\mathbf{n}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2/|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|$. 参数方程的微分可以写作$\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathrm{d}\mathbf{r}(u^1,u^2)=\mathbf{r}_\alpha(u^1,u^2)\mathrm{d}u^\alpha$, 这里用了Einstein的和式约定: *在一个单项式中, 若同一个指标字母, 如α出现两次, 一次是作为上指标, 一次是作为下指标, 则该单项式实际上代表对于$\alpha=1,2$的求和式; 多对重复的指标字母表示多重的求和式.*

此外, 用$g_{\alpha\beta}$和$\beta_{\alpha\beta}$表示曲面的第一类基本量和第二类基本量:

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}&=\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta,\\
b_{\alpha\beta}&=\mathbf{r}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{n}_\beta=-\mathbf{r}_\beta\cdot\mathbf{n}_\alpha,
\end{aligned}
$$

其中

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\frac{\partial\mathbf{r}(u^1,u^2)}{\partial u^\alpha}\right).$$

于是

$$I=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha u^\beta,\qquad II=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha u^\beta.$$

此外, 记

$$|g|=\det(g_{\alpha\beta})=g_{11}g_{22}-g_{12}^2,\quad |b|=\det(b_{\alpha\beta})=b_{11}b_{22}-b_{12}^2.$$

由于矩阵$(g_{\alpha}\beta)$是对称正定阵, 它有逆矩阵, 记作$g^{-1} = (g^{\alpha\beta})$. 所以成立

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

6. 我们常通过度量矩阵$(g_{\alpha\beta})$ 或其逆矩阵$(g^{\alpha\beta})$来降低或提升某个张量的指标. 例如, 我们记

$$b^{\gamma}_{\beta} = b_{\beta\xi}g^{\xi\gamma}, \quad b_{\beta\eta} = b^{\gamma}_{\beta}g_{\gamma\eta},$$
$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi}, \quad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\xi}\Gamma_{\xi\alpha\beta}.$$

最后我们约定$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$指标下降时落在下指标的最左端.

一　曲面上自然标架的运动公式

1. 设$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1,u^2)$是一张正则参数曲面, 则$\{\mathbf{r}(u^1,u^2);\mathbf{r}_1(u^1,u^2),\mathbf{r}_2(u^1,u^2),\mathbf{n}(u^1,u^2)\}$就是$S$在点$(u^1,u^2)$的自然标架. 这个标架族依赖于两个参数$u^1,u^2$. 根据定义, 标价原点$\mathbf{r}(u^1,u^2)$关于参数的偏导数是

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{\alpha}} = \mathbf{r}_{\alpha}, \qquad \alpha = 1,2. \tag{10.1}$$

此外, 既然$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$线性无关(未必正交), 则$\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}$ 和$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^{\beta}}$都可以用它们线性表示. 不妨假定

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\gamma} + C_{\alpha\beta}\mathbf{n}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^{\beta}} = D^{\gamma}_{\beta}\mathbf{r}_{\gamma} + D_{\beta}\mathbf{n}. \end{cases} \tag{10.2}$$

下面确定系数$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, D^{\gamma}_{\beta}$ 和D_{β}.

2. 考虑(10.17)中第一式. 两边与法向量$\mathbf{n}$作内积, 得到

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = b_{\alpha\beta}.$$

将(10.17)中第二式的两边与切向量$\mathbf{r}_{\xi}$作内积, 得到

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^{\beta}} \cdot \mathbf{r}_{\xi} = D^{\gamma}_{\beta}\mathbf{r}_{\gamma} \cdot \mathbf{r}_{\xi} = D^{\gamma}_{\beta}g_{\gamma\xi},$$

于是

$$D^{\gamma}_{\beta}g_{\gamma\xi} = -b_{\beta\xi}, \qquad D^{\gamma}_{\beta} = -b_{\beta\xi}g^{\xi\gamma} = -b^{\gamma}_{\beta}.$$

将该式与$\mathbf{n}$作内积, 注意到$|\mathbf{n}| = 1$, 得到$D_{\beta} = 0$. 于是(10.17)变作

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta}\mathbf{n}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^{\beta}} = -b^{\gamma}_{\beta}\mathbf{r}_{\gamma}. \end{cases}} \tag{10.3}$$

这里第二个式子其实就是Weingarten变换在自然基底下的矩阵, 所以也被叫做Weingarten公式. 第一个称作Gauss公式. (10.1)和(10.3)就是曲面自然标架的运动公式.

3. 下面确定Christoffel记号$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. 将(10.3)中第一式和$\mathbf{r}_{\xi}$作内积, 得到

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_{\xi} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\gamma} \cdot \mathbf{r}_{\xi} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\xi} = \Gamma_{\xi\alpha\beta}. \tag{10.4}$$

再注意到$\mathbf{r}_{\alpha\beta}=\mathbf{r}_{\beta\alpha}$, 所以$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$和$\Gamma_{\xi\alpha\beta}$中分别对于下指标和后两个指标是对称的:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\qquad \Gamma_{\xi\alpha\beta}=\Gamma_{\xi\beta\alpha}.$$

4. 下面利用度量矩阵来直接给出$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$的表达式. 出发点是对$g_{\alpha\beta}=\mathbf{r}_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta}$ 求偏导, 得到

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}=\mathbf{r}_{\alpha\gamma}\cdot\mathbf{r}_{\beta}+\mathbf{r}_{\alpha}\cdot\mathbf{r}_{\beta\gamma}.$$

用(10.4)代入, 得到

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}=\Gamma_{\beta\alpha\gamma}+\Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \tag{10.5}$$

指标轮换, 即将$(\alpha\beta\gamma)$换作$(\beta\gamma\alpha)$和$(\gamma\alpha\beta)$, 得到

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}=\Gamma_{\gamma\beta\alpha}+\Gamma_{\beta\gamma\alpha},\qquad \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma_{\alpha\gamma\beta}+\Gamma_{\gamma\alpha\beta}.$$

这两式相加, 再减去(10.5), 利用$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$关于后两个指标的对称性, 就得到

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right),\qquad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\xi\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}}\right). \tag{10.6}$$

所以Christoffel记号只依赖于度量系数的一阶偏导数, 与第二基本形式系数无关.

