

双曲守恒律方程与  
激波数学理论导引

袁海荣

2020年10月

华东师大袁海荣备课资料，仅供教学使用

## 说 明

1. 双曲守恒律方程和激波的数学理论是我国具有传统优势的研究方向, 涌现了一大批杰出的学者, 在高维黎曼问题, 分片经典解, 补偿紧性方法, 超音速绕流和管道内流等方面做出了许多重要的贡献, 在国际上非常有影响力. 本讲义拟介绍非线性双曲守恒律偏微分方程组经典的数学理论以及近年来研究的若干新进展, 希望能帮助高年级本科生和研究生了解这个极具魅力的研究领域, 迅速进入双曲守恒律方程组数学理论研究的前沿, 促进我国对激波及相关气体动力学数学问题的研究. 为了这一目的, 我们选择将讲义在线发布, 其内容将随着我们的教学需要不断修改, 补充, 完善, 更新. 虽然已经过一些教学的检验和初步的校对, 内容中仍必有不妥或谬误之处, 还请读者和同行不吝指出!

2. 由于双曲守恒律方程组涉及的研究方法, 特别是近期的新发展, 与偏微分方程其他分支或传统的方法多有不同, 需要不少测度论, 非光滑分析, 泛函分析, 拓扑等方面的知识, 本书特别注意给出证明细节, 分析其研究思路. 我们挑选了若干最基本的结果予以仔细讲述, 并对相关文献和研究进展, 以及一些未解决的(未必很难的)问题, 在每章最后一节的文献评注中予以简要的介绍说明.

3. 目前只包括三章: 对黎曼1860年开创性论文的介绍; 基于De Lellis, Székelyhidi工作的高维欧拉方程组弱解的不唯一性; 守恒律方程的Onsager猜想.

袁海荣

E-mail: hryuan@math.ecnu.edu.cn

华东师范大学数学科学学院

2020年12月.

华东师大袁海荣备课资料，仅供教学使用

# 目 录

<b>第一章 经典导读: 黎曼《论有限振幅平面空气波的传播》</b>	<b>1</b>
1.1 正压等温气体与绝热气体的状态方程和一维等熵可压缩欧拉方程组 . . . . .	2
1.2 黎曼不变量和速度图变换 . . . . .	7
1.3 激波的形成 . . . . .	13
1.4 激波的间断条件和熵条件 . . . . .	18
1.5 黎曼问题及其求解 . . . . .	21
1.6 求解线性波动方程的黎曼方法 . . . . .	26
<b>第二章 二维非定常等熵可压缩欧拉方程组初值问题的无穷多弱熵解</b>	<b>39</b>
2.1 问题及主要结论 . . . . .	39
2.2 扇形下解的概念 . . . . .	42
2.3 振荡函数的添加 . . . . .	48
2.3.1 一个完备度量空间 . . . . .	48
2.3.2 限制映射连续点的稠密性 . . . . .	50
2.3.3 引理2的证明 . . . . .	52
2.3.4 两个命题 . . . . .	53
2.3.5 引理3的证明 . . . . .	54
2.3.6 命题2的证明 . . . . .	58
2.3.7 命题3的证明 . . . . .	62
2.4 扇形下解的构造 . . . . .	67
2.4.1 扇形下解满足的代数条件 . . . . .	67
2.4.2 带横向速度的一维非定常等熵欧拉方程组的黎曼问题 .	70
2.4.3 一维等熵欧拉方程组的黎曼问题 . . . . .	71
2.5 待解决的问题 . . . . .	73
2.6 文献评注 . . . . .	74
<b>第三章 守恒律方程组的Onsager猜想</b>	<b>77</b>
3.1 局部熵守恒 . . . . .	77

3.2 一个磨光与非线性复合的交换子的估计 . . . . .	82
3.3 初边值问题熵在大范围内守恒的充分条件 . . . . .	84
3.4 待解决的问题 . . . . .	87
3.5 文献评注 . . . . .	87
参考文献	89

# 第一章 经典导读: 黎曼《论有限振幅平面空气波的传播》

这一章是对黎曼在1860年发表的论文《论有限振幅平面空气波的传播》的详细解读。黎曼在对这篇论文的《说明》中指出:“正如积分线性偏微分方程的最有成效的方法并非靠发展这个问题中的一般概念,而是从处理特殊的物理问题得出的,所以看来非线性偏微分方程理论也最好是通过对一个特殊的物理问题作深入的、考虑到所有附加条件的处理来得到,而且实际上,一个特殊问题的求解,它构成本文的对象,需要新的方法和观念,它们也很可能在普遍的问题中发挥作用。”他的这个观念,以及在这篇论文中所提出的问题,研究的思想和技巧方法,深刻地影响了双曲守恒律方程组数学理论一个半世纪以来的发展。该文发表已有一百六十年了,人类也已实现了飞行器的超音速飞行,但作为理论基础的数学气体动力学(双曲型守恒律偏微分方程组)的发展,基本上还是按着黎曼的上述指导思想,落在这篇论文给出的框架内。黎曼犹如在黑夜里迷雾中悬崖边的探路人,给后人指出了一条现在看来依然是唯一可行的前进的道路!正如R. Narasimhan在1990年版《黎曼全集》的前言中所述:“伟大的数学家会改变他们的后继者看待数学的某些部分的方式。然而一个人的著作,他的思想和方法,在他去世一百年之后,基本上仍然以他所留下时的形式为人们所研读,这却是很少见的。Riemann的数学所具有的这种品格达到了令人吃惊的程度。他的著作在许多领域内已经以各种方式受到了分析、放大和推广,但是他的数学作品大部分都经受住了时间的考验,而且对新的前景的探索十分诱人。这不是说新的前景还没有找到,而只是说,在许多情况下, Riemann本人的方法还没有决定性地被超越。”

本章正文大量使用了李培廉先生对黎曼原文的中文翻译,即《黎曼全集》(中文版,高等教育出版社)第一卷137-159页的文字。基于李培廉先生的译稿,我们给出了黎曼原文省略的计算细节,并结合后来的研究进展,比较详细地介绍了黎曼论文的创新思想及其重要性。详细阅读黎曼原文会帮助学生更好地学习和理解数学,特别是有关双曲型偏微分方程的知识和研究方法。此外,本章还使用了L. C. Evans的书Partial Differential Equations(第二版)第十一章的部分内容。本文只作为课堂教学资料使用,如有任何问题或不妥,请

惠函hryuan@math.ecnu.edu.cn 联系我.

## §1.1 正压等温气体与绝热气体的状态方程和一维等熵可压缩欧拉方程组

1. 黎曼在论文的开始, 简要介绍了对气体运动的研究进展.

“尽管描述气体运动的微分方程早就建立了, 可是只在其运动中的压力变化可以看成是气体的总压力的一个无限小的部分时, 对它的积分才做了研究, 而且直到最近, 还只满足于只考虑到这个部分的一次幂.<sup>1</sup> 只是在不久前才

<sup>1</sup>黎曼在论文第1节推导了现在称为一维等熵可压缩欧拉方程组的气体动力学方程. 用 $\rho, u, p$ 代表在数轴上 $x$ 点 $t$ 时刻气流的密度, 速度和压强, 这个方程可写为如下散度形式

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (1.1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0. \quad (1.2)$$

气体的状态方程, 是指函数 $p = \varphi(\rho)$ . 注意到常数都是上述方程的解. 现在假设 $\rho = \rho_0 + \hat{\rho}$ ,  $u = u_0 + \hat{u}$ ,  $p = p_0 + \hat{p}$ , 其中 $\rho_0 > 0, u_0, p_0 = \varphi(\rho_0) > 0$ 都是常数. 假设 $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p}$ 及其所有一阶偏导数都是小量, 将上述 $\rho, u, p$ 代入(1.1)(1.2), 并设 $u_0 = 0$ , 扔掉诸如 $\hat{\rho}\hat{u}$ 之类的二阶及以上的项, 就得到一阶线性方程组

$$\hat{\rho}_t + \rho_0 \hat{u}_x = 0, \quad (1.3)$$

$$\rho_0 \hat{u}_t + \varphi'(\rho_0) \hat{\rho}_x = 0. \quad (1.4)$$

第一个方程对 $t$ 求导, 第二个方程对 $x$ 求导后相减, 假若 $\varphi'(\rho_0) > 0$ , 就得到一维波动方程

$$\hat{\rho}_{tt} - \varphi'(\rho_0) \hat{\rho}_{xx} = 0, \quad (1.5)$$

其中 $\sqrt{\varphi'(0)}$ 就是声音(扰动)传播的速度, 即声速. 它可以用达朗贝尔公式或分离变量法求解. 这是读者在偏微分方程入门课程中已经熟悉了的. 如果上述做法中保留的二阶及以上的项, 即第一个方程对 $t$ 求导, 第二个方程对 $x$ 求导, 相减后得到

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \varphi'(\rho_0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.6)$$

其中 $T = \rho u^2 + \varphi(\rho) - \varphi'(\rho_0)\rho$ 称为 Lighthill 张量, 利用它的小性, 结合特征线方法和 Picard 迭代技术, 也可以证明一定条件下经典解的存在性. 这种线性化方法(类似于微分学中局部地用切线代替曲线, 以及隐函数定理局部求解曲线), 仍然是目前研究非线性偏微分方程问题的基本手段. 注意对多个空间变量情形成立类似(1.6)的方程, 它是气动声学的基本方程.

## §1.1 正压等温气体与绝热气体的状态方程和一维等熵可压缩欧拉方程组 3

由Helmholtz 在计算中考虑到了二阶小的项, 并由此解释了复合音调的客观形成. 他处理的情形是这样的: 开始时运动处处向着同一个方向, 而且与此方向垂直的任一平面上的速度和压力是一个常量. Helmholtz 求出了这种情形下的精确的微分方程的完全积分.”

黎曼进一步评价了上述研究的意义, 指出了数学理论分析对于理解物理现象和开展物理实验的价值.

“而且如果说为了解释迄今由实验所确立的现象, 当今的研究也足够了, 那么可以这样说, 最近Helmholtz在对声学问题的实验研究中也取得了巨大的进展, 他的精确计算的结果在不远的将来很可能为实验的研究提供有力的支撑.”

然后, 黎曼写道:“这就使得本文, 且不说它在处理非线性偏微分方程方面的理论意义, 不是没有价值的吧.” 在发表于1859年第19期《Göttingen简报》的对上述论文的说明中, 黎曼明确写道, “此一研究并不打算去为实验研究提供多少有用的结果; 作者只想它能被看成是对非线性偏微分方程的一个贡献.” 我们看到, 黎曼对这篇论文的价值有着非常准确的判断. 在数学理论方面, 这是历史上第一次系统地研究非线性的一阶偏微分方程组的非小扰动的强间断解. 此前的研究是把气体动力学方程在背景状态下线性化, 转化为线性的波动方程, 通过达朗贝尔公式或分离变量法计算出解加以研究, 而这篇论文提供了完全不同的研究思路和方法. 黎曼明确地知道数学研究的结果对于物理实验的重要性, 但他也知道以当时的实验技术, 完全无法实现或观察到冲击波. 他写道:“尽管将我们的研究结果通过实验与观察和经验相比较还有很大的困难, 而且眼下几乎不可能做到, 但仍然值得在此在不太详细的程度上加以报导.” 事实上, 1888年De Laval发明了收缩——扩张喷管后才实现了超音速流, Vieille于1899年发明了激波管, 通过弄破分开高压气体和低压气体的膜片, 获得强激波并产生高温高速气流, 从此对激波的系统实验研究才比较成熟. 所以黎曼对气体动力学的数学研究大大超前于物理实验, 这和他提出黎曼几何远早于广义相对论是类似的.

一些人曾批评说黎曼在该文的研究在物理上是错的, 因为从现代物理角度讲, 激波是个非等熵过程, 不能用本文的绝热气体来描述. 但是如C.M. Dafermos在他的著作《Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics》(第四版)中引言中指出的, 上述批评是“不着边际”的. 首先, 熵(entropy)的

定义是克劳修斯(T. Clausius)在1865年才提出的,完整的气体动力学方程是在黎曼去世后才形成的;其次,可以证明(参见Smoller的著作《Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations》),对于较弱的激波,物理熵的变化是激波强度的三阶小量,所以等熵模型是一个对物理过程有较好近似的数学模型;第三,黎曼在本文中为了确定激波,其实是给出了一种数学熵条件的,也就是说他完全意识到了激波的不可逆性.黎曼在本文的研究从数学角度讲是完全创新、严格、完备而且正确的.数学由于对严格性的要求,不可能像物理学家那样天马行空般地通过大胆的猜测和不严格的推导作研究,像对一维非等熵欧拉方程组大有界变差初值 Cauchy 问题的适定性,目前依旧是未解决的重要数学问题.为了切实促进理解物理现象,严格解决物理问题,能提出数学上可解、物理上(近似)合理的模型,其实是非常了不起的成就.分不清从物理角度和数学角度研究自然现象在特点上的不同而妄加批评,是一种无知的表现.

2. 在对黎曼论文的价值作初步评判之后,我们对上文提到的细节作更多的讲解.

黎曼在论文第1节推导了一维的可压缩欧拉方程组.在一开始的地方,没有必要就气体压强对密度的依赖关系作确切的设定:<sup>2</sup>因此令在密度为 $\rho$ 时的气压为 $p = \varphi(\rho)$ ,而让函数 $\varphi$ 保持暂时未定.设想引进一个直角坐标系,令 $x$ 轴沿运动的方向.用 $u$ 记在 $t$ 时刻位于 $x$ 处气体微元的速度,再用 $\omega$ 表示位于 $x$ 处的平面元.竖立在面元 $\omega$ 上的高度为 $dx$ 的直柱体的体积就是 $\omega dx$ ,其所包含的气体的质量为 $\rho \omega dx$ .

先考虑质量守恒定律在此特殊情形下的数学表达式.在时间 $dt$ 内,上述柱体内气体质量的改变量

$$\rho(x, t + dt)\omega dx - \rho(x, t)\omega dx \approx \omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx$$

可以由流入的质量,即

$$\omega \rho u(x, t) dt - \omega \rho u(x + dx, t) dt \approx -\omega \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx dt$$

---

<sup>2</sup>那么,密度 $\rho$ 和速度 $u$ 又是如何定义的呢?密度本质上是一种测度,而速度的定义涉及追踪流体微团的Lagrange描述.对这些基本概念的挖掘,就诱导到欧拉方程组测度解的概念.在黎曼的论文中,处理的未知量仍然是函数,但是和此前人们只研究连续可微的经典解不同,黎曼的突破之一就在于如何理解不连续的函数是偏微分方程的解.

来确定. 这两者应当相等, 从而得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}. \quad (1.7)$$

再来看动量守恒定律, 或牛顿第二定律的形式. 上述柱体的加速度是  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ , 而作用于其上的力, 沿  $x$  轴的正向, 等于

$$p(x, t)\omega - p(x + dx, t)\omega \approx -\omega \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\varphi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \omega dx,$$

其中  $\varphi'(\rho)$  代表函数  $\varphi(\rho)$  的导数. 根据牛顿第二定律,

$$\rho \omega dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\varphi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \omega dx,$$

消去  $\omega dx$ , 得到动量守恒方程

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\varphi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (1.8)$$

当  $\rho > 0$ , 即不出现真空时, (1.7)(1.8)也可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(\rho) \frac{\partial \log \rho}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \log \rho}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.9)$$

3. 黎曼在《说明》中写道:“在本研究中除了要假设有普遍的运动定律之外, 还必须假设的只有一个经验定律, 这就是气体在没有热量的吸入或放出的情况下, 压强随密度变化的定律. 那已经由Poisson提出, 但在当时还是建立在十分不可靠的基础之上的假设, 即密度为  $\rho$  时的压强以正比于  $\rho^k$  而随密度改变, 其中  $k$  表示定压比热与定容比热之比. 现在已经由Regnault对气体比热的研究以及热的动力学理论的一个原理[指热力学第一定律, 即能量守恒原理]奠定了基础. 考虑到Poisson定律的这个基础似乎还很少有人知道, 看来有必要在引言中对此先交代几句.” 所以在论文引言中, 黎曼基于Boyle和Guy-Lussac定律

$$\log p + \log v = \log T + \text{const.} \quad (1.10)$$

介绍了现在称为多方气体的状态方程  $p = \varphi(\rho)$  的推导. 这里  $v$  表示单位质量气体的体积[比容],  $T$  表示从  $-273^{\circ}\text{C}$  算起的温度[即 Kelvin 温标]. 黎曼考虑了等温和绝热两种情形.

如果由于不同地点压强的不同所引起的不同地点的温度差异平衡得非常快,以至于可以认为气体中的温度分布是一个常量,那么(1.10)的右端是常数,从而等温气体的状态方程是

$$p = \text{const.} \rho. \quad (1.11)$$

如果气体运动时热交换可以完全忽略,也就是既无热的吸入,也无热的放出,此时压强和密度的关系称为绝热方程.在(1.10)中,把温度T看成p和v的函数,把恒定压强下的比热记为c,把保持恒定容积时的比热记为c',(这两者都是对单位质量的气体来说的,)如果p与v发生一个改变dp与dv,则气体吸收的热量为

$$c \frac{\partial T}{\partial v} dv + c' \frac{\partial T}{\partial p} dp,$$

或者,由于(1.10),有 $\frac{\partial \log T}{\partial \log v} = \frac{\partial \log T}{\partial \log p} = 1$ ,即

$$\frac{v}{T} \frac{\partial T}{\partial v} = 1, \quad \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial p} = 1,$$

所吸收的热量也就是

$$T(c d \log v + c' d \log p). \quad (1.12)$$

因此如果没有热的吸收和放出,就应有 $d \log p = -\frac{c}{c'} d \log v$ .如果追随Poisson,假定这两个比热的比值 $\frac{c}{c'} = k$ 与温度和压强均无关,就有

$$\log p = -k \log v + \text{const.} \quad \text{或} \quad p = \text{const.} \rho^k. \quad (1.13)$$

黎曼引用物理实验的结果,说明了在很多常见情形下上述状态方程的有效性.

对于 $\frac{c}{c'} = k$ 与温度和压强均无关的假设,黎曼进一步作了说明. Regnault<sup>3</sup>和Joule(焦耳)的研究显示,“在恒温下膨胀的气体所吸收的热量等于对外做功所需的热量”这个假设非常接近是正确的.如果气体的体积在膨胀dv的过程中温度保持不变,那么从(1.10)就有 $d \log p = -d \log v$ ,结合(1.12),吸收的热量等于 $T(c - c') d \log v$ ,所做的功等于 $p dv$ .因此,如果用A表示热功当量,那么上述假设给出

$$AT(c - c') d \log v = p dv,$$

<sup>3</sup>勒尼奥, 1810.7.21–1878.1.19, 法国物理学家.

即(利用(1.10))

$$c - c' = \frac{pv}{AT} = \frac{\text{const.}}{A},$$

因此左端与压强和温度无关, 而 Regnault 得实验表明比热  $c$  与温度和压强无关, 于是  $k = \frac{c}{c'}$  也和温度及压强无关.

在引言的最后, 利用上述状态方程(1.13)和比热  $c$ , 热功当量  $A$  的实验数据, 黎曼计算了  $0^{\circ}\text{C}$  时干燥空气中的声速, 并与测量声速所得的实验数据对比, 结果相当吻合. 我们看到, 黎曼总是把他的研究建立在当时已经确认了的坚实的物理规律和实验结论基础之上的.

## §1.2 黎曼不变量和速度图变换

1. 在第1节的后半部分, 黎曼开始了对方程组(1.9)的数学分析. 他写道, 将第二个方程乘以  $\pm \sqrt{\varphi'(\rho)}$ , 即

$$\pm \sqrt{\varphi'(\rho)} \partial_t \log \rho \pm u \sqrt{\varphi'(\rho)} \partial_x \log \rho = -(\pm \sqrt{\varphi'(\rho)}) \partial_x u.$$

这里的关键是引入函数

$$f(\rho) \doteq \int \sqrt{\varphi'(\rho)} d \log \rho, \quad (1.14)$$

那么上面方程可以写为(这种把项写为导数形式的技巧非常有用)

$$\pm \partial_t f(\rho) \pm u \partial_x f(\rho) = -(\pm \sqrt{\varphi'(\rho)}) \partial_x u.$$

加到(1.9)的第一个方程  $\partial_t u + u \partial_x u = -\sqrt{\varphi'(\rho)} \partial_x f(\rho)$  上去, 并置

$$f(\rho) + u = 2r, \quad f(\rho) - u = 2s, \quad (1.15)$$

就得到方程(1.9)的简单形式

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}) \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (1.16)$$

其中  $u, \rho$  是根据(1.15)确定的  $r$  和  $s$  的函数. 利用这两个方程, 就导出

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} (dx - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)}) dt), \quad (1.17)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} (dx - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)}) dt). \quad (1.18)$$

黎曼写道, 在实际情况中, 经常遇到的是假设 $\varphi'(\rho)$ 为正. 按现代术语, 他考虑的是严格双曲型方程组. 考虑满足微分方程 $dx = (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})dt$ 的曲线(这里假设解 $u, \rho$ 已经得到并相当光滑). 这样的曲线现在叫做对应于特征值 $u + \sqrt{\varphi'(\rho)}$ 的特征线. 黎曼指出, 上述方程表明沿着 $dx = (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})dt$ 确定的特征线,  $r$ 保持不变; 沿着 $dx = (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})dt$ 确定的特征线,  $s$ 保持不变. 换句话说,  $r$ 的一个固定的值将推动 $x$ 以速度 $\sqrt{\varphi'(\rho)} + u$ 不断增大;  $s$ 的一个固定的值将推动 $x$ 以速度 $\sqrt{\varphi'(\rho)} - u$ 不断减小. 于是这时一个确定的 $r$ 将会逐步遇到先前存在的 $s$ 的值, 并且其向前推进的速度在每一瞬间与它遇到的 $s$ 值有关.

这里引入的新的未知函数 $r$ 和 $s$ 现在被叫作分别对应于特征值 $\lambda_2 = u + \sqrt{\varphi'(\rho)}$ 和 $\lambda_1 = u - \sqrt{\varphi'(\rho)}$ 的黎曼不变量. 它对应的方程组(1.16)是对角化的, 形式比一般的一阶方程组要简单. 读者可以对比一下, 将(1.1)(1.2)写为形式

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0,$$

或者, 对于Lipschitz连续的解, 用链式法则, 写为

$$\mathbf{u}_t + D\mathbf{F}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0,$$

其中 $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^\top = (\rho, \rho u)^\top$ ,  $\mathbf{F} = (F^1, F^2)^\top = (z_2, (z_2^2)/z_1 + p(z_1))^\top$ ,  $z = (z_1, z_2)^\top$ , 则

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + p'(z_1) & \frac{2z_2}{z_1} \end{pmatrix},$$

它不是对角化的矩阵, 特征值是(取 $z_1 = \rho, z_2 = \rho u$ )

$$\lambda_1 = u - \sqrt{p'(\rho)} < \lambda_2 = u + \sqrt{p'(\rho)}.$$

从而这是一个严格双曲型方程组.

那么, 黎曼是如何想到如上引入黎曼不变量的呢? 除了通过未知函数变换将矩阵 $D\mathbf{F}$ 对角化的思路外, 还可以考虑对简单的波动方程, 猜测黎曼不变量大概的形式. 一般来讲, 设 $\mathbf{l}_k, \mathbf{r}_k$ 分别是矩阵 $D\mathbf{F}$ 对应于特征值 $\lambda_k$ 的左、右特征向量(它们分别是行向量和列向量):  $\mathbf{l}_k D\mathbf{F} = \lambda_k \mathbf{l}_k$ ,  $D\mathbf{F} \mathbf{r}_k = \lambda_k \mathbf{r}_k$ , 称函数 $w^k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 $k$ -族黎曼不变量, 如果对任意 $z \in \mathbb{R}^2$ , 任意的 $j \neq k$ ,

$$Dw^k(z) \text{ 与 } \mathbf{l}_j(z) \text{ 平行.} \quad (1.19)$$

由于矩阵的左右特征向量总满足关系式  $\mathbf{l}_i \mathbf{r}_j = 0$  ( $i \neq j$ ), 上述条件也就是

$$Dw^i(z)\mathbf{r}_i(z) = 0, \quad (i = 1, 2, z \in \mathbb{R}^2). \quad (1.20)$$

后文将看到, 黎曼不变量的等值线就是相空间中的疏散波曲线. 物理空间里第一族疏散波就是  $s$  取常值的区域, 第二族疏散波就是  $r$  取常值的区域.

2. 黎曼的方法指出, 不但自变量所在的物理空间对于研究微分方程很重要, 未知函数所在的相空间更加要紧.

方程组(1.16)还是非线性方程. 此前, 研究非线性微分方程的主要办法, 就是类比函数微分, 在特解附近线性化. 论文的第2节, 黎曼提出了一种通过特殊的非线性变换, 将自变量和因变量角色互换, 而把非线性方程转化为线性方程的新办法. 黎曼的思路是这样的: “上述分析首先为我们提供了一个手段来解决这样的问题, 即  $r$  的一个值  $r'$  在何时何地与  $s$  的一个先前就存在的值  $s'$  相遇, 也就是说, 确定  $x$  与  $t$  作为  $r$  与  $s$  的函数.” 他指出, 如果在(1.16)中将  $r$  与  $s$  作为独立变量引入, 则这些方程就转化为  $x$  与  $t$  的线性微分方程, 因此可以用已知的方法来积分.

为了将这些微分方程化为线性, 黎曼说最方便的是将方程(1.17)和(1.18)写为以下形式<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x} \left\{ d(x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t) + \underbrace{\left[ dr \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) + ds \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right) \right] t \right\}, \\ &\quad = d(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\partial s}{\partial x} \left\{ d(x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t) - \underbrace{\left[ ds \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) + dr \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right) \right] t \right\}, \\ &\quad = d(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

<sup>4</sup>这些表达式体现了黎曼卓越的计算技巧. 从本文可以看出, 黎曼很善于运用微分, 而不是导数来做运算. 现在高等数学课程过于强调导数的概念和运算, 某种程度上忽略了对更本质的微分的教学, 其实是不恰当的.

为了验证上述式子,只需注意到,根据(1.15),

$$\begin{aligned} du &= dr - ds, \quad \sqrt{\varphi'(\rho)} d \log \rho = dr + ds, \\ d\sqrt{\varphi'(\rho)} &= \sqrt{\varphi'(\rho)} d \log \sqrt{\varphi'(\rho)} = \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} (\sqrt{\varphi'(\rho)} d \log \rho) \\ &= \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} (dr + ds). \end{aligned}$$

如果将  $s$  与  $r$  看成独立变量,从(1.21)(1.22)就得到了  $x$  与  $t$  这二者的线性微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t)}{\partial s} &= -t \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right), \\ \frac{\partial(x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t)}{\partial r} &= t \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right). \end{aligned}$$

注意这里  $\rho, u$  都可以用  $r, s$  表示,所以它们关于未知函数  $x, t$  是线性的.由此推知

$$(x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t) dr - (x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t) ds \quad (1.23)$$

是一个全微分,它的积分,  $w$ , 满足如下方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} = -t \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right) = m \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right). \quad (1.24)$$

这里,注意到根据(1.23),成立

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} = x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t - (x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t) = -2t \sqrt{\varphi'(\rho)},$$

从而

$$m = \frac{1}{2 \sqrt{\varphi'(\rho)}} \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right),$$

所以这也是一个  $r+s$  的函数.如果令  $f(\rho) = r+s=\sigma$ , 则由  $f(\rho)$  的定义,直接得到  $\sqrt{\varphi'(\rho)} = \frac{d\sigma}{d \log \rho}$ , 即  $d\sigma = \sqrt{\varphi'(\rho)} d \log \rho$ , 或者  $d\sigma/d\rho = \sqrt{\varphi'(\rho)}/\rho$ , 从而

$$m = \frac{1}{2 \sqrt{\varphi'(\rho)}} \frac{d \log \frac{\sqrt{\varphi'(\rho)}}{\rho}}{d \log \rho} = \frac{1}{2} \frac{d \log \frac{\sqrt{\varphi'(\rho)}}{\rho}}{d \sigma} = -\frac{1}{2} \frac{d \log \frac{d\rho}{d\sigma}}{d \sigma}. \quad (1.25)$$

这个表达式的好处是具有散度形式.

对于Poisson所假设的 $\varphi(\rho) = a^2 \rho^k$ 的情形, 简单的计算表明

$$f(\rho) = \frac{2}{k-1} \sqrt{\varphi'(\rho)} + \text{const.} = \frac{2a \sqrt{k}}{k-1} \rho^{\frac{k-1}{2}} + \text{const.} \quad (1.26)$$

如果选其中的任意常数取值为零, 利用(1.15), 有

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi'(\rho)} + u &= \frac{k+1}{2} r + \frac{k-3}{2} s, & \sqrt{\varphi'(\rho)} - u &= \frac{k-3}{2} r + \frac{k+1}{2} s, \\ m &= \frac{1}{2} \frac{k-3}{2} \frac{1}{\sqrt{\varphi'(\rho)}} = \frac{1}{2} \frac{k-3}{k-1} \frac{1}{r+s}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

在假设Boyle定律 $\varphi(\rho) = a^2 \rho$ 成立的条件下, 会得到

$$\begin{aligned} f(\rho) &= a \log \rho, & \sqrt{\varphi'(\rho)} + u &= r - s + a, & \sqrt{\varphi'(\rho)} - u &= s - r + a, \\ m &= -\frac{1}{2a}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

黎曼说, 如果在(1.26)中取常数为 $-\frac{2a \sqrt{k}}{k-1}$ , 那么当 $k \rightarrow 1+$ 时,

$$f(\rho) = \frac{2a \sqrt{k}}{k-1} (\rho^{\frac{k-1}{2}} - 1) \rightarrow a \log \rho;$$

对应地, 从 $r$ 和 $s$ 中各减去 $\frac{a \sqrt{k}}{k-1}$ , 再令 $k = 1$ , 就可得到上述结果.

