华东师范大学期末试卷（A）

200 6—200 7 学 年 第 2 学 期

课程名称：数学分析续论
学生姓名：　　　　　　　　　　　　学　　号：
专　　业：　　　　　　　　　　　　年级 / 班级：数学系 200 6 级硕士研究生
课程性质：专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

注意：本试卷共两页，六道大题.

一. (15 分) 设 B 为 $\mathbb{R}^3$ 上光滑向量场. 证明 $\nabla \cdot B = 0$ 成立当且仅当存在 $\mathbb{R}^3$ 上光滑向量场 A 使得 $B = \nabla \times A$.

二. (15 分) 设 $u_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $u_n(x) = \int_a^x u_{n-1}(t)\,dt$, $n = 1,2,\cdots$. 证明：$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

三. (20 分) 设 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负的连续函数， $n = 1,2,\cdots$. 若 $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) \to u(x)$ (点点收敛),

(1) 证明 $u(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值;

(2) 举例说明 $u(x)$ 未必在 $[a,b]$ 上取到最大值.

四. (20 分) 讨论下列反常积分的敛散性 (其中 m 为常数):

(1)

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+m} - \frac{m}{x+1} \right) dx;$$

(2)

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m}\,dx.$$

五. (15 分) 证明：若 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且积分 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则必有 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

六. (15 分) 计算：

(1) 设 $0 < k < 1$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty} [(n+1)^k - n^k];$$

(2) 求积分

$$\int_0^2 \frac{x}{e^x + e^{2-x}}\, dx;$$

(3) 求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$