5. 注意到给定第一基本形式和第二基本形式后, 方程组(10.1)和(10.3)是关于$\mathbf{r},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$ 和$\mathbf{n}$共12个未知函数的, 以u^1,u^2为自变量的, 含有24个方程的一阶线性偏微分方程组. 曲面论的基本问题就是, 如果对给定点(u_0,v_0), 确定了适当的标架初值$\mathbf{r}(u_0,v_0);\mathbf{r}_u(u_0,v_0),\mathbf{r}_v(u_0,v_0),\mathbf{n}(u_0,v_0)$, 是否可以在$(u_0,v_0)$的一个邻域内唯一地解出标架族$\mathbf{r}(u,v);\mathbf{r}_u(u,v),\mathbf{r}_v(u,v),\mathbf{n}(u,v)$, 使得后者恰是参数曲面$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$的自然标架, 且$C$的第一第二基本形式就是前面给定的第一第二基本形式. 解决这个问题的关键, 就是这类一阶超定偏微分方程组初值问题的唯一可解性. 这类问题, 从形式和证明来看, 都可以作为常微分方程理论的一种推广.

二 一类一阶半线性超定偏微分方程组的可解性和唯一性

1. 问题的提法和主要结论

1. 区域. $\mathbb{R}^m$中一个区域$\tilde{D}$, 其中的点标记为$\mathbf{x}=(x^1,\cdots,x^m)$.

2. 未知函数和方程. 设向量值函数$\mathbf{y}:\tilde{D}\to\mathbb{R}^n,\mathbf{x}\mapsto\mathbf{y}(\mathbf{x})=(y^1(\mathbf{x}),\cdots,y^n(\mathbf{x}))$是未知函数. 假设$\mathbf{f}:\tilde{D}\times\mathbb{R}^n\to\mathbf{M}_{n\times m},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(f^i_{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y}))_{1\le i\le n,1\le\alpha\le m}$ 是已知的连续可微的矩阵值映射. 考虑如下半线性偏微分方程组:

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{10.7}$$

写成分量形式, 也就是

$$\frac{\partial y^i}{\partial x_{\alpha}}=f^i_{\alpha}(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n),\quad 1\le i\le n,1\le\alpha\le m. \tag{10.8}$$

所以我们有n个未知函数, mn个方程; 其中自变量个数是m. 以后简记矩阵$\mathbf{f}$的第α 列为$\mathbf{f}_{\alpha}$.

3. 初始条件. 在给定点$\mathbf{x}_0=(x^1_0,\cdots,x^m_0)\in\tilde{D}$, 给定$\mathbf{y}_0=(y^1_0,\cdots,y^n_0)$ 使得

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}_0. \tag{10.9}$$

4. 以下称(10.7)(10.9)为问题(E).

定理1. 问题*(E)*在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域$U\subset\tilde{D}$内有连续可微的解的充分必要条件是如下恒等式*(*称作可积性条件, 或相容性条件*)*成立*:*

$$\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial y^j}f^j_\beta-\frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j}f^j_\alpha=0,\quad \forall i,\alpha,\beta. \tag{10.10}$$

此时解是唯一地, 且两阶连续可微.

以后使用微分形式的语言, 可以把该定理和相容性条件写得更简洁、自然. [1]

2. 证明

1. 唯一性. 从下面解的构造过程可看出解若存在, 必然唯一.

2. 正则性. 由于假设$\mathbf{f}\in C^1$, 再利用所得解的连续可微性, 通过方程知道$\mathbf{y}\in C^2$.

3. 必要性. 设解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$存在, 则它两阶连续可微, 于是$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha x^\beta}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta x^\alpha}$, 根据方程(10.8), 再用复合函数求导法则, 就得到(10.10).

4. 充分性. 为书写简单起见, 不妨设$\mathbf{x}_0=0$. 证明思路: 考虑(10.7)中第一列, 视作以x^1为时间变量的非线性常微分方程组, 得到$\mathbf{y}$在x^1轴上的值; 其次考虑第二列, 视作以x^2为时间变量的非线性常微分方程组, 以x^1轴上值为初值, 得到$\mathbf{y}$在x^1x^2 平面的值; 再考虑第三列, 视作x^3为自变量的常微分方程, 以x^1x^2平面的值为初值, 求得$x^1x^2x^3$空间的值; 依次类推. 需要注意的是, 要求这些常微分方程的解的存在范围与初值选取无关(由常微分方程皮卡存在唯一性定理, 局部解存在时间只依赖于$\tilde{D}$以及$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$的最大模, 从而确实可与初值无关); 最后解出的函数$\mathbf{y}$要验证它确实满足(10.7)中所有方程(满足初始条件(10.9)是显然的), 此时要用到相容性条件.

5. 为此, 我们对自变量个数m用数学归纳法. 归纳基础. 当$m=1$时, 就是如下常微分方程组初值问题:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}_1(t;\mathbf{y}(t)),\\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0.\end{cases} \tag{10.11}$$

根据 Picard 存在和唯一性定理, 存在$\varepsilon>0$使得上述问题当$x^1\in(-\varepsilon,\varepsilon)$时有唯一的连续可微的解$\mathbf{y}(x^1,0,0,\cdots,0)$, 且该解是$C^2$的.

6. 归纳假设. 对$m\geq 2$, 现在假设当自变量个数k小于m时对应问题(E)在$(-\varepsilon,\varepsilon)^k$上有唯一的$C^2$的解.

现在设自变量个数是m, 考虑问题(10.7)(10.9). 将之限制在$x^m=0$处, 并仅考虑前面$m-1$列, 就得到关于自变量$x^1,\cdots,x^{m-1}$的问题(E), 从而根据归纳假设, 有唯一的C^2 的解$\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)$, 其中$x^1,\cdots,x^{m-1}\in\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 满足初值条件(10.9), 且

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)}{\mathrm{d}x^\alpha}=\mathbf{f}_\alpha(x^1,\cdots,x^{m-1},0;\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)),\qquad \forall\alpha=1,\cdots,m-1. \tag{10.12}$$

7. 对任意给定的参数$(x^1,\cdots,x^{m-1})\in(-\varepsilon,\varepsilon)^{m-1}$, 考虑如下常微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)}{\mathrm{d}x^m}=\mathbf{f}_m(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m;\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)),\\ \mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)|_{x^m=0}=\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},0).\end{cases} \tag{10.13}$$

注意初始条件已由上一步给定. 于是由前面第4步的说明, 并利用解对参数和初值的连续可微性定理, 对前述ε, 当$x^m\in(-\varepsilon,\varepsilon)$时, 该问题存在唯一的连续可微的解$\mathbf{y}(\mathbf{x})=\mathbf{y}(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)$,

[1]如果该定理中进一步假设区域$\tilde{D}$是单连通的, 则解可以延拓到整个区域$\tilde{D}$上. 这个全局性结论的证明要用到连通和单连通的拓扑性质, 在此略去.