3. 接着, 黎曼讨论了(1.24)的适用范围, 也就是变换 $(x, t) \mapsto (r, s)$ 的可逆性. 把 $r$ 和 $s$ 作为独立变量引入, 只有在它们作为 $x$ 和 $t$ 的函数时的行列式

$$\begin{vmatrix} \partial_x r & \partial_t r \\ \partial_x s & \partial_t s \end{vmatrix} = \partial_x r \partial_x s \begin{vmatrix} 1 & -u - \sqrt{\varphi'(\rho)} \\ 1 & -u + \sqrt{\varphi'(\rho)} \end{vmatrix} = 2 \sqrt{\varphi'(\rho)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}$$

(这里用到了方程组(1.16)) 不为零时才有可能. 如果不出现真空, 从而 $\varphi'(\rho) > 0$ , 那么只有 $\partial_x r$ 和 $\partial_x s$ 都不为零时方程(1.24)才有效.

如果在物理空间 $(x, t)$ 的一个区域内 $\partial_x r$ 和 $\partial_x s$ 都等于零, 那么根据方程(1.16), 在这个区域内 $r, s$ 都是常数, 从而气体处于常值状态. 这也是气体动力学方程最简单的特解.

现在假设在 $(x, t)$ 的一个邻域内 $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$ 而 $\frac{\partial s}{\partial x} \neq 0$ . 利用(1.16), 可知 $\partial_t r = 0$ , 所以在此邻域内 $r$ 是常数. (这也可由(1.21)看出.) 此时, 从(1.22)知道 $x - (u -$

$\sqrt{\varphi'(\rho)}t$ 是一个只依赖于  $s$  的函数. 换句话说, 给定一个  $s$  的值, 那么就确定了一条直线  $x = (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t + c$ , 它是特征线. 物理空间里这样确定的特解叫作  $\Gamma^+$ -疏散波, 或第一族疏散波. 注意在这种情形, (1.23) 仍然可以看作全微分, 但  $w$  只是  $s$  的函数, 而 (1.24) 不再适用.

同理, 如果  $\partial_x s = 0$  而  $\partial_x r \neq 0$ , 那么  $s$  是常数,  $x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t$  和  $w$  都是  $r$  的函数. 取定  $r$  的一个值  $r'$ , 那么它在某条直的特征线  $x = (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t + c'$  上取值都是  $r'$ . 由此确定的特解叫作  $\Gamma^-$ -疏散波或第 2 族的疏散波.

这样, 黎曼通过数学工具, 就把气体动力学方程的连续的解分成了三类: 常值解, 疏散波和一般的连续解. 上面这段讨论对理解这类双曲方程的求解非常重要, 有必要熟练掌握.

4. 在论文的第 3 节, 黎曼讨论了如何从 (1.24) 的解  $w$  的信息求得物理空间中解  $\rho(x, t), u(x, t)$  的问题. 他假设确定了  $w$  作为  $r, s$  的函数, 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0 \quad (1.29)$$

及初始条件, 而且确定到只相差一个任意常数, 因为显然这样一个常数是可以随便加上去的.

当  $w$  已知时, 上述方程保证了成立

$$(x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t) dr - (x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t) ds = dw, \quad (1.30)$$

或者更明确地, 写为

$$x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t = \partial_r w(r, s), \quad (1.31)$$

$$x - (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t = -\partial_s w(r, s). \quad (1.32)$$

这就给出了“ $r$  的一个确定的值在何时  $t$  何地  $x$  与  $s$  的一个确定的值交汇”. 进一步, 利用

$$f(\rho) + u = 2r, \quad f(\rho) - u = 2s, \quad (1.33)$$

就可以求得  $u, \rho$  作为  $x$  和  $t$  的函数.

黎曼接着说明了对于疏散波和常值解的情形如何处理. 如果  $r$  在一开始在一有限的线段上具有同一个值  $r'$ , 那么这一线段就会逐步移动到  $x$  越来越大的

区域. 在这种区域内  $r = r'$ , 因此  $dr = 0$ , 就不能从(1.30)导出  $x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t$  的值; 这样一来,  $r'$  这个值在何时何地能与  $s$  的一个确定的值相遇的问题就不可能有确定的答案. 此时方程(1.31)只能在这个区域的边界上成立, 而且只能给出在一确定的时刻在  $x$  的何种范围内会有  $r$  取常数值  $r'$  的情况出现; 或者说, 给出在  $x$  的一定位置, 在何种时间范围内  $r$  取这个值. 在这些范围内可由(1.32)(1.33)确定出  $u$  和  $\rho$  作为  $x$  和  $t$  的函数.

如果  $s$  在一有限大小的区域内取值  $s'$ , 而  $r$  是可变的; 或者  $r$  和  $s$  都是常数, 都可以用类似的方法得到这两个函数. 对后一种情形, 它们在由(1.31)(1.32)确定的范围内取由(1.33)所确定的常数值.

### §1.3 激波的形成

1. 在第4节, 黎曼指出了气体动力学方程的解几乎必然要包含激波. 他写道, “在着手积分方程(1.29)之前, 就作此积分时没有作的假设谈几句, 看来还是很有必要的. 其中有关函数  $\varphi(\rho)$ , 只需其导函数  $\varphi'(\rho)$  不会随着  $\rho$  的增大而减小. 这在实际中肯定总是这样的. 同时还要指出, 这时还有

$$\frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} = \int_0^1 \varphi'(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2) d\alpha, \quad (1.34)$$

要附加的条件是: 式中的  $\rho_1$  和  $\rho_2$  只有一个改变, 则上式或者保持不变, 或者随着这个量( $\rho_1$  或  $\rho_2$ )一同增加或一同减少. 同时由此还可推知, 这个表达式的值始终在  $\varphi'(\rho_1)$  和  $\varphi'(\rho_2)$  之间.” 黎曼强调, 这个结果在下一节会多次用到. 我们看到, 黎曼在这里的假定其实是要求  $\varphi$  是  $\rho$  的下凸函数(即  $\varphi''(\rho) \geq 0$ ).

黎曼首先考虑一个特殊情形, 其中初始平衡(常值)状态被扰动的区域位于区间  $a < x < b$  内, 从而在这个区间之外,  $u$  和  $\rho$ , 从而  $r$  和  $s$  都是常数: 这些量在  $x < a$  的区域内用附加的下标1 来标记, 在  $x > b$  的区域内用附加的下标2 来标记.  $r$  在其中发生变化的区域内按第1节的结论, 逐步向前(也就是向右侧)推进, 而且它的后部边界(指左侧边界)向前推进的速度为  $\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + u_1$ , 而在其前发生改变的区域的前边界(指右侧边界)则以速度  $\sqrt{\varphi'(\rho_2)} - u_2$  向后退(左行). 经过一段等于

$$\frac{b-a}{\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + u_1 + \sqrt{\varphi'(\rho_2)} - u_2}$$

的时间之后,<sup>5</sup>这两个区域相交后又脱离,在它们之间形成一个空间,其中有 $s = s_2, r = r_1$ ,从而气体粒子又再次处于平衡.因此从开始振动的地方发出向着两个相反方向传播的波,这个新的中间常值状态也就是这两个波相互作用的产物.此后,在向前(指沿着 $x$ 轴正向,即向右)传播的部分中,可以确定地是 $s = s_2$ (注意,不是 $r = r_1$ ,因为在扰动区 $r$ 是变化着的).因此与确定的密度 $\rho$ 相联系着的速度总是 $u = f(\rho) - 2s_2$ ,而且这两个值(指 $\rho$ 和 $u$ )以恒定的速度

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = \sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2s_2$$

向前推进.与此对比,在向后传播的部分,与密度 $\rho$ 相联系着的速度为 $u = -f(\rho) + 2r_1$ ,而且这两个值以恒定的速度 $\sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2r_1$ 向后退.注意这里“恒定的速度”,就是指具有密度 $\rho$ 和速度 $u$ 的状态沿着特征线传播,而此时特征线就是直线,即我们对应的是疏散波区域.所以对上述具有紧致支集扰动的初值问题,就包括了常值解,疏散波解和完全相互作用三种类型的解.这就是一个典型问题.此外,根据 $\varphi''(\rho) > 0$ 的假设,密度越大传播速度也越大,因为 $\sqrt{\varphi'(\rho)}$ 和 $f(\rho)$ 一样,随 $\rho$ 的增大而增大.

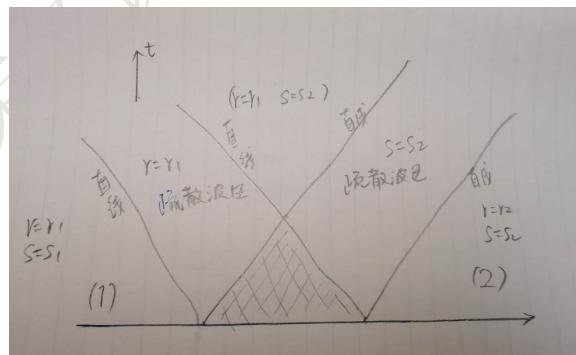


图 1.1 初始有限区间内扰动的作用和传播.

2. 接着黎曼非常清晰地描述了激波形成的机制.设想 $\rho$ 是以 $\rho$ 为纵轴, $x$ 为横轴的坐标曲线.那么这条曲线上的每一点将以一恒定的速度平行横轴运动,而且这个点的纵坐标越大,速度也越快.根据这个规律我们容易地看出,那些具有较大纵坐标的点最终会越过那些位于它们前面但纵坐标较小的点.这

<sup>5</sup>注意这仅是一个大致估计的时间,而不是精确的波作用结束的时间.

样在同一个 $x$ 值上就会有好几个 $\rho$ 的值属于它。可是在实际上这种情况不可能发生,<sup>6</sup>所以必定会进入一种状态，在这种状态下，这个定律不再成立。实际上我们在推导微分方程时就是以假设 $u$ 和 $\rho$ 为 $x$ 的连续函数并且有限可导为基础的；一旦在某一点密度曲线垂直于横轴，这个假设就不再成立。从这一瞬间起这条曲线就会出现间断，以致一个很大的密度会紧跟着一个很小的密度出现：这是将在下一节讲述的情形。

压缩波，即密度沿着传播方向递减的那部分波，于是就会在传播的过程中越来越窄，最终过渡为冲击波；但是稀疏波的宽度则会与时间成正比地不断增大。

3. 黎曼指出，在假设成立Poisson(或Boyle)定律的情况下，容易证明，即使初始平衡受到扰动的区域并不限制在一个有限的区域，也必定，除了极为特殊的情况之外，在涌动的过程中会形成冲击波。在这一假设下数值 $r$ 向前推进的速度为

$$\frac{k+1}{2}r + \frac{k-3}{2}s;$$

因此比较大的值平均会以比较大的速度运动(对前面讨论的紧致扰动，这里 $s = s_2$ ，从而 $k > -1$ 即可。这就对应现代术语所说的特征族真正非线性的条件)。一个较大的 $r'$ 最后必定会超过一个在它前面的较小的 $r''$ ，只要与 $r''$ 相遇的 $s$ 不会比同时与 $r'$ 相遇的 $s$ 平均小于

$$(r' - r'') \frac{1+k}{3-k}$$

也就是说，对于 $1 \leq k \leq 3$ 的情形，只要成立

$$s' - s'' < (r' - r'') \frac{1+k}{3-k}, \quad (1.35)$$

就有 $\frac{k+1}{2}r' + \frac{k-3}{2}s' > \frac{k+1}{2}r'' + \frac{k-3}{2}s''$ 。所以为了 $r'$ 不超过它前面较小的 $r''$ ，即(1.35)不成立，那么对等于正无限大的 $x$ ， $s''$ 要等于负无限大。由于 $2s = f(\rho) - u$ ，这就要求 $x = +\infty$ 时的速度为 $u = +\infty$ ，或者代之以令Boyle定律中的密度为无限小(因为此时 $f(\rho) = a \log \rho \rightarrow -\infty$ )。如果忽略这些特殊情形不计，那么必定总会出现这样的情形，在两个相差一有限量的 $r$ 中，那个较大的值总是紧随在较小的值之后，从而 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 变成负无限大，由此导致微分方程失效，向前推进的冲击波就

<sup>6</sup>如果引入量子态或概率解呢？例如为了理解湍流，或者考察确定系统中的不确定性，需要对方程做新的理解。

必定产生. 完全类似的, 在 $\frac{\partial s}{\partial x}$ 变成(负)无限大时, 也几乎总会有向后退的冲击波形成.

为了确定 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial s}{\partial x}$ 变成无限大以及突然的压缩开始发生的时间和地点, 我们可以在方程(1.21)(1.22)中引入函数 $w$ . 具体这样来做: 注意到

$$d(x - (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})t) = d\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} ds,$$

而根据(1.24),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} ds + ds \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1 \right) t = 0,$$

于是在(1.21)中约去 $dr$ , 就得到

$$\frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) t \right) = 1. \quad (1.36)$$

类似地可以得到

$$\frac{\partial s}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) t \right) = 1. \quad (1.37)$$

4. 对于激波形成, 我们补充给出如下现代的证明.

**定理1.** 考虑一阶严格双曲型方程组

$$s_t + \lambda_1(s, r)s_x = 0, \quad r_t + \lambda_2(s, r)r_x = 0, \quad (1.38)$$

假设成立如下真正非线性条件,

$$\partial_s \lambda_1(s, r) > 0, \quad (1.39)$$

而且初值 $s(x, 0) = s_0(x), r(x, 0) = r_0(x)$ 是具有紧致支集的光滑函数. 如果初值 $s(x, 0) = s_0(x)$ 满足在某点 $x_0$ 处 $s'_0(x_0) < 0$ , 那么该初值问题没有经典解: 在某有限时刻 $\partial_x s$ 就会趋于负无限大.

如果把条件改为  $\partial_r \lambda_2(s, r) > 0$ , 初值 $r(x, 0) = r_0(x)$ 在某点 $x_0$ 处 $r'_0(x_0) < 0$ , 也成立在某有限时刻 $\partial_x r$ 趋于负无限大的结论. 证明是类似的. 形如(1.39)的不等式称为第一特征族真正非线性的条件. 理解了黎曼的解说, 那么上述条

件和结论是非常自然的. 条件(1.39)表明特征速度随着 $s$ 变大而变大(注意正负号), 初始条件意味着 $x_0$ 附近左侧的 $s$ 大(于是速率 $|\lambda_1|$ 小)而右侧的 $s$ 小(于是速率 $|\lambda_1|$ 大), 所以会出现压缩波. 对于 $k \geq 1$ 的等温气体或绝热气体, 成立 $\partial_s \lambda_1 = \partial_r \lambda_2 = \frac{k+1}{2}$ , 所以它们对应的特征都是真正非线性的.

**证明.** 1. 由于要研究 $s_x$ 的爆破, 所以最好是找到它满足的方程. 我们假设已经存在两阶连续可导的经典解. 这种短时间局部经典解的存在性可用特征线法结合Picard迭代方法求出. 置 $a = s_x$ ,  $b = r_x$ , 对(1.38)的第一个方程关于 $x$ 求导, 得到

$$a_t + \lambda_1 a_x + \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} a^2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} a b = 0.$$

为得到只含有 $a$ 的方程, 利用(1.38)的第二个方程 $r_t + \lambda_1 r_x = (\lambda_1 - \lambda_2)r_x$ , 解得

$$b = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (r_t + \lambda_1 r_x),$$

从而

$$a_t + \lambda_1 a_x + \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (r_t + \lambda_1 r_x) a + \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} a^2 = 0. \quad (1.40)$$

这里不直接用 $b = -r_t/\lambda_2$ 替换的妙处很快就会看到(见(1.44)和(1.45), 可以把里的乘积项写为一个函数导数的形式).

2. 我们希望将(1.40)沿特征线 $x = x_1(\tau)$ 积分, 直接算出 $a$ . 这里

$$x'_1(\tau) = \lambda_1(r(x_1(\tau), \tau), s(x_1(\tau), \tau)), \quad x_1(0) = x_0, \quad \tau \geq 0.$$

于是, 若令 $\alpha(t) = a(x_1(t), t)$ , 那么(1.40)就是

$$\alpha'(t) + \beta(t)\alpha(t) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial s}(x_1(t), t)\alpha(t)^2 = 0. \quad (1.41)$$

这里

$$\beta(t) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (r_t + \lambda_1 r_x)(x_1(t), t).$$

按照常微分方程积分因子的方法, 置

$$\xi(t) = \exp \int_0^t \beta(\tau) d\tau,$$

那么 $\xi' = \xi\beta$ , 从而(1.41)就是

$$(\xi\alpha)' + \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} \xi(x_1(t), t)\alpha^2 = 0,$$

或者写为

$$\frac{d}{dt}(\xi\alpha)^{-1} = -\frac{1}{(\xi\alpha)^2} \frac{\partial\lambda_1}{\partial s} \xi\alpha^2 = \frac{\partial\lambda_1}{\partial s} \frac{1}{\xi}.$$

这就解得

$$\alpha(t) = \alpha(0)\xi(t)^{-1} \left( 1 + \alpha(0) \int_0^t \frac{\partial\lambda_1}{\partial s}(x_1(\tau), \tau) \frac{1}{\xi(\tau)} d\tau \right)^{-1}. \quad (1.42)$$

3. 断言: 存在正数 $\theta$ 和 $\Theta$ , 使得

$$\theta \leq \xi(t) \leq \Theta, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.43)$$

利用此断言, 注意到条件 $\partial_s\lambda_1 > 0$ , 只要 $\alpha(0) \geq 0$ , 则 $\alpha(t)$ 就是有界的. 而如果 $\alpha(0) < 0$ , 则(1.43)中右侧括号内的项在有限时间内会趋于零, 于是 $\alpha \rightarrow -\infty$ . 这就证明了激波的形成.

4. 下面证明(1.43). 注意沿着特征线 $x = x_1(t)$ ,  $s(x_1(t), t) = s(x_1(0), 0) = s_0(x_0)$ 是个常数, 所以 $\frac{\partial\lambda_1}{\partial r} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(x_1(t), t)$ 只依赖于 $r(x_1(t), t)$ , 从而

$$\beta(t) = \left( \frac{\partial\lambda_1}{\partial r} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) (s_0(x_0), r(x_1(t), t)) \frac{d}{dt} r(x_1(t), t). \quad (1.44)$$

置

$$h(r) = \int^r \left( \frac{\partial\lambda_1}{\partial r} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) (s_0(x_0), \mu) d\mu,$$

那么

$$\beta(t) = h'(r(x_1(t), t)) \frac{d}{dt} r(x_1(t), t) = \frac{d}{dt} h(r(x_1(t), t)). \quad (1.45)$$

于是

$$\xi(t) = \exp(h(r(x_1(t), t)) - h(r_0(x_0))).$$

由于 $r$ 还是有界的, 故 $h(r(x_1(t), t))$ 有界, 从而(1.43)确实成立.  $\square$

## §1.4 激波的间断条件和熵条件

1. 在论文的第5节, 黎曼指出, 因为突然的压缩几乎总是会出现, 所以即使在一开始密度和速度处处都是连续变化的, 我们还是有必要来寻求冲击波传播的规律.

假设在时刻 $t$ 时在 $x = \xi$ 处发生了 $u$ 和 $\rho$ 的跃变, 我们把这两个量以及其他与它有关的量在 $x = \xi - 0$ 处的值附以下标1来表示, 在 $x = \xi + 0$ 处的值附以下标2. 气体相对于间断点的运动速度为 $u_1 - \frac{d\xi}{dt}$ 和 $u_2 - \frac{d\xi}{dt}$ , 不妨分别以 $v_1$ 和 $v_2$ 表示. 在时间 $dt$ 内通过在 $x = \xi$ 的平面上的一个面元 $\omega$ 的质量于是就等于 $v_1 \rho_1 \omega dt = v_2 \rho_2 \omega dt$ ; 加在它上面的力为 $(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))\omega$ , 因此产生的速度增量为 $v_2 - v_1$ , 于是根据冲量定律, 在 $dt$ 时间内, 力的冲量等于动量的增量, 我们得到

$$(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))\omega dt = (v_2 - v_1)v_1 \rho_1 \omega dt \quad \text{和} \quad v_1 \rho_1 = v_2 \rho_2,$$

或者

$$(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)) = (v_2 - v_1)v_1 \rho_1, \quad v_1 \rho_1 = v_2 \rho_2, \quad (1.46)$$

由此很容易推得

$$v_1 = \mp \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}}, \quad (1.47)$$

从而有

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}} = u_2 \pm \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}} \quad (1.48)$$

这里(1.46)或(1.48)就是后世所称的激波的Rankine-Hugoniot跳跃条件,<sup>7</sup>而(1.48)后一等式就给出了相平面上的过左状态 $(\rho_1, v_1)$ 点的激波曲线. 我们注意到黎曼是在没有弱解的现代严格概念的情况下, 通过物理考虑给出了完全正确的数学公式, 体现出了大数学家面对新问题时所具有的独特的避免重大错误的能力.

2. 黎曼进一步指出了如何选择上述式子中的正负号. 他指出, 对一冲击波来说,  $\rho_2 - \rho_1$  必定与 $v_1$ 和 $v_2$ 有相同的符号. 具体来讲, 对向前推进波(速度大于零的波, 或现在所称的第2族激波)来说取负号; 对向后退行波(第一族的激波)来说取正号(总是保证气体微团越过激波后密度增加, 即压缩了). 在第一种情况下(对2-激波), 在(1.47)中取负号, 即波前气体是冲向激波的(速度为负时

<sup>7</sup>补充守恒律方程积分弱解的定义及R-H条件的推导.

才可以);于是在(1.48)中选正号,且 $\rho_1 > \rho_2$ .<sup>8</sup> 这就是后来所称的物理熵条件. 黎曼接着写道,这样以来,按照在(1.34)下面所做的假设,

$$\lambda_2(\mathbf{u}_1) \doteq u_1 + \sqrt{\varphi'(\rho_1)} > \frac{d\xi}{dt} > \lambda_2(\mathbf{u}_2) \doteq u_2 + \sqrt{\varphi'(\rho_2)}, \quad (1.49)$$

这就是现在所称的(第二族激波的) Lax 几何熵条件. 由此可知间断点移动得慢于紧随其后的 $r$ 值,而快于领先与它的 $r$ 值.(即 $r$ 的信息在不断耗散.)

因此,在每一瞬时的 $r_1$ 和 $r_2$ 要通过在间断点两侧成立的微分方程来决定. 黎曼在这里给出了自由边界问题的思想. 先求解激波右侧的连续的解. 因为 $s$ 的值以速度 $\sqrt{\varphi'(\rho)} - u$ 向后退行, 气体动力学方程对 $s_2$ , 而根据上述熵条件,  $r_2$ 也可以从初值确定,从而可以得到 $\rho_2$ 和 $u_2$ . 但是激波左侧的状态(主要是 $s_1$ )不能用初始条件和微分方程完全确定.  $s_1$ 及 $\frac{d\xi}{dt}$ 的值可由 $r_1, \rho_2$ 及 $u_2$ 通过方程(1.48)来唯一地确定.(注意此时有两个未知量,有两个R-H条件.)

事实上,由于 $u = 2r - f(\rho)$ , 从(1.48)可得

$$\begin{aligned} 2(r_1 - r_2) &= f(\rho_1) - f(\rho_2) + \left( \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \right) \sqrt{\frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}} \\ &= f(\rho_1) - f(\rho_2) + \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2}}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

只有一个 $\rho_1$ 的值能满足这个方程,因为在 $\rho_1$ 从 $\rho_2$ 向无限大增长的过程中,上式的右侧对每一个正值只取一次,这是由于 $f(\rho_1)$ 以及

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{和} \quad \sqrt{\frac{\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}}$$

都是单调地增大,而且最后那个因子还能保持为常数. 进一步,如果 $\rho_1$ 已定,则显然从方程(1.48)我们就可以得到 $u_1$ 和 $\frac{d\xi}{dt}$ 完全确定的值.

对向后退行的冲击波也有完全类似的结果.

<sup>8</sup>以右行激波为例,从(1.46)第二式知道 $v_1$ 和 $v_2$ 必然同号. 如果 $\rho_1 > \rho_2$ ,且 $v_1 > 0$ ,这意味着对此右行激波,左侧状态1才是它的波前——因为气体从左侧穿过激波到达右侧——右侧状态2才是波后,压缩性要求 $\rho_2 > \rho_1$ ,这就矛盾了. 所以为了要求右行激波是压缩的,即 $\rho_1 > \rho_2$ ,则必然要成立 $v_1, v_2$ 都是负的. 对左行激波的讨论是类似的.

## §1.5 黎曼问题及其求解

1. 在论文第6节, 黎曼提出了以他命名的对研究双曲守恒律方程至关重要的一类特殊的初值问题.

我们已经知道, 在一冲击波两侧的 $u$ 和 $\rho$ 之间, 总有方程(见(1.50))

$$(u_1 - u_2)^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2} \quad (1.51)$$

成立. 现在我们要问, 如果在某一给定地点, 在给定时刻, 有一个任意给定的间断点, 那么会出现什么? 这个问题, 就是现在所称的黎曼问题. 这个问题被证明是研究双曲守恒律方程组弱解的最基本的一个问题.

黎曼写道, 可能从此处出现, 或是向两个相反方向运动的冲击波, 或是向前传播的, 或是向后传播的冲击波, 最后还可能不出现冲击波. 这要看 $u_1, \rho_1, u_2, \rho_2$ 所取的值而定, 以保证运动遵循微分方程. 按现代的术语, 黎曼指出了根据分段常值的初始条件的不同, 解有四种可能性: (1) 向左运动的1-激波+向右运动的2-激波, 中间出现新常值状态; (2) 向左运动的1-疏散波和向右运动的2-激波, 中间是新的常值状态; (3) 向左运动的1-激波和向右运动的2-疏散波, 中间是新的常值状态; (4) 向左运动的1-疏散波和向右运动的2-疏散波, 中间是新的常值状态. 疏散波是连续的流动状态, 需要在经典意义下满足微分方程.

2. 怎样求解第一种情形呢? 将 $u$ 和 $\rho$ 在冲击波开始传播的一瞬间之后之间的值用在其右上角加一撇来表示, 那么在 $\rho' > \rho_1$ 及 $\rho' > \rho_2$ 的情形下, 我们有

$$\begin{aligned} u_1 - u' &= \sqrt{\frac{(\rho' - \rho_1)(\varphi(\rho') - \varphi(\rho_1))}{\rho' \rho_1}}, \\ u' - u_2 &= \sqrt{\frac{(\rho' - \rho_2)(\varphi(\rho') - \varphi(\rho_2))}{\rho' \rho_2}}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

注意这里开方取正号, 是要保证以激波后气体速度为参照, 波前气体要冲向激波(体现压缩性), 所以要求 $u_1 - u' > 0$ (向右, 与左行的1-激波碰撞),  $u_2 - u' < 0$ (向左, 与右行的2-激波碰撞). 于是

$$u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{(\rho' - \rho_1)(\varphi(\rho') - \varphi(\rho_1))}{\rho' \rho_1}} + \sqrt{\frac{(\rho' - \rho_2)(\varphi(\rho') - \varphi(\rho_2))}{\rho' \rho_2}}, \quad (1.53)$$

由于它右侧的两项随 $\rho'$ 一同增长, 取 $\rho' = \rho_1$ 或 $\rho_2$ , 右边都大于等于

$$\sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2}},$$

从而有不等式

$$u_1 - u_2 > \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2}}; \quad (1.54)$$

反过来, 如果上述不等式得到满足, 则从(1.53)就可唯一地确定 $\rho'$ , 再从(1.52)就可以解得 $u'$ . 显然, 这样的 $u'$ 和 $\rho'$ 只有一组.

3. 对于出现情形(4), 因而其运动能按照微分方程来确定, 必要而且充分地条件是: 要求有

$$r_1 \leq r_2 \quad s_1 \geq s_2. \quad (1.55)$$

由于 $2r = f(\rho) + u$ ,  $2s = f(\rho) - u$ , 从这个条件可推出

$$u_1 = r_1 - s_1 < r_2 - s_1 < r_2 - s_2 = u_2,$$

此外,  $f(\rho_1) + u_1 < f(\rho_2) + u_2$ 意味着 $f(\rho_1) - f(\rho_2) < u_2 - u_1$ , 而 $f(\rho_1) - u_1 > f(\rho_2) - u_2$ 意味着 $f(\rho_2) - f(\rho_1) < u_2 - u_1$ , 于是(1.55)可以等价地写为

$$u_2 - u_1 > |f(\rho_2) - f(\rho_1)|. \quad (1.56)$$

由于走在前面的值的运动速度大于落在后面的值的运动速度,  $r_1$ 与 $r_2$ ,  $s_1$ 与 $s_2$ 在运动过程中就会分开, 从而导致间断点的消失.

