2. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $v(x,y,z)=x+y+z$, 计算

$$\iint_{\Sigma}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,ds,$$

其中 Σ 为上半球面: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$; $\vec{n}$ 为 Σ 外单位法向量.

解(一). $\nabla u=(2x,\ 2y,\ 2z)$, $\nabla v=(1,\ 1,\ 1)$.

$$\nabla u\times\nabla v=(2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y),\quad \mathrm{div}(\nabla u\times\nabla v)=0$$

又 $\vec{n}=(x,y,z)$, 从而

$$(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}=\left((2y-2z)x\right)+\left((2z-2x)y\right)+(2x-2y)z$$

$$=2xy-2zx+2zy-2xy+2xz-2yz=0.$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,ds=0$$

□

注: 要写清楚向量间到底是什么运算. 写成 $(\nabla u\times\nabla v)n$ 都是不对的.

解(二). 如果要利用 Gauss 定理:

$$\int_{\partial M}u\cdot\vec{n}\,ds=\int_{M}(\mathrm{div}\,u)\,dx$$

其中 ∂M 必须为闭曲面. 从而在本题中要加上 $\Sigma_0:=\{x^2+y^2\leq 1,\ z=0\}$. 则

$$\iint_{\Sigma}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,ds-\iint_{\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,ds$$

$$=\iiint_{B^+}\mathrm{div}\,(\nabla u\times\nabla v)\,dx-\iint_{\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot(0,0,-1)\,ds$$

$$=\iint_{\substack{\Sigma_0:\\ x^2+y^2\leq 1}}(2x-2y)\,dx\,dy=0$$ (利用 $2x-2y$ 为奇函数, 且 Σ_0 关于原点对称).

□.