且关于x^m两阶连续可微, 关于x^k $(1\le k\le m-1)$和x^m的混合偏导数连续(这可以通过将常微分方程写作积分方程, 用含参变量积分求导得到). 下面需要证明$\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$满足(10.7)前$m-1$列的方程, 从而是$C^2$ 的.

8. 对$\alpha=1,\cdots,m-1, i=1,\cdots,n$, 置

$$g^i_\alpha(\mathbf{x})=\frac{\partial y^i(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha}-f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})),$$

我们要证明, 对$\mathbf{x}\in(-\varepsilon,\varepsilon)^m$, 成立$g^i_\alpha(\mathbf{x})=0$. 首先注意到, 根据(10.13)的初值条件和归纳假设(10.12), 成立

$$g^i_\alpha(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0,\qquad i=1,\cdots,n. \tag{10.14}$$

其次, 计算(第二个等号用了(10.13)中的方程, 第三个等号用了g^i_α的定义, 第三个等号用了相容性条件)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^i_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial y^i(\mathbf{x})}{\partial x^m}\right)-\left(\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^m}+\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^j}\frac{\partial y^j(\mathbf{x})}{\partial x^m}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(f^i_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))\right)-\left(\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^m}+\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^j}f^j_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))\right)\\
&= \left(\frac{\partial f^i_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial f^i_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^k}\left(f^k_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))+g^k_\alpha(\mathbf{x})\right)\right)-\left(\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^m}+\frac{\partial f^i_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^j}f^j_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))\right)\\
&= \frac{\partial f^i_m(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^k}\left(g^k_\alpha(\mathbf{x})\right),
\end{aligned}$$

这是一个关于$(g^1_\alpha(\mathbf{x}),\cdots,g^n_\alpha(\mathbf{x}))$的一阶齐次线性常微分方程组. 由(10.14), 其唯一解就是零. 证毕.

三 给定第一第二基本形式的曲面的唯一性

下面我们利用定理1中的唯一性结论来证明如下定理.

定理2. *设S_1,S_2是定义在同一个参数区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的两个正则参数曲面, 在每一点$(u^1,u^2)\in D$它们都有相同的第一和第二基本形式. 那么曲面S_1可以通过$\mathcal{E}$的一个刚体运动与S_2重合.*

证明. 1. 由于曲面S_1,S_2具有相同参数, 所以其第一第二基本形式分别相同等价于其第一第二基本形式系数分别相同. 设S_i的自然标架场为$F_i=\{\mathbf{r}^{(i)};\mathbf{r}^{(i)}_1,\mathbf{r}^{(i)}_2,\mathbf{n}^{(i)}\}, i=1,2$. 对于任意取定的一点$u_0=(u^1_0,u^2_0)\in D$, 成立

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{(1)}_\alpha(u_0)\cdot\mathbf{r}^{(1)}_\beta(u_0) &= \mathbf{r}^{(2)}_\alpha(u_0)\cdot\mathbf{r}^{(2)}_\beta(u_0)=g_{\alpha\beta}(u_0),\\
\mathbf{r}^{(1)}_\alpha(u_0)\cdot\mathbf{n}^{(1)}(u_0) &= \mathbf{r}^{(2)}_\alpha(u_0)\cdot\mathbf{n}^{(2)}(u_0)=0,\\
\mathbf{n}^{(1)}(u_0)\cdot\mathbf{n}^{(1)}(u_0) &= \mathbf{n}^{(2)}(u_0)\cdot\mathbf{n}^{(2)}(u_0)=1,
\end{aligned}\tag{10.15}$$

且$F_i(u_0)$是右手系. 由于这两个标架具有相同的度量系数和定向, 将$F_1(u_0)$映到$F_2(u_0)$的仿射线性变换就是$\mathcal{E}$中的一个刚体运动.[2] 以下将S_1在此刚体运动下的像仍记为S_1. 注意第一第二基

[2]将$F_1(u_0),F_2(u_0)$两个标架分别作Gram-Schmidt正交化, 得到两个右手标准正交标架$F'_1(u_0),F'_2(u_0)$,它们之间确定唯一的刚体运动σ, 使得$\sigma(F'_1(u_0))=F'_2(u_0)$. 由于$F_1(u_0)$和$F_2(u_0)$对应的Gram矩阵相同, 所以它们由$F'_1(u_0),F'_2(u_0)$分别表示的系数是完全一样的, 即得$\sigma(F_1(u_0))=F_2(u_0)$.

本形式在刚体运动下不变, 所以下面证明中可设S_1, S_2在相同参数点有相同第一第二基本形式系数, 且在u_0 点有相同标架. 我们要证明在u_0 的某个邻域内$F_1 = F_2$.

2. 为此, 根据标架的运动公式, 我们找出$F_1 - F_2$满足的微分方程. 置

$$\tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}^{(1)}(u) - \mathbf{r}^{(2)}(u)), \quad \tilde{\mathbf{r}}_\alpha(u) = \mathbf{r}_\alpha^{(1)}(u) - \mathbf{r}_\alpha^{(2)}(u)), \quad \tilde{\mathbf{n}}(u) = \mathbf{n}^{(1)}(u) - \mathbf{n}^{(2)}(u)).$$

这里$\alpha = 1, 2$. 因为$F_1(u_0) = F_2(u_0)$, 所以显然有

$$\tilde{\mathbf{r}}(u_0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{r}}_\alpha(u_0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{n}}(u_0) = 0. \tag{10.16}$$

再考虑F_1和F_2满足的线性方程组(10.3). 由于第一、第二基本形式系数相同, 所以方程中系数是相同的. 直接相减, 得到如下方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial u^\alpha} = \tilde{\mathbf{r}}_\alpha, \\ \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{\mathbf{r}}_\gamma + b_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{n}}, \\ \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{n}}}{\partial u^\beta} = -b_\beta^\gamma \tilde{\mathbf{r}}_\gamma. \end{cases} \tag{10.17}$$

这是一个关于$\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}_\alpha, \tilde{\mathbf{n}}$的线性偏微分方程组. 显然零是(10.18)(10.16)的连续可微解. 使用定理1的唯一性结论, 就知道$\tilde{\mathbf{r}} = 0$, 即F_1, F_2的标架原点在各参数点都重合. 这就证明了$S_1 = S_2$. □

定理3. *设S_1, S_2是$\mathcal{E}$中两张正则参数曲面, 记其第一第二基本形式分别为I_j和II_j $(j = 1, 2)$. 如果有光滑映射$\sigma : S_1 \to S_2$使得*

$$\sigma^*(I_2) = I_1, \qquad \sigma^*(II_2) = II_1,$$

则存在$\mathcal{E}$的刚体运动$\tilde{\sigma}$使得$\sigma = \tilde{\sigma}|_{S_1}$, 即$S_1$和$S_2$经过$\mathcal{E}$的一个刚体运动是重合的.