我们对上述黎曼的话作一些更加具体的解释. 此时, 我们想构造的解是“左状态 $(r_1, s_1) + 1$ -疏散波+ 中间状态+2-疏散波+右状态 $(r_2, s_2)$ ”. 利用右边 $s_2$ 沿1-特征线不变, 以及 $r_1$ 沿着2-特征线不变, 可以确定中间状态就是 $(r' = r_1, s' = s_2)$ . 于是成立

$$u_1 = r_1 - s_1 < u' = r_1 - s_2 < r_2 - s_2 = u_2.$$

此外, 由

$$f(\rho_1) + u_1 = f(\rho') + u' = 2r_1, \quad f(\rho_1) - u_1 = 2s_1 > f(\rho') - u' = 2s_2,$$

可知  $f(\rho_1) > f(\rho')$ , 于是  $\rho_1 > \rho'$ , 从而  $\sqrt{\varphi'(\rho_1)} > \sqrt{\varphi'(\rho')}$ , 那么

$$u_1 - \sqrt{\varphi'(\rho_1)} < u' - \sqrt{\varphi'(\rho')},$$

这意味着1-疏散波的前端的速度确实小于末端的速度, 任意给定  $r \in (r_1, r_2)$ , 对应解得  $(\rho, u)$ , 在特征线  $x = (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})t$  上气体状态就是  $(\rho, u)$ . 这样就完全确定了1-疏散波. 对2-疏散波的讨论和构造是类似的.

4. 如果条件(1.54)和(1.56)都不成立, 那么黎曼问题的解就是情形(2)或(3), 至于出现向前运行的1-激波, 还是向后退行的2-激波, 这要看  $\rho_1$  是比  $\rho_2$  大, 还是小来确定.

实际上, 在  $\rho_1 > \rho_2$  时, 就对应情形(2). 此时  $f(\rho_1) > f(\rho_2)$ , 从而, 由于假设(1.56)不成立, 故

$$2(r_1 - r_2) = f(\rho_1) - f(\rho_2) + u_1 - u_2 > 0.$$

另一方面, 由于(1.54)不成立, 故

$$u_1 - u_2 \leq \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2}},$$

从而

$$2(r_1 - r_2) \leq f(\rho_1) - f(\rho_2) + \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1 \rho_2}}.$$

注意到  $r_1$  经过1-疏散波不变, 从而中间状态的  $r' = r_1$ , 于是  $r_1, r_2$  分别代表2-激波左右两侧的  $r$  值. 根据上面不等式, 可利用激波关系式(1.50)求得位于2-冲击波左侧的  $\rho'$  值, 注意到成立熵条件  $\rho' > \rho_2$ , 但根据上面  $\rho'$  的求解方法(右侧关于  $\rho_1$  递增), 必然有  $\rho' < \rho_1$ . 由于  $s' = f(\rho') - r_1, s_1 = f(\rho_1) - r_1$ , 所以也有  $s' \leq s_1$ . 所以从解的爆破定理的条件, 或者从上一段对疏散波的分析看出, 这时出现1-疏散波连接左状态  $(r_1, s_1)$  和中间状态  $(r_1, s')$ .

另一种  $\rho_1 < \rho_2$  的情况, 显然和这种情况的分析差不多.

5. 在论文的第7节, 黎曼具体求解了等温气体欧拉方程的特殊例子. 他写道:“为了用一个简单的例子来阐述至今所述的结果, 在这个例子中的运动可以用迄今所得到的方法来确定, 我们假设, 压强和密度之间的关系由Boyle定律确定, 从而  $\varphi(\rho) = a^2 \rho$ . 密度和速度开始时在  $x = 0$  处发生突变, 但在其两侧则为常量. 那么根据上述要分四种情况来讨论.”

I. 在  $u_1 - u_2 > 0$  时, 两边的气体因此将相对运动, 假设还有(参看1.54)  $\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 > \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1 \rho_2}$ , 在这样的条件下, 就形成了两个向相反方向运动的冲击波.

为了求解方程(1.53), 注意到  $\rho' > \rho_1, \rho' > \rho_2$  的要求, 它现在的形式是

$$\frac{u_1 - u_2}{a} = \frac{\rho' - \rho_1}{\sqrt{\rho' \rho_1}} + \frac{\rho' - \rho_2}{\sqrt{\rho' \rho_2}},$$

右端还可以写为

$$\sqrt{\rho'} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\rho'}} (\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}).$$

为了化简上式, 引入新参数  $\beta$  和  $\theta$ , 使得

$$\sqrt{\rho'} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \right) = \beta \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{\rho'}} (\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}) = \frac{\beta}{\theta},$$

相乘就得到

$$\beta^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \right) (\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}) = \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2,$$

其中用  $\alpha$  来记  $\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ . 所以可取  $\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ . 那么(1.53)就是

$$\frac{u_1 - u_2}{a(\alpha + \frac{1}{\alpha})} = \theta - \frac{1}{\theta}.$$

设  $\theta$  是上述方程的正根(显然存在且唯一), 那么

$$\rho' = \frac{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\right)^2} \theta^2 = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \theta^2.$$

再根据(1.48), 就得到向前运动的冲击波的速度为

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_2}} = u_2 + a \alpha \theta, \quad \text{或者} \quad \frac{d\xi}{dt} = u' + \frac{a}{\alpha \theta},$$

由后一个式子可以算出  $u'$ . 向后退行的冲击波的速度为(此时取负号)

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 - a \frac{\theta}{\alpha} = u' - a \frac{\alpha}{\theta};$$

因而在经过了一段时间  $t$  之后, 当

$$(u_1 - a \frac{\theta}{\alpha})t < x < (u_2 + a\alpha\theta)t$$

时, 速度与密度的值是  $u'$  与  $\rho'$ , 而对较小的  $x$ , 其值为  $u_1$  和  $\rho_1$ , 对较大的  $x$ , 值为  $u_2$  和  $\rho_2$ .

II. 在  $u_1 - u_2 < 0$  且

$$\frac{u_2 - u_1}{a} \geq \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

时, 按前面的说明, 气体作互相背离的运动, 有两个逐渐变宽的稀疏波从初始间断  $x = 0, t = 0$  处沿相反的方向发出, 在它们之间的状态是  $r' = r_1, s' = s_2$ , 从而  $u' = r_1 - s_2, \rho' = f^{-1}(r_1 + s_2)$ . 在前行波中  $s = s_2$ , 而且沿着  $x - (u + a)t = 0, r$  是常数, 其中  $u = r - s_2$ , 而  $r \in (r_1, r_2)$ . (参见(1.33)下面一段中的讨论.) 当  $x > (u_2 + a)t$  时气体状态是  $(u_2, \rho_2)$ , 在  $x = (u' + a)t$  左侧气体是中间状态  $(u', \rho')$ . 对

$$(r_1 - s_2 + a)t \leq x \leq (u_2 + a)t$$

的扇形部分, 称为疏散波区域, 给定  $r_1 < r_0 < r_2$ , 则在射线  $x = (r_0 - s_2 + a)t$  上  $r = r_0, s = s_2$ , 这就构造出了疏散波区域内的解. 在

$$(u_1 - a)t < x < (u' - a)t$$

时,  $r = r_1$ , 且我们得到的是  $u = a + \frac{x}{t}$ , 当  $x$  较小时  $s = s_1$ , 在  $x$  较大时  $s = s_2$ .

III. 如果上述两种情况都没有发生, 且  $\rho_1 > \rho_2$ , 那么会出现一个向后退行的疏散波和一个前行的激波. 对于后者, 由(1.50), 为求出中间状态  $(\rho', u')$ , 要解方程(注意需要  $\rho' > \rho_2$ )

$$\frac{2(r_1 - r_2)}{a} = \log \frac{\rho'}{\rho_2} + \frac{\rho' - \rho_2}{\sqrt{\rho' \rho_2}}.$$

置  $\theta = \sqrt{\rho'/\rho_2}$ , 那么它应当是

$$\frac{2(r_1 - r_2)}{a} = 2 \log \theta + \theta - \frac{1}{\theta}$$

的根, 而  $\rho' = \theta^2 \rho_2$ . 由于  $r' = r_1$ , 这就确定了中间状态, 而激波曲线是直线, 满足(利用(1.48))

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\theta = u' + \frac{a}{\theta}.$$

于是在经过一段时间 $t$ 之后,当 $x > (u_2 + a\theta)t$ 时在冲击波前面有 $u = u_2, \rho = \rho_2$ ,但在冲击波之后有 $r = r_1$ ,而且除此之外,在

$$(u_1 - a)t < x < (u' - a)t$$

时有 $u = a + \frac{x}{t}$ ,在 $x$ 较小时有 $u = u_1$ ,在 $x$ 较大时有 $u = u'$ .

IV. 最后,如果头两种情况都没有发生,且 $\rho_1 < \rho_2$ ,那么所有的进程和III中一样,只是方向相反.

## §1.6 求解线性波动方程的黎曼方法

1. 在第8节,黎曼写道,为了求得我们问题的一般解,依据(1.24),我们必须来确定函数 $w$ ,使得它能满足下述微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m(r, s) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0 \quad (1.57)$$

以及所给的初始条件.

回顾我们要考虑的原始问题是如下守恒律方程组的初值问题

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, & (\rho u)_t + (\rho u^2 + \varphi(\rho))_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= \rho_0(x), & u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (1.58)$$

如果不考虑解含有间断(激波)的情形,只研究经典解,通过引入黎曼不变量,转化为研究如下问题

$$\begin{aligned} r_t + (u + \sqrt{\varphi'(\rho)})r_x &= 0, & s_t + (u - \sqrt{\varphi'(\rho)})s_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ r(x, 0) &= r_0(x), & s(x, 0) &= s_0(x). \end{aligned} \quad (1.59)$$

由于双曲型方程解的有限传播速度性质,我们考虑如图1.1所示的典型情形,一个局部化的问题:在 $x = a, t = 0$ 出发的第二特征线(记作 $(r)$ )上 $r = r'$ 是常数(但 $s$ 未知),在 $(x = b, t = 0)$ 出发的第一族特征线(记作 $(s)$ )上 $s = s'$ (但 $r$ 不确定).所以注意这里这两条特征线 $(r)$ 和 $(s)$ 其实是未知的,所以我们要解一个非线性偏微分方程组的特征自由边界问题,求解的区域是未知的特征线 $(r)$ 和 $(s)$ 以及 $x$ 轴上区间 $I = (a, b)$ 围成的有限区域.

2. 为了求解这个问题, 黎曼引入了方程(1.57). 注意到I上初始条件 $r = r_0(x), s = s_0(x)$ 意味着在状态空间的 $(r, s)$ -坐标系下, I的像就是参数曲线

$$c = \{(r_0(x)), s_0(x) : x \in (a, b)\}.$$

这样(1.57)成立的区域S就是由 $r = r', s = s'$ 和 $c$ 围成的有限区域. 这是一个已知的固定的区域. 所以黎曼引入的速度图变换不但把一个一阶非线性方程组转化成了一个二阶的线性的双曲型方程, 而且把自由边界转化成了固定边界!(当然, 这里的代价是只能考虑经典解, 而且不能是常数解或简单波解. 这就要求 $r_0, s_0$ 是单调函数, 也就是说曲线 $c$ 只能和 $r = r', s = s'$ 相交一次, 或者说是横截的.)

注意在S的边界 $r = r', s = s'$ 上不需要给定未知函数 $w$ 的条件(这些都是线性波动方程的特征线), 而在 $c$ 上, 根据(1.31)(1.32), 有

$$\partial_r w = x(r, s), \quad \partial_s w = -x(r, s), \quad \text{在 } r = r_0(x), s = s_0(x) \text{ 处.} \quad (1.60)$$

这就相当于给定了 $w$ 在 $c$ 上的初值条件( $w$ 可以相差一个常数).

为了求解问题(1.57)(1.60), 黎曼应用了对偶的方法, 它把上述一般的初值问题转化为研究一个固定的波动方程的Goursat问题了. 对比在调和方程的学习中, 曾利用第二格林公式和Laplace方程的基本解, 把对调和函数的Dirichlet问题的研究转化为求解格林函数——即研究一个特殊的Dirichlet问题. 这里的思路是类似的, 都是对偶的思想, 这后来发展为泛函分析中的伴随算子的对偶论证方法.

黎曼解释道, 为了确定能满足线性微分方程和边界条件的函数, 我们可采用与解线性方程组时所用的完全相同的方法, 将所有的方程乘以不定因子并相加, 然后这样来选定这些因子, 使得在和式中消去所有的未知量直至剩下一个未消去.

用 $v$ 表示 $r$ 和 $s$ 的一个任意函数, 它处处连续, 并且有连续导数, 于是由方程(1.57), 成立

$$0 = \int_S v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) dr ds.$$

将右端通过分部积分换成除了已知量外, 只含未知函数, 而不含它的导数. 我

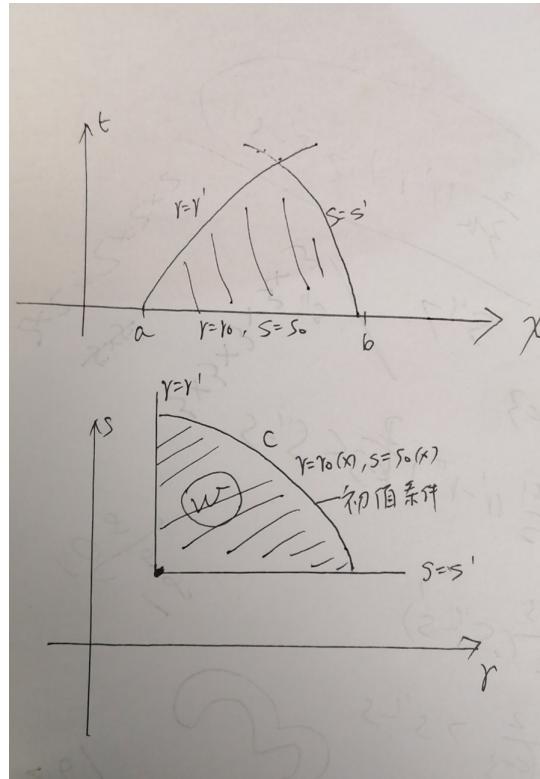


图 1.2 物理空间和相空间上的边值问题.

们得到

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_S (w[\partial_{rs}v + \partial_r(mv) + \partial_s(mv)] - \partial_r(mvw) - \partial_s(mvw) - \partial_s(w\partial_r v) + \partial_r(v\partial_s w)) dr ds \\
 &= \int_S w[\partial_{rs}v + \partial_r(mv) + \partial_s(mv)] dr ds + \int_{\partial S} v(\partial_s w - mw) ds + w(mv + \partial_r v) dr.
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

这里已假设  $\partial_s w$  在  $\partial S$  上连续. 注意边界曲线  $\partial S$  由  $(c), (r'), (s')$  三段拼接而成, 记它们的交点分别为  $(c, r'), (c, s')$  和  $(s', r')$ , 那么上式中的第二型曲线积分可以写作

$$-\int_{c,r'}^{c,s'} -\int_{c,s'}^{s',r'} -\int_{s',r'}^{c,r'}.$$

对第一部分, 除了函数  $v$  外, 只含  $w$  及  $\partial_s w$ , 这可根据初始条件确定; 对第二部分, 注意到  $ds = 0$ , 所以仅含未知函数  $w$  本身, 不含导数; 对第三部分,  $dr = 0$ ,

可以再次用分部积分, 化为

$$\begin{aligned} - \int_{s',r'}^{c,r'} v(\partial_s w - mw) ds &= - \int_{s',r'}^{c,r'} \partial_s(vw) ds + \int_{s',r'}^{c,r'} w(mv + \partial_s v) ds \\ &= (vw)_{s',r'} - (vw)_{c,r'} + \int_{s',r'}^{c,r'} w(mv + \partial_s v) ds. \end{aligned}$$

这样在其中同样只有待求的函数  $w$  出现.

我们按下述方式确定出函数  $v$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1) \text{在 } S \text{ 中处处有:} & \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial(mv)}{\partial r} + \frac{\partial(mv)}{\partial s} = 0, \\ 2) \text{对于 } r = r': & \frac{\partial v}{\partial s} + mv = 0, \\ 3) \text{对于 } s = s': & \frac{\partial v}{\partial r} + mv = 0, \\ 4) \text{对于 } r = r', s = s': & v = 1. \end{array} \right. \quad (1.62)$$

由此, 从(1.61)就得到

$$w_{s',r'} = (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} v \left( \frac{\partial w}{\partial s} - mw \right) ds + w \left( mv + \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr. \quad (1.63)$$

所以只要解出(1.62)的经典解  $v$ , 再把  $w$  的初值(1.60)代入上式, 就可以解出  $w$  在  $(r', s')$  点的值. 这就给出了求解公式.

那么, 问题(1.62)有什么优点呢? 这是一个线性波动方程的Goursat问题, 其中特征线  $r = r', s = s'$  上的边值通过积分可以算出来, 其实都是Dirichlet型的边界条件. 所以这是一个确定的Goursat问题, 边界条件不是任意的. 只要解出这一个问题, 就解决了所有的形如(1.57)(1.60)的问题.

3. 在论文的第9节, 黎曼介绍了如何求解问题(1.62). 他先简要写出了基于傅里叶变换的一般的  $v$  的表达式. 为了验证这个表达式, 基于这个表达式所隐含的一个变换, 对满足Poisson假设的多方气体, 黎曼可以得到一个超几何函数满足的常微分方程, 这就利用超几何函数理论, 验证了上述给出的  $v$  的基于幂级数表示的解析式确实是问题(1.62)的解.

黎曼对于他如何得到  $v$  的基于积分的表达式只是简要提示了一下方法, 省略了大量计算细节(因为他的目的只是告诉读者如何猜到  $v$  的表达式, 特别是后文用到的一个神奇的变换). 这里补充的细节大都来自于《黎曼全集》编辑者所附加的注释(中文版第157页), 用现代傅里叶分析的语言做了改写.

为了使用傅里叶变换(分离变量法),引入新自变量 $\sigma = r + s, u = r - s$ . 下面把 $\sigma$ 看作时间变量,取定数值 $\sigma'$ ,选定曲线 $\sigma = \sigma'$ 为初始曲线,考虑初值问题

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2m \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.64)$$

$$w(\sigma', u) \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma', u) = \frac{dw}{d\sigma}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \sigma \geq \sigma'. \quad (1.65)$$

注意这里的方程就是(1.57)在 $(\sigma, u)$ 坐标系下的形式. 这是一个带随时间变化的阻尼项的线性波动方程. 黎曼考虑关于 $w$ 的这个问题, 目的是通过对这个特殊问题解的计算, 告诉读者变换(1.70)是如何得到的. 引入未知函数的傅里叶变换

$$\hat{w}(\sigma, \mu) = \int w(\sigma, u) e^{i\mu u} du,$$

这里 $\mu$ 是空间变量 $u$ 的对偶变量, 如无说明, 积分是在 $\mathbb{R}$ 上的. 那么 $\hat{w}$ 满足如下常微分方程初值问题:

$$\frac{d^2 \hat{w}(\sigma, \mu)}{d\sigma^2} - 2m(\sigma) \frac{d\hat{w}(\sigma, \mu)}{d\sigma} + \mu^2 \hat{w}(\sigma, \mu) = 0, \quad (1.66)$$

$$\hat{w}(\sigma', \mu) = 0, \quad \frac{d\hat{w}(\sigma', \mu)}{d\sigma} = \mathfrak{h}(\mu) \doteq \int \frac{dw}{d\sigma}(u) e^{i\mu u} du. \quad (1.67)$$

设 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 是方程 $\psi'' - 2m\psi' + \mu^2\psi = 0$ 的两个独立的特解, 使得成立

$$\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1 = \frac{d\sigma}{d\rho}.$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned} [\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1]' &= \psi_1 \psi''_2 - \psi_2 \psi''_1 = \psi_1 [2m\psi'_2 - \mu^2 \psi_2] - \psi_2 [2m\psi'_1 - \mu^2 \psi_1] \\ &= 2m[\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1], \end{aligned}$$

并注意到(1.25), 可以取 $\psi_1, \psi_2$ 的适当常数倍, 使得成立(回忆 $f(\rho) = \sigma$ )

$$\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1 = \exp\left(\int^{\sigma} 2m(\tau) d\tau\right) = \exp\left(-\int d \log \frac{d\rho}{d\sigma}\right) = \frac{d\sigma}{d\rho},$$

它是一个 $\sigma$ 的函数, 与 $\mu$ 无关.

于是(1.66)和(1.67)的解可以写作

$$\hat{w}(\sigma, \mu) = A(\mu) \psi_1(\sigma, \mu) + B(\mu) \psi_2(\sigma, \mu),$$

其中

$$\begin{aligned} A(\mu)\psi_1(\sigma', \mu) + B(\mu)\psi_2(\sigma', \mu) &= 0, \\ A(\mu)\psi'_1(\sigma', \mu) + B(\mu)\psi'_2(\sigma', \mu) &= \natural(\mu). \end{aligned}$$

不难解得

$$A(\mu) = -\frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma')\psi_2(\sigma', \mu)\natural(\mu), \quad B(\mu) = \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma')\psi_1(\sigma', \mu)\natural(\mu),$$

于是

$$\hat{w}(\sigma, \mu) = (-\psi_2(\sigma', \mu)\psi_1(\sigma, \mu) + \psi_1(\sigma', \mu)\psi_2(\sigma, \mu))\frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma')\natural(\mu).$$

由傅里叶逆变换定理,

$$\begin{aligned} w(\sigma, u) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{w}(\sigma, \mu) e^{i\mu u} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int (\psi_1(\sigma', \mu)\psi_2(\sigma, \mu) - \psi_1(\sigma, \mu)\psi_2(\sigma', \mu)) \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma') \\ &\quad \cdot \int \frac{dw}{d\sigma}(u') e^{-i(u'-u)\mu} du' d\mu. \end{aligned} \tag{1.68}$$

将这个式子和(1.63)对比, 那里的 $s', r'$ 对应这里的 $\sigma, u$ , 曲线 $c$ 就是这里的 $\sigma = \sigma'$ , 从而利用在目前的特殊问题里 $w$ 在 $c$ 上为零, (1.63)简化为

$$w_{s,r} = \int_{c,r}^{c,s} v \frac{\partial w}{\partial s} ds.$$

注意到在曲线 $c$ 上 $dr = -ds$ ,  $du = -2ds$ , 而且考虑到曲线积分的定向, 是沿着 $ds$ 减小的方向, 从而更换被积分变量, 有

$$w_{s,r} = \frac{1}{2} \int v \frac{\partial w}{\partial s} du = \frac{1}{2} \int v(u') \frac{dw}{ds}(u') du'.$$

把这个式子和(1.68)对比, 可知有如下 $v$ 的表达式:

$$v = \frac{1}{\pi} \int (\psi_1(\sigma', \mu)\psi_2(\sigma, \mu) - \psi_1(\sigma, \mu)\psi_2(\sigma', \mu)) \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma') e^{-i(u'-u)\mu} d\mu.$$

注意这里出现的都是实值函数, 故

$$v(\sigma, u, \sigma', u') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \mu(u-u') (\psi_1(\sigma', \mu)\psi_2(\sigma, \mu) - \psi_1(\sigma, \mu)\psi_2(\sigma', \mu)) \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma') d\mu.$$

4. 我们再看黎曼对多方气体的特殊情形的计算. 对Poisson定律成立的情形,  $m = (\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1})\frac{1}{\sigma}$ , 对应微分方程是

$$\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \frac{2}{\sigma} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{k-1} \right) \frac{d\psi}{d\sigma} + \mu^2 \psi = 0,$$

利用幂级数可以得到它的如下形式的两个特解

$$\sum_n \frac{\left(-\left(\frac{\sigma\mu^{-2}}{2}\right)\right)^n}{\Pi(n)\Pi(n+\frac{1}{k}-1)},$$

其中一个是指  $n$  从零开始一次增加一到无穷, 另一个是从  $1 - \frac{1}{k-1}$  开始加到无穷. 这里定义

$$\Pi(-\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int e^x x^{\alpha-1} dx.$$

对级数求和, 在略去因子  $\frac{1}{2\pi i}$  后, 可得到特解的如下积分表达式

$$\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \int e^{\frac{\sigma\mu}{2}(x-\frac{1}{x})} x^{\frac{1}{k-1}-1} dx, \quad \left(\frac{\sigma\mu}{2}\right)^{1-\frac{3}{k-1}} \int e^{\frac{\sigma\mu}{2}(x-\frac{1}{x})} x^{1-\frac{1}{k-1}} dx,$$

其中积分取在复平面上绕过零从  $-\infty$  到  $\infty$  的路径. 黎曼肯定计算过这些积分, 他写道, 可以用定积分来表示  $\psi_1$  和  $\psi_2$ , 从而得到  $v$  的一个三重积分的表达式, 再通过化约就得到

$$v = \left(\frac{r'+s'}{r+s}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k-1}} F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}, 1, -\frac{(r-r')(s-s')}{(r+s)(r'+s')}\right).$$

这里超几何函数  $y = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  是指微分方程

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

的解, 可以用幂级数表示, 例如其中之一是

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

接着黎曼验证了上述表达式确实是(1.62)的解. 置  $\sigma = r+s$ . 设  $v(r,s) = \exp(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma) y(r,s)$ , 引入新未知函数  $y(r,s)$ , 则

$$\begin{aligned} \partial_r v &= \exp\left(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma\right) (\partial_r y - my), \quad \partial_s v = \exp\left(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma\right) (\partial_s y - my), \\ \partial_{rs} v &= \exp\left(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma\right) (\partial_{rs} y - \partial_r(my) - m\partial_s y + m^2 y), \end{aligned}$$

于是从(1.62)得到新未知函数 $y = y(r, s)$ 满足方程

$$\partial_{rs}y + (m'(\sigma) - m^2)y = 0; \quad (1.69)$$

注意到 $\exp(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma) = 1$ , 其中 $\sigma' = r' + s'$ , 于是在边界 $s = s'$ 上由 $\partial_r v + mv = 0$ 可推出 $\partial_r y = 0$ , 于是 $y \equiv 1$ ; 类似地在 $r = r'$ 上也有 $y \equiv 1$ .

对于气体满足Poisson定律 $p = a^2 \rho^k$ 的情形, 从(1.27), 已知 $m(\sigma) = \frac{\lambda}{\sigma}$ , 其中 $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}$ , 那么 $m'(\sigma) - m^2 = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2}$ . 引入新自变量(注意, 根据(1.55),  $r \geq r'$ , 但 $s \geq s'$ , 所以下面 $z < 0$ , 于是后面出现的 $\log z$ 涉及复数的对数)

$$z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}, \quad (1.70)$$

并设 $y$ 是 $z$ 的函数, 由于 $r = r'$ 和 $s = s'$ 对应 $z = 0$ , 故要求 $z = 0$ 时 $y = 1$ . 注意到 $\exp(-\int_{\sigma'}^{\sigma} m(\sigma) d\sigma) = \exp(-\lambda \log(\sigma/\sigma')) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\lambda}$ , 故 $v(r, s) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\lambda} y(z)$ . 为方便计算, 黎曼将 $y$ 视为 $\log z$ 的函数, 那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{d \log z} \left( \frac{1}{r - r'} - \frac{1}{r + s} \right), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s} &= \frac{1}{(r + s)^2} \frac{dy}{d \log z} - \frac{d^2 y}{(d \log z)^2} \left( \frac{1}{s' - s} - \frac{1}{r + s} \right) \left( \frac{1}{r - r'} - \frac{1}{r + s} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{dy}{d \log z} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{(r + s')(r' + s)}{(s' - s)(r - r')} \frac{d^2 y}{(d \log z)^2}. \end{aligned}$$

直接计算表明 $1 - \frac{1}{z} = \frac{(r + s')(r' + s)}{(s - s')(r - r')}$ , 于是从(1.69)得到 $y$ 满足微分方程

$$(1 - z) \frac{d^2 y}{(d \log z)^2} - z \frac{dy}{d \log z} + (\lambda + \lambda^2) z y = 0. \quad (1.71)$$

所以变换(1.70)厉害的地方在于它一举将一个偏微分方程在角形区域上的边值问题化简成一个常微分方程的初值问题! 黎曼在他发表于1857年的论文《对可以用Gauss级数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 来表达的函数理论的一个新贡献》中(见《黎曼全集》中文版第一卷72页)指出, 微分方程

$$(1 - x) \frac{d^2 y}{(d \log x)^2} - (\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')x) \frac{dy}{d \log x} + (\alpha \alpha' - \beta \beta' x) y = 0 \quad (1.72)$$

的解

$$y = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ & & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

可用幂级数方法求解, 其中系数可以通过递推公式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\beta)(n+\beta')}{(n+1-\alpha)(n+1-\alpha')}$$

确定. 由Cauchy的比值判别法, 此幂级数表达式的收敛范围是复平面上单位圆. 通过解析开拓, 可以确定上述函数的最大定义范围. 用上述记号, (1.71)的解就是

$$y = P \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ & & z \\ 0 & 1+\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

利用那篇论文中确定的变换原理, 可以得到大量用超几何级数和定积分表示的 $y$ 的表达式.

为了从这些对Poisson定律求得的结果导出对Boyle定律也成立的结果, 可按照(1.28)下的说明, 从 $r, s, r', s'$ 减去 $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$ , 然后令 $k=1$ , 由此得到 $m=-\frac{1}{2a}$ , 以及

$$v(r, s) = e^{\frac{1}{2a}(r-r'+s-s')} \sum_0^{\infty} \frac{(r-r')^n(s-s')^n}{(n!)^2(2a)^{2n}}.$$

利用收敛幂级数的逐项求导, 不难验证它们确实给出了问题(1.62)的解.

