1. 判断一致收敛性. 1). $\left\{\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right\}$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_n(x)=\sqrt{x f_{n-1}(x)}$, $x\in[0,1]$.

解: 1). $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\therefore\ \forall x\in\mathbb{R}$, $\left\{\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right\} \rightrightarrows 0.\ (n\to\infty)$.

2). 取对数: $\lg f_n(x)=\frac{1}{2}(\lg x+\lg f_{n-1}(x)) \Rightarrow$

$$\lg f_n(x)-\lg x=\frac{1}{2}(\lg f_{n-1}(x)-\lg x)$$

记 $b_n(x)=\lg f_n(x)-\lg x$, 则 $b_n(x)=\frac{1}{2}b_{n-1}(x)$

$$b_1(x)=-\frac{1}{2}\lg x. \qquad x\in(0,1).$$

从而 $b_n(x)=(-\frac{1}{2}\lg x)(\frac{1}{2})^{n-1}=-(\frac{1}{2})^n\lg x$

$\therefore\ \lg f_n(x)=(1-(\frac{1}{2})^n)\lg x$, $f_n(x)=x^{1-(\frac{1}{2})^n}$.

显然对 $x\in[0,1]$, $f_n(x)\to x$. 考察 $a_n(x)=f_n(x)-x=x^{1-(\frac{1}{2})^n}-x\ge 0$

则 $a_n'(x)=(1-(\frac{1}{2})^n)x^{-(\frac{1}{2})^n}-1=0 \Rightarrow x=\left(\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^n}\right)^{(-2^n)}\to\frac{1}{e}$.

$\therefore\ \min\limits_{x\in[0,1]}a_n(x)=0$, $\max\limits_{x\in[0,1]}a_n(x)=(\frac{1}{2})^n\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)^{2^n-1}\to 0$ as $n\to\infty$.

$$\therefore\ a_n(x)\rightrightarrows 0.$$

$\therefore\ f_n(x)\rightrightarrows x$, $\forall x\in[0,1]$. #.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to S(x)$ on $[a,b]$, $u_n \geq 0$, 连续. 问:

(1) $S(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上达到最大、最小值?

(2) 若将 $[a,b]$ 换为 (a,b), 情况如何?

解: (2): $S(x)$ 可能在 (a,b) 上既取不到最大值也取不到最小值.

例: $u_n(x) = x^{n-1}$, 则 $S(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处取最小, 当 $x \nearrow 1$ 时 $S(x) \nearrow \infty$.

(1) $S(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上取到最小值, 但未必取到最大值.

例: 取 $a=0$, $b=1$,
$$u_n(x) = \begin{cases} n2^n x & 0 \le x \le \frac{1}{2^n} \\ -n2^n\left(x - \frac{2}{2^n}\right) & \frac{1}{2^n} \le x \le \frac{2}{2^n} \\ 0 & \frac{2}{2^n} \le x \le 1 \end{cases}$$

则 $u_n(x) \in C[0,1]$ 且非负. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 中, 对固定的 $x \in [0,1]$, 其实只是有限项求和. 从而 $S(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上有定义, 且 $S(1) = S(0) = 0$. 但注意, 当 $x_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ 时, $u_n(x_n) = n \to \infty$, $\therefore S(x) \to \infty$ as $x \to 0$. 从而 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上取不到最大值.

关于 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最小值的证明概要: 由于 $u_n(x) \geq 0 \Rightarrow S(x) \geq 0$. 从而 $\inf_{x \in [a,b]} S(x) = \mu \geq 0$ 确定, 设 $x_n \to x_0$ 时 $S(x_n) \to \mu$, 而 $S(x_0) \neq \mu$, 则 $S(x_0) > \mu$. 由 $\sum u_n(x) \to S(x)$ 之收敛性及 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续性导出矛盾. 从而必有 $S(x_0) = \mu$. 得证. #

(请自己补充完整上述证明.)