证明. 定理条件表明σ是个保长变换, 所以S_1, S_2可以取相同的参数系, 使得σ将S_1上曲纹坐标为(u^1, u^2)的点映到S_2上曲纹坐标为(u^1, u^2)的点, 从而S_1, S_2的第一第二基本形式系数对应相等. 再由上一定理, 可找到唯一刚体运动$\tilde{\sigma}$ 使得S_1, S_2上具有相同曲纹坐标的点重合. 所以$\sigma = \tilde{\sigma}|_{S_1}$. □

习题 1. 置

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(u) &= (\mathbf{r}_\alpha^{(1)}(u) - \mathbf{r}_\alpha^{(2)}(u)) \cdot (\mathbf{r}_\beta^{(1)}(u) - \mathbf{r}_\beta^{(2)}(u)), \\ f_\alpha(u) &= (\mathbf{r}_\alpha^{(1)}(u) - \mathbf{r}_\alpha^{(2)}(u)) \cdot (\mathbf{n}^{(1)}(u) - \mathbf{n}^{(2)}(u)), \quad f(u) = |\mathbf{n}^{(1)}(u) - \mathbf{n}^{(2)}(u)|^2. \end{aligned}$$

证明它们满足如下方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha} + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha, \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma} = -b_\gamma^\delta f_{\delta\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta + b_{\alpha\gamma} f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^\gamma} = -2 b_\gamma^\delta f_\delta, \end{cases} \qquad \gamma = 1, 2. \tag{10.18}$$

习题 2. 证明恒等式: $\partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma} = g_{\beta\lambda} \Gamma_{\gamma\alpha}^\lambda - g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda$.

第十一讲　曲面论基本方程

1. 问题. 在参数区域$u=(u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2$上给定两个二次微分形式

$$\varphi=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,\qquad \psi=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,\tag{11.1}$$

其中$1\le\alpha,\beta\le 2$, $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}, b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$, 并且$(g_{\alpha\beta})$是正定矩阵. 那么是否存在参数曲面$\mathbf{r}:D\to\mathcal{E}$使得其第一、第二基本形式分别是$\varphi$和$\psi$?

2. 思路. 先找必要条件. 如果这样的曲面$\mathbf{r}$存在, 那么其自然标架满足如下运动公式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^\alpha}=\mathbf{r}_\alpha,\\ \dfrac{\partial\mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_\delta+b_{\alpha\beta}\mathbf{n},\\ \dfrac{\partial\mathbf{n}}{\partial u^\beta}=-b^\delta_\beta\mathbf{r}_\delta,\end{cases}\tag{11.2}$$

其中

$$\Gamma^\delta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\delta\xi}\left(\partial_\beta g_{\xi\alpha}+\partial_\alpha g_{\xi\beta}-\partial_\xi g_{\alpha\beta}\right),\quad b^\gamma_\beta=g^{\gamma\xi}b_{\xi\beta},\quad (g^{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta})^{-1}.\tag{11.3}$$

假设$\mathbf{r}\in C^3(D)$, 那么如下相容性条件必须成立:

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^\beta\partial u^\alpha}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta},\tag{11.4}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta\partial u^\gamma}=\frac{\partial^2\mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\gamma\partial u^\beta},\tag{11.5}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{n}}{\partial u^\beta\partial u^\gamma}=\frac{\partial^2\mathbf{n}}{\partial u^\gamma\partial u^\beta}.\tag{11.6}$$

注意(11.4)就是$\partial_\beta\mathbf{r}_\alpha=\partial_\alpha\mathbf{r}_\beta$. 利用(11.2)中第二组方程, 这可以由$g_{\alpha\beta}$和$b_{\alpha\beta}$关于$\alpha$和$\beta$的对称性保证.

下面将(11.5)利用(11.2)展开, 得到Gauss方程和Codazzi方程组; 如果视第一基本形式系数为已知量, 则后者可看作是关于第二基本形式系数的一阶偏微分方程组, 而Gauss方程是关于第二基本形式系数的代数方程. 从Gauss方程就可得到重要的高斯定理, 即高斯曲率完全由第一基本形式确定. 另一方面, 计算表明(11.6)等价于Codazzi方程组, 所以相容性等价于Gauss–Codazzi方程组, 这就是曲面论基本方程.

3. 反之, 设$g_{\alpha\beta}$和$b_{\alpha\beta}$ 满足Gauss–Codazzi方程组, 对线性方程组(11.2)应用上一讲关于一阶超定偏微分方程组的结论, 就可以得到$\mathbf{r}$的存在性, 从而问题得以解决.

一　Gauss–Codazzi方程组

将(11.2)代入(11.5)和(11.6), 得到如下等式:

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_\delta+b_{\alpha\beta}\mathbf{n}\right)=\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\mathbf{r}_\delta+b_{\alpha\gamma}\mathbf{n}\right),\tag{11.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma}(b^\delta_\beta\mathbf{r}_\delta)=\frac{\partial}{\partial u^\beta}(b^\delta_\gamma\mathbf{r}_\delta).\tag{11.8}$$

将(11.7)展开, 并用(11.2)代入, 整理之后得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\eta\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\eta\beta}-b_{\alpha\beta}b^\delta_\gamma+b_{\alpha\gamma}b^\delta_\beta\right)\mathbf{r}_\delta+\left(\Gamma^\delta_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}-\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\right)\mathbf{n}=0.$$

由于$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$线性无关, 所以上式等价于

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}+\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\eta\gamma}-\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\eta\beta}-b_{\alpha\beta}b^\delta_\gamma+b_{\alpha\gamma}b^\delta_\beta &= 0, &(11.9)\\ \Gamma^\delta_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma}-\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} &= 0. &(11.10)\end{aligned}$$