5. 在论文的最后一节, 第10节, 黎曼通过引入新的函数, 改进了公式(1.63). 黎曼写道, 如果将上面得到的 $v$ 的公式代入到(1.63), 那么我们就会得到用曲线 $c$ 上的 $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r}$  和  $\frac{\partial w}{\partial s}$  来表示的 $w$ 在 $r=r', s=s'$ 处的值; 但是在我们的问题中, 在此曲线上常常只是直接给出了 $\frac{\partial w}{\partial r}$  和  $\frac{\partial w}{\partial s}$  (参见(1.31), (1.32), 其中取 $t=0$ ), 而 $w$ 只能是通过它们的积分才能求得, 所以最好把 $w_{r', s'}$ 的表达式转换成这样的形式, 使得在积分号下只有 $w$ 的导数出现.

对被积表达式(微分1-形式) $-mv ds + (\frac{\partial v}{\partial r} + mv) dr$  以及  $(\frac{\partial v}{\partial s} + mv) ds - mv dr$ , 由于方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial(mv)}{\partial r} + \frac{\partial(mv)}{\partial s} = 0$$

的存在,都是全微分. 将它们表示为 $P$ 和 $\Sigma$ , 即

$$dP = -mv ds + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr, \quad d\Sigma = \left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds - mv dr.$$

注意 $Pdr + \Sigma ds$ 也是全微分, 这是由于 $\frac{\partial P}{\partial s} = -mv = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}$ . 我们将原函数表为 $\omega$ , 即

$$d\omega = Pdr + \Sigma ds.$$

我们可以这样来规定这些积分中的积分常数, 使得 $\omega$ 和 $P = \frac{\partial \omega}{\partial r}, \Sigma = \frac{\partial \omega}{\partial s}$ 在 $r = r', s = s'$ 时都等于零. 那么, 由于在 $r = r'$ 上 $d\omega = \Sigma ds$ , 而 $d\Sigma = \left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds = 0$  (用了(1.62)中的边界条件), 则 $\Sigma \equiv 0$ , 于是 $\omega \equiv 0$ . 类似地可得在 $s = s'$ 上 $\omega \equiv 0$ .

另外,  $\omega$ 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial s} = \frac{\partial P}{\partial s} = -mv, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} = P + \Sigma = v - 1,$$

这里最后一个等号成立是因为 $d(P + \Sigma) = dv$ , 从而 $P + \Sigma - v = \text{常数}$ , 而在 $r = r', s = s'$ 点, 由于 $v = 1$ , 故这个常数就是1. 所以 $\omega$ 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial s} + m \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} + 1 \right) = 0.$$

实际上它可以由上述方程带齐次边界条件的Goursat问题确定.

现在回到(1.63)式, 利用 $\partial_r v + mv = \partial_r P = \partial_{rr}\omega, -mvw = w\partial_{rs}\omega, v = \partial_r\omega + \partial_s\omega + 1$ , 则

$$\begin{aligned} w_{r',s'} &= (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} [\partial_r\omega + \partial_s\omega + 1] \partial_s w ds + w\partial_{rs}\omega ds + w\partial_{rs}\omega dr \\ &= (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} (\partial_s\omega + 1) \partial_s w ds + [\partial_r\omega \partial_s w + \partial_s(w\partial_r\omega) - \partial_s w \partial_r\omega] ds \\ &\quad + [\partial_r(w\partial_r\omega) - \partial_r w \partial_r\omega] dr \\ &= (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} (\partial_s\omega + 1) \partial_s w ds - \partial_r w \partial_r\omega dr + d(w\partial_r\omega) \\ &= (vw)_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} (\partial_s\omega + 1) \partial_s w ds - \partial_r w \partial_r\omega dr + (w\partial_r\omega)_{c,s'} - w(v - 1 - \partial_s\omega)_{c,s'} \\ &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} (\partial_s\omega + 1) \partial_s w ds - \partial_r w \partial_r\omega dr. \end{aligned} \tag{1.73}$$

这里用到了  $s = s'$  上  $\partial_r \omega = 0$ ,  $r = r'$  上  $\partial_s \omega = 0$  的性质.

为了从初始状态来确定运动, 我们必须取  $t = 0$  时的曲线作为曲线  $c$ ; 在此曲线上有  $\frac{\partial w}{\partial r} = x$ ,  $\frac{\partial w}{\partial s} = -x$ , 于是再通过一次分部积分, 从上式就得到

$$\begin{aligned} w_{r',s'} &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} -x \, ds - x \partial_s \omega \, ds - x \partial_r \omega \, dr \\ &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} -x \, ds - x \, d\omega = w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega \, dx - x \, ds + d(x\omega) \\ &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega \, dx - x \, ds. \end{aligned} \quad (1.74)$$

最后一步利用了  $\omega$  在  $(c, r')$  点和  $(c, s')$  点为零的性质. 注意(1.73)或(1.74)中的数值  $w_{c,r'}$  不能随意取定, 因为一旦选定, 比如说  $t = 0, x = 0$  点对应的状态空间中  $(r'', s'')$  点的  $w = 0$ , 那么根据在  $t = 0$  上成立  $dw = x \, dr - x \, ds$ ,  $w$  也就完全确定了.

接着, 回到(1.31)(1.32), 黎曼写出了如下式子

$$\begin{aligned} (x - (\sqrt{\varphi'(\rho)} + u)t)_{r',s'} &= x_{r'} + \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial r'} \, dx, \\ (x + (\sqrt{\varphi'(\rho)} - u)t)_{r',s'} &= x_{r'} - \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial s'} \, dx. \end{aligned} \quad (1.75)$$

上面第一式的右端就是  $\partial_{r'} w_{s',r'}$ , 而根据(1.73), 就是(注意是对积分下限求导, 所以多一个负号)  $x_{r'} + \partial_{r'} w \partial_{r'} \omega = x_{r'} (1 + \partial_{r'} (\omega)_{c,r'})$ . 但看来黎曼是通过(1.74)来计算的:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} [w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega \, dx - x \, ds] &= x_{r'} + \frac{\partial}{\partial r'} \int_{c,r'}^{c,s'} \omega \, dx \\ &= x_{r'} + \frac{\partial}{\partial r'} \int_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial r'} \, dx. \end{aligned}$$

这里是把  $r', s'$  视为决定  $\omega$  的参数(因为要求了在  $r = r', s = s'$  上  $\omega = 0$ ), 所以黎曼的上述表达式也许应该从含参变量积分求导角度来理解. 类似地, (1.75)第二

式可以从(1.74)的如下变形来考虑:

$$\begin{aligned}
 w_{r',s'} &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega dx - x ds + x dr - x dr \\
 &= w_{c,r'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega dx - x dr + dw \\
 &= w_{c,s'} + \int_{c,r'}^{c,s'} \omega dx - x dr.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

黎曼指出, (1.75)的两个方程, 只有在(参见(1.36)(1.37))

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) t$$

和

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left( \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1 \right) t$$

保持异于零时, 才表达着经典解的运动. 一旦这两个量中有一个等于零, 那么就会出现压缩冲击波, 从而方程(1.73)只能在冲击波同一侧的连续流场区域内应用.

黎曼最后提到了两个问题. 一是此处建立的原理至少还不足以在普遍的情形下做到从初始状态来确定运动. (这就是一般初值下弱解的适定性问题, 到目前还没有系统而完满的答案.) 不过完全可以做到, 确定在时刻  $t$  时压缩冲击波的位置, 因而也就是  $\xi$  作为  $t$  的函数给定后, 借助于(1.73)以及按照前面对压缩冲击波有效的方程(指Rankine-Hugoniot条件和熵条件)来取定运动. (这也就是对含有激波的分片连续解的研究.) “不过我们不打算进一步讨论下去了, 同时也放弃对气体受到一面墙的限制的情况的处理,” (这也是对初边值问题的研究, 包括活塞问题, 激波的反射等典型物理和工程应用问题,) “因为这个计算并不困难, 而且眼下也不可能将结果与实验相比较.”

华东师大袁海荣备课资料，仅供教学使用

## 第二章 二维非定常等熵可压缩欧拉方程组初值问题的无穷多弱熵解

我们知道对一阶拟线性双曲型守恒律方程的初值问题, 一般来讲, 即使初始条件是光滑函数, 经典解也只能在短时间内存在, 之后将出现激波([15, 第三章第4节]). 所以对这类方程, 需要推广解的范围, 对方程做新的理解, 以恰当, 有效地描述物理现象. 为此人们引进了可积分弱解的概念, 并且为了保证这种弱解的唯一性和稳定性, 引入了多种熵条件以挑选物理上合理的弱解[16, 第四章]. 对于一个空间变量的情形, 对特征是真正非线性或线性退化的严格双曲守恒律方程组,Glimm, Bressan, Bianchini, 刘太平, 杨彤等人已证明了初值变差较小时初值问题的弱熵解的存在性, 唯一性和稳定性. 那么, 对于多个空间变量的情形, 一个基本的问题就是: 这些熵条件能否保证弱熵解的唯一性? Chiodaroli, De Lellis 和Kreml 在De Lellis, Székelyhidi的工作[9, 8]的基础上, 对二维非定常等熵可压缩欧拉方程组, 构造了Lipschitz连续的初值, 证明了对这类初值, 存在无数个满足对应熵条件的可积分弱解[5]. 不但这个结论非常重要, 他们的证明方法也是非常有创造性的, 可用于解决许多类似的问题. 这一章我们就来介绍他们的方法.

### §2.1 问题及主要结论

1. 初值问题. 考虑如下非定常等熵可压缩欧拉方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla_x p(\rho) = 0, \\ \rho(\cdot, 0) = \rho^0(x), \quad v(\cdot, 0) = v^0(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

这里自变量  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  是空间变量,  $t \geq 0$  是时间变量. 未知量  $\rho$  代表气体的质量密度,  $v$  是气体的速度,  $p$  是气压, 它们都是  $(x, t)$  的函数. 张量  $v \otimes v$  可理解为列向量  $v$  与行向量  $v^\top$  做矩阵乘法得到的  $2 \times 2$  矩阵, 而散度算子是对矩阵的每个行向量, 关于空间变量来作用的. 对多方气体,  $p(\rho) = \rho^\gamma$ , 而  $\gamma$  是一个大于1的常数, 叫做绝热指数. 当  $\gamma = 2$  时该方程也叫作浅水波方程, 对应地  $\rho$  代表水深,  $v$  是水速,  $p$  是水压.

2. 黎曼问题. 如果初始条件是分片常值的:

$$(\rho^0(x), v^0(x)) = \begin{cases} (\rho_-, v_-) & x_2 < 0, \\ (\rho_+, v_+) & x_2 > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中  $\rho_{\pm}$  是非负常数,  $v_{\pm}$  是二维常向量, 则称初值问题(2.1) 为黎曼问题. 由于初值与  $x_1$  无关, 利用该黎曼问题在伽利略变换以及尺度伸缩变换  $x \mapsto \lambda x, t \mapsto \lambda t$  ( $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ) 下的不变性, 可以考虑只依赖于  $x_2/t$  的自相似解. 在[13] 中, 已详细介绍了该问题的求解. (参见下面§2.4.3节.) 特别的, 存在初值(2.2), 使得该问题只有一个中心疏散波解  $(\rho_*(x, t), u_*(x, t))$ . 这个解在  $t > 0$  时关于  $(x, t)$  都是 Lipschitz 连续的, 所以是个经典解.

3. 压缩波初值. 对任意给定的  $t_0 > 0$ , 令

$$\rho^0(x) = \rho_*(-x, t_0), \quad v^0(x) = v_*(-x, t_0),$$

由于欧拉方程对经典解可以关于时间倒向求解, 不难验证

$$\rho(x, t) = \rho_*(-x, t_0 - t), \quad v(x, t) = v_*(-x, t_0 - t)$$

是(2.1)在  $0 \leq t < t_0$  时的一个经典解, 我们称这样得到的解  $(\rho, v)$  是个压缩波. 注意当  $t \uparrow t_0$  时, 点态地成立

$$(\rho(x, t), v(x, t)) \rightarrow \begin{cases} (\rho_+, v_+), & x < 0, \\ (\rho_-, v_-), & x > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

即导数要爆破, 从而要生成激波.

4. 可积分弱解. 为了包括间断函数以描述激波, 需要扩充问题(2.1) 的解的范围, 也就是对问题(2.1)给出一种更广泛的理解, 或新的在更大范围内有效的定义. 为此, 基于分部积分, 以及对(2.1)建模过程的分析, 人们引入了可积分弱解的概念.

**定义1.** 称函数  $(\rho, v) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty); [0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  是(2.1)的一个弱解, 如果对任意的测试函数  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty); \mathbb{R}^2)$ , 都成立如下等

式:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\rho \partial_t \psi + \rho v \cdot \nabla_x \psi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho^0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \quad (2.4)$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\rho v \cdot \partial_t \varphi + \rho v \otimes v : D_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho^0(x) v^0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (2.5)$$

这里  $D_x \varphi$  是向量值函数  $\varphi$  关于空间变量的 Jacobi 矩阵,  $A : B$  是矩阵的 Hadamard 乘积(即对应元素相乘后相加).

5. 熵条件和可容许弱解. 对问题(2.1) 的经典解, 还成立如下的附加守恒律—机械能守恒:

$$\partial_t \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div}_x \left( \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 + p(\rho) \right) v \right) = 0, \quad (2.6)$$

其中  $\varepsilon(\rho)$  代表单位质量气体具有的内能, 满足关系式

$$p(\rho) = \rho^2 \varepsilon'(\rho).$$

特别的, 对  $\gamma = 2$  情形,  $\varepsilon(\rho) = \rho$ . 式(2.6)可通过能量积分方法, 即对(2.1)中第一个方程乘以  $\varepsilon(\rho)$ , 第二个方程与  $v$  作内积, 相加并作分部积分得到.

对于非经典解, 等式(2.6)一般不再成立: 由于解不光滑所体现出的某种耗散性, 机械能不应该增加, 在广义函数意义下应当成立

$$\partial_t \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div}_x \left( \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 + p(\rho) \right) v \right) \leq 0. \quad (2.7)$$

寻求使得等式(2.6)成立的弱解的最低的正则性指标就是 Onsager 猜想的内容. 进一步来讲, (2.7)的左侧是个 Radon 测度, 对其支集及大小予以研究对理解弱解的正则性也至关重要.

由此, 我们引入如下可容许弱解的概念.

**定义2.** 称(2.1)的弱解是可容许的, 如果对任意非负的测试函数  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ , 都成立如下不等式:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 \right) \partial_t \psi + \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 + p(\rho) \right) v \cdot \nabla_x \psi dx dt \geq 0. \quad (2.8)$$

**定理1.** 设  $p = \rho^2$ . 存在黎曼初值, 使得问题(2.1) 有无穷多个有界的可容许弱解  $(\rho, v)$ , 且  $\inf \rho > 0$ , 即都没有真空. 特别的, 这里的黎曼初值可由压缩波得到.

由第三段的说明, 我们有如下推论. 它表明可容许弱解的不唯一性并不是由于初值正则性太差引起的.

**推论1.** 设  $p = \rho^2$ . 存在Lipschitz连续的初值, 使得问题(2.1)有无穷多个有界的可容许弱解, 且都不含真空.

定理1的证明分为两步: 首先是对方程的非线性项作适当松弛, 得到有非线性约束的线性偏微分方程组, 对其构造一种称为“扇形下解”的近似解; 然后通过Baire纲定理证明, 可通过在“扇形下解”中加入足够多的振荡函数, 得到精确的可容许弱解.

## §2.2 扇形下解的概念

1. 物理空间的扇形分解. 我们知道黎曼问题(2.1)的解是分片光滑的, 沿着  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  空间中的平面  $\{x_2/t = \text{常数}\}$ , 解的取值是常值. 特别的, 如果只出现激波, 则解是分片常值的, 在每个扇形区域内, 密度为常数. 由此可假设要构造的近似解与黎曼问题有类似的结构, 定义域也分为若干扇形, 密度在每个扇形中是常数, 于是问题可转化为通过对速度加振荡函数, 说明不可压欧拉方程组弱解不唯一. 我们先给出对物理空间的如下扇形分解的概念.

**定义3.** 时空区域  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  的一个扇形分解是指如下有限个开集  $P_-, P_1, \dots, P_N, P_+$ , 其中

$$P_- = \{(x, t) : t > 0, x_2 < \nu_- t\}, \quad (2.9)$$

$$P_+ = \{(x, t) : t > 0, x_2 > \nu_+ t\}, \quad (2.10)$$

$$P_i = \{(x, t) : t > 0, \nu_{i-1} t < x_2 < \nu_i t\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

这里  $\nu_0 = \nu_- < \nu_1 < \dots < \nu_{N-1} < \nu_N = \nu_+$  是任意的实数.

2. 欧拉方程组的松弛. 解决困难问题的基本策略是将其分解为几个较为简单的问题分别处理. 对欧拉方程这样强非线性的偏微分方程, 除了常见的

线性化方法外, 还可以从如下角度将非线性项松弛, 转化为带非线性约束的线性偏微分方程组予以研究.

在欧拉方程中最强的非线性项是  $v \otimes v$ , 这是一个  $2 \times 2$  的实对称矩阵. 我们记  $\mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  是迹为零的  $2 \times 2$  实对称矩阵的全体,  $\text{Id}$  为单位矩阵. 那么

$$U = v \otimes v - \frac{1}{2}|v|^2 \text{Id} \in \mathcal{S}_0^{2 \times 2}.$$

考虑用函数  $C$  代替  $\frac{1}{2}|v|^2$ , 矩阵  $U + C\text{Id}$  来代替  $v \otimes v$ , 这样可将欧拉方程组写成一个关于  $\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U}, \bar{C}$  的非线性程度较低的偏微分方程组:

$$\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{v}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\partial_t(\bar{\rho} \bar{v}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{U}) + \nabla_x(\bar{\rho} \bar{C} + p(\bar{\rho})) = 0, \quad (2.13)$$

其中  $\bar{\rho}, \bar{C}$  是非负函数,  $\bar{v}$  是二维向量,  $\bar{U} \in \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$ . 注意到在每个扇形  $P_i$  中,  $\bar{\rho}$  取作某个待定常数的话, 上述方程关于  $\bar{v}, \bar{U}$  是线性的:

$$\operatorname{div}_x \bar{v} = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_t \bar{v} + \operatorname{div}_x \bar{U} = 0, \quad (2.15)$$

而欧拉方程的非线性就体现在关系式

$$\bar{U} = \bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{C} \text{Id}, \quad \text{或} \quad \bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{U} = \bar{C} \text{Id} \quad (2.16)$$

之中. 注意到该式两边取矩阵的迹, 就自然得到

$$\bar{C} = \frac{1}{2}|\bar{v}|^2. \quad (2.17)$$

现在将式(2.16)放松为如下不等式:

$$\bar{v} \otimes \bar{v} - \bar{U} < \bar{C} \text{Id}, \quad (2.18)$$

其中设  $\bar{C}$  在每个扇形内取值都是常数. 记号  $A < B$  表示实对称矩阵  $B - A$  严格正定.

满足(2.12)(2.13)(2.18)的在每个扇形中是常值的函数  $\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U}$  可视为问题(2.1)的一个近似解, 称为扇形下解. 通过对这样的近似解, 在其为常数的每个扇形区域内对  $\bar{v}$  和  $\bar{U}$  添加足够多的低幅高频振荡函数, 使得等式(2.16)成立, 就会得到问题(2.1)的一个弱解.

3. 扇形下解和可容许扇形下解. 下面我们给出上文描述的扇形下解的严格定义.

**定义4.** 带黎曼初值(2.2)的问题(2.1)的一个扇形下解是指如下三元函数组

$$(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U}) : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, \mathcal{S}_0^{2 \times 2}),$$

满足如下条件:

- i) 它们是分片常值的: 存在  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  的一个扇形分解  $P_-, P_1, \dots, P_N, P_+$ , 使得

$$(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U}) = \sum_{i=0}^{N+1} (\rho_i, v_i, U_i) I_{P_i}(x, t). \quad (2.19)$$

此处及以下, 我们记  $I_\Omega$  是集合  $\Omega$  的特征函数, 而  $P_0 = P_-, P_{N+1} = P_+$ ,

$$\begin{aligned} (\rho_0, v_0, U_0) &= (\rho_-, v_-, v_- \otimes v_- - \frac{1}{2} |v_-|^2 \text{Id}), \\ (\rho_{N+1}, v_{N+1}, U_{N+1}) &= (\rho_+, v_+, v_+ \otimes v_+ - \frac{1}{2} |v_+|^2 \text{Id}). \end{aligned}$$

- ii) 对任意  $i \in \{0, 1, \dots, N, N+1\}$ , 存在常数  $C_i > 0$ , 使得

$$v_i \otimes v_i - U_i < C_i \text{Id}, \quad (2.20)$$

而  $C_0 = |v_-|^2/2$ ,  $C_{N+1} = |v_+|^2/2$ .

- iii)  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U})$  在广义函数意义下满足下方程:

$$\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{v}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_t(\bar{\rho} \bar{v}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{U}) + \nabla_x(p(\bar{\rho})) + \sum_{i=0}^{N+1} C_i \rho_i I_{P_i} = 0. \quad (2.22)$$

类似的, 熵条件也松弛为如下可容许扇形下解的概念.

**定义5.** 扇形下解  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U})$  称作可容许的, 如果在广义函数意义下成立不等式:

$$\begin{aligned} &\partial_t(\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho})) + \operatorname{div}_x((\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho})) \bar{v}) \\ &+ \partial_t \left( \sum_{i=0}^{N+1} C_i \rho_i I_{P_i} \right) + \operatorname{div}_x \left( \sum_{i=0}^{N+1} C_i \rho_i v_i I_{P_i} \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

注意, 如果用黎曼问题的解作为可容许扇形下解, 那么(2.20)中小于号就必须是等号, 从而振荡也就无从添加. 所以不能用黎曼问题的解作可容许扇形下解.

4. 可容许扇形下解的存在性蕴含无穷多可容许弱解的存在性. 由下面的命题立即可得定理1.

**命题1.** 设  $p = p(\rho)$  是连续可微的函数. 如果问题(2.1)(2.2)存在一个可容许扇形下解  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U})$ , 则它必有无数个可容许弱解  $(\rho, v)$ , 且  $\rho = \bar{\rho}$ .

5. 关键定理. 为了证明上述命题, 关键是求解(2.14)(2.15)(2.16). 我们有如下定理.

**定理2.** 设  $(\tilde{v}, \tilde{U}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$ ,  $C > 0$  满足

$$\tilde{v} \otimes \tilde{v} - \tilde{U} < C \text{Id}.$$

则对任意开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , 存在无穷多个映射  $(\underline{v}, \underline{U}) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2})$ , 使得

- a)  $\underline{v}, \underline{U}$  在  $\Omega$  外恒为零;
- b)  $\operatorname{div}_x \underline{v} = 0, \quad \partial_t \underline{v} + \operatorname{div}_x \underline{U} = 0;$
- c)  $(\tilde{v} + \underline{v}) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}) - (\tilde{U} + \underline{U}) = C \text{Id}, \quad \text{a.e. } \Omega.$

我们将在下一节证明此定理.

6. 利用定理2证明命题1. 这里的证明都是基于直接计算的.

第一步: 从可容许扇形下解利用定理2构造可容许弱解. 将定理2 应用于给定的扇形下解  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{U})$  确定的扇形区域  $P_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), 记  $(\underline{v}_i, \underline{U}_i)$  为从定理2得到的一个映射, 并置

$$\rho = \bar{\rho}, \quad v = \bar{v} + \sum_{i=1}^N \underline{v}_i, \quad U = \bar{U} + \sum_{i=1}^N \underline{U}_i, \quad (2.24)$$

下面证明由此得到的  $(\rho, v)$  是问题(2.1)的一个可容许弱解.

为书写方便起见, 以下令  $\underline{v}_0 = \underline{v}_{N+1} = 0, \underline{U}_0 = \underline{U}_{N+1} = 0$ .

第二步: 质量守恒方程. 在广义函数意义下直接计算, 对支集在  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  内的测试函数, 就有

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho) + \operatorname{div}_x(\rho v) &= \underbrace{\partial_t(\bar{\rho}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{v})}_{=0 \text{ (扇形下解定义中iii)}} + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \sum_{i=0}^{N+1} \underline{v}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{N+1} \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \underline{v}_i) = \sum_{i=0}^{N+1} \bar{\rho} \operatorname{div}_x \underline{v}_i = 0.\end{aligned}\quad (2.25)$$

这里第三个等号成立是注意到由扇形下解的定义,  $\bar{\rho}$  在每个扇形  $P_i$  内是常数, 而  $\underline{v}_i$  的支集也在  $P_i$  内; 最后一个等号利用了定理2中的性质b).

第三步: 动量守恒方程. 注意到在每个扇形  $P_i$  中, 利用定理2的性质c), 几乎处处成立

$$v \otimes v = (v_i + \underline{v}_i) \otimes (v_i + \underline{v}_i) = U_i + \underline{U}_i + C_i \operatorname{Id}.$$

从而在  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  上, 有等式

$$v \otimes v = \bar{U} + \sum_{i=0}^{N+1} (U_i + \underline{U}_i + C_i I_{P_i} \operatorname{Id}). \quad (2.26)$$

于是

$$\begin{aligned}&\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla_x p(\rho) \\&= \partial_t(\bar{\rho} \bar{v}) + \partial_t(\bar{\rho} \sum_{i=0}^{N+1} \underline{v}_i) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{U}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \sum_{i=0}^{N+1} \underline{U}_i) + \nabla_x(\bar{\rho} \sum_{i=0}^{N+1} C_i I_{P_i} + p(\bar{\rho})) \\&= \underbrace{\partial_t(\bar{\rho} \bar{v}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{U}) + \nabla_x(p(\bar{\rho}) + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i})}_{=0} + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i (\underbrace{\partial_t \underline{v}_i + \operatorname{div}_x \underline{U}_i}_{=0}) = 0.\end{aligned}$$

这里最后一行第一项为零是根据扇形下解的性质iii), 第二项为零源于定理2的性质b). 我们还再次利用了  $\operatorname{supp} \underline{v}_i, \operatorname{supp} \underline{U}_i \subset P_i$ , 以及  $P_i$  上  $\bar{\rho} = \rho_i$  的性质.

第四步: 熵条件. 从(2.26)两边取迹, 就有等式

$$\frac{|v|^2}{2} = \sum_{i=0}^{N+1} C_i I_{P_i}.$$

从而直接计算就有

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 \right) + \operatorname{div}_x \left( \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{1}{2} |v|^2 + p(\rho) \right) v \right) \\
 = & \partial_t (\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i}) + \operatorname{div}_x ((\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho}) + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i}) \bar{v}) \\
 & + \operatorname{div}_x ((\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho}) + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i}) \sum_{j=0}^{N+1} \underline{v}_j) \\
 = & \underbrace{\partial_t (\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + \operatorname{div}_x ((\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho})) \bar{v}) + \partial_t (\sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i}) + \operatorname{div}_x (\sum_{i=0}^{N+1} \rho_i v_i C_i I_{P_i}))}_{\leq 0, (2.23)} \\
 & + \sum_{j=0}^{N+1} \operatorname{div}_x ((\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho}) + \sum_{i=0}^{N+1} \rho_i C_i I_{P_i}) \underline{v}_j) \\
 \leq & \sum_{j=0}^{N+1} (\rho_j \varepsilon(\rho_j) + p(\rho_j) + \rho_j C_j) \underbrace{\operatorname{div}_x \underline{v}_j}_{=0} = 0.
 \end{aligned}$$

第五步：初值条件. 上述计算是对支集在  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  内的测试函数进行的，说明了对所构造的弱解，欧拉方程组和熵条件在广义函数意义下成立. 下面说明这些弱解还满足初值条件.

我们以质量守恒方程为例. [基本技巧] 对测试函数  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, \infty))$ ，设  $\theta = \theta(t)$  为满足如下条件的截断函数：

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, \epsilon], \\ \text{光滑函数}, & t \in (\epsilon, \delta), \\ 1, & t \in [\delta, \infty), \end{cases}$$

其中  $0 < \epsilon < \delta$  是两个参数. 用  $\theta\psi$  作为测试函数，(2.25) 就应当写作

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t) [\rho \partial_t \psi(x, t) + \rho v \cdot \nabla_x \psi(x, t)] dx dt \\
 & + \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \theta'(t) \rho(x, t) \psi(x, t) dx dt = 0. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

固定 $\delta > 0$ , 取一列函数 $\theta_k(t)$ , 当 $k \rightarrow \infty$ 时它们一致收敛到

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{\delta}, & 0 < t < \delta, \\ 1, & t \geq \delta, \end{cases}$$

且 $\theta'_k(t)$ 点态收敛到 $\frac{1}{\delta}I_{[0,\delta]}$ . 这样可从(2.27)利用勒贝格控制收敛定理(注意被积函数有界且有紧支集)得到

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \eta(t) [\rho \partial_t \psi(x, t) + \rho v \cdot \nabla_x \psi(x, t)] dx dt + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) \psi(x, t) dx dt = 0.$$

在此式中再令 $\delta \downarrow 0$ , 则 $\eta \rightarrow I_{[0,\infty)}(t)$ .

