向量场的分解

引理1. 一向量场 B 若为横场，即满足 $\operatorname{div} B = 0$, (1)

则它必可表示为另一向量场 A 的旋度： $B = \operatorname{rot} A$. (2)

反之亦然.

证明: 不妨取 $A_z = 0$，即 $A = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), 0)$ 满足

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z. \tag{3}$$

对前两个方程积分得

$$A_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)\,dz + f(x,y), \tag{4}$$

$$A_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,s)\,ds + g(x,y). \tag{5}$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为场中任意选定的一点，f 及 g 为 (x,y) 的任意函数. 将(4)(5)代入(3)，由(1)得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = B_z(x,y,z_0)$$

为此只须取 f, g 满足上式即可求出 A. 特别可取

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)\,dx, \quad g \equiv 0.$$

则

$$A_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,s)\,ds,$$

$$A_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,s)\,ds + \int_{x_0}^{x} B_z(x,y,z_0)\,dx,$$

$$A_z(x,y,z) = 0$$

确定的 A 即满足(2).

#.

引理2. 若A为纵场，即满足 $\mathrm{rot}\, A = 0$， (1)

则A必为某个标量场的梯度： $A = \nabla\varphi$； (2)

反之亦然。

证明: (1) ⇒ $A_x dx + A_y dy + A_z dz$

为一个全微分. 因此取

$$\varphi(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} A_x dx + A_y dy + A_z dz + \varphi_0$$

即可. 其中φ_0为任一常数。 #

引理3. 任一向量场均可分解为纵场和横场两部分的叠加，即分解为无旋场和无源场的叠加.

证明. 对任一向量场A，我们要证明存在标量场φ与向量场C使

$$A = \mathrm{grad}\,\varphi + \nabla\times C.$$

由于 $\nabla\cdot(\nabla\times C)=0$，上式两端作用散度算子 div，有

$$\Delta\varphi = \mathrm{div} A.$$

取φ为上述 Poisson 方程的一个特解，由于

$$\mathrm{div}(A-\nabla\varphi)=0,$$

由引理1，$\exists C$ s.t. $A - \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\times C$. OK.

#

注. 若 $\mathrm{div} B=0$，则 $B = \mathrm{rot} A + \mathrm{grad}\,\varphi$，且在相差 $\mathrm{grad}\,\varphi$ 下表示唯一. 可取A s.t. $\mathrm{div} A=0$.
纵场.

引理4. 设u为Ω中适当光滑的向量场，那么u可唯一地表示为如下形式:

$$u = w + \mathrm{grad}\, p, \tag{a}$$

其中w满足

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, w = 0 & \text{in } \Omega \\ w\cdot n = 0 & \text{on } \partial\Omega = \Gamma. \end{cases} \tag{b}$$

n为Γ上单位外法线向量.

证明：唯一性. 若(b)成立，则 w 必与 $\mathrm{grad}\,p$ 在 $H=(L^2(\Omega))^3$ 中正交. 因为由

Green 公式，$\int_\Omega w\cdot\mathrm{grad}\,p\,dx=\int_\Gamma (w\cdot n)p\,ds-\int_\Omega(\mathrm{div}\,w)p\,dx=0.$

从而若有 w_1, p_1 与 w_2, p_2 均使(a)成立，则

$$w_1-w_2+\mathrm{grad}(p_1-p_2)=0$$

将上式与 w_1-w_2 作数量积，并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega |w_1-w_2|^2dx+\int_\Omega (w_1-w_2)\cdot\mathrm{grad}(p_1-p_2)\,dx=0.$$

而第二式 $=0\Rightarrow \|w_1-w_2\|_H=0\Rightarrow w_1=w_2$. p 允许相差一个常数.

存在性.

考察如下 Neumann 问题：

$$\begin{cases}\Delta p=\mathrm{div}\,u & \text{in } \Omega\\ \dfrac{\partial p}{\partial n}=u\cdot n & \text{on } \partial\Omega=\Gamma\end{cases}$$

则 $\int_\Omega \mathrm{div}\,u\,dx=\int_\Gamma u\cdot n\,ds.$

上述问题在相差一个任意常数的意义下，存在唯一解. 由此解出 p，

令 $w=u-\mathrm{grad}\,p$，则

$$\begin{cases}\mathrm{div}\,w=\mathrm{div}\,u-\nabla\cdot(\nabla p)=\mathrm{div}\,u-\Delta p=0,\\ w\cdot n=u\cdot n-\mathrm{grad}\,p\cdot n=0.\end{cases}$$

#.

得证.