将(11.8)展开, 并用(11.2)代入, 整理之后得到

$$\left(\frac{\partial b^\delta_\beta}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b^\delta_\gamma}{\partial u^\beta}+b^\eta_\beta\Gamma^\delta_{\eta\gamma}-b^\eta_\gamma\Gamma^\delta_{\eta\beta}\right)\mathbf{r}_\delta+\left(b^\delta_\beta b_{\delta\gamma}-b^\delta_\gamma b_{\delta\beta}\right)\mathbf{n}=0.$$

所以(11.8)等价于

$$\begin{aligned}\frac{\partial b^\delta_\beta}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b^\delta_\gamma}{\partial u^\beta}+b^\eta_\beta\Gamma^\delta_{\eta\gamma}-b^\eta_\gamma\Gamma^\delta_{\eta\beta} &= 0, &(11.11)\\ b^\delta_\beta b_{\delta\gamma}-b^\delta_\gamma b_{\delta\beta} &= 0. &(11.12)\end{aligned}$$

注意(11.12)是自然成立的, 因为

$$b^\delta_\beta b_{\delta\gamma}=g^{\delta\xi}b_{\xi\beta}b_{\delta\gamma}=g^{\xi\delta}b_{\delta\gamma}b_{\xi\beta}=b^\xi_\gamma b_{\xi\beta}=b^\delta_\gamma b_{\delta\beta}.$$

1. Codazzi方程组

方程组(11.10)称作Codazzi方程组:

$$\boxed{\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}=\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}b_{\eta\beta}-\Gamma^\eta_{\alpha\beta}b_{\eta\gamma}.} \tag{11.13}$$

我们先证明(11.11)与(11.13)是等价的. 事实上, 利用(11.13), 就成立

$$\begin{aligned}\partial_\gamma b^\delta_\beta-\partial_\beta b^\delta_\gamma &= \partial_\gamma(b_{\beta\alpha}g^{\alpha\delta})-\partial_\beta(b_{\gamma\alpha}g^{\alpha\delta})=g^{\alpha\delta}(\partial_\gamma b_{\alpha\beta}-\partial_\beta b_{\alpha\gamma})+b_{\alpha\beta}\partial_\gamma g^{\alpha\delta}-b_{\alpha\gamma}\partial_\beta g^{\alpha\delta}\\ &= g^{\alpha\delta}b_{\beta\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}-g^{\alpha\delta}b_{\gamma\eta}\Gamma^\eta_{\alpha\beta}+b^\eta_\beta g_{\alpha\eta}\partial_\gamma g^{\alpha\delta}-b^\eta_\gamma g_{\alpha\eta}\partial_\beta g^{\alpha\delta}\\ &= g^{\alpha\delta}\Big(\frac12 b_{\beta\eta}g^{\eta\xi}(\partial_\alpha g_{\xi\gamma}+\partial_\gamma g_{\xi\alpha}-\partial_\xi g_{\alpha\gamma})-\frac12 b_{\gamma\eta}g^{\eta\xi}(\partial_\alpha g_{\xi\beta}+\partial_\beta g_{\xi\alpha}-\partial_\xi g_{\alpha\beta})\\ &\qquad -b^\eta_\beta\partial_\gamma g_{\alpha\eta}+b^\eta_\gamma\partial_\beta g_{\alpha\eta}\Big)\\ &= g^{\alpha\delta}\Big(\frac12 b^\xi_\beta(\partial_\alpha g_{\xi\gamma}+\partial_\gamma g_{\xi\alpha}-\partial_\xi g_{\alpha\gamma})-\frac12 b^\xi_\gamma(\partial_\alpha g_{\xi\beta}+\partial_\beta g_{\xi\alpha}-\partial_\xi g_{\alpha\beta})-b^\xi_\beta\partial_\gamma g_{\alpha\xi}+b^\xi_\gamma\partial_\beta g_{\alpha\xi}\Big)\\ &= -b^\xi_\beta\frac12 g^{\alpha\delta}(\partial_\gamma g_{\xi\alpha}+\partial_\xi g_{\alpha\gamma}-\partial_\alpha g_{\xi\gamma})+b^\xi_\gamma\frac12 g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\alpha\xi}+\partial_\xi g_{\alpha\beta}-\partial_\alpha g_{\xi\beta})\\ &= -b^\xi_\beta\Gamma^\delta_{\xi\gamma}+b^\xi_\gamma\Gamma^\delta_{\xi\beta}.\end{aligned}$$

所以(11.13)蕴含(11.11). 不难看出反之也成立.

下面写出(11.13)的具体形式. 注意到$\beta=\gamma$时它是平凡的, 从而只有$(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2),(2,1,2)$两种情形:

$$\begin{cases}\partial_2 b_{11}-\partial_1 b_{12}=\Gamma^\eta_{12}b_{\eta1}-\Gamma^\eta_{11}b_{\eta2},\\ \partial_2 b_{21}-\partial_1 b_{22}=\Gamma^\eta_{22}b_{\eta1}-\Gamma^\eta_{21}b_{\eta2},\end{cases} \tag{11.14}$$

2. Gauss方程

1. 式(11.9)称作Gauss方程. 置

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial u^{\beta}}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\eta\beta}, \tag{11.15}$$

称作曲面的第一基本量的Riemann记号. [1] 我们约定: 将$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$的上指标通过度量$(g_{\alpha\beta})$下降时落在左边第二个位置:

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = g_{\delta\eta}R^{\eta}_{\alpha\beta\gamma}, \qquad R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\delta\eta}R_{\alpha\eta\beta\gamma}.$$

(这个约定是为了保证下面要建立的$R_{\alpha\delta\beta\gamma}$关于指标的某些对称性.) 于是(11.9)可写作

$$R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b^{\delta}_{\gamma} - b_{\alpha\gamma}b^{\delta}_{\beta},$$

降低指标后变为

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}. \tag{11.16}$$

2. 下面给出Riemann记号$R_{\alpha\delta\beta\gamma}$的计算表达式. 根据定义, 就有

$$\begin{aligned} R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= g_{\delta\eta}\Big(\partial_{\gamma}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\Gamma^{\eta}_{\xi\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\eta}_{\xi\beta}\Big) \\ &= \partial_{\gamma}\Gamma_{\delta\alpha\beta} - \partial_{\beta}\Gamma_{\delta\alpha\gamma} - (\partial_{\gamma}g_{\delta\eta})\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} + (\partial_{\beta}g_{\delta\eta})\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\Gamma_{\delta\xi\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\delta\xi\beta} \\ &= \partial_{\gamma}\Gamma_{\delta\alpha\beta} - \partial_{\beta}\Gamma_{\delta\alpha\gamma} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}g_{\delta\beta} + \partial_{\delta}\partial_{\beta}g_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\delta\gamma} - \partial_{\delta}\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}\Big) + \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}. \end{aligned} \tag{11.17}$$