注意到对扇形 $P_i(i = 1, \dots, N)$ , 集合 $P_i \cap \{t = \tau\}$ 的勒贝格测度 $|P_i \cap \{t = \tau\}|$ 当 $\tau \downarrow 0$ 时收敛到零, 而根据构造方法, 在 $P_0 = P_-, P_{N+1} = P_+$ 上所得弱解就等于给定的黎曼初值. 所以利用被积函数有界性, 容易验证

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) \psi(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, 0) \psi(x, 0) dx.$$

由此即证明了

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} [\rho \partial_t \psi(x, t) + \rho v \cdot \nabla_x \psi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, 0) \psi(x, 0) dx = 0.$$

## §2.3 振荡函数的添加

这一节我们证明定理2.

### §2.3.1 一个完备度量空间

令

$$X_0 = \left\{ (\underline{v}, \underline{U}) \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}) : \begin{array}{l} 1) \text{ div}_x \underline{v} = 0; \quad 2) \text{ } \partial_t \underline{v} + \text{div}_x \underline{U} = 0; \\ 3) \text{ } (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) - (\tilde{U} + \underline{U}(x, t)) < C \text{Id}, \quad (x, t) \in \Omega \end{array} \right\}. \quad (2.28)$$

显然 $(0, 0) \in X_0$ , 所以 $X_0$ 不是空集.

1.  $X_0$  是  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2})$  中的有界子集. 事实上, 对给定的常数  $C$ , 利用3), 两边取迹, 就有  $\text{tr}(\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \leq 2C$ , 也即  $|\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 \leq 2C$ . 由于  $\tilde{v}$  是常向量, 由三角不等式,

$$\|\underline{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{2C} + |\tilde{v}|.$$

如果存在一列  $(\{\underline{v}^k, \underline{U}^k\}_{k=1}^\infty) \subset X_0$  在  $L^\infty$  中无界, 则有上面结论, 必是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{U}^k\|_{L^\infty} = \infty.$$

记  $W^k = \underline{U}^k / \|\underline{U}^k\|_{L^\infty}$ , 则

$$W^k > \frac{1}{\|\underline{U}^k\|_{L^\infty}} \left( ((\tilde{v} + \underline{v}^k) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}^k) - \tilde{U} - C\text{Id}) \right).$$

对于任意  $\epsilon > 0$ , 由于  $\|\underline{v}_k\|_{L^\infty}$  有界,  $\tilde{v}, \tilde{U}$  和  $C$  是已知常值, 可取充分大的  $k$  使得  $W^k + \epsilon\text{Id}$  正定. 因  $\text{tr} W^k = 0$  且  $\|W^k\|_{L^\infty} = 1$ , 设  $W^k$  的两个特征值为  $\lambda^k > 0$  和  $-\lambda^k < 0$ , 则  $0 < \lambda^k(x, t) < \epsilon$ , 从而对任意取定的向量  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时  $\xi^\top W^k(x, t) \xi$  一致收敛到零. 由此分别取  $\xi$  为  $(0, 1)^\top, (1, 0)^\top$  和  $(1, 1)^\top$ , 就可知  $W^k(x, t)$  的每个分量都一致收敛到零, 从而与  $\|W^k\|_{L^\infty} = 1$  矛盾. 这就证明了  $X_0$  是  $L^\infty$  中的有界集.

2. 对  $X_0$  附加  $L^\infty$  弱\*拓扑后,  $X_0$  是一个度量空间. 所谓  $L^\infty$  弱\*拓扑, 就是使得对任意  $\psi \in L^1(\Omega)$ , 作用在  $X_0$  上的泛函  $L_\psi : f \mapsto \int_\Omega f \psi \, dx$  连续的在  $X_0$  上最弱的拓扑(即最小的拓扑).

**引理1.** 设  $X$  是可分的 Banach 空间,  $X^*$  是其对偶空间. 那么  $X^*$  上的有界集  $B$  赋予弱\*拓扑后可以度量化.

**证明.** 1). 对任意取定的  $x \in X$ , 可定义  $X^*$  上的线性泛函  $L_x : \xi \mapsto \langle \xi, x \rangle$ . 这里  $\xi \in X^*$  是  $X$  上的有界线性泛函, 而  $\langle \xi, x \rangle$  是泛函  $\xi$  在点  $x$  处的作用.  $X^*$  上的弱\*拓扑就是使得对所有  $x \in X$  确定的上述函数都连续的最小的拓扑.

2). 由于假设  $X$  是可分的, 故存在可列个点  $\{x_j\}_{j=1}^\infty$  在  $X$  中稠密. 对任意  $\xi, \eta \in X^*$ , 定义

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^\infty \min \left\{ 2^{-j}, |\langle \xi - \eta, x_j \rangle| \right\}.$$

这是  $X^*$  上的一个度量, 满足对称性, 正定性和三角不等式.

3). 设  $\xi^k \rightharpoonup * \xi$ , 那么对任意  $x_j$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \xi^k - \xi, x_j \rangle = 0$ . 利用Levi单调收敛定理, 就有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi^k, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ 2^{-j}, |\langle \xi^k - \xi, x_j \rangle| \right\} = 0.$$

4). 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi^k, \xi) = 0$ , 其中  $\xi^k, \xi$  均落在  $X^*$  按强拓扑有界的子集  $B$  中. 我们要证明对任意的  $x \in X$ , 都成立  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \xi^k, x \rangle = \langle \xi, x \rangle$ .

对上述  $x$  和任意的  $\epsilon > 0$ , 由  $\{x_j\}$  的稠密性, 存在某个  $x_j$  使得  $\|x - x_j\| < \epsilon$ . 于是, 由  $B$  的有界性, 若设  $\|\xi^k\| \leq M, \|\xi\| \leq M$ , 则

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle \xi^k - \xi, x \rangle| &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (|\langle \xi^k - \xi, x_j \rangle| + |\langle \xi^k - \xi, x - x_j \rangle|) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle \xi^k - \xi, x_j \rangle| + 2M\epsilon = 0 + 2M\epsilon = 2M\epsilon. \end{aligned}$$

这里  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle \xi^k - \xi, x_j \rangle| = 0$  源于  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\xi^k, \xi) = 0$ . 证毕!  $\square$

3. 度量空间  $(X_0, \rho)$  完备化后仍是  $L^\infty$  的有界子集. 我们知道任何度量空间都可以完备化. 记  $(X_0, \rho)$  的完备化空间为  $(X, d)$ . 对  $\xi \in X$ , 存在  $X_0$  中的点列  $\{\xi^k\}$  弱\*收敛于  $\xi$ . 利用共鸣定理(或范数关于弱收敛的下半连续性), 可知  $\|\xi\|_{L^\infty} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\xi^k\|_{L^\infty}$ . 所以  $X$  是  $L^\infty$  的有界子集.

### §2.3.2 限制映射连续点的稠密性

1. 限制映射. 对任意自然数  $N$ , 考虑点集  $Y = L^\infty(B_N(0) \times (-N, N); \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2})$ . 给  $Y$  附加  $L^2$  度量诱导的拓扑, 并定义映射

$$\begin{aligned} I_N : \quad (X, d) &\rightarrow Y = (Y, L^2) \\ (\underline{v}, \underline{U}) &\mapsto (\underline{v}, \underline{U}) I_{B_N(0) \times (-N, N)}(x, t), \end{aligned} \tag{2.29}$$

也就是说把本来定义在  $\Omega$  上的  $(\underline{v}, \underline{U})$  看成定义在有界集  $B_N(0) \times (-N, N)$  上的函数, 并按  $L^2$  尺度度量其大小.

2. 对任意固定的  $N$ ,  $I_N$  是  $X$  到  $Y$  的一列连续映射的点态极限.

令  $\varphi(x, t)$  是  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  上的标准的磨光函数(光滑, 非负, 支集在单位球内, 积分为1), 对任意  $r > 0$ , 记  $\varphi_r(x, t) = \frac{1}{r^{2+1}} \varphi(\frac{x}{r}, \frac{t}{r})$ . 定义映射

$$I_N^r(\underline{v}, \underline{U}) = (\varphi_r * \underline{v}, \varphi_r * \underline{U}) I_{B_N(0) \times (-N, N)}.$$

由于 $(\underline{v}, \underline{U}) \in L^2(B_N(0) \times (-N, N))$ , 利用卷积的性质, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 在 $L^2(B_N(0) \times (-N, N))$ 范数下成立

$$(\varphi_r * \underline{v}, \varphi_r * \underline{U}) \rightarrow (\underline{v}, \underline{U}).$$

所以当 $r \rightarrow 0$ 时映射 $I_N^r$ 点态收敛到 $I_N$ .

再说明对固定的 $r > 0$ ,  $I_N^r$ 是 $(X, d) \rightarrow (Y, L^2)$ 的连续映射. 设 $(v^k, U^k)$ 在 $(X, d)$ 中收敛到 $(v, U)$ , 从而 $(v^k, U^k)$ 按 $L^\infty$ 弱\*收敛到 $(v, U)$ . 注意到对任意 $(x, t) \in \Omega$ ,  $\varphi_r(x - y, t - s)$ 关于 $(y, s)$ 是 $L^1$ 可积的, 按 $L^\infty$ 弱\*收敛定义就有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_r * v^k(x, t) = \varphi_r * v(x, t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_r * U^k(x, t) = \varphi_r * U(x, t).$$

于是, 利用上面的点态收敛和勒贝格控制收敛定理(注意被积函数有界, 积分区域有界, 从而有控制函数), 当 $k \rightarrow \infty$ 时就有

$$\begin{aligned} & \|I_N^r(v^k, U^k) - I_N^r(v, U)\|_{L^2(B_N(0) \times (-N, N))}^2 \\ &= \int_{B_N(0) \times (-N, N)} |(\varphi_r * v^k(x, t) - \varphi_r * v(x, t), \varphi_r * U^k(x, t) - \varphi_r * U(x, t))|^2 dx dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. 所有 $I_N(N \in \mathbb{N})$ 都连续的点在 $X$ 中稠密. 下面定理是拓扑学中的一个重结果[14].

**定理3** (连续函数列点态收敛极限函数的连续点集的稠密性). 设 $X$ 是一个拓扑空间,  $(Y, d)$ 是一个度量空间. 设 $\{f_n : X \rightarrow Y\}$ 是一个连续函数列, 使得对所有 $x \in X$ , 有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , 其中 $f : X \rightarrow Y$ . 如果 $X$ 是一个Baire空间, 则使得 $f$ 连续的点构成的集合在 $X$ 中稠密: 该集可表示为可列个开的稠密集的交集.

由Baire纲定理[14], 完备的度量空间是Baire空间, 其中可列个开的稠密集的交集仍是稠密集. 所以, 使得所有 $I_N(N$ 是自然数)都连续的 $X$ 中的点仍可表示为 $X$ 中可列个开的稠密集的交集, 从而构成 $(X, d)$ 中的稠密集. 由于 $X$ 含有无穷多个元素, 这样的连续点也就有无穷多个.

注意: 在 $I_N$ 的连续点, 我们可以把 $L^\infty$ 弱\*收敛加强为 $L^2$ 强收敛.

4. 一个引理: 连续点对应松弛消失—欧拉方程的弱解

**引理2.** 设 $(\underline{v}, \underline{U}) \in X$ 为 $I_N$ 的连续点, 则在 $B_N(0) \times (-N, N)$ 上几乎处处成立

$$(\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) - (\tilde{U} + \underline{U}(x, t)) = C \text{Id}. \quad (2.30)$$

根据该引理, 在所有  $\{I_N\}_{N=1}^\infty$  都连续的点  $(\underline{v}, \underline{U})$ , 在  $\Omega$  中上式就几乎处处成立了. 这就是定理2中的c)项. 注意定理2中的a)b) 两项在上述  $X_0$  的完备化过程中是保留的: 若  $\xi^k = (\underline{v}^k, \underline{U}^k) \in X_0$  在  $L^\infty$  弱\*意义下收敛到  $\xi = (\underline{v}, \underline{U})$ , 通过取支集在  $\Omega$  外的  $L^1$  测试函数, 不难看出  $\xi$  的支集仍在  $\Omega$  中; 而微分运算在广义函数收敛, 特别是  $L^\infty$  弱\* 收敛下连续, 从而对  $\xi$  仍然成立性质b). 所以如果引理2得以证明, 也就证明了定理2.

### §2.3.3 引理2的证明

为证明引理2, 我们需要如下引理.

**引理3.** 对任意  $(\underline{v}, \underline{U}) \in X_0$ , 存在  $X_0$  中的序列  $\{(\underline{v}_k, \underline{U}_k)\}$ , 按  $L^\infty$  弱\*拓扑收敛到  $(\underline{v}, \underline{U})$ , 且

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{v} + v_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta \left( 2C|\Gamma| - \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^2. \quad (2.31)$$

这里  $\Gamma = B_N(0) \times (-N, N)$ , 常数  $\beta$  只依赖于  $\Gamma$  和  $C$ .

下面证明引理2.

1. 设  $(\underline{v}, \underline{U}) \in X$  是  $I_N$  的连续点. 由于  $X$  是从  $X_0$  完备化得到的, 存在序列  $\{(\underline{v}_k, \underline{U}_k)\} \subset X_0$  使得该序列按度量  $d$ , 或等价地按  $L^\infty$  弱\*拓扑, 收敛到  $(\underline{v}, \underline{U})$ . 由于  $(\underline{v}, \underline{U}) \in X$  是  $I_N$  的连续点, 由前面说明, 序列  $\{(\underline{v}_k, \underline{U}_k)\}$  也在  $L^2(\Gamma)$  中强收敛到  $(\underline{v}, \underline{U})$ . 于是通过取子列并更改序号, 仍假设该序列在  $\Gamma$  中几乎处处收敛到  $(\underline{v}, \underline{U})$ . 这样, 就必然成立

$$(\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) - (\tilde{U} + \underline{U}(x, t)) \leq C \text{Id} \quad \text{a.e. } \Gamma. \quad (2.32)$$

2. 为证明(2.31), 用反证法. 于是存在测度大于零的  $\Gamma$  的子集  $\Gamma_0$ , 在其上

$$(\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) \otimes (\tilde{v} + \underline{v}(x, t)) - (\tilde{U} + \underline{U}(x, t)) < C \text{Id}.$$

两边取迹, 则在  $\Gamma_0$  上  $|\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 < 2C$ , 在  $\Gamma \setminus \Gamma_0$  上  $|\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 = 2C$ . 那么在  $\Gamma$  上积分, 就有严格不等式

$$\|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 < 2C|\Gamma|. \quad (2.33)$$

3. 另一方面, 对前述 $(\underline{v}_k, \underline{U}_k) \in X_0$ 应用引理3, 就有 $X_0$ 中点列 $\{(v_{k,j}, U_{k,j})\}_{j=1}^\infty$ 按度量 $d$ 收敛到 $(\underline{v}_k, \underline{U}_k)$ , 并且成立不等式

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{v} + v_{k,j}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \|\tilde{v} + \underline{v}_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta(2C|\Gamma| - \|\tilde{v} + \underline{v}_k\|_{L^2(\Gamma)}^2)^2. \quad (2.34)$$

对任意 $k$ , 存在 $j_1(k)$ , 当 $j \geq j_1(k)$ 时 $d(v_{k,j}, \underline{v}_k) \leq 1/k$ . 又根据下极限的定义:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} a_{k,j} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\inf\{a_{k,j}, a_{k,j+1}, \dots\}),$$

存在 $j_2(k)$ , 当 $j \geq j_2(k)$ 时,  $a_{k,j} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} a_{k,j} - \frac{1}{k}$ . 所以取 $j(k) = \max\{j_1(k), j_2(k)\}$ , 就有 $\{(v_{k,j(k)}, U_{k,j(k)})\}_{k=1}^\infty$ 按度量 $d$ 收敛到 $(\underline{v}, \underline{U})$  (从而由连续点的性质, 也按 $L^2(\Gamma)$ 范数收敛), 而且

$$\|\tilde{v} + v_{k,j(k)}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \|\tilde{v} + \underline{v}_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta(2C|\Gamma| - \|\tilde{v} + \underline{v}_k\|_{L^2(\Gamma)}^2)^2 - \frac{1}{k}. \quad (2.35)$$

此式两边关于 $k$ 取极限, 结合(2.33), 就得到

$$\|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \beta(2C|\Gamma| - \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2)^2 > \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (2.36)$$

矛盾!

#### §2.3.4 两个命题

为了证明引理3, 先列出两个重要命题.

**命题2** (局部平面波). 设 $\lambda > 0$ 是常数,  $p = \lambda[(a, a \otimes a) - (b, b \otimes b)] \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$ , 其中 $a \neq \pm b$ ,  $|a| = |b| = \sqrt{2C}$ . 记 $\sigma = [-p, p] = \{-(1-t)p + tp : t \in [0, 1]\}$ 是 $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$ 中过 $\pm p$ 的线段. 则对于任意 $\varepsilon > 0$ , 存在 $(v, U) \in C_0^\infty(B_1(0) \times (-1, 1))$ , 满足方程

$$\partial_t v + \operatorname{div}_x U = 0, \quad \operatorname{div}_x v = 0, \quad \int (v, U) dx dt = 0, \quad (2.37)$$

而且

- (i)  $(v, U)$ 的像集落在 $\sigma$ 的某个 $\varepsilon$ -邻域内;
- (ii)  $\int |v(x, t)| dx dt \geq \alpha \lambda |b - a|$ , 其中 $\alpha$ 是个几何常数.

从下文该命题的证明可以看出, 这里的 $(v, U)$ 是将沿着物理空间某个不与 $t$ 轴平行的方向 $\eta$ 传播的振荡函数截断得到的; 通过将它在 $\Gamma$ 上半径很小的互不相交的小球上局部化, 就会得到许多高频但振幅有界的振荡函数, 添加到 $(\underline{v}, \underline{U})$ 中就得到弱\*收敛到后者的序列. 这些振荡函数的作用都集中在相空间中的线段 $\sigma$ 的附近(见下一命题), 即函数值在这个范围内, 随着时间空间变量的改变快速改变.

另一方面, 设 $C > 0$ 如前所给定. 我们记

$$\mathcal{U} = \{(a, A) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} : a \otimes a - A < C \text{Id}\}.$$

注意 $\mathcal{U}$ 是开集.

**命题3 (几何引理).** 存在几何常数 $c_0$ 具有如下性质: 设 $(e, A) \in \mathcal{U}$ , 则存在如命题2中所述的线段 $\sigma$ , 使得 $(e, A) + \sigma \subset \mathcal{U}$ , 而且 $\lambda|b - a| \geq \frac{c_0}{\sqrt{C}}(2C - |e|^2)$ .

这个命题给出了相空间中所需的特殊的方向 $\sigma$ .

这两个命题将在后文给出证明.

### §2.3.5 引理3的证明

我们用命题2和命题3 证明引理3. 这一段是整个证明的枢纽, 注意体会高频但低幅的振荡函数是如何一步步地加入扇形下解, 以构成近似序列的.

1. 任取 $(\underline{v}, \underline{U}) \in X_0$ . 对于任意 $(x_0, t_0) \in \Gamma$ , 由 $X_0$ 的定义, 成立 $(e, A) = (\tilde{v}, \tilde{U}) + (\underline{v}(x_0, t_0), \underline{U}(x_0, t_0)) \in \mathcal{U}$ . 设 $\sigma$ 为命题3中对应的线段, 则 $(e, A) + \sigma \in \mathcal{U}$ , 且确定 $\sigma$ 的向量 $a, b$ 满足

$$\lambda|b - a| \geq \frac{c_0}{\sqrt{C}}(2C - |e|^2). \quad (2.38)$$

由 $\mathcal{U}$ 是开集, 以及 $\underline{v}, \underline{U}$ 的连续性, 对任意充分小的 $r > 0$ , 都成立

$$(\tilde{v}, \tilde{U}) + (\underline{v}(x, t), \underline{U}(x, t)) + \sigma \subset \mathcal{U}, \quad \forall (x, t) \in B_r(x_0) \times (t_0 - r, t_0 + r).$$

显然, 存在充分小的 $\varepsilon > 0$ , 只要函数 $(v, U)$ 的像落在上述线段 $\sigma$ 的 $\varepsilon$ 领域内, 上式也就能保证

$$\begin{aligned} &(\tilde{v}, \tilde{U}) + (\underline{v}(x, t), \underline{U}(x, t)) + (v(x, t), U(x, t)) \in \mathcal{U}, \\ &\forall (x, t) \in B_r(x_0) \times (t_0 - r, t_0 + r). \end{aligned} \quad (2.39)$$

(注: 这就意味着局部的, 即 $(x, t) \in B_r(x_0) \times (t_0 - r, t_0 + r)$ 时, 成立

$$(\underline{v}(x, t), \underline{U}(x, t)) + (v(x, t), U(x, t)) \in X_0.$$

当然这个说法不严格, 必需保证(2.39)对所有 $(x, t) \in \Omega$ 成立才可以.)

2. 局部化. 对上述线段 $\sigma$ 和 $\varepsilon > 0$ , 考虑由命题2给出的函数 $(v, U)$ . 我们将之局部化: 定义

$$(v_{x_0, t_0, r}, U_{x_0, t_0, r})(x, t) = (v, U)\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{t-t_0}{r}\right).$$

这样就可以保证成立

$$(\underline{v}(x, t), \underline{U}(x, t)) + (v_{x_0, t_0, r}(x, t), U_{x_0, t_0, r}(x, t)) \in X_0. \quad (2.40)$$

此外, 根据命题2 ii) 和(2.38), 有

$$\begin{aligned} \int |v_{x_0, t_0, r}|(x, t) dx dt &= \int |v\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{t-t_0}{r}\right)| dx dt = r^3 \int |v(z, \tau)| dz d\tau \\ &\geq \alpha \lambda r^3 |b-a| \geq \alpha (c_0 / \sqrt{C}) r^3 (2C - |e|^2) \\ &= \alpha (c_0 / \sqrt{C}) r^3 (2C - |\tilde{v} + \underline{v}(x_0, t_0)|^2). \end{aligned} \quad (2.41)$$

注意到由 $\bar{\Gamma}$ 的紧性, 存在 $r_0 > 0$ , 使得对任意 $(x_0, t_0) \in \Gamma$ , 只要 $0 < r < r_0$ , 结论(2.40)和(2.41)就成立.

3. 一个简单的引理: 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负的连续函数, 开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界. 则存在只依赖 $n$ 的常数 $\tilde{c}$ , 使得对任意给定的 $r > 0$ , 存在 $\Omega$ 内有限个互不相交的球 $B_r(x_1), \dots, B_r(x_N)$ , 满足如下要求:

$$\sum_{j=1}^N f(x_j) r^n \geq \tilde{c} \int_{\Omega} f(x) dx - \tilde{\omega}(r) |\Omega|,$$

其中 $\tilde{\omega}(r)$ 是 $r$ 的非负单调不减函数, 且 $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\omega}(r) = 0$ .

事实上, 由于 $\bar{\Omega}$ 是紧集,  $f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 从而一致连续, 就可以定义其连续模 $\omega(r) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \bar{\Omega}, |x - y| \leq r\}$ .

定义 $\Omega_r = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$ . 任取 $x_1 \in \Omega_r$ , 再取 $x_2 \in \bar{\Omega}_r \setminus B_{2r}(x_1)$ . 归纳的, 可设 $x_k \in \bar{\Omega}_r \setminus (\cup_{j=1}^{k-1} B_{2r}(x_j))$ . 由于 $\bar{\Omega}_r$ 是紧集, 半径为 $2r$ 且覆盖 $\bar{\Omega}_r$ 的球只能有有限个. 所以这样的点 $x_i$ 只能由有限个, 设为 $N$ 个. 显然,  $B_r(x_1), \dots, B_r(x_N)$ 都

落在 $\Omega$ 内且互不相交. 另一方面, 由于 $\cup_{j=1}^N B_{2r}(x_j)$ 包含 $\Omega_r$ , 则 $\cup_{j=1}^N B_{3r}(x_j)$ 必然包含 $\Omega$ . 于是

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x) dx &\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_{3r}(x_j)} f(x) dx \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_{3r}(x_j)} f(x_j) dx + \sum_{j=1}^N \int_{B_{3r}(x_j)} |f(x) - f(x_j)| dx \\ &\leq c_n r^n \sum_{j=1}^N f(x_j) + \omega(3r) c_n r^n N \leq c_n r^n \sum_{j=1}^N f(x_j) + c_n \tilde{\omega}(r) |\Omega|.\end{aligned}$$

这里最后一步用到了 $\cup_{j=1}^N B_r(x_j) \subset \Omega$ 且 $\{B_r(x_j)\}$ 互不相交, 从而 $c_n r^n N \leq |\Omega|$ .

4. 近似序列的构造. 对自然数 $k$ , 设 $1/k < r_0$ . 置 $r = 1/k$ , 将上面结论用于区域 $\Gamma$ 和函数 $2C - |\tilde{v} + \underline{v}|^2$  (由 $(\underline{v}, \underline{U}) \in X_0$ 并在3)中取迹, 可知该函数严格大于零), 并将球换为柱体, 可知存在有限个点 $\{(x_j, t_j)\}_{j=1}^{N_k}$ , 使得 $B_r(x_j) \times (t_j - r, t_j + r)$ 均落在 $\Gamma$ 内且互不相交, 而且

$$\sum_j (2C - |\tilde{v} + \underline{v}(x_j, t_j)|^2) r^3 \geq \tilde{c} \left( 2C |\Gamma| - \int_{\Gamma} |\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 dx dt \right) - \tilde{\omega}(r) |\Gamma|. \quad (2.42)$$

现在定义所需的近似序列

$$(v_k, U_k) = (\underline{v}, \underline{U}) + \sum_{j=1}^{N_k} (v_{x_j, t_j, r}, U_{x_j, t_j, r}), \quad r = 1/k.$$

注意由于 $(v_{x_j, t_j, r}, U_{x_j, t_j, r})$ 的支集互不相交,  $(v_k, U_k)$ 仍在 $X_0$ 中.

5. 近似序列的 $L^\infty$ 弱\*收敛性. 我们注意到, 由于连续可微函数在 $L^1$ 中稠密, 要证明 $(v_k, U_k)$ 按 $L^\infty$ 弱\*拓扑收敛到 $(\underline{v}, \underline{U})$ , 由于 $(v_k, U_k)$ 在 $L^\infty$ 中一致有界, 只需说明对任意 $(v_*, U_*) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2})$ , 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int (v_k \cdot v_*, U_k : U_* : U_*) dx dt = \int (\underline{v} \cdot v_*, \underline{U} : U_* : U_*) dx dt.$$

例如, 我们来证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \sum_j v_{x_j, t_j, r} \cdot v_* dx dt = 0.$$

由(2.37),  $\int v(x, t) dx dt = 0$ , 从而

$$\begin{aligned}
 & \left| \int \sum_{j=1}^{N_k} v_{x_j, t_j, r}(x, t) \cdot v_*(x, t) dx dt \right| \\
 &= r^3 \left| \sum_{j=1}^{N_k} \int_{B_1(0) \times (-1, 1)} v(z, \tau) \cdot (v_*(x_j + rz, t_j + r\tau) - v_*(x_j, t_j)) dz d\tau \right| \\
 &= r^6 \left| \sum_{j=1}^{N_k} \int_{B_1(0) \times (-1, 1)} v(z, \tau) \cdot \left( \int_0^1 D_{x,t} v_*(x_j + \theta rz, t_j + \theta r\tau) d\theta \right) \cdot (z, \tau) dz d\tau \right| \\
 &\leq r^6 \|v\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \int_0^1 \int_{B_1(0) \times (-1, 1)} |D_{x,t} v_*(x_j + \theta rz, t_j + \theta r\tau)| dz d\tau d\theta \\
 &= r^6 \|v\|_{L^\infty} \int_0^1 \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{\theta^3 r^3} \int_{B_{\theta r}(x_j) \times (t_j - \theta r, t_j + \theta r)} |D_{x,t} v_*(x, t)| dt dx d\theta \\
 &= r^6 \|v\|_{L^\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \mathcal{M}(Dv_*)(x_j, t_j) \\
 &\leq C_{N,n} r^6 \|v\|_{L^\infty} r^{-3} \|Dv_*\|_{L^\infty} = O(r^3) \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow 0).
 \end{aligned}$$

这里最后一步用到了Hardy-Littlewood极大算子 $\mathcal{M}$ 的 $(L^\infty, L^\infty)$ 型, 以及 $N_k$ 与 $r^3$ 成反比的性质.

