线 性 代 数 — 第 二 章 — 矩 阵

2008-10-7

第三节：可逆矩阵

一．可逆矩阵的定义

例．利用矩阵运算，如下一般线性方程组

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n&=b_2,\\
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots&\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n&=b_m
\end{aligned}
$$

可以写为：

(1)

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_{\mathbf{n}}=\beta,$$

其中

$$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}.$$

解释：寻求 m 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathbf{n}}$ 的线性组合以得到 β.

(2)

$$Ax=\beta,$$

其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}, x=(x_1,\cdots,x_n)^T$.

解释：求矩阵 A 的逆 (除法).

定义 1. 设 A 是 n 阶矩阵. 若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E, \tag{1}$$

则称矩阵 A**可逆**,B 为 A 的 **逆矩阵**, 记作 $B = A^{-1}$.

如果不存在满足 (1) 的矩阵 B, 就称 A 是 **不可逆** 的.

问题：什么样的矩阵是可逆的？可逆矩阵的逆如何求解，是否唯一？可逆矩阵有什么性质？

定理 1: 如果 n 阶矩阵 A 可逆，则它的逆是唯一的.

二. 矩阵可逆的充分必要条件，可逆矩阵逆的求法

重要定义：(* 伴随矩阵 *) 设 $A = [a_{ij}]_n$ 为 n 阶矩阵，A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的 **代数余子式**, $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 则称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

为 A 的 **伴随矩阵**, 记为 A^*.

例: (要记住)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

重要定理：n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件为 $|A| \neq 0$. 如果 A 可逆，则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*. \tag{3}$$

证明：必要性. 在 (1) 两边取行列式，得 $|A||B|=1$, 所以 $|A|\neq 0$.

充分性. 此时 (3) 由定义. 利用行列式按行 (列) 展开性质即得. [完]

推论 1: 对 n 阶方阵 A, 若有 n 阶方阵 B 使得

$$AB=E \qquad (\text{或}\ \ BA=E),$$

则 A 可逆. 且 $A^{-1}=B$.

证明：由条件有 $|A|\neq 0$, 从而 A 可逆. 又 $B=B(AA^{-1})=(BA)A^{-1}=A^{-1}$.

推论 2: (Crammer 法则) 线性方程组 $Ax=\beta$ 当 $|A|\neq 0$ 时有唯一解 $x=A^{-1}\beta$.

注：

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}b_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|A|}(A^*)_{ij}b_j\ \ ((A^*)_{ij}\text{ 表示伴随矩阵的第 } ij \text{ 个元素}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|A|}A_{ji}b_j\ \ ((A)_{ji}\text{ 表示 } |A| \text{ 中第 } ji \text{ 个元素的代数余子式}) \\ &= \frac{1}{|A|}D_i.(D_i\text{ 表示 } |A| \text{ 中第 } i \text{ 列元素代换为 } \beta) \end{aligned}$$

三. 可逆矩阵的性质

定理：(要熟悉) (1) $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}, \quad k\neq 0$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(5) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

(6) $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$

证明： (3) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=E$.

(4) $A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$. [完]

例 1 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $A+B=AB$, 证明 $A-E$ 可逆并求出其逆.

例 2 设 n 阶矩阵 $A,B,A+B$ 均可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆并求出其逆.

例 3 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵．证明 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明： $|A|\neq 0$. 利用 (3).

$|A|=0$. 此时成立 $AA^*=O$. 现要证 $|A^*|=0$. 反证法．否则，有 $A=A(A^*(A^*)^{-1})=(AA^*)(A^*)^{-1}=O$,, 矛盾． [完]

例 3 (p. 89 (60)) 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $E-AB$ 可逆．证明 $E-BA$ 也可逆.

证明：利用 Laplace 定理及分块矩阵的运算.

$$\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B \\ & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & \\ A & E-AB \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & -B \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E-BA & \\ A & E \end{pmatrix}.$$

第四节：矩阵的分块

矩阵的分块：将一个矩阵适当地分为若干个小矩阵，可以实现集成高效的矩阵运算的一种方法.

例．对矩阵

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

令

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

则 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

本节重点：熟悉分块矩阵的运算.

一．分块矩阵的加法与数乘

对分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} =: (A_{ij})_{p\times q},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix} =: (B_{ij})_{p\times q},$$

其中 $A_{ij}, B_{ij} (i=1,\cdots,p, j=1,\cdots q)$ 为同类型矩阵，则 **容易验证**

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{pmatrix} =: (A_{ij}+B_{ij})_{p\times q};$$

若 k 为数,

$$kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1q} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{p1} & kA_{p2} & \cdots & kA_{pq} \end{pmatrix} =: (kA_{ij})_{p\times q}.$$

二. 分块矩阵的乘法 (* 重点 *)

设 A 为 $m\times p$ 矩阵， B 为 $p\times n$ 矩阵. 现对 A, B 分块，要求对 A 的列的分法与对 B 的行的分法一样 (但 A 的行于 B 的列的分法可各自随意), 则可以开展分块矩阵的乘法.

例.

$$A \ = \ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1\text{行} \\ m_2\text{行} \\ \vdots \\ m_r\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} p_1\text{列} & p_2\text{列} & \cdots & p_s\text{列} \end{array} & \end{array}$$

$$B \ = \ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1\text{行} \\ p_2\text{行} \\ \vdots \\ p_r\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1\text{列} & n_2\text{列} & \cdots & n_t\text{列} \end{array} & \end{array}$$

这里 $m_1+m_2+\cdots+m_r=m$, $p_1+p_2+\cdots p_s=p$, $n_1+n_2+\cdots n_t=n$. 令分块矩阵

$$C=(C_{ij})_{r\times t},\qquad C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj},\ i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,t.$$

则 **容易验证** $C=AB$.

例. ([P. 86] 40 (2)) 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

例. 将矩阵表为列向量 (或行向量) 的分块矩阵 (P.1 例): $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$.

三. 分块矩阵的转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{p1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{p2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1q}^T & A_{2q}^T & \cdots & A_{pq}^T \end{pmatrix}.$$

注意：不但每个小矩阵要转置，而且每个小矩阵都要调到新的位置去！

四. 分块对角矩阵

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n) := \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n)^{-1} = \operatorname{diag}((A_1)^{-1}, (A_2)^{-1}, \cdots, (A_n)^{-1})$.

作业:

证明 [p.54] 命题 2.7; [p.83] 15,16,17; [p. 84] 21(5,7), 22 (3,4); [p.85] 24; [p. 86] 41, 42(3,4).