线性代数—第二章—矩阵

2008-10-8

第五节：矩阵的初等变换与矩阵的秩

本节概念和难点较多，学习时要注意总结.

1. 消元法求解线性方程组 → 线性方程组的初等变换 → 矩阵的初等行(列) 变换 → 化矩阵为 “标准型 ”(按标准程度分为 阶梯形矩阵，简化的阶梯形矩阵，标准形矩阵等).

方法：要求通过练习要熟练掌握通过初等变换化矩阵为标准形.

2. 初等变换的数学严密化: 用三类 **初等矩阵** 左 (右) 乘矩阵 = 相应行 (列) 初等变换;

3. 必须熟练掌握通过矩阵的初等变换求矩阵的逆以及求解线性方程组的方法.

4. 矩阵秩的概念 (初等变换下矩阵的不变量；描述一般线性方程组可解性的量); 秩的基本性质；会熟练地用初等变换算矩阵的逆.

一. 矩阵的初等变换

1. **线性方程组的初等变换**

利用消元法求解如下一般线性方程组

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n &= b_2,\\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots &\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

本质上是对方程施行若干次如下 **线性方程组的初等变换**, 以使变换后的方程具有简单的形式 (标准形) 写出解:

(1) 交换某两个方程在方程组中的位置;

(2) 在一个方程的两端同时乘某个非零常数;

(3) 将一个方程的两端同时乘某个非零常数再加到另一个方程上.

上述线性方程组本质上由其 **增广矩阵**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

确定, 由上述线性方程组的初等变换可推广为如下对矩阵的行初等变换.

2. **矩阵的初等变换**

如下三种对矩阵的行 (列) 施行的操作称为 **矩阵的行 (列) 初等变换**:

(1) 交换矩阵中的某两行;

(2) 在某行乘某个非零常数;

(3) 将某行乘某个非零常数再加到另一行.

3. **矩阵的初等变换的目的是将之化为某种标准形**

定义 1: **(行) 阶梯矩阵** (1) 元素不全为零的行 (非零行) 的标号小于元素全为零的行;

(2) 设矩阵有 r 个非零行, 第 i 个非零行的第一个非零元素所在的列号为 t_i, 则 $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$.

例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (yes), \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (no).$$

定义 2: **简化的 (行) 阶梯矩阵** 满足如下条件的阶梯矩阵: 每个非零行的第一个非零元素为 1, 且其所在列的其他元素为零.

例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 3: **标准形矩阵** 左上角为单位阵, 其他位置元素均为零的非零矩阵.

例.

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix}, \quad E.$$

3. **标准形定理**

重要定理：任何矩阵都可以通过 **单纯的行初等变换** 化为简化的阶梯形矩阵；任何矩阵都可经 **初等变换** 化为标准型矩阵.

注意：(1) 仅通过行初等变换不能把任一矩阵化为标准型矩阵；

(2) 化矩阵为阶梯形的方法不是唯一的，结果也是不唯一的；

(3) 但是一个矩阵的标准型矩阵是唯一的. (秩的概念)

例. 将如下矩阵通过行初等变换写出其简化的阶梯标准形，再求出其标准型.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

方法总结 (即定理的证明思路：)

(1) 找出矩阵中第一个非零列，并通过一二类行变换使该列第一个元素为 1;

(2) 通过第三类行变换使该列其它元素为零；

(3) 考察除第一行外其他行组成的矩阵并重复上述过程；

由此通过归纳法即可证明定理第一部分.

(4) 在得到阶梯标准型后，通过第三类列初等变换将非零行初第一个非零元 1 外其他均为零;

(5) 通过第一类列初等变换化为标准型.

二. 初等矩阵

要点：通过初等矩阵的概念，可以将上述矩阵初等变换的 **描述性定义** 转化为 **严密的数学语言**, 用矩阵的乘法运算来精确表达.　　　[数学建模]

1. **初等矩阵的定义** 单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.　(课本 p. 66)

(1) 第一类初等矩阵 $R_{i\leftrightarrow j} = C_{i\leftrightarrow j}$: 交换第 i, j 行 (列) 所得

(2) 第二类初等矩阵 $R_{(k)i} = C_{(k)i}$: 第 i 行 (列) 乘以非零常数 k 所得;

(3) 第二类初等矩阵 $R_{i+(k)j} = C_{j+(k)i}$: 第 j 行 (i 列) 乘以非零常数 k 加到第 i 行 (j 列) 所得

命题：初等矩阵都是可逆矩阵.

2. **初等矩阵与初等变换**

重要定理：用一个 m 阶某类初等矩阵左乘一个 $m\times n$ 矩阵，相当于对该矩阵施行一次相应类的行初等变换; 用一个 n 阶某类初等矩阵右乘一个 $m\times n$ 矩阵，相当于对该矩阵施行一次相应类的列初等变换.

证明：利用分块矩阵的乘法.

3. **标准型定理**

重要定理 对任何 $m\times n$ 矩阵 A, 存在 m 阶初等矩阵 $R_1,\cdots,R_s$, 使得

$$R_s\cdots R_1 A$$

为简化的阶梯形矩阵；存在 n 阶初等矩阵 $C_1,\cdots,C_t$, 使得

$$R_s\cdots R_1AC_1\cdots C_t=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

其中 $r=r(A)$ 叫做矩阵 A 的 **秩**, 它是与上述初等矩阵选取无关的只依赖于矩阵本身的一个常数 (这一点后面证明).