3. $u_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$u_n(x)=\int_a^x u_{n-1}(t)dt$，$n=1,2,\cdots$ 试证：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 注：u_0 可积，则称 u_0 有界. u_1 连续，从而 u_1 有界.

证明：$u_1(x)=\int_a^x u_0(x)dx \in C[a,b]$，$\cdots$ $u_n(x)\in C[a,b]$，$n=1,2\cdots$

从而不妨设 $|u_1(x)|\le M$，$\forall x\in[a,b]$. 用归纳法证明

$$|u_n(x)|\le \frac{M}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}, \quad n=1,\cdots \qquad (*)$$

事实上，

$$|u_n(x)|\le \int_a^x |u_{n-1}(t)|dt \le \int_a^x \frac{M}{(n-2)!}(t-a)^{n-2}dt$$

$$=\frac{M}{(n-2)!}\int_a^x (t-a)^{n-2}dt=\frac{M}{(n-2)!}\,\frac{1}{n-1}\,(t-a)^{n-1}\Big|_a^x$$

$$=\frac{M}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

从而 $(*)$ 成立，于是 $|u_n(x)|\le \frac{M}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$

由于 $\sum \frac{M}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$ 收敛，$\Rightarrow \sum u_n(x)$ 一致收敛. 证.

4. 求 Fourier 变换: 1). $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, 2) $\frac{1}{x^2+a}$, $a>0$, $x\in R$.

解: $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

1). $\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-\frac{1}{2}x^2-ix\xi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ix\xi)}dx$

$=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2-\frac{1}{2}\xi^2}dx$

$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\int_C e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$ $\quad C:=\{z=x+i\xi,\ x\in\mathbb{R}\}$

$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_R e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ (利用围道积分: Cauchy定理)

$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^2}=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$.

#.

2). $\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{e^{-ix\xi}dx}{x^2+a}=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{\cos(x\xi)}{x^2+a}dx$

$=\frac{1}{2\pi}\int_R\frac{\cos(\frac{x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}\xi)}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}d(\frac{x}{\sqrt{a}})\cdot\sqrt{a}\cdot\frac{1}{a}$.

$=\frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_R\frac{\cos(t\cdot\sqrt{a}\xi)}{t^2+1}dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\cdot 2\int_0^\infty\frac{\cos(\sqrt{a}|\xi|\cdot t)}{t^2+1}dt$

$=\frac{1}{\pi\sqrt{a}}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-\sqrt{a}|\xi|}=\frac{1}{2\sqrt{a}}e^{-\sqrt{a}|\xi|}$.

此处利用了公式 $\quad e^{-s}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(sx)}{1+x^2}dx$, $s>0$.

#.

5. 设 $r_1, r_2, \cdots$ 是 $[0,1]$ 中全部有理数，证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ $(0\le x\le 1)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且在无理点可微，但在有理点不可微。

证明：(1) $\frac{|x-r_n|}{3^n}\le\frac{2}{3^n}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 一致收敛，$\forall x\in[0,1]$。

于是 $f(x)\in C[0,1]$.

(2) 设 x 为无理点，则 $\frac{d}{dx}\left(\frac{|x-r_n|}{3^n}\right)=\frac{1}{3^n}\operatorname{sgn}(x-r_n)$，即每项均可微且由 $\left|\frac{1}{3^n}\operatorname{sgn}(x-r_n)\right|\le\frac{1}{3^n}$，相应级数一致收敛。即由逐项求导定理，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\operatorname{sgn}(x-r_n).$$

(3) 设 x 为某有理数 r_m. 记

$$g(x)=\sum_{n\ne m}\frac{|x-r_n|}{3^n},$$

则由前述，$g(x)\in C[a,b]$，且当 x 为无理数或 $x=r_m$ 时，$g(x)$ 均可微。

显然
$$g(x)+\frac{1}{3^m}|x-r_m|=f(x).$$

若 $f(x)$ 在 $x=r_m$ 可微 $\Rightarrow$ $\frac{1}{3^m}|(x-r_m)|$ 在 $x=r_m$ 可微，矛盾。 #