这里最后两个等号使用了Christoffel记号的定义

$$\Gamma_{\delta\eta\gamma} = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\eta}g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\delta\eta} - \partial_{\delta}g_{\eta\gamma}\Big).$$

3. 利用定义, 不难验证

$$\Gamma_{\eta\gamma\alpha}\Gamma^{\eta}_{\beta\delta} = \Gamma_{\eta\delta\beta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}. \tag{11.18}$$

于是从(11.17)可知Riemann记号具有如下对称性:

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\delta}. \tag{11.19}$$

从(11.18)还有

$$\Gamma_{\eta\alpha\beta}\Gamma^{\eta}_{\delta\gamma} - \Gamma_{\eta\alpha\gamma}\Gamma^{\eta}_{\delta\beta} = -\Big(\Gamma_{\eta\delta\beta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\eta\delta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Big),$$

于是

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{11.20}$$

由(11.19)和(11.21)还可以得到

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\delta} = -R_{\gamma\beta\alpha\delta} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta}. \tag{11.21}$$

这就是说: $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$的指标可分为前后两组, 当两组指标交换时值不变; 当每一组中两个指标交换时其数值变号. 注意(11.16)右端具有相同性质.

4. 由此可见, $R_{11\beta\gamma} = R_{22\beta\gamma} = 0, \quad R_{\alpha\delta 11} = R_{\alpha\delta 22} = 0$. 于是Gauss方程(11.16) 中其实只有一个方程:

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}. \tag{11.22}$$

[1]这其实是Riemann曲率张量的分量.

3. Gauss定理

回忆曲面的Gauss曲率的定义, 从Gauss公式(11.22)即得到

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{R_{1212}}{\det(g_{\alpha\beta})}. \tag{11.23}$$

这表明高斯曲率完全由第一基本形式决定, 与第二基本形式无关. 所以仅仅通过度量就可以确定曲面的某种弯曲性. 注意到第一基本形式在保长变换下不变, 所以有如下Gauss的绝妙定理:

定理1. *曲面的Gauss曲率是曲面在保长变换下的不变量.*

4. 特殊参数曲线网下的Gauss–Codazzi方程组

考虑曲面上正交参数曲线网($F=0$), 利用相应Christoffel 记号的公式, 可以计算出

$$R_{1212}=-\sqrt{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right),$$

所以Gauss曲率的计算公式为

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right).$$

习题 1. 设曲面S的第一基本形式是$\mathrm{I}=\dfrac{(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2}{\left(1+\frac{c}{4}(u^2+v^2)\right)^2}$, 其中$c$是常数. 求该曲面的 Gauss 曲率.

进一步, 如果采用正交的曲率线网作为参数($F=0=M$), 那么Codazzi方程组会有如下简单的形式: [2]

$$\frac{\partial L}{\partial v}=H\frac{\partial E}{\partial v},\qquad \frac{\partial N}{\partial u}=H\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{11.25}$$

其中$H=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)$是曲面的平均曲率.

以上这些公式都是通过直接计算得到的, 故略去细节.

习题 2. (1) 计算球面的第一基本形式. 注意在球坐标下, 半径为a的球面可写作

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi)=\left(a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\right).$$

(2) 计算单位球面在球坐标$(x^1,x^2)=(\theta,\varphi)$下的 Christoffel 记号. 这里$\theta\in(0,\pi),\varphi\in(-\pi,\pi)$.
[答案: $\mathrm{I}=(\mathrm{d}x^1)^2+(\sin x^1)^2(\mathrm{d}x^2)^2$, 非零的Christoffel记号是$\Gamma_{22}^1=-\sin(x^1)\cos(x^1),\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\cot x^1$.]

习题 3. 设曲面S的第一、第二基本形式分别是$\mathrm{I}=u^2\left((\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2\right)$, $\mathrm{II}=A(u,v)(\mathrm{d}u)^2+B(u,v)(\mathrm{d}v)^2$. 证明: $AB=1$且A,B 都仅是u的函数.
[提示: 分别用 Gauss 定理和正交曲率线参数网下的 Codazzi 方程组.]

---

[2]在正交参数网下, 直接计算, 则 Christoffel 记号有如下表达式, 其中$(u,v)=(u^1,u^2)$, $E=g_{11},G=g_{22}$:

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2E}\partial_u E,\ \Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2G}\partial_v E,\ \Gamma_{12}^1=\frac{1}{2E}\partial_v E,\ \Gamma_{12}^2=\frac{1}{2G}\partial_u G,\ \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2E}\partial_u G,\ \Gamma_{22}^2=\frac{1}{2G}\partial_v G. \tag{11.24}$$

二 曲面的存在性定理

定理2. *如果由(11.1)给出的两个二次微分形式$\varphi\in C^2,\psi\in C^1$满足Gauss-Codazzi 方程组(11.14)(11.22), 则对D中任意一点u_0, 它都有一个邻域$U\subset D$, 以及一个正则参数曲面$\boldsymbol{r}:U\to\mathcal{E},\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 使得该曲面的第一基本形式和第二基本形式分别是φ和ψ.*

证明. 1. 利用φ和ψ可以列出线性方程组(11.2), 其中$\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$ 是未知函数(共12个分量), u^1,u^2是自变量. 在$u_0=(u_0^1,u_0^2)$点给定初值条件

$$\mathbf{r}(u_0)=\mathbf{r}^0,\ \ \mathbf{r}_1(u_0)=\mathbf{r}_1^0,\ \ \mathbf{r}_2(u_0)=\mathbf{r}_2^0,\ \ \mathbf{n}(u_0)=\mathbf{n}^0, \tag{11.26}$$

我们显然需要初值(11.26)满足如下条件:

$$\mathbf{r}_\alpha^0\cdot\mathbf{r}_\beta^0=g_{\alpha\beta}(u_0),\ \ \mathbf{r}_\alpha^0\cdot\mathbf{n}^0=0,\ \ \mathbf{n}^0\cdot\mathbf{n}^0=1,\ \ (\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n})>0. \tag{11.27}$$

由于Gauss-Codazzi方程组就是(11.2)的相容性条件, 根据上一讲定理1, (11.2)和(11.26)具有唯一的C^3的解$\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$. 我们要说明$\mathbf{r}$就是所求的曲面.