6. 不等式(2.31)的证明. 特别的, 注意到

$$\|\tilde{v} + v_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|v_k - \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2 \int_\Gamma (\tilde{v} + \underline{v}) \cdot (\tilde{v} + \underline{v}) dx dt,$$

其中最后一项中 $\tilde{v} + \underline{v}$ 是光滑函数, 则由上面结论,  $k \rightarrow \infty$ 时最后一项的极限为零, 于是

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{v} + v_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k - \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (2.43)$$

另一方面, 由(2.41)(2.42), 成立

$$\begin{aligned}
 \|v_k - \underline{v}\|_{L^1(\Gamma)} &= \sum_j \int |v_{x_j, t_j, r}| dx dt \geq \alpha c_0 r^3 \sum_j (2C - |\tilde{v} + \underline{v}(x_j, t_j)|^2) \\
 &\geq \alpha(c_0 / \sqrt{C}) \tilde{c} \left( 2C |\Gamma| - \int_\Gamma |\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 dx dt \right) - \alpha(c_0 / \sqrt{C}) \tilde{\omega}(r) |\Gamma|.
 \end{aligned}$$

由Hölder不等式,

$$\|v_k - \underline{v}\|_{L^1(\Gamma)}^2 \leq |\Gamma| \|v_k - \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

就得到了

$$\begin{aligned} & \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{v} + v_k\|_{L^2(\Gamma)}^2 \geq \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{|\Gamma|} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k - \underline{v}\|_{L^1(\Gamma)}^2 \\ & \geq \|\tilde{v} + \underline{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{|\Gamma|} (\alpha(c_0/\sqrt{C})\tilde{c})^2 \left(2C|\Gamma| - \int_{\Gamma} |\tilde{v} + \underline{v}(x, t)|^2 dx dt\right)^2. \end{aligned}$$

这里用到了 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(1/k) = 0$ . 令 $\beta = \frac{1}{|\Gamma|C}(\alpha c_0 \tilde{c})^2$ , 它只依赖于 $\Gamma, C$ , 就证明了引理3.

### §2.3.6 命题2的证明

我们先陈述并证明如下引理.

**引理4.** 设 $a, b \in \mathbb{R}^n, |a| = |b|$ , 但 $a \neq \pm b$ . 则存在向量 $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ 以及矩阵值的常系数三阶齐次线性微分算子

$$A(\partial) : C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}),$$

满足如下条件:

- 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , 矩阵 $U = A(\partial)\varphi$ 满足

$$\operatorname{div} U = 0, \quad U^\top = U, \quad U_{n+1,n+1} = 0, \quad \operatorname{tr} U = 0; \quad (2.44)$$

- $\eta$ 与 $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ 不平行;

- 如果 $\psi \in C^3(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(y) = \psi(\eta \cdot y)$ , 则 $A(\partial)\varphi(y) = (U_a - U_b)\psi'''(\eta \cdot y)$ . 这里

$$U_a = \begin{pmatrix} a \otimes a - \frac{|a|^2}{n} I_n & a \\ a^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

注意本书中向量均是列向量; 矩阵的散度是对每个行向量取散度得到的列向量.  $\operatorname{div} U_a = 0$ 正来自于速度场为 $a$ 的不可压欧拉方程, 其中 $I_n$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 自变量前 $n$ 个分量代表空间位置, 第 $n+1$ 个分量代表时间.

**证明.** 1. 利用傅里叶变换, 以及 $A$ 是三阶齐次的线性微分算子, 有 $\widehat{A(\partial)}\varphi(\xi) = A(i\xi)\hat{\varphi}(\xi) = -iA(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ . 注意 $\hat{\varphi}(\xi)$ 是个标量. 所以(2.44)可由三次齐次矩阵值多项式 $A(\xi)$ 的如下代数性质得出(其中 $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ ):

$$A(\xi)\xi = 0, A(\xi) = A(\xi)^\top, A(\xi)_{n+1,n+1} = A(\xi)e_{n+1} \cdot e_{n+1} = 0, \operatorname{tr} A(\xi) = 0. \quad (2.45)$$

2. 记 $\tilde{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ . 定义 $n+1$ 阶反对称矩阵

$$R = \tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}, \quad Q(\xi) = \xi \otimes e_{n+1} - e_{n+1} \otimes \xi.$$

则不难验证如下性质:

$$R\xi \cdot \xi = 0, \quad Q(\xi)\xi \cdot \xi = 0, \quad (2.46)$$

$$R\xi \cdot e_{n+1} = 0, \quad (2.47)$$

$$R\xi \cdot Q(\xi)\xi = 0. \quad (2.48)$$

这里(2.46)直接源于 $R$ 和 $Q(\xi)$ 的反对称性, 而注意 $R$ 最后一行为零, 故 $R\xi$ 最后一个分量也必然为零, 从而 $R\xi \cdot e_{n+1} = 0$ . 此外,

$$R\xi \cdot Q(\xi)\xi = -\xi^\top Q(\xi)R\xi = -|\xi|^2 \underbrace{e_{n+1}^\top R\xi}_{=0} + \xi^\top e_{n+1} \underbrace{\xi^\top R\xi}_{=0} = 0,$$

其中第一项为零来自于(2.47), 第二项为零源于(2.46).

3. 现在定义所需三次齐次多项式

$$A(\xi) = \frac{1}{2}((R\xi) \otimes (Q(\xi)\xi) + (Q(\xi)\xi) \otimes (R\xi)).$$

因为 $(a \otimes b)^\top = (ab^\top)^\top = ba^\top = b \otimes a$ , 所以 $A(\xi)^\top = A(\xi)$ . 又从(2.46)可知 $A(\xi)\xi = -\frac{1}{2}(R\xi\xi^\top Q(\xi)\xi + Q(\xi)\xi\xi^\top R\xi) = 0$ . 此外, 由(2.48),  $\operatorname{tr} A(\xi) = \operatorname{tr}(R\xi \otimes Q(\xi)\xi) = R\xi \cdot Q(\xi)\xi = 0$ . 最后, 从(2.47)可知 $A(\xi)e_{n+1} \cdot e_{n+1} = (e_{n+1}^\top R\xi)(Q(\xi)\xi)^\top e_{n+1} = 0$ . 这就证明了所构造的 $A(\xi)$ 满足(2.45).

4. 记 $\mu = |a||b| + a \cdot b = |a|^2 + a \cdot b = |b|^2 + a \cdot b$ . 由于 $|a| = |b|$ 且 $a \neq \pm b$ , 从Cauchy-Schwartz不等式可知 $\mu > 0$ . 置 $\eta = \alpha(\tilde{a} + \tilde{b} - \mu e_{n+1})$ , 其中 $\alpha$ 是待定系数. 由于 $a \neq -b$ , 则 $\eta$ 和 $e_{n+1}$ 不平行.

直接计算可得

$$\begin{aligned} R\eta &= \alpha(\tilde{a}\tilde{b}^\top - \tilde{b}\tilde{a}^\top)(\tilde{a} + \tilde{b} - \mu e_{n+1}) = \alpha\mu(\tilde{a} - \tilde{b}), \\ R\eta e_{n+1}^\top &= \alpha\mu(\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1}, \\ R\eta\eta^\top &= \alpha^2\mu((\tilde{a} - \tilde{b}))(\tilde{a} + \tilde{b} - \mu e_{n+1}) = \alpha^2(\mu(\tilde{a} \otimes \tilde{a} - \tilde{b} \otimes \tilde{b}) + \mu(\tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}) \\ &\quad - \mu^2(\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1}), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} R\eta \otimes (Q(\eta)\eta) &= -R\eta\eta^\top(\eta e_{n+1}^\top - e_{n+1}\eta^\top) = \eta_{n+1}R\eta\eta^\top - |\eta|^2R\eta e_{n+1}^\top \\ &= -\alpha^3\mu(\mu(\tilde{a} \otimes \tilde{a} - \tilde{b} \otimes \tilde{b}) + \mu(\tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}) - \mu^2(\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1}) \\ &\quad - \underbrace{\alpha^3(|a+b|^2 + \mu^2)}_{=2\mu}\mu((\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1}) \\ &= -\alpha^3[\mu^2((\tilde{a} \otimes \tilde{a} - \tilde{b} \otimes \tilde{b})) + \mu^2(\tilde{a} \otimes \tilde{b} - \tilde{b} \otimes \tilde{a}) + 2\mu^2((\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1})]. \end{aligned}$$

令  $\alpha = -\mu^{-\frac{2}{3}}$ , 就有

$$\begin{aligned} A(\eta) &= \frac{1}{2}(R\eta \otimes (Q(\eta)\eta) + (R\eta \otimes (Q(\eta)\eta)^\top)) \\ &= (\tilde{a} \otimes \tilde{a} - \tilde{b} \otimes \tilde{b}) + ((\tilde{a} - \tilde{b}) \otimes e_{n+1}) + (e_{n+1} \otimes (\tilde{a} - \tilde{b})) \\ &= \begin{pmatrix} a \otimes a - b \otimes b & a - b \\ (a - b)^\top & 0 \end{pmatrix} = U_a - U_b. \end{aligned}$$

这就证明了对如前所给定的  $a, b$ , 成立

$$A(\partial)\psi(\eta \cdot y) = A(\eta)\psi'''(\eta \cdot y) = (U_a - U_b)\psi'''(\eta \cdot y),$$

其中第一个等号可直接验证. □

下面我们证明命题2. 取  $n = 2$  及命题2所述向量  $a, b$ , 设  $A(\partial)$  及  $\eta \in \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t^1$  是从上述引理得到的微分算子和向量.

### 1. 作振荡函数<sup>1</sup>

$$\kappa(x, t) = -\lambda N^{-3} \sin(N\eta \cdot (x, t)),$$

---

<sup>1</sup> 可看出  $\eta$  代表波动传播的方向, 所以自然需要它不和  $t$ -轴平行.

其中  $N$  是待定的充分大的正数(与  $|\eta|$  有关). 再作截断函数将其局部化. 令  $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0) \times (-1, 1))$ , 取值在  $[-1, 1]$  之间, 且它在  $B_{\frac{1}{2}}(0) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  上恒为 1. 作  $\psi(x, t) = \kappa(x, t)\varphi(x, t)$ , 以及  $U^\#(x, t) = A(\partial)\psi(x, t)$ . 显然  $U^\# \in C_0^\infty(B_1(0) \times (-1, 1), \mathbb{R}^{3 \times 3})$  是对称矩阵, 迹为零, 第三行第三列元素为零, 且每一行散度为零. 此外, 因为  $U$  的每个分量都是求导得到的, 由散度定理,  $\int U^\# dx dt = 0$ . 显然  $U$  的每个分量都是高频振荡的函数.

## 2. 定义

$$v(x, t) = (U_{31}^\#(x, t), U_{32}^\#(x, t))^\top, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11}^\#(x, t) & U_{12}^\#(x, t) \\ U_{21}^\#(x, t) & U_{22}^\#(x, t) \end{pmatrix},$$

则由上述  $U^\#$  的性质, 所得  $(v, U)$  满足(2.37).

3. 注意到  $(A(\partial)\kappa)(x, t) = \lambda(U_a - U_b) \cos(N\eta \cdot (x, t))$ , 而余弦函数的值域为  $[-1, 1]$ , 从而  $(A(\partial)\kappa)$  的值域落在其相空间中线段  $[-\lambda(U_a - U_b), \lambda(U_a - U_b)]$  上. 由于  $\varphi$  的取值也在  $[-1, 1]$  之间, 故  $\varphi A(\partial)\kappa$  的值域也在该线段上.

另一方面, 利用莱布尼兹法则, 不难证明

$$\|U^\# - \varphi A(\partial)\kappa\|_{C^0} \leq C\lambda N^{-1},$$

其中常数  $C$  只依赖于截断函数  $\varphi$ . 于是可取  $N$  充分大, 使得  $\|U^\# - \varphi A(\partial)\kappa\|_{C^0} \leq \varepsilon$ . 这也就保证了  $U^\#$  落在了线段  $[-\lambda(U_a - U_b), \lambda(U_a - U_b)]$  的  $\varepsilon$ -邻域中. 特别地,  $(v, U)$  落在线段  $\sigma$  的  $\varepsilon$ -邻域中.

4. 最后要估计  $\int |v| dx dt$  的下界. 为下面积分计算方便, 记  $B_{1/2}^3$  是  $\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t^1$  中以原点为中心, 半径为  $1/2$  的球. 注意在该球上  $\varphi = 1$ . 由上一段知,  $\varphi A(\partial)\kappa$  对应的速度部分是  $\lambda(a - b) \cos(N\eta \cdot (x, t))$ , 而且对任意  $(x, t) \in B_{1/2}^3$ , 有  $v(x, t) = \lambda(a - b) \cos(N\eta \cdot (x, t))$ . 于是

$$\begin{aligned} \int |v| dx dt &\geq \int_{B_{1/2}^3} |v| dx dt \geq \int_{B_{1/2}^3} |\lambda(a - b) \cos(N\eta \cdot (x, t))| dx dt \\ &= \lambda|a - b| \int_{B_{1/2}^3} |\cos(N|\eta| \frac{\eta}{|\eta|} \cdot (x, t))| dx dt \\ &= \lambda|a - b| \int_{B_{1/2}^3} |\cos(N|\eta| t')| dx' dt'. \end{aligned}$$

这里最后一步用到了积分  $\int_{B_{1/2}^3} |\cos(\omega \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}, t))| d\mathbf{x} dt$  关于积分区域的旋转不变性: 可通过正交变换将  $e_{n+1}$  换到单位向量  $\mathbf{n}$  处, 并令  $t' = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}, t)$ . 此处记  $\omega = N|\eta|$ . 在注意到  $B_{1/2}^3$  包含柱体  $B_{1/4}(0) \times (0, \frac{1}{4})$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/2}^3} |\cos(\omega t')| dx' dt' &\geq \int_{B_{1/4}(0)} \int_0^{\frac{1}{4}} |\cos(\omega t')| dt' dx' = c_2 \int_0^{\frac{1}{4}} |\cos(\omega t')| dt' \\ &= c_2 \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{1}{4}\omega} |\cos(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

由于  $|\cos(\tau)|$  的周期是  $\pi$ , 每个周期上积分为 2, 对自然数  $n$ , 当  $n\pi \leq \omega/4 < (n+1)\pi$  时, 就有

$$\frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{1}{4}\omega} |\cos(\tau)| d\tau \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{n\pi} |\cos(\tau)| d\tau = \frac{2n}{(n+1)\pi} \geq \pi.$$

于是我们得到

$$\int |v| > (c_2\pi/4)\lambda|a-b|.$$

这里  $c_1, c_2$  等都是几何常数. 命题2证毕.

### §2.3.7 命题3的证明

对给定的正的常数  $C$ , 令

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_C = \{(v, U) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} : U = v \otimes v - C \text{Id}\}, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_C = \{(v, U) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} : v \otimes v - U < C \text{Id}\}. \quad (2.50)$$

我们先证明如下引理:

**引理5.** 记  $\mathcal{K}^{\text{co}}$  为  $\mathcal{K}$  的凸包(即  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  中包含  $\mathcal{K}$  的最小凸集), 则  $\mathcal{K}^{\text{co}}$  的内部就是  $\mathcal{U}$ .

**证明.** 1). 通过将  $v$  换作  $v/\sqrt{C}$ ,  $U$  换作  $U/C$ , 在以下证明中不妨将  $C$  取作 1. 对实对称矩阵  $W$ , 令  $\lambda_{\max}(W)$  表示  $W$  的最大特征值. 由于  $W$  总可以对角化, 由隐函数定理可知这是关于  $W$  的每个分量都连续的函数. 作  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  上连续函数

$$e(v, U) = \lambda_{\max}(v \otimes v - U).$$

2).  $e : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数.

事实上, 用  $S^1$  记  $\mathbb{R}^2$  中单位圆周, 我们有

$$\begin{aligned} e(v, U) &= \max_{\xi \in S^1} \langle \xi, (v \otimes v - U)\xi \rangle = \max_{\xi \in S^1} \langle \xi, \langle \xi, v \rangle v - U\xi \rangle \\ &= \max_{\xi \in S^1} [|\langle \xi, v \rangle|^2 - \langle \xi, U\xi \rangle]. \end{aligned}$$

注意对于任意固定的  $\xi \in S^1$ ,  $\Phi(v, U) = |\langle \xi, v \rangle|^2 - \langle \xi, U\xi \rangle$  是凸函数. 这可从定义直接验证: 对任意  $\tau \in [0, 1]$ , 用基本不等式, 就有

$$\begin{aligned} &\Phi(\tau v_1 + (1 - \tau)v_2, \tau U_1 + (1 - \tau)U_2) \\ &= \tau^2 |\langle \xi, v_1 \rangle|^2 + (1 - \tau)^2 |\langle \xi, v_2 \rangle|^2 + \tau(1 - \tau) 2 \langle \xi, v_1 \rangle \langle \xi, v_2 \rangle \\ &\quad - \tau \langle \xi, U_1 \xi \rangle - (1 - \tau) \langle \xi, U_2 \xi \rangle \\ &\leq (\tau^2 + \tau(1 - \tau)) |\langle \xi, v_1 \rangle|^2 + ((1 - \tau)^2 + \tau(1 - \tau)) |\langle \xi, v_2 \rangle|^2 \\ &\quad - \tau \langle \xi, U_1 \xi \rangle - (1 - \tau) \langle \xi, U_2 \xi \rangle \\ &= \tau \Phi(v_1, U_1) + (1 - \tau) \Phi(v_2, U_2). \end{aligned}$$

两边关于  $\xi$  取上确界, 即知  $e(v, U)$  是凸函数.

3). 总成立不等式  $\frac{1}{2}|v|^2 \leq e(v, U)$ , 且等号成立当且仅当  $U = v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id}$ .

事实上,

$$\begin{aligned} e(v, U) &= \max_{\xi \in S^1} \langle \xi, (v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id} - U)\xi \rangle + \frac{|v|^2}{2} \\ &= \underbrace{\lambda_{\max}(v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id} - U)}_{\geq 0} + \frac{|v|^2}{2} \geq \frac{|v|^2}{2}. \end{aligned}$$

这里第一项非负是因为  $\text{tr}(v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id} - U) = 0$ , 从而所有特征值之和为零, 于是最大特征值必非负. 如果等号成立, 则  $\lambda_{\max}(v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id} - U) = 0$ , 从而矩阵  $v \otimes v - \frac{|v|^2}{2}\text{Id} - U$  必是零矩阵.

4). 记  $|U|_\infty$  为矩阵  $U$  的算子范数, 则  $|U|_\infty \leq e(v, U)$ .

这是因为

$$\begin{aligned} e(v, U) &= \max_{\xi \in S^1} [|\langle \xi, v \rangle|^2 - \langle \xi, U\xi \rangle] \\ &\geq \max_{\xi \in S^1} [-\langle \xi, U\xi \rangle] = -\min_{\xi \in S^1} \langle \xi, U\xi \rangle \\ &= -\lambda_{\min}(U) = \lambda_{\max}(U). \end{aligned}$$

这里最后一个等式是由于  $U \in \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$ . 这就证明了  $|U|_\infty \leq e(v, U)$ . 由于同一个有限维空间上任意两个范数均等价, 由此可知  $|U| \leq ce(v, U)$ , 其中  $c$  是个几何常数.

5). 定义  $e$  的下水平集

$$\mathcal{S} = \{(v, U) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} : e(v, U) \leq 1\}.$$

由函数  $e$  的凸性, 这是一个凸集; 由  $e$  的连续性, 这是一个闭集; 由上两步结论, 这还是一个有界集. 所以  $\mathcal{S}$  是一个凸紧集, 从而还是连通的.

利用实对称矩阵正定当且仅当其所有特征值严格为正, 不难看出

$$\mathcal{U} = \{(v, U) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2} : e(v, U) < 1\}.$$

现在证明  $\mathcal{U} = \text{Int}\mathcal{S}$ . 由函数  $e$  的连续性, 显然  $\mathcal{U}$  是开集, 从而  $\mathcal{U} \subset \text{Int}\mathcal{S}$ . 反之, 设  $(v_0, U_0) \in \text{Int}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ , 但  $e(v_0, U_0) = 1$ , 那么注意到存在  $(v_0, U_0)$  在  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  中的一个开邻域, 而凸函数在该邻域内点取到了最大值. 由凸函数性质,<sup>2</sup> 在该邻域内  $e(v, U) \equiv 1$ . 由  $e$  的凸性, 这只有当 1 是  $e$  在连通集  $\mathcal{S}$  上的最小值时才能出现. 但明显  $e$  在  $\mathcal{S}$  上可以取到零(对应自变量为  $v = 0, U = 0$ ), 矛盾! 这就证明了  $\mathcal{U} \supset \text{Int}\mathcal{S}$ .

6). 最后只需证明  $\mathcal{S} = \mathcal{K}^{\text{co}}$ .

首先注意到显然成立  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ , 从而由于  $\mathcal{S}$  是凸集, 就有  $\mathcal{K}^{\text{co}} \subset \mathcal{S}$ .

为证明  $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}^{\text{co}}$ , 考虑到  $\mathcal{S}$  也是由其端点生成的凸包, 只要证明  $\mathcal{S}$  的端点都落在  $\mathcal{K}$  中即可; 也就是说, 若  $(v, U) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$ , 要证明  $(v, U)$  不可能是  $\mathcal{S}$  的端点.

为此, 对上述  $(v, U)$ , 通过  $\mathbb{R}^2$  中适当坐标(旋转)变换, 使得矩阵  $v \otimes v - U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  成为对角阵; 它只有两个特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . 由于  $(v, U) \in \mathcal{S}$ , 必有  $\lambda_1 = \lambda_{\max} \leq 1$ . 由于  $(v, U) \notin \mathcal{K}$ , 必有  $\lambda_2 < 1$ . (否则,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , 那么  $v \otimes v - U = \text{Id}$ , 也就是  $(v, U) \in \mathcal{K}$ .)

现记  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  为  $\mathbb{R}^2$  中单位正交基向量, 设  $v = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2$ . 置

$$\bar{v} = \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{U} = v^1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \in \mathcal{S}_0^{2 \times 2}.$$

---

<sup>2</sup> 凸函数在定义域内部取到最大值, 考虑过极值点的下支撑平面, 可知该点的次微分必须是零, 从而函数在该极值点的邻域内是常数.

对任意实数  $t$ , 直接计算就有

$$\begin{aligned}
 & (v + t\bar{v}) \otimes (v + t\bar{v}) - (U + t\bar{U}) \\
 = & [v \otimes v - U] + t[v^1(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + 2v^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2] \\
 & + t^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - tv^1(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \\
 = & [v \otimes v - U] + (2tv^2 + t^2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.
 \end{aligned}$$

这表明  $(v + t\bar{v}) \otimes (v + t\bar{v}) - (U + t\bar{U})$  的第一特征值与  $v \otimes v - U$  的第一特征值相同(从而小于等于1), 而当  $|t|$  充分小时,  $(v + t\bar{v}) \otimes (v + t\bar{v}) - (U + t\bar{U})$  的第二特征值仍将小于1. 于是我们证明了  $(v + t\bar{v}, U + t\bar{U})$  和  $(v - t\bar{v}, U - t\bar{U})$  当  $t > 0$  充分小时仍在  $\mathcal{S}$  中. 所以  $(v, U)$  不可能是  $S$  的端点. 证毕.  $\square$

由上述引理, 命题3可由如下引理直接得出.

**引理6.** 存在几何常数  $c_0$ , 使得对任意  $C > 0$  及任意给定的  $(v, U) \in \text{Int}\mathcal{K}_C^{\text{co}}$ , 存在线段  $\sigma = [-(\bar{v}, \bar{U}), (\bar{v}, \bar{U})]$ , 满足如下性质:

- 线段  $\sigma' = (v, U) + \sigma = [(v, U) - (\bar{v}, \bar{U}), (v, U) + (\bar{v}, \bar{U})] \subset \mathcal{K}_C^{\text{co}}$ ;
- 存在  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,  $|a| = |b| = \sqrt{2C}$ ,  $a \neq \pm b$ , 以及比例常数  $\lambda > 0$ , 使得  $(\bar{v}, \bar{U}) = \lambda((a, a \otimes a) - (b, b \otimes b))$ ;
- $\text{dist}(\sigma', \partial\mathcal{K}_C^{\text{co}}) \geq \frac{1}{2}\text{dist}((v, U), \partial\mathcal{K}_C^{\text{co}})$ ;
- $|\bar{v}| \geq \frac{c_0}{\sqrt{C}}(2C - |v|^2)$ .

**证明.** 1. 对  $z = (v, U) \in \text{Int}\mathcal{K}_C^{\text{co}}$ , 通过过该点沿  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  各坐标方向作射线与  $\mathcal{K}_C$  相交, 可知存在有限个点  $z_i = (v_i, v_i \otimes v_i - C\text{Id}) \in \mathcal{K}_C$ , 其中  $v_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $|v_i|^2 = 2C$ , 使得这些点张成的多面体有相对于  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  拓扑的内部, 而  $z$  恰在这内部中(即  $z$  是此多面体的关于  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  拓扑的内点). 由于  $z$  是内点, 可稍许改变  $v_i$ , 使得当  $i \neq j$  时  $v_i \neq \pm v_j$ .

2. 由凸几何中的Carathéodory定理(见下文),  $z$  可以用  $\{z_j\}$  中至多5个点的凸组合表示. (注意这里  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_0^{2 \times 2}$  的维数是  $N = 4$ ). 所以我们可以设

$$z = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j z_j, \quad \lambda_j \in (0, 1), \quad \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1, \quad 1 \leq d \leq 4.$$

此外, 不妨假设  $\lambda_1 = \max_j \lambda_j$ . 那么对任意  $j > 1$ , 就有

$$\begin{aligned} z \pm \lambda_j(z_j - z_1) &= (\lambda_1 \mp \lambda_j)z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_{j-1} z_{j-1} \\ &\quad + (\lambda_j \pm \lambda_j)z_j + \lambda_{j+1} z_{j+1} + \cdots + \lambda_{d+1} z_{d+1}, \end{aligned}$$

它仍然在  $\mathcal{K}_C^{\text{co}}$  中. 作线段  $\sigma'_j = [z - \frac{\lambda_j}{2}(z_j - z_1), z + \frac{\lambda_j}{2}(z_j - z_1)]$ , 我们断言:

$$\text{dist}(\sigma'_j, \partial \mathcal{K}_C^{\text{co}}) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(z, \partial \mathcal{K}_C^{\text{co}}). \quad (2.51)$$

事实上, 设球  $B_\rho(z) \subset \mathcal{K}_C^{\text{co}}$ , 则  $\mathcal{K}_C^{\text{co}}$  包含  $B_\rho(z) \cup \{z \pm \lambda_j(z_j - z_1)\}$ . 由于  $\mathcal{K}_C^{\text{co}}$  是凸集, 它包含  $B_\rho(z) \cup \{z \pm \lambda_j(z_j - z_1)\}$  的凸包. 简单的几何关系就说明, 如果  $w \in \sigma'_j$ , 那么该凸包就包含球  $B_{\rho/2}(w)$ . 这也就证明了  $B_{\rho/2}(w) \subset \mathcal{K}_C^{\text{co}}$ , 即(2.51)式成立.

3. 另一方面, 由  $z - z_1 = \sum_{j=2}^{d+1} \lambda_j(z_j - z_1)$  可知

$$|v - v_1| \leq d \max_{j=2, \dots, N+1} \lambda_j |v_j - v_1| \leq N \max_{j=2, \dots, N+1} \lambda_j |v_j - v_1|. \quad (2.52)$$

设对  $k > 1$ , 成立  $\lambda_k |v_k - v_1| = \max_{j=2, \dots, N+1} \lambda_j |v_j - v_1|$ , 并置

$$(\bar{v}, \bar{U}) = \frac{1}{2} \lambda_k (z_k - z_1) = \frac{1}{2} \lambda_k (v_k - v_1, v_k \otimes v_k - v_1 \otimes v_1),$$

注意令  $a = v_k$ ,  $b = v_1$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \lambda_k$ ,  $\sigma = [-(\bar{v}, \bar{U}), (\bar{v}, \bar{U})]$  即得所求线段.

特别地, 由(2.52), 成立  $|v - v_1| \leq N \lambda_k |v_k - v_1| = 2N |\bar{v}|$ . 又注意到  $|v_1|^2 = 2C$ , 从而根据三角不等式,

$$\sqrt{2C} - |v| = |v_1| - |v| \leq |v - v_1| \leq 2N |\bar{v}|.$$

此外, 由于  $(v, U) \in \text{Int} \mathcal{K}_C^{\text{co}}$ , 由上一引理,  $|v| \leq \sqrt{2C}$ , 于是

$$\frac{1}{4N \sqrt{2C}} (2C - |v|^2) = \frac{1}{4N \sqrt{2C}} (\sqrt{2C} + |v|)(\sqrt{2C} - |v|) \leq \frac{1}{2N} (\sqrt{2C} - |v|) \leq |\bar{v}|.$$

证毕. □

**定理4 (Carathéodory定理).** 设点  $x \in \mathbb{R}^N$  落在点集  $P$  的凸包内, 则  $x$  可以写为  $P$  中至多  $N+1$  个点的凸组合.

**证明.** 1. 设 $x$ 是 $P \subset \mathbb{R}^N$ 的凸包中的一点. 这就是说, 存在 $P$ 中有限个点 $x_j$ , 使得 $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$ , 其中 $\lambda_j > 0$ 且 $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ .

2. 设 $k > N+1$  (否则, 毋需再证), 那么向量 $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ 都线性相关. 于是存在不全为零的实数 $\mu_2, \dots, \mu_k$ , 使得 $\sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = \mathbf{0}$ .

现在定义 $\mu_1 := -\sum_{j=2}^k \mu_j$ , 那么 $\sum_{j=1}^k \mu_j x_j = \mathbf{0}$ , 而且 $\sum_{j=1}^k \mu_j = 0$  且 $\mu_j$ 不全为零. 于是至少有一个 $\mu_j > 0$ , 且

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^k \mu_j x_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$$

对任意实数 $\alpha$ 都成立. 特别地, 取

$$\alpha := \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

注意 $\alpha > 0$ , 且对任意 $j = 1, \dots, k$ , 有 $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ , 而且 $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$ . 于是

$$x = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j,$$

其中 $\lambda_j - \alpha \mu_j$ 非负, 和为1, 且 $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$ . 换句话说,  $x$ 可由 $P$ 中至多 $k-1$ 个点的凸组合表示. 重复以上过程,  $x$ 可表为 $P$ 中至多 $N+1$ 个点的凸组合.  $\square$

## §2.4 扇形下解的构造

这一节我们说明, 对适当的黎曼初值

$$(\rho_-, v_- = (v_{-1}, v_{-2})^\top), \quad (\rho_+, v_+ = (v_{+1}, v_{+2})^\top),$$

可通过代数计算说明存在至少一个可容许扇形下解.