推论 1. 对任何 $m\times n$ 矩阵 A, 存在 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

推论 2. 对任何 n 阶矩阵 A, 它可逆的充分必要条件为它的标准型是单位阵.

推论 3. 矩阵 A 可逆的充要条件为 $A=P_1\cdots P_k$, 其中 P_i 为初等矩阵.

推论 4. 任一可逆矩阵 A 可通过单纯的行初等变换化为单位阵：

$$A=P_k\cdots P_1E \qquad (\Leftrightarrow (P_1)^{-1}\cdots(P_k)^{-1}A=E) \qquad (\Leftrightarrow A^{-1}=(P_1)^{-1}\cdots(P_k)^{-1}E).$$

注意：由此可利用初等变换求矩阵逆.

三. 初等变换的应用：矩阵求逆及解线性方程组

求逆算法. 对 $(A\ \ E)$ 作行初等变换，将 A 化为标准型 (单位阵) 后，则 E 恰变换为 A^{-1}. 若 A 不能化为单位阵，则 A 不可逆. 此算法比伴随矩阵法的优点：运算量小，效率高.

例．求 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

求解线性方程组 $AX = B$ 算法. 对 $(A\ \ B)$ 作行初等变换将 A 化为单位阵, B 则变换为 $A^{-1}B$.

四．矩阵的等价

定义：如果矩阵 A 经过有限次初等变换变为矩阵 B (或存在可逆阵 P,Q 使得 $PAQ = B$), 就称 A 与 B 等价 (相抵). 这是一种等价关系 (自反性，对称性，传递性)

五．矩阵的等价不变量：矩阵的秩

1. **重要定义**：在矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 中，任取 k 行 k 列 $(1 \le k \le \min\{m,n\})$, 由这 k 行 k 列交叉点上 k^2 个元素按原来位置构成的 k 阶行列式称为 A 的一个 k 阶子式. 若 A 中有一个 r 阶子式不为零，而所有的 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 都为零，则称 r 为 A 的 **秩** (rank) , 记作 $r(A)$.

即： **矩阵 A 的秩就是其非零子式的最高阶数**.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 若 $r(A) = m$ $(r(A) = n)$, 称 A 为行 (列) 满秩阵. 如果 A 为方阵，则 A 可逆 (非奇异) 与 A 满秩是等价概念.

2. 基本性质： (a) 一个矩阵的秩是唯一的.

(b) A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A) \le \min\{m,n\}$, 且 $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$.

(c) 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为零，则 $r(A) \ge r$; 若所有 r 阶子式都为零，则 $r(A) \le r$.

(d) 若 A_1 为 A 的子矩阵，则 $r(A_1) \le r(A)$.

(e) $r(A) = r(A^T)$.

(f) 阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数.

3. **重要定理**: 初等变换不改变矩阵的秩.

证明:

第一步. 简化问题的提法到最本质的地方.

(1) 只要证明行初等变换不改变矩阵的秩 (利用性质 (e));

(2) 只需要证明矩阵的秩在行初等变换下不增: 设 A 初等变化为 B, 证明 $r(B) \leq r(A)$ 即可.

事实上, 由于初等变换的可逆性, A 也可由同类初等变换从 B 得到, 于是 $r(A) \leq r(B)$.

两者对比, 就有 $r(A) = r(B)$.

要证明 $r(B) \leq r = r(A)$, **只需说明**, B **的所有** s **阶子式** $(s > r)$ **均为零**.

第二步. 实质性证明. 显然第二类行初等变换后矩阵的秩不增加.

课本上对第三类行初等变换给出了证明. 我们在这里对第一类行初等变换的情形给出证明. (第二类情形证明更简单 !)

(1) 设交换 A 的 i, j 行得到 B. 考察 B 的任一 s 阶子式 D_s.

若 D_s 不包含 i, j 行, 则它也是 A 的 $s(> r)$ 阶子式, 由 $r = r(A)$ 的定义, $D_s = 0$.

(2) 设若 D_s 包含 i, j 行, 则它由 A 的某个 s 阶子式交换两行得到, 由行列式性质, $D_s = 0$.

(3) 若 D_s 只包含第 i 行而不包含第 j 行, 则此 D_s 可由 A 的某个包含 j 行但不包含 i 行的 s 阶子式通过交换若干行得到. 由行列式性质知 $D_s = 0$.

(4) D_s 只包含第 j 行而不包含第 i 行, 证明与 (3) 类似. [完]

重要推论: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵, 则

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ).$$

即 **矩阵的秩是其相似不变量**: 相似的矩阵有相同的秩，有相同秩的同类型矩阵必相似.

3. **利用初等变换求矩阵的秩**

例 1. ([p. 87] 48) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&1&1\\2&1&a\\1&1&a\end{pmatrix}$. 若 AB 的秩为 2, 求 a.

解. $|A|\neq 0$. 从而 $r(B)=2$.

又 $A\sim\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&a\\0&0&1-a\end{pmatrix}\Rightarrow a=1$.

例 2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明： $r(A)=1\Leftrightarrow$ 存在 m 维列向量 α 及 n 维列向量 β 使得 $A=\alpha^T\beta$.

证明： **重要方法与思路：利用标准型**

$\Rightarrow$. 注意到特殊情形 $(1,0,\cdots,0)^T(1,0,\cdots,0)=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=PAQ$.

$\Leftarrow$. 构造可逆的 P,Q 使得 $P\alpha=(1,0,\cdots,0)^T$, $Q\alpha=(1,0,\cdots,0)^T$. [完]

作业:

[p.87] 44, 46, 49; [p.88] 55.