2. 为此, 置

$$\begin{cases} f_{\alpha\beta}(u^1,u^2)=\mathbf{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\mathbf{r}_\beta(u^1,u^2)-g_{\alpha\beta}(u^1,u^2),\\ f_\alpha(u^1,u^2)=\mathbf{r}_\alpha(u^1,u^2)\cdot\mathbf{n}(u^1,u^2),\\ f(u^1,u^2)=\mathbf{n}(u^1,u^2)\cdot\mathbf{n}(u^1,u^2)-1.\end{cases}$$

根据(11.27), 成立

$$f_{\alpha\beta}(u_0)=0,\ \ f_\alpha(u_0)=0,\ \ f(u_0)=0. \tag{11.28}$$

直接计算表明$f_{\alpha\beta},f_\alpha,f$满足如下线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta}+\Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha}+b_{\alpha\gamma}f_\beta+b_{\beta\gamma}f_\alpha,\\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma}=-b_\gamma^\delta f_{\delta\alpha}+\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta+b_{\alpha\gamma}f, & \gamma=1,2.\\ \dfrac{\partial f}{\partial u^\gamma}=-2b_\gamma^\delta f_\delta,\end{cases}$$

所以由上一讲定理1中解的惟一性, 有

$$f_{\alpha\beta}(u^1,u^2)=0,\ \ f_\alpha(u^1,u^2)=0,\ \ f(u^1,u^2)=0. \tag{11.29}$$

利用此式即可看出$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$是线性无关的(它们的 Gram 矩阵是正定的): 特别地,

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|};$$

再由解的连续性, 从(11.27) 可知在u_0的一个邻域内

$$(\mathbf{r}_1(u^1,u^2),\mathbf{r}_2(u^1,u^2),\mathbf{n}(u^1,u^2))>0.$$

于是$\{\mathbf{r}_1(u^1,u^2),\mathbf{r}_2(u^1,u^2),\mathbf{n}(u^1,u^2)\}$构成右手系.

3. 最后看$\mathbf{r}$. 由(11.2)中第一个方程, 可知$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$是其切向量, 且我们已证它们在$u_0$的一个邻域内线性无关, 所以$\mathbf{r}$是一个正则参数曲面. 这样一来, $\{\mathbf{r}(u^1,u^2);\mathbf{r}_1(u^1,u^2),\mathbf{r}_2(u^1,u^2),\mathbf{n}(u^1,u^2)\}$就是该曲面的自然标架. 此外, 由$f_{\alpha\beta}=0$知该曲面第一基本形式就是$\varphi$; 再由(11.2)中第二个方程, 通过两边与$\mathbf{n}$作内积, 得到该曲面的第二基本形式就是$\psi$. 定理得证. □

注: 把曲面扩大到自然标架空间中研究, 似乎有个缺点, 就是要引入很多似乎并不必须的新的未知函数(因为这些函数都是$\mathbf{r}$的偏导数), 但其巨大优点是未知函数的偏导数不再包含新的未知函数, 于是可以把几何问题转化为微分方程问题.

三 例题

例1. *设曲面$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本形式是$\mathrm{I} = \lambda(u,v)^2\big((\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2\big)$. 证明: $\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv} = 2\lambda^2 H\boldsymbol{n}$. 这里$H$是$S$的平均曲率, $\boldsymbol{n}$是其单位法向量.*

证明. 利用曲面自然标架的运动公式,

$$\mathbf{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1\mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{r}_v + b_{11}\mathbf{n} = \frac{\lambda_u}{\lambda}\mathbf{r}_u + b_{11}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1\mathbf{r}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{r}_v + b_{22}\mathbf{n} = -\frac{\lambda_u}{\lambda}\mathbf{r}_u + b_{22}\mathbf{n},$$

相加得到

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = (b_{11} + b_{22})\mathbf{n}.$$

注意到平均曲率$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}(b_{11} + b_{22})$, 代入上式即可. □

于是极小曲面, 即$H = 0$的曲面的参数方程的每个分量都满足Lapalce方程.

例2. *求曲面S, 它的第一、第二基本形式分别是*

$$\mathrm{I} = (1+u^2)(\mathrm{d}u)^2 + u^2(\mathrm{d}v)^2, \ \ \mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\big((\mathrm{d}u)^2 + u^2(\mathrm{d}v)^2\big).$$

解. 直接验证可知Gauss方程和Codazzi方程组都成立, (其Gauss曲率是$1/(1+u^2)^2$,) 所以这样的曲面存在. 该曲面两个基本形式的系数都只依赖于u, 且(u,v)是正交曲率线参数网, 旋转面符合这样的特点. 所以不妨设$\mathbf{r} = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, 其中$f(u) > 0$和$g(u)$是待定函数. 旋转面的第一、第二基本形式是

$$\mathrm{I} = [f'(u)^2 + g'(u)^2][(\mathrm{d}u)^2 + f(u)^2(\mathrm{d}v)^2], \ \ \mathrm{II} = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}(\mathrm{d}u)^2 + \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}(\mathrm{d}v)^2].$$

对比系数, 取$f(u) = u$, $g(u) = \frac{1}{2}u^2$ 即可.

例3. *证明: 平均曲率是常数的曲面或者是球面、平面, 或者存在参数系(u,v)使得其第一、第二基本形式分别具有形式*

$$\mathrm{I} = \lambda[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2], \ \ \mathrm{II} = (1+\lambda H)(\mathrm{d}u)^2 - (1-\lambda H)(\mathrm{d}v)^2,$$

其中H是平均曲率.

证明. 设曲面S不是球面或平面, 从而没有脐点, 于是存在局部的正交曲率线参数网. 此时成立

$$\mathrm{I} = E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2, \ \ \mathrm{II} = L(\mathrm{d}u)^2 + N(\mathrm{d}v)^2,$$

而$\kappa_1 = L/E, \kappa_2 = N/G$分别是两个主曲率. 不妨设$\kappa_1 > \kappa_2$ (否则交换(u,v)), 则$2H = \kappa_1 + \kappa_2$是常数.