### §2.4.1 扇形下解满足的代数条件

以下我们假设所有量都只依赖于 $t, x_2$ . 作扇形分解 $P_0 = P_- = \{t > 0, x_2 < \nu_- t\}, P_2 = P_+ = \{t > 0, x_2 > \nu_+ t\}, P_1 = \{t > 0, \nu_- t < x_2 < \nu_+ t\}$ , 其中 $\nu_-, \nu_+$ 是待

定常数. 假设对应扇形下解具有如下形式:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \rho_- I_{P_-} + \rho_1 I_{P_1} + \rho_+ I_{P_+}, \quad \bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)^\top, \\ \bar{v}_1 &= v_{-1} I_{P_-} + \alpha I_{P_1} + v_{+1} I_{P_+}, \quad \bar{v}_2 = v_{-2} I_{P_-} + \beta I_{P_1} + v_{+2} I_{P_+}, \\ \bar{U} &= U_- I_{P_-} + U_1 I_{P_1} + U_+ I_{P_+}, \quad U_\pm = v_\pm \otimes v_\pm - \frac{|v_\pm|^2}{2} \text{Id}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中  $\rho_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  也是待定实数. 注意这意味着在  $P_1$  中速度为  $v_1 = (\alpha, \beta)^\top$ , 密度为  $\rho_1$ .

1. 首先看下解条件  $v_1 \otimes v_1 - U_1 < C_1 \text{Id}$ , 这里  $C_1$  也是待定实数. 由上述假设, 这相当于矩阵

$$\begin{pmatrix} C_1 + \gamma - \alpha^2 & \delta - \alpha\beta \\ \delta - \alpha\beta & C_1 - \gamma - \beta^2 \end{pmatrix}$$

正定. 这等价于要求其行列式和迹都是正数:

$$(C_1^2 - \alpha^2 + \gamma)(C_1^2 - \beta^2 - \gamma) - (\delta - \alpha\beta)^2 > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 < 2C_1. \quad (2.53)$$

2. 扇形下解在分布意义下满足下方程:

$$\begin{aligned}\partial_t \bar{\rho} + \partial_2(\bar{\rho} \bar{v}_2) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\rho} \bar{v}_1) + \partial_2(\bar{\rho} \bar{U}_{12}) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\rho} \bar{v}_2) + \partial_2(\bar{\rho} \bar{U}_{22}) + \partial_2(p(\bar{\rho})) + \sum_{i=0}^2 \rho_i C_i I_{P_i} &= 0.\end{aligned}$$

注意这里  $C_0 = \frac{|v_-|^2}{2}$ ,  $C_2 = \frac{|v_+|^2}{2}$ ,  $\rho_0 = \rho_-$ ,  $\rho_2 = \rho_+$ . 由于要求的解是分片常值的, 根据Rankine-Hugoniot 条件, 不难看出在左侧间断线  $x_2 = v_- t$  上要满足如下条件:

$$(\rho_- - \rho_1)v_- = \rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta, \quad (2.54)$$

$$(\rho_- v_{-1} - \rho_1 \alpha)v_- = \rho_- v_{-1} v_{-2} - \rho_1 \delta, \quad (2.55)$$

$$(\rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta)v_- = \frac{1}{2} \rho_- v_{-2}^2 + \rho_1 \gamma + p(\rho_-) - p(\rho_1) + \frac{1}{2} \rho_- v_{-2}^2 - \rho_1 C_1. \quad (2.56)$$

类似的,在右侧间断线 $x_2 = v_+ t$ 上要满足如下条件:

$$(\rho_1 - \rho_+)v_+ = \rho_1\beta - \rho_+v_{+2}, \quad (2.57)$$

$$(\rho_1\alpha - \rho_+v_{+1})v_+ = \rho_1\delta - \rho_+v_{+1}v_{+2}, \quad (2.58)$$

$$(-\rho_1\beta - \rho_+v_{+2})v_+ = -\rho_1\gamma - \frac{1}{2}\rho_+v_{+2}^2 + p(\rho_1) - p(\rho_+) + \rho_1C_1 - \frac{1}{2}\rho_+v_{+2}^2. \quad (2.59)$$

3. 上述可容许扇形下解还要在广义函数意义下满足如下能量耗散方程:

$$\partial_t(\bar{\rho}\varepsilon(\bar{\rho})) + \sum_{i=0}^2 \partial_t(\rho_i C_i I_{P_i}) + \partial_2((\bar{\rho}\varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho}))\bar{v}_2) + \sum_{i=0}^2 \partial_2(\rho_i C_i \bar{v}_2 I_{P_i}) \leq 0.$$

按照推导Ramkine-Hugoniot条件的方法,类似可知,在左侧间断线 $x_2 = v_- t$ 上要成立

$$\begin{aligned} & (\rho_- \varepsilon(\rho_-) - \rho_1 \varepsilon(\rho_1))v_- + (\rho_- \frac{|v_-|^2}{2} - \rho_1 C_1)v_- \\ & \leq (\rho_- \varepsilon(\rho_-) + p(\rho_-))v_{-2} - (\rho_1 \varepsilon(\rho_1) + p(\rho_1))\beta + (\rho_- v_{-2} \frac{|v_-|^2}{2} - \rho_1 C_1 \beta), \end{aligned} \quad (2.60)$$

在右侧间断线 $x_2 = v_+ t$ 上要成立

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \varepsilon(\rho_1) - \rho_+ \varepsilon(\rho_+))v_+ + (\rho_1 C_1 - \rho_+ \frac{|v_+|^2}{2})v_+ \\ & \leq (\rho_1 \varepsilon(\rho_1) + p(\rho_1))\beta - (\rho_+ \varepsilon(\rho_+) + p(\rho_+))v_{+2} + (\rho_1 C_1 \beta - \rho_+ v_{+2} \frac{|v_+|^2}{2}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

4. 总之, 我们有

$$v_+, v_-, \rho_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, C_1$$

八个未知量和 $\rho_\pm, v_\pm$ 六个参数可供选择,以满足十个非线性代数方程(或不等式),所以一般来讲似乎可以构造很多扇形下解.但实际上构造下解并非轻而易举,既需要了解黎曼问题的解的形态,也要会技巧性的代数运算.特别注意,如果多增加一个间断,则会增加四个代数方程(不等式),但会多出来六个未知量.所以有时候人为增加间断个数,会相对更容易地构造出扇形下解.

### §2.4.2 带横向速度的一维非定常等熵欧拉方程组的黎曼问题

为计算方便起见, 下面以浅水波方程(即气体状态方程为 $p = \rho^2$ )为例, 考虑压缩波对应的黎曼初值条件情形扇形下解的构造. 为此, 我们需要研究如下欧拉方程组:

$$\partial_t \rho + \partial_2(m_2) = 0, \quad (2.62)$$

$$\partial_t m_1 + \partial_2\left(\frac{m_1 m_2}{\rho}\right) = 0, \quad (2.63)$$

$$\partial_t m_2 + \partial_2\left(\frac{m_2^2}{\rho} + p(\rho)\right) = 0. \quad (2.64)$$

这里 $\rho(x_2, t)$ 是质量密度,  $m(x_2, t) = \rho(x_2, t)v(x_2, t)$ 是动量, 而 $v = (v_1, v_2)^\top$ 是速度.

直接计算可知该方程的三个特征值及其对应特征向量分别是

$$\lambda_1 = v_2 - c, \quad \lambda_2 = c, \quad \lambda_3 = v_2 + c,$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 - c \end{pmatrix}^\top, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 + c \end{pmatrix}^\top,$$

其中 $c = \sqrt{p'(\rho)}$ 是音速. 显然 $\lambda_1, \lambda_3$ 是真正非线性的,  $\lambda_2$ 是线性退化的. 该方程组的三个黎曼不变量分别是

$$w_3 = v_2 + \int_0^\rho \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau, \quad w_2 = v_1, \quad w_1 = v_2 - \int_0^\rho \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau.$$

由黎曼不变量的性质, 过相空间点 $(\rho_-, v_-)$ 的1-疏散波曲线是过该点的曲面 $\{w_3 = \text{常数}\}$ 与 $\{w_2 = \text{常数}\}$ 相交得到的曲线, 即疏散波上状态 $(\rho, v)$ 要满足关系式

$$v_1 = v_{-1}, \quad v_2 + 2\sqrt{2}\sqrt{\rho} = v_{-2} + 2\sqrt{2}\sqrt{\rho_-}.$$

这里利用了状态方程 $p(\rho) = \rho^2$ . 所以, 如果取 $0 < \rho_- < \rho_+$ ,  $v_- = (-\frac{1}{\rho_+}, 2\sqrt{2}(\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho_-}))^\top$ ,  $v_+ = (-\frac{1}{\rho_+}, 0)^\top$ , 就可算得以 $(\rho_+, v_+)$ 和 $(\rho_-, v_-)$ 分别为左右初值的黎曼问题的解就是个1-疏散波. 换句话说, 如果以 $(\rho_-, v_-)$ 和 $(\rho_+, v_+)$ 分别为左右初值, 向时间 $t \rightarrow \infty$ 解上述欧拉方程, 就可得到 $\{x_2 \in \mathbb{R}, t < 0\}$ 上一个Lipschitz连续的1-压缩波解.

现在以 $(\rho_-, v_-)$ 和 $(\rho_+, v_+)$ 分别为左右初值, 向 $t > 0$ 方向求解黎曼问题. 它的解包含一个1-激波和一个2-疏散波. 注意在上述下解构造中间断线未必是激波, 所以最后得到的无穷多弱解并非是在原黎曼问题的两个激波之间加振荡得到的.

但我们说过不能用黎曼问题的解作扇形下解, 实际上该黎曼问题的解对参数选取有一定参考价值, 但也不能完全相同. 实际上, 可给定参数如下:

$$\begin{aligned}\rho_- = 1, \quad v_- = \left(-\frac{1}{4}, 2\sqrt{2}\right)^\top, \quad \rho_+ = 4, \quad v_+ = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)^\top, \quad \rho_1 = \frac{15}{7}, \quad \alpha = -\frac{1}{4}, \\ \beta = \delta = 0, \quad \nu_- = -\frac{7\sqrt{2}}{4}, \quad \nu_+ = 0, \quad C_1 = 3, \quad \gamma = -\frac{244}{105},\end{aligned}$$

那么直接计算, 不难发现它们确实满足前述所要求的代数关系式.

此外, 如果取参数为

$$\begin{aligned}\rho_- = 1, \quad v_- = (0, 2\sqrt{2})^\top, \quad \rho_+ = 4, \quad v_+ = (0, 0)^\top, \quad \rho_1 = \frac{15}{7}, \quad \alpha = 0, \\ \beta = \delta = 0, \quad \nu_- = -\frac{7\sqrt{2}}{4}, \quad \nu_+ = 0, \quad C_1 = \frac{356}{105}, \quad \gamma = -\frac{29}{15},\end{aligned}$$

那么不难验证, 对应的可容许扇形下解满足能量守恒.

### §2.4.3 一维等熵欧拉方程组的黎曼问题

对于欧拉坐标下的一维等熵可压缩欧拉方程组的黎曼问题

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x m = 0, \quad \partial_t(m) + \partial_x(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)) = 0, \\ (\rho, m)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_-, \rho_- v_-), & x < 0, \\ (\rho_+, \rho_+ v_+), & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.65)$$

其中 $m = \rho v$ 是动量, 若假设 $\rho_\pm > 0, p(\rho) = \rho^\gamma, \gamma \geq 1$ , 有如下结论[26, 37]:

1) 如果

$$v_+ - v_- \geq \int_0^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_0^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau,$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似解, 它包括1-疏散波和3-疏散波, 中间状态是真空;

2) 如果

$$\left| \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \right| < v_+ - v_- < \int_0^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_0^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau,$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似解, 它包括1-疏散波和3-疏散波, 中间状态 $(\rho_m, \rho_m v_m)$ 是如下方程组的唯一解:

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_{\rho_m}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau, \\ v_m &= v_- + \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau, \quad \rho_m < \min\{\rho_-, \rho_+\}; \end{aligned}$$

3) 如果

$$\left| \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \right| = v_+ - v_-,$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似解: 当 $\rho_- > \rho_+$ 时它只包含1-疏散波;  
当 $\rho_- < \rho_+$ 时它只包含3-疏散波;

4) 如果 $\rho_- > \rho_+$ , 且

$$-\sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- - \rho_+}} < v_+ - v_- < \int_{\rho_+}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau,$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似熵解, 它包括1-疏散波和3-激波, 中间状态 $(\rho_m, \rho_m v_m)$ 是如下方程组的唯一解:  $\rho_+ < \rho_m < \rho_-$ ,

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_+)(p(\rho_m) - p(\rho_+))}{\rho_m \rho_+}}, \\ v_m &= v_- + \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau; \end{aligned}$$

5) 如果 $\rho_- < \rho_+$ , 且

$$-\sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- - \rho_+}} < v_+ - v_- < \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau,$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似熵解, 它包括1-激波和3-疏散波, 中间状态 $(\rho_m, \rho_m v_m)$ 是如下方程组的唯一解:  $\rho_- < \rho_m < \rho_+$ ,

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= \int_{\rho_m}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}}, \\ v_m &= v_- - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}}; \end{aligned}$$

6) 如果

$$v_+ - v_- = - \sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- \rho_+}},$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似熵解: 如果  $\rho_- < \rho_+$ , 它只包含1-激波;  
如果  $\rho_- > \rho_+$ , 它只包含3-激波;

7) 如果

$$v_+ - v_- < - \sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- \rho_+}},$$

则上述黎曼问题存在唯一的自相似熵解, 它包括1-激波和3-激波, 中间状态 $(\rho_m, \rho_m v_m)$ 是如下方程组的唯一解:  $\rho_m > \max\{\rho_-, \rho_+\}$ ,

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}} - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_+)(p(\rho_m) - p(\rho_+))}{\rho_m \rho_+}}, \\ v_m &= v_- - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}}. \end{aligned}$$

## §2.5 待解决的问题

- 对方程(2.62)-(2.64)给定初值( $\rho_- = \rho_+ = 1, v_\pm = (\pm 1, 0)^\top$ ) 的黎曼问题, 显然它的解只含有一个接触间断( $x_1$  方向速度分量有跳跃). 此时对应高维问题能否构造出无穷多可容许弱解? 只含有接触间断和疏散波的情形呢? 或者用相对熵方法证明唯一性?

2. 对二维非定常流活塞问题或三维定常超音速流绕直楔形体流, 能否构造出无穷多可容许弱解?
3. 所构造的无穷多可容许弱解是否是某个更一般的解的不同表象?

## §2.6 文献评注

1. 本章主要内容源于[9][8][5]. 满足能量守恒的扇形下解数据取自[22]. 文[35]是对这里的结果的一个简短的非技术性的综述, 可供参考.

2. 本章介绍了目前构造无穷多弱解的基本方法之一: Baire纲方法. 很多进一步的工作都集中在如何构造各类可容许下解上.

例如在[26]中Chiodaroli和Kreml证明了对多方气体的等熵欧拉方程, 如果一维黎曼问题含有两个激波, 则以之为初值的高维问题可容许弱解就不唯一, 而且在绝热指数 $\gamma \in (1,3)$ 时, 某些构造出的可容许弱解的能量关于时间的耗散率比自相似的黎曼问题的解还要快, 从而说明Dafermos提出的熵极大耗散条件不足以保证可容许弱解唯一. Březina, Chiodaroli和Kreml在[28]中对方程(2.62)-(2.64)包含至少一个激波和接触间断的黎曼初值, 构造了扇形下解, 从而说明了对应初值等熵欧拉方程组有无穷多可容许弱解. 在[33]中他们对一大类解含一个激波和一个疏散波的黎曼初值构造出了扇形下解, 从而对这类初值也证明了等熵欧拉方程组有无穷多可容许弱解.

Markfelder和Klingenberg[37]证明了只要黎曼问题(2.65)的解包含激波, 就会有无穷多个可容许弱解. 该文对只有一个激波的情形, 通过附加状态, 得到四个扇形区域构造下解, 值得参考.

[23]中, 对状态方程为 $p = -1/\rho$ 的Chaplygin气体欧拉方程组, Březina, Kreml 和Mácha 用本章介绍的理论框架, 通过构造下解证明了黎曼问题的解包含delta激波或接触间断时就会有无穷多弱解. (由于该系统是线性退化的, 所有间断都是接触间断.) Baba等人在[25]中将本章结论推广到了二维非定常非等熵欧拉方程情形, 说明了只要是在一维情形生成两个激波(也可以再加一个接触间断)的黎曼初值, 都有无限个可容许弱解. 此外, [42]也说明了对给定滑移边界条件的有界区域上完全欧拉方程组的初边值问题, 存在 $L^\infty$ 初值使得有无穷多个可容许弱解, 从而对应Young测度值解也不唯一. Klingenberg和Markfelder在[36]中得出了熵守恒的非等熵(或等熵)理想可压

缩磁流体力学方程初边值问题可容许弱解的不唯一性.

另一种构造无穷多弱解的方法是凸积分方法. 本质上两种方法类似, 但凸积分主要是一步步通过迭代来添加振荡的.

罗天文等在[39]中考虑了带零阶项的等熵欧拉方程组, 说明无论是阻尼还是旋转效应等, 都不足以阻止出现无穷多可容许弱解. 他们的一个观察是用与零阶项相配的平面波加到方程中, 其证明方法是凸积分方法.

Chiodaroli 等在文[27]中考虑了带 Stratonovich 随机微分的可压缩完全 Euler 方程组, 证明了在概率意义下强的满足熵条件的无穷多弱解的存在性. 基本方法是假设初始密度是分片常值的随机变量, 把这种随机微分方程转化为含随机参数的不可压 Euler 方程组, 再将这一章介绍的方法推广到随机情形[21]得到结论.

3. 陈贵强和陈俊在[24]中用相对熵方法证明了只含有疏散波和真空的欧拉方程的解的唯一性. Feireisl 等证明了类似的结果[31].

4. 本章介绍思想及方法源于 John Nash 对黎曼流形在高维欧氏空间的等距嵌入问题的研究, 以及 Gromov 的后续工作, 与微分几何, 湍流, Onsager 猜想等都有密切关系. 相关综述性论文及说明思想方法的非技术性论文, 如 [6][11][4] 等, 建议详读. [6] 还列出了一些待解决的问题(部分已解决), 值得关注!

5. 在[29]中, 作者们把扇形下解的概念推广到了分片连续函数情形. 他们将压缩波形成的初值条件小扰动, 利用特征值满足 Burgers 方程, 反向构造出  $C^1$  的压缩波. 由此初值条件是一种广义黎曼问题, 而下解的构造需要求解一些常微分方程(注意下解在每个扇形中是函数, 要点态满足欧拉方程). 在[12]中, Chiodaroli 还研究了周期区域上等熵欧拉方程的初值问题, 通过考虑半定常欧拉方程组(将质量守恒方程简化为  $\operatorname{div}_x(m) = 0$ , 其中  $m = \rho v$ ), 证明对给定的  $C^1$  的密度  $\rho_0$ , 可找到有界的动量为初值, 使得 Cauchy 问题有无穷多个可容许弱解  $\rho_0, m$ , 而且有光滑截断函数  $\chi(t)$  使得  $t \in [0, T]$  时  $|m(x, t)|^2 = \rho_0(x)\chi(x)$ . 这篇论文对相关想法及其缘由和证明细节介绍的比较细致, 值得仔细阅读.(例如: 松弛后线性微分方程的特征方向就是振荡添加的方向, 要对非线性代数集合按此方向作凸包, 或者给予泛函分离定理定义对偶意义上的凸包. 在此凸包中取线段, 即得线性微分方程振荡解. 另参考该文 24 页, 对本证引理 3 证明的另外一种逐次逼近的写法.)

6. 三种线性化方法: (1)用微分来局部线性化(小扰动);(2)变换法: Fourier 变换或者Hodograph变换等; (3) 松弛法: 微分包含.

7. 生成局部光滑解的初值叫做“正则”(regular)初值, 而出现无穷多可容许弱解的初值叫“叛逆”(wild)初值. 对欧拉方程组, 叛逆初值如何分布? Feireisl 等在[30]中给出了一些新的概念, 并用耗散Young测度值解及其弱-强唯一性等证明了叛逆初值构成 $L^1$ 中的一个疏朗集(它的补集包含一个 $L^1$ 的开稠集). 这篇论文还指出构造无穷多弱解的凸积分方法与欧拉方程的分裂有关(速度场的Helmholtz 分解), 有一定启发性(类似思路也参见文[32]). Breit, Feireisl 和Hofmanová还将这种方法推广到了带随机项的等熵可压欧拉方程[38].

8. 如上所述, 除本章介绍的Baire纲方法外, 另外一种构造无穷多解的方法是凸积分方法, 通过不断迭代添加振荡, 减少雷诺张量(弱收敛极限下 $\bar{v} \otimes \bar{v} - \overline{v \otimes v}$ , 其中 $\bar{v}$ 代表序列 $v_k$ 弱收敛的极限). 这种方法除上述[32]等文外, 可用于研究SQG方程(曲面准地转方程), Boussinesq方程, 不可压欧拉方程, Navier-Stokes 方程等弱解的不唯一性, 也与Onsager 猜想中构造高正则叛逆弱解密切相关(参见[43, 45, 44, 47, 52, 34, 46] 及其参考文献).

9. 用凸积分方法也可构造某些抛物方程或变分问题的无穷多个Lipschitz解, 见[40, 41]及其参考文献等.

10. 对可压欧拉方程组带区域边界情形无穷多可容许弱解的构造, 相关研究工作几乎没有. 对不可压欧拉方程, 参见[18], 其中作者们考虑了圆盘内流体初值有涡层的情形(内侧流体与外侧流体流动角速度相反).

### 第三章 守恒律方程组的Onsager猜想

对具有物理背景的一阶拟线性守恒律方程组, 其经典解往往还满足一个附加守恒律方程, 数学上称为熵守恒方程. 对于包含间断的可容许弱解, 熵方程一般不再成立, 而变为一个不等式. 那么, 可容许弱解的什么样的正则性就能保证熵方程仍然成立呢? 这对于理解湍流, 当然是个相对比较简单却又基本的问题. Onsager [48] 对于不可压缩欧拉方程, 猜测若速度场  $u$  是 Hölder 连续的, 即  $u \in C^{0,\alpha}$ , 则当  $\alpha > 1/3$  时, 对应弱解的能量是守恒的; 而当  $\alpha < 1/3$  时, 可以构造出能量不守恒的叛逆解. 文[50]对一般守恒律方程, 证明了当解在  $C^{0,\alpha}$  中, 且  $\alpha > 1/3$  时熵方程成立. 这一章我们介绍其研究方法和结论.

#### §3.1 局部熵守恒

1. 一阶守恒律方程组. 设  $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$  是个开集, 在其中有如下守恒律方程组:

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \partial_i A_i(U) = 0. \quad (3.1)$$

这里  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $x = (x_0, \dots, x_d) \in Q$ ; 未知函数是  $x \mapsto u(x) \in \mathcal{M} \subset \subset \mathbb{R}^k$ , 其中  $\mathcal{M}$  是相空间  $\mathbb{R}^k$  的一个有界的凸开集, 而  $A_0, A_1, \dots, A_d$  是  $\mathcal{M}$  到  $\mathbb{R}^l$  的  $C^2$  的映射. 我们记  $A_i = (A_i^j)_{1 \leq j \leq l}$  是列向量. 所以(3.1)是具有  $d+1$  个自变量,  $k$  个未知量和  $l$  个方程的一阶拟线性方程组.

2. 广义熵. 设

$$B : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^l; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^l$$

是个  $C^1$  映射, 用行向量表示为

$$B(u) = (b_1(u), \dots, b_l(u)).$$

我们说  $B$  定义了一个广义熵, 如果对  $i = 0, 1, \dots, d$ , 存在  $C^2$  的流函数

$$q_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R},$$

使得

$$B(u) \nabla_u A_i(u) = \nabla_u q_i(u). \quad (3.2)$$

注意这里  $B(u)$  是  $l$ -维行向量, Jacobi 矩阵  $\nabla_u A_i(u)$  是  $l \times k$  矩阵(对列向量  $A_i$  的每一个元素按行取梯度得到的矩阵), 而梯度  $\nabla_u q_i(u)$  是  $k$ -维行向量.

如果  $u$  是连续可微函数, 则(3.1) 可写作非散度形式:

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \nabla_u A_i(u) \partial_i u = 0.$$

注意这里  $u$  是列向量, 从而  $\partial_i u$  也是列向量, 上述乘法就是矩阵乘法. 上式两端左乘行向量  $B(u)$ , 利用(3.2), 就得到

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \nabla_u q_i(u) \partial_i u = 0.$$

写成散度形式, 就是

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \partial_i q_i(u) = 0. \quad (3.3)$$

由此, 如果(3.1)沿  $x_0$  方向是双曲的, 则  $q_0$  就是我们常说的熵, 而  $(q_1, \dots, q_d)$  是熵流.<sup>1</sup>

### 3. 主要定理.

**定理1.** 设  $(q_0, \dots, q_d)$  是(3.1)的一个广义熵. 设  $u$  是(3.1)的一个弱解, 且对任意  $K \subset\subset Q$ , 存在  $\alpha > \frac{1}{3}$  (可依赖于  $K$ ), 使得  $u \in C^{0,\alpha}(K)$ . 那么在  $\mathcal{D}'(Q)$  广义函数意义下, 成立等式

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \partial_i q_i(u) = 0. \quad (3.4)$$

**证明.** 我们要证明: 对任意  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ , 成立

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \langle \partial_i \varphi, q_i(u) \rangle_x = 0. \quad (3.5)$$

这里

$$\langle f, g \rangle_x = \int_Q f(x) g(x) dx$$

代表关于  $x$  在  $Q$  上积分.

---

<sup>1</sup> 在“数学物理方程”课程中, 我们学过对波动方程  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , 应用能量积分方法, (乘  $u_t$  后用莱布尼兹法则,) 会得到关于能量的一个方程  $\partial_t[(u_t)^2 + (u_x)^2] - \partial_x[2u_t u_x] = 0$ . 这就是从属于波动方程的熵方程.

1). 对给定的  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ , 由欧式空间的分离性质, 可作开集  $Q_1, Q_2, Q_3$ , 使得

$$\text{supp } \varphi \subset\subset Q_1 \subset\subset Q_2 \subset\subset Q_3 \subset\subset Q.$$

对  $i = 1, 2$ , 存在依赖于  $\text{supp } \varphi$  和  $Q$  的常数  $\epsilon_0 > 0$ , 使得

$$\sup_{x \in Q_i, y \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus Q_{i+1}} |x - y| > \epsilon_0. \quad (3.6)$$

置  $C^\infty$  截断函数  $I : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow [0, 1]$ , 满足

$$I(x) = \begin{cases} 0, & x \notin Q_3, \\ 1, & x \in Q_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

对  $T \in \mathcal{D}'(Q)$ , 可将之延拓为  $\bar{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$ :

$$\langle \bar{T}, \psi \rangle = \langle T, I\psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1}).$$

记标准的Friedrichs磨光核(即非负且径向对称, 积分为1的伸缩函数族)为

$$x \mapsto \rho_\varepsilon(x), \quad \text{supp } \rho_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(0).$$

设  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$ , 定义

$$T^\varepsilon = T * \rho_\varepsilon.$$

下面我们总要求  $\varepsilon \in (0, \epsilon_0/2)$ .

2). 将(3.1)的弱解  $u$  延拓为  $\bar{u} = uI$ . 注意到在  $Q_2$  上  $\bar{u} = u$ , 从而在  $\mathcal{D}'(Q_2)$  意义下成立

$$\sum_{0 \leq i \leq d} \partial_i A_i(\bar{u}) = 0. \quad (3.8)$$

此外, 由定理条件, 由于  $Q_2 \subset\subset Q$ , 从而  $\bar{u} \in C^{0,\alpha}(Q_2)$ , 且  $\alpha > 1/3$ .

对任意  $\Psi \in C_c^2(Q_1; \mathcal{L}(\mathbb{R}^l; \mathbb{R})) = C_c^2(Q_1; \mathbb{R}^l)$ , 成立

$$\Psi^\varepsilon \in \mathcal{D}(Q_2; \mathbb{R}^l).$$

于是从(3.8)得到

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Psi^\varepsilon, \sum_{0 \leq i \leq d} \partial_i A_i(\bar{u}) \rangle = - \sum_{0 \leq i \leq d} \langle (\partial_i \Psi)^\varepsilon, A_i(\bar{u}) \rangle = - \sum_{0 \leq i \leq d} \langle \partial_i \Psi, (A_i(\bar{u}))^\varepsilon \rangle \\ &= - \sum_{0 \leq i \leq d} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i \Psi(x) \cdot A_i(\bar{u}^\varepsilon(x)) dx - \sum_{0 \leq i \leq d} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i \Psi(x) \cdot ((A_i(\bar{u}))^\varepsilon - A_i(\bar{u}^\varepsilon)) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

这里第二个等号用到了分部积分, 磨光与求导可换序, 第三个等号用了性质  $\int f^\varepsilon g = \int fg^\varepsilon$ .