利用Codazzi方程组, 成立$\partial_v(L - HE) = 0$, $\partial_u(N - HG) = 0$. 于是存在正的函数$a(u)$及负的函数$b(v)$使得

$$L - HE = a(u), \quad N - HG = b(v),$$

即

$$a(u) = E(\frac{L}{E} - H) = E\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}, \ \ b(v) = G(\frac{N}{G} - H) = -G\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2},$$

置$\lambda = \frac{2}{\kappa_1-\kappa_2} > 0$, 则$E = \lambda a, G = -\lambda b$. 作容许参数变换

$$\tilde{u} = \int \sqrt{a(u)}\,\mathrm{d}u, \quad \tilde{v} = \int \sqrt{-b(v)}\,\mathrm{d}v,$$

则

$$\mathrm{I} = \lambda[(\mathrm{d}\tilde{u})^2 + (\mathrm{d}\tilde{v})^2].$$

注意到$(\tilde{u},\tilde{v})$仍然是正交曲率线参数网, 第二基本形式是

$$\mathrm{II} = \tilde{L}(\mathrm{d}\tilde{u})^2 + \tilde{N}(\mathrm{d}\tilde{v})^2.$$

注意到曲率与曲面的参数表示无关, 仍成立$\kappa_1 = \tilde{L}/\lambda$, $\kappa_2 = \tilde{N}/\lambda$,

$$2H = \frac{\tilde{L}}{\lambda} + \frac{\tilde{N}}{\lambda}.$$

于是

$$\frac{\tilde{L}}{\lambda} - H = H - \frac{\tilde{N}}{\lambda} = \frac{\kappa_1-\kappa_2}{2} = \frac{1}{\lambda},$$

即得到

$$\tilde{L} = 1 + \lambda H, \ \ \tilde{N} = \lambda H - 1.$$

$\square$

习题 4. 设S是$\mathbb{R}^3$中的曲面, 其主曲率是两个互不相同的常数. 证明: S是圆柱面的一部分.

四 附录: Gauss-Codazzi 方程组的一个等价形式

我们现在推导 Gauss-Codazzi 方程组(11.14)的一个等价形式. 为此, 首先证明: *若$A(t)$是实自变量t的矩阵值可微函数, 那么*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det A(t) = \mathrm{tr(A(t)^{-1}\dot{A}(t))}. \tag{11.30}$$

这里$\dot{A}(t)$是$A(t)$关于t的导数.

事实上, 对$\mathrm{X}(0) = I_n$的情形, 利用行列式求导法则, 容易知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}\dot{X}(0).$$

对一般情形, 考虑矩阵$X(t) = Y(0)^{-1}Y(t)$, 就得到

$$\det Y(0)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det Y(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{tr(Y(0)^{-1}\dot{Y}(0))}.$$

由此, 就可得到欲证之式.

我们再证明如下恒等式(回忆$|g| = \det(g_{\alpha\beta})$)

$$\partial_\alpha \ln\sqrt{|g|} = \Gamma^\delta_{\alpha\delta}. \tag{11.31}$$

事实上, 上式右端展开, 再利用(11.30), 就得到

$$\frac{1}{2}g^{\delta\eta}\Big(\partial_\alpha g_{\delta\eta} + \partial_\delta g_{\delta\eta} - \partial_\eta g_{\delta\eta}\Big) = \frac{1}{2}g^{\delta\eta}\partial_\alpha g_{\delta\eta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(g^{-1}\partial_\alpha g) = \frac{1}{2}\partial_\alpha(\ln\det g) = \partial_\alpha\ln\sqrt{|g|}.$$

现在引入新未知函数

$$L=\frac{b_{11}}{\sqrt{|g|}},\ M=\frac{b_{12}}{\sqrt{|g|}}=\frac{b_{21}}{\sqrt{|g|}},\ N=\frac{b_{22}}{\sqrt{|g|}}.$$

那么利用上面等式, 不难验证(11.14)可以等价地写作

$$\partial_1 M-\partial_2 L = \Gamma_{22}^2 L-2\Gamma_{12}^2 M+\Gamma_{11}^2 N, \tag{11.32}$$

$$\partial_1 N-\partial_2 M = -\Gamma_{22}^1 L+2\Gamma_{12}^1 M-\Gamma_{11}^1 N. \tag{11.33}$$

此外

$$LN-M^2=\frac{|b|}{|g|}=K, \tag{11.34}$$

其中K就是曲面的Gauss曲率.

若引入新未知函数ρ,u,v,p,q 使得

$$L=\rho v^2+p,\ M=-\rho uv,\ N=\rho u^2+p,\ q=\sqrt{u^2+v^2},\ c=\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}},$$

那么(11.35)(11.36)的主部与二维定常可压缩欧拉方程组中的动量守恒方程相似:

$$\partial_1(\rho uv)+\partial_2(\rho v^2+p) = -\Gamma_{22}^2(\rho v^2+p)-2\Gamma_{12}^2\rho uv-\Gamma_{11}^2(\rho u^2+p), \tag{11.35}$$

$$\partial_1(\rho u^2+p)+\partial_2(\rho uv) = -\Gamma_{22}^1(\rho v^2+p)-2\Gamma_{12}^1(\rho uv)-\Gamma_{11}^1(\rho u^2+p), \tag{11.36}$$

而Gauss公式可看作伯努利定律:

$$\rho p q^2+p^2=K.$$

在$p=-\frac{1}{\rho}$的假设下, 就成立$c^2=q^2+K$. 所以类比气体动力学, 可以证明当$K>0$时气体是亚音速的, 该方程组是一阶椭圆组; 当$K<0$时气体是超音速的, 该方程组是一阶双曲组; 如果K变号, 那么Gauss-Codazzi方程组就是双曲–椭圆混合型方程组. 该方程组是目前偏微分方程研究的重点对象之一, 可参考专著[4]或论文[6].

参考文献

[1] 陈维桓: 微分几何. 北京大学出版社, 北京, 2006.

[2] 彭家贵, 陈卿: 微分几何. 高等教育出版社, 北京, 2002.

[3] 苏步青，胡和生，沈纯理，潘养廉，张国樑: 微分几何. 高等教育出版社, 北京, 1980.

[4] Han, Qin; Hong, Jia-Xing: *Isometric Embeding of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces*. American Mathematical Society, 2006.

[5] Spivark，Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol.1–vol.5. Publish or Perish,Inc. Houston, Texas, 2005.

[6] Chen, Gui-Qiang; Slemrod, M; Wang, Dehua: Isometric embeddings and compenstaed compactness. Comm. Math. Phys. 294 (2010) 411-437.