由于  $\varphi$  已固定, 且  $\text{supp } \varphi \subset Q_1$ , 而  $\varphi B(\bar{u}^\varepsilon) \in C_c^2(Q_1, \mathbb{R}^l)$ , 所以可在(3.9)中将  $\Psi$  换成  $\varphi B(\bar{u}^\varepsilon)$ . 那么(3.9)可以写作

$$0 = J_\varepsilon + K_\varepsilon,$$

其中

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= - \sum_{0 \leq i \leq d} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i (\varphi B(\bar{u}^\varepsilon)) \cdot A_i(\bar{u}^\varepsilon)(x) dx, \\ K_\varepsilon &= \sum_{0 \leq i \leq d} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i (\varphi B(\bar{u}^\varepsilon)) ((A_i(\bar{u}^\varepsilon(x)) - (A_i(\bar{u}))^\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

我们看到  $J_\varepsilon$  相当于将(3.1) 中弱解磨光后得到的项, 而  $K_\varepsilon$  是对应误差项. 从  $J_\varepsilon$  可以利用熵守恒方程.

3). 利用广义熵  $B(u)$  的定义, 不难计算

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= - \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i (\varphi B(\bar{u}^\varepsilon)) \cdot A_i(\bar{u}^\varepsilon) dx \\ &= \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi B(\bar{u}^\varepsilon) \cdot \partial_i A_i(\bar{u}^\varepsilon) dx \\ &= \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \underbrace{\varphi B(\bar{u}^\varepsilon) \nabla_u A_i(\bar{u}^\varepsilon)}_{\nabla_u q_i(\bar{u}^\varepsilon)} \partial_i \bar{u}^\varepsilon dx \\ &= \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi \partial_i q_i(\bar{u}^\varepsilon) dx \\ &= - \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i \varphi q_i(\bar{u}^\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

由于  $\bar{u} \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^{d+1})$ , 从而当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $\bar{u}^\varepsilon$  一致收敛到  $\bar{u}$ . 于是我们得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = - \sum_{i=0}^d \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \partial_i \varphi q_i(\bar{u}) dx = \sum_{i=0}^d \langle \varphi, \partial_i q_i(u) \rangle_x. \quad (3.10)$$

这样一来, 为了证明熵守恒

$$\sum_{i=0}^d \partial_i q_i(u) = 0$$

成立, 就只需要证明, 当  $\alpha > 1/3$  时,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon = 0$ .

4). 为此, 我们断言, 有如下估计:

$$\begin{aligned} & \|\partial_i(\varphi B(\bar{u}^\varepsilon))\|_{L^\infty(Q_1)} \\ \leq & \|\varphi\|_{C^1(Q_1)} \|B\|_{C^0(\mathcal{M})} + C \|\varphi\|_{L^\infty(Q_1)} \|B\|_{C^1(\mathcal{M})} \|u\|_{C^{0,\alpha}(Q_2)} \varepsilon^{\alpha-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \|A_i(\bar{u}^\varepsilon) - (A_i(\bar{u}))^\varepsilon\|_{L^\infty(Q_1)} \\ \leq & C \|A_i\|_{C^2(\mathcal{M})} \|u\|_{C^{0,\alpha}(Q_2)}^2 \varepsilon^{2\alpha}, \quad i = 0, \dots, d. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由此, 注意到  $\bar{u}$  连续且有紧支集, 所以诸如  $\|B\|_{C^0(\mathcal{M})}$ ,  $\|A_i\|_{C^2(\mathcal{M})}$  之类的项有界, 就得到

$$\|K_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_1)} \leq (C_1 + C_2 \varepsilon^{\alpha-1}) C_3 \varepsilon^{2\alpha} = O(1) \varepsilon^{3\alpha-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

估计式(3.12)将由下节一般的交换子估计得到. 下面证明(3.11). 利用莱布尼兹法则, 这里关键是估计

$$\boxed{\|\partial_i B(\bar{u}^\varepsilon)\|_{L^\infty(Q_1)} \leq C \|u\|_{C^{0,\alpha}(Q_2)} \|B\|_{C^1(\mathcal{M})} \varepsilon^{\alpha-1}.} \quad (3.13)$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \partial_i B(\bar{u}^\varepsilon(x)) &= \nabla_u B(\bar{u}^\varepsilon) \partial_i \bar{u}^\varepsilon(x), \\ \partial_i \bar{u}^\varepsilon(x) &= \partial_i \int \bar{u}(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy = \int \bar{u}(y) \partial_i \rho_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int \bar{u}(y) (\partial_i \rho)_\varepsilon(x-y) dy = \frac{1}{\varepsilon} \int \bar{u}(x-y) (\partial_i \rho)_\varepsilon(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int (\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x)) (\partial_i \rho)_\varepsilon(y) dy, \end{aligned} \quad (3.14)$$

(利用散度定理,  $\int (\partial_i \rho)_\varepsilon(y) dy = 0$ ,) 从而

$$\begin{aligned} |\partial_i \bar{u}^\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\bar{u}\|_{C^\alpha(Q_2)} \int |y|^\alpha \frac{1}{\varepsilon^{d+1}} |D\rho(\frac{y}{\varepsilon})| dy \\ &= \frac{\|\bar{u}\|_{C^{0,\alpha}(Q_2)}}{\varepsilon} \varepsilon^\alpha \int |z|^\alpha |D\rho(z)| dz \quad (y = \varepsilon z) \\ &\leq C \|\bar{u}\|_{C^{0,\alpha}(Q_2)} \varepsilon^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

由此式和(3.14), 就得到(3.13).  $\square$

### §3.2 一个磨光与非线性复合的交换子的估计

这一节我们证明如下一般的结论.

**定理2.** 对任意  $F \in C^2(\mathcal{M}; \mathbb{R}^l)$  和  $v \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{M})$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 成立不等式

$$\|F(v)^\varepsilon - F(v^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq C(\|F\|_{C^2(\mathcal{M})}) \|v\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)}^2 \varepsilon^{2\alpha}. \tag{3.16}$$

**证明.** 1). 如果  $F$  是线性映射, 则  $F(v) = Av + b$ , 其中  $A$  是  $l \times k$  常数矩阵,  $b$  是  $l$ -维列向量. 此时  $F(v)^\varepsilon = (Av)^\varepsilon + b^\varepsilon = Av^\varepsilon + b = F(v^\varepsilon)$ , 即  $F(v)^\varepsilon - F(v^\varepsilon) = 0$ . 所以证明的关键在于对  $F$  适当展开到二阶.

2). 由定义, 有

$$\begin{aligned} &|F(v)^\varepsilon(x) - F(v^\varepsilon(x))| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}_y^d} F(v(x-y)) \rho_\varepsilon(y) dy - F(v^\varepsilon(x)) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}_y^d} (F(v(x-y)) - F(v^\varepsilon(x))) \rho_\varepsilon(y) dy \right|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

我们计算

$$\begin{aligned}
 & F(v(x-y)) - F(v^\varepsilon(x)) \\
 = & F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x))|_{s=1}^{s=0} = - \int_0^1 \frac{d}{ds} F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) ds \\
 = & -s \frac{d}{ds} F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) \Big|_0^1 + \int_0^1 s \frac{d^2}{ds^2} F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) ds \\
 = & -\nabla_v F(v^\varepsilon(x))(v^\varepsilon(x) - v(x-y)) + \int_0^1 s \frac{d^2}{ds^2} F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) ds.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

将第一项代入(3.17), 就有

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbb{R}_y^d} (\nabla_v F(v^\varepsilon(x))) (v^\varepsilon(x) - v(x-y)) \rho_\varepsilon(y) dy \\
 = & (\nabla_v F(v^\varepsilon(x))) \left( -v^\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}_y^d} \rho_\varepsilon(y) dy + \int_{\mathbb{R}_y^d} v(x-y) \rho_\varepsilon(y) dy \right) \\
 = & (\nabla_v F(v^\varepsilon(x))) (-v^\varepsilon(x) + v^\varepsilon(x)) \\
 = & 0.
 \end{aligned}$$

3). 再算(3.18)中第二项:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{ds^2} F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) \\
 = & \frac{d}{ds} (\nabla_u F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x))) (v^\varepsilon(x) - v(x-y)) \\
 = & \langle \nabla_u^2 F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x)) (v^\varepsilon(x) - v(x-y)), (v^\varepsilon(x) - v(x-y)) \rangle.
 \end{aligned}$$

这里最后一行可视作对 $F$ 的每个分量, 都是关于其Hessian矩阵的二次型. 代

入(3.17), 就有

$$\begin{aligned}
 & |F(v)^\varepsilon(x) - F(v^\varepsilon(x))| \\
 = & \left| \int_{\mathbb{R}_y^d} \int_0^1 s \langle \nabla_u^2 F((1-s)v(x-y) + sv^\varepsilon(x))(v^\varepsilon(x) - v(x-y)), (v^\varepsilon(x) - v(x-y)) \rangle ds \rho_\varepsilon(y) dy \right| \\
 \leq & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} \int_{\mathbb{R}_y^d} |v(x-y) - v^\varepsilon(x)|^2 \rho_\varepsilon(y) dy \\
 = & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} \int_{\mathbb{R}_y^d} \left| \int_{\mathbb{R}_z^d} (v(x-y) - v(x-z)) \rho_\varepsilon(z) dz \right|^2 \rho_\varepsilon(y) dy \\
 \leq & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} \int_{\mathbb{R}_y^d} \left( \int_{\mathbb{R}_z^d} |v(x-y) - v(x-z)| \rho_\varepsilon(z) dz \right)^2 \rho_\varepsilon(y) dy,
 \end{aligned}$$

注意到在这积分里  $|y| \leq \varepsilon, |z| \leq \varepsilon$ , 从而  $|(x-y)-(x-z)| = |z-y| \leq 2\varepsilon$ , 继续计算就有

$$\begin{aligned}
 & |F(v)^\varepsilon(x) - F(v^\varepsilon(x))| \\
 \leq & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} \int_{\mathbb{R}_y^d} \left( \int_{\mathbb{R}_z^d} (2\varepsilon)^\alpha \|v\|_{C^{0,\alpha}} \rho_\varepsilon(z) dz \right)^2 \rho_\varepsilon(y) dy \\
 = & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} (2\varepsilon)^{2\alpha} \|v\|_{C^{0,\alpha}}^2 \int_{\mathbb{R}_y^d} \left( \int_{\mathbb{R}_z^d} \rho_\varepsilon(z) dz \right)^2 \rho_\varepsilon(y) dy \\
 = & \|F\|_{C^2(\mathcal{M})} \|v\|_{C^{0,\alpha}}^2 (2\varepsilon)^{2\alpha}.
 \end{aligned}$$

证毕!

□

### §3.3 初边值问题熵在大范围内守恒的充分条件

#### 1. 将上文得到的结果用于研究守恒律方程

$$\partial_t A_0(u) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} A_i(u) = 0. \quad (3.19)$$

设其对应的熵—熵流对是  $q_0(u) = \eta(u), q_1(u), \dots, q_d(u)$ , 满足条件

$$\nabla_u \eta(u) \cdot \nabla_u A_0(u) = \nabla_u \eta(u), \quad \nabla_u \eta(u) \cdot \nabla_u A_j(u) = \nabla_u q_j(u), j = 1, \dots, d.$$

(这就是说, 对应广义熵为  $B(u) = \nabla_u \eta(u)$ .  $\eta \in C^2$  保证了  $B \in C^1$ .) 于是(3.20)的相伴守恒律方程就是

$$\partial_t \eta(u) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} q_i(u) = 0. \quad (3.20)$$

2. 主要结论. 设  $\Omega$  是空间  $\mathbb{R}^d$  中的有界开集, 其边界是 Lipschitz 连续的. 注意这意味着, 存在  $\delta_0 > 0$ , 使得对任意  $x \in \Omega$ , 当  $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta_0$  时, 函数  $x \mapsto \text{dist}(x, \partial\Omega)$  是 Lipschitz 连续的, 且存在唯一的  $\hat{x} \in \partial\Omega$  (依赖于  $x$ ), 使得

$$\text{dist}(x, \partial\Omega) = |x - \hat{x}|, \quad \text{且} \quad \nabla_x \text{dist}(x, \partial\Omega) = -\mathbf{n}(\hat{x}).$$

这里  $\mathbf{n}(x)$  是  $\partial\Omega$  在  $x$  处的外单位法向量.

我们记时空区域  $Q = [T_1, T_2] \times \Omega$ . 设  $u \in L^\infty(Q)$  是(3.20)的一个弱解, 而且满足如下要求:

- i)  $\forall \tilde{Q} \subset Q$ , 存在  $\alpha > 1/3$  (可依赖于  $\tilde{Q}$ ), 使得  $u \in C^{0,\alpha}(\tilde{Q})$ ;
- ii) 对  $\delta \in (0, \delta_0/2]$ , 记  $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta/2\}$  是边界附近的一个薄层,  $Q_\delta = [T_1, T_2] \times \Omega_\delta$ , 则

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^d q_i(u(t, x)) \mathbf{n}_i(\hat{x}) \right| = 0. \quad (3.21)$$

显然, (3.21) 相当于边界条件  $q \cdot \mathbf{n} = 0$ .

**定理3.** 在上述条件下, 弱解  $u$  满足熵守恒: 对任意  $T_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq T_2$ , 有等式

$$\int_{\Omega} \eta(u(t_1, x)) dx = \int_{\Omega} \eta(u(t_2, x)) dx. \quad (3.22)$$

**证明.** 1). 根据定理1, 在  $\mathcal{D}'(Q)$  意义下成立等式

$$\partial_t \eta(u) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} q_i(u) = 0. \quad (3.23)$$

如果上式在经典的逐点意义下成立, 将之在  $\Omega$  上积分, 再关于  $t$  从  $t_1$  积分到  $t_2$  就得到了(3.22). 现在说明, 通过取适当测试函数, 可将上述想法严格化.

2). 取 $\mathcal{D}(Q)$ 中测试函数

$$\varphi(t, x) = \theta(t)\chi\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right),$$

这里 $\theta \in C_c^\infty(T_1, T_2)$ ,  $\chi \in C^\infty([0, +\infty); [0, 1])$ , 满足

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1/4], \\ 1, & s \in [1/2, +\infty). \end{cases}$$

取 $\delta \in (0, \delta_0/2)$ 充分小, 使得 $\text{supp } \theta \subset (T_1 + \delta, T_2 - \delta)$ . 那么

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi, \partial_t \eta(u) + \sum_{i=1}^d \partial_i q_i(u) \rangle \\ &= - \int_Q \eta(u(t, x)) \chi\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) \theta'(t) dx dt \\ &\quad - \int_{Q_\delta} \theta(t) \sum_{i=1}^d q_i(u(t, x)) \mathbf{n}_i(\hat{x}) \frac{1}{\delta} \chi'\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) dx dt. \end{aligned}$$

3). 对第一项, 利用Lebesgue控制收敛定理, 就有

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_Q \eta(u(t, x)) \chi\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) \theta'(t) dx dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \theta'(t) \int_\Omega \eta(u(t, x)) dx dt. \end{aligned}$$

对第二项, 不难估计

$$\begin{aligned} &\left| \int_{Q_\delta} \theta(t) \sum_{i=1}^d q_i(u(t, x)) \mathbf{n}_i(\hat{x}) \frac{1}{\delta} \chi'\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) dx dt \right| \\ &\leq \sup_{(t, x) \in Q_\delta} \left| \sum_{i=1}^d q_i(u(t, x)) \mathbf{n}_i(\hat{x}) \right| \left( \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\delta} \left| \chi'\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) \right| dx \right) \int_{T_1}^{T_2} |\theta(t)| dt \\ &\leq C|\partial\Omega| \sup_{(t, x) \in Q_\delta} \left| \sum_{i=1}^d q_i(u(t, x)) \mathbf{n}_i(\hat{x}) \right|. \end{aligned}$$

这里, 通过变量替换, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\delta} \left| \chi'\left(\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\delta}\right) \right| dx = \int_{\partial\Omega} \int_0^\delta \frac{1}{\delta} \left| \chi'\left(\frac{z}{\delta}\right) \right| dz dy \\ &= |\partial\Omega| \int_0^\delta \frac{1}{\delta} \left| \chi'\left(\frac{z}{\delta}\right) \right| dz = |\partial\Omega| \int_0^1 \left| \chi'(s) \right| ds = C = |\partial\Omega|. \end{aligned}$$

所以由条件ii), 第二项当 $\delta \rightarrow 0$ 是收敛到0. 所以我们得到等式

$$\int_{T_1}^{T_2} \theta'(t) \int_{\Omega} \eta(u(t,x)) dx dt = 0.$$

这表明在 $\mathcal{D}'(T_1, T_2)$ 意义下成立

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta(u(t,x)) dx = 0,$$

于是 $\int_{\Omega} \eta(u(t,x)) dx$ 是个常数. 证毕.  $\square$

3. 例. 对不可压缩欧拉方程

$$\partial_t v + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0,$$

令 $u = \begin{pmatrix} v & p \end{pmatrix}$ ,  $\eta(u) = \frac{|v|^2}{2}$ ,  $A_0(u) = \begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_i(u) = \begin{pmatrix} v_i v + p \mathbf{e}_i & v_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$  中标准基向量, 就可以用上述结论, 说明 $u \in C^{0,\alpha}$  ( $\alpha > 1/3$ ) 时能量守恒成立:

$$\partial_t \left( \frac{|v|^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^d \partial_i \left( v^i \left( p + \frac{|v|^2}{2} \right) \right) = 0.$$

注意到

$$-\Delta p = \sum_{k,l} \partial_{kl} (v^k v^l),$$

从而由 $v \in C^{0,\alpha}$  可推知 $p \in C^{0,\alpha}$ .

## §3.4 待解决的问题

1. 对可压缩欧拉方程, 可进一步研究当密度和速度分别有怎样的正则性, 可保证弱解熵守恒? 参考文献[55].
2. 对可压缩欧拉方程, 可否构造连续的但能量耗散的可容许弱解?

## §3.5 文献评注

1. 本章内容主要取自[50]. 对一般守恒律方程的Cauchy问题, 文[57]在Besov空间中也研究了保证相伴守恒律成立的弱解的最低正则性, 并举了不可压欧拉方程, 等熵欧拉方程, 多凸的弹性力学方程, 以及磁流体力学方程等例子.

2. 关于Onsager猜想的内容及其原由, 参考Onsager的原文[48]以及综述[4]. Onsager猜想包括两部分: 不可压欧拉方程的速度在Hölder空间 $C^{0,\alpha}$ 中时, 若 $\alpha > 1/3$ , 则能量守恒局部成立; 当 $\alpha < 1/3$ 时存在能量耗散的解. 前一部分最早由[49]给出严格证明, 基本方法是正则化以及交换子估计. 后一部分由[52]证明, 基本方法是用凸积分方法构造弱解.
3. 文[55]对非齐次不可压欧拉方程和等熵欧拉方程, 在Besov空间框架下研究了保证能量守恒成立的解的最低正则性问题.
4. [51]对不可压欧拉方程组的统计解, 也称述并证明了Onsager猜想的前半部分.
5. [56]对不可压欧拉方程和Navier-Stokes方程, 研究了能量耗散所对应的测度的支集及其Hausdorff测度下的大小等问题.

## 参考文献

- [1] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [2] Dafermos, Constantine M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Fourth edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 325. Springer-Verlag, Berlin, 2016.

[第一章]

- [3] Bernhard Riemann: 黎曼全集(第一卷). 李培廉译. 高等教育出版社, 2016.

[第二章]

- [4] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. On turbulence and geometry: from Nash to Onsager. arXiv: 1901.02318, 2019.
- [5] Chiodaroli, Elisabetta; De Lellis, Camillo; Kreml, Ondřej: Global ill-posedness of the isentropic system of gas dynamics. Comm. Pure Appl. Math. 68 (2015), no. 7, 1157–1190.
- [6] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. The h-principle and the equations of fluid dynamics. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 49 (2012), no. 3, 347–375.
- [7] Brenier, Yann; De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. Weak-strong uniqueness for measure-valued solutions. Comm. Math. Phys. 305 (2011), no. 2, 351–361.
- [8] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations. Arch. Ration. Mech. Anal. 195 (2010), no. 1, 225–260.
- [9] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. The Euler equations as a differential inclusion. Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 3, 1417–1436.

- [10] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, Res. Notes in Math., vol. 39, Pitman, Boston, Mass.-London, 1979, pp. 136–212.
- [11] De Lellis, Camillo; Székelyhidi, László, Jr. High dimensionality and h-principle in PDE. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 54 (2017), no. 2, 247–282.
- [12] Chiodaroli, Elisabetta. A counterexample to well-posedness of entropy solutions to the compressible Euler system. J. Hyperbolic Differ. Equ. 11 (2014), no. 3, 493 – 519.
- [13] Smoller, Joel. Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 258. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] J. R. Munkres: *Topology*. Second edition. Pearson Education, 2000.
- [15] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [16] Dafermos, Constantine M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Fourth edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 325. Springer-Verlag, Berlin, 2016.
- [17] Simon, Barry. Real analysis. A Comprehensive Course in Analysis, Part 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [18] Bardos, K.; Sekelikhidi, L., Jr.; Videmann, È. On the absence of uniqueness for the Euler equations: the effect of the boundary. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 69 (2014), no. 2(416), 3–22; translation in Russian Math. Surveys 69 (2014), no. 2, 189 – 207
- [19] Bressan, Alberto. Hyperbolic systems of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 20. Oxford University Press, Oxford, 2000.

- [20] Bianchini, Stefano; Bressan, Alberto. Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math.* (2) 161 (2005), no. 1, 223–342.
- [21] Breit D., Feireisl E., Hofmanová M. On solvability and ill-posedness of the compressible Euler system subjected to stochastic forces. arXiv:1705.08097, 2017.
- [22] Christian Klingenberg; Simon Markfelder: Non-uniqueness of energy-conservative solutions to the isentropic compressible two-dimensional Euler equations. *Journal of Hyperbolic Differential Equations.* 15 (2018) no. 4, 721-730.
- [23] Březina, Jan; Kreml, Ondřej; Mácha, Václav: Non-uniqueness of delta shocks and contact discontinuities in the multi-dimensional model of Chaplygin gas. arXiv: 1809.05342, 2018.
- [24] Chen, Gui-Qiang; Chen, Jun. Stability of rarefaction waves and vacuum states for the multidimensional Euler equations. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 4 (2007), no. 1, 105–122.
- [25] Baba, H.A.; Klingenberg, C.; Kreml, O; Mácha, V.; Markfelder, S. Non-uniqueness of admissible weak solution to the Riemann problem for the full Euler system in 2D. arXiv: 1805.11354.
- [26] Chiodaroli, Elisabetta; Kreml, Ondrej. On the energy dissipation rate of solutions to the compressible isentropic Euler system. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 214 (2014), no. 3, 1019-1049.
- [27] Chiodaroli, Elisabetta; Feireisl, Eduard; Flandoli, Franco. Ill posedness for the full Euler system driven by multiplicative white noise. arXiv: 1904.07977, 2019.
- [28] Březina, Jan; Chiodaroli, Elisabetta; Kreml, Ondřej. Contact discontinuities in multi-dimensional isentropic Euler equations. *Electron. J. Differential Equations* 2018, Paper No. 94, 11 pp.

- [29] Chiodaroli, E.; Kreml, O.; Mácha, V.; Schwarzacher, S. Non-uniqueness of admissible weak solutions to the compressible Euler equations with smooth initial data. arXiv: 1812.09917, 2018.
- [30] Feireisl, E.; Klingenberg, C.; Markfelder, S. On the density od “wild” initial data for the compressible Euler equations. arXiv: 1812.11802, 2018.
- [31] Feireisl, Eduard; Kreml, Ondřej. Uniqueness of rarefaction waves in multi-dimensional compressible Euler system. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 12 (2015), no. 3, 489–499.
- [32] Feireisl, Eduard. Maximal dissipation and well-posedness for the compressible Euler system. *J. Math. Fluid Mech.* 16 (2014), no. 3, 447–461.
- [33] Chiodaroli, Elisabetta; Kreml, Ondřej. Non-uniqueness of admissible weak solutions to the Riemann problem for isentropic Euler equations. *Nonlinearity* 31 (2018), no. 4, 1441–1460.
- [34] Chiodaroli, Elisabetta; Michálek, Martin: Existence and non-uniqueness of global weak solutions to inviscid primitive and Boussinesq equations. *Comm. Math. Phys.* 353 (2017), no. 3, 1201–1216.
- [35] De Lellis, Camillo; Chiodaroli, Elisabetta; Kreml, Ondřej: Surprising solutions to the isentropic Euler system of gas dynamics. *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications, 1–10*, AIMS Ser. Appl. Math., 8, Am. Inst. Math. Sci. (AIMS), Springfield, MO, 2014.
- [36] Markfelder, Simon; Klingenberg, Christian: Non - uniqueness of entropy – conserving solutions to the ideal compressible MHD equations. arXiv:1902.01446, 2019.
- [37] Markfelder, Simon; Klingenberg, Christian: The Riemann problem for the multidimensional isentropic system of gas dynamics is ill-posed if it contains a shock. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 227 (2018), no. 3, 967–994.
- [38] Breit, Dominic; Feireisl, Eduard; Hofmanová, Martina: On solvability and ill-posedness of the compressible Euler system subject to stochastic forces. arXiv: 1705.08097, 2017.

- [39] Luo, Tianwen; Xie, Chunjing; Xin, Zhouping: Non-uniqueness of admissible weak solutions to compressible Euler systems with source terms. *Adv. Math.* 291 (2016), 542–583.
- [40] Yan, Baisheng: Convex integration for diffusion equations. arXiv: 1804.07624, 2018.
- [41] Yan, Baisheng: Lipschitz Solutions for the Gradient Flow of Polyconvex Functionals. arXiv:1901.05989, 2019.
- [42] Eduard Feireisl; Christian, Klingenberg; Ondřej, Kreml; Simon Markfelder: On oscillatory solutions to the complete Euler system. arXiv: 1710.10918, 2017.
- [43] Daneri, S.; Székelyhidi, L.: Non-uniqueness and h-principle for Hölder-continuous weak solutions of the Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* 224(2017), 471-514.
- [44] Colombo, Maria; De Lellis, Camillo; De Rosa, Luigi: Ill-posedness of Leray solutions for the hypodissipative Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.* 362 (2018), no. 2, 659–688.
- [45] Buckmaster, Tristan; Vicol, Vlad: Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation. *Ann. of Math.* (2) 189 (2019), no. 1, 101–144.
- [46] Buckmaster, Tristan; Shkoller, Steve; Vicol, Vlad: Nonuniqueness of weak solutions to the SQG equation. arXiv: 1610.00676, 2016.
- [47] Isett, Philip: Nonuniqueness and existence of continuous, globally dissipative Euler flows. arXiv: 1710.11186, 2017.

### [第三章]

- [48] Onsager, L. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento* (9) 6, (1949). Supplemento, no. 2 (Convegno Internazionale di Meccanica Statistica), 279–287.
- [49] Constantin, Peter; E, Weinan; Titi, Edriss S. Onsager’s conjecture on the energy conservation for solutions of Euler’s equation. *Comm. Math. Phys.* 165 (1994), no. 1, 207–209.

- [50] Bardos, C.; Gwiazda, P.; Świerczewska-Gwiazda, A.; Titi, E. S.; Wiedemann, E. On the extension of Onsager's conjecture for general conservation laws. arXiv:1806.02483, 2018.
- [51] Fjordholm, U. S.; Wiedemann, E. Statistical solutions and Onsager's conjecture. *Phys. D* 376/377 (2018), 259–265.
- [52] Isett, Philip: A proof of Onsager's conjecture. *Ann. of Math.* (2) 188 (2018), no. 3, 871–963.
- [53] Drivas, Theodore D.; Eyink, Gregory L. An Onsager singularity theorem for turbulent solutions of compressible Euler equations. *Comm. Math. Phys.* 359 (2018), no. 2, 733–763.
- [54] Bardos, Claude; Titi, Edriss S. Onsager's conjecture for the incompressible Euler equations in bounded domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 228 (2018), no. 1, 197–207.
- [55] Feireisl, Eduard; Gwiazda, Piotr; Świerczewska-Gwiazda, Agnieszka; Wiedemann, Emil. Regularity and energy conservation for the compressible Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 223 (2017), no. 3, 1375–1395.
- [56] Leslie, Trevor M.; Shvydkoy, Roman. The energy measure for the Euler and Navier-Stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 230 (2018), no. 2, 459–492.
- [57] Gwiazda, Piotr; Michálek, Martin; Świerczewska-Gwiazda, Agnieszka. A note on weak solutions of conservation laws and energy/entropy conservation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 229 (2018), no. 3, 1223–1238.

#### [第四章]

- [58] Fjordholm, U. S.; Lanthaler, S.; Mishra, S. Statistical solutions of hyperbolic conservation laws: foundations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 226 (2017), no. 2, 809–849.
- [59] Fjordholm, U. S.; Wiedemann, E. Statistical solutions and Onsager's conjecture. *Phys. D* 376/377 (2018), 259–265.

- [60] Fjordholm, U. S.; Lye, K.; Mishra, S. Numerical approximation of statistical solutions of scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 56 (2018), no. 5, 2989–3009.