1. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$b>a>0$，且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$，则至少存在两点，$x_1,x_2\in[a,b]$使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

证明：记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $F(b)=F(a)=0$，而且$F(x)\in C^1[a,b]$.

$$0=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\,dF(x)=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x)dx=0.$$

由中值定理，$\exists\, x_0\in(a,b)$. s.t. $F(x_0)=0$.

从而 $F(a)=F(x_0)=F(b)=0$.

利用~~微分~~ Rolle定理，$\exists\, x_1\in(a,x_0)$，$x_2\in(x_0,b)$. s.t

$$f(x_1)=f(x_2)=0.$$

#.

2. 判断对错.

(1) $\sum a_n$绝对收敛，$\sum b_n$收敛，则$\sum a_nb_n$绝对收敛；

(2) $\sum|a_n|$收敛 $\Rightarrow \sum a_n(a_1+\cdots+a_n)$收敛；

(3) $\sum|a_na_{n+1}|$收敛 $\Rightarrow \sum a_n$收敛.

解. (1) 对 $\sum b_n$收敛 $\Rightarrow b_n\to0$. $\therefore \exists N$ s.t. $n>N$时 $|b_n|<1$. $\therefore$

$$|a_nb_n|<|a_n| \qquad n>N$$

$\therefore \sum|a_nb_n|$收敛.

(2) 对. $\sum|a_n|$收敛 $\Rightarrow |a_1+\cdots+a_n|<A$，$\forall n$.

$\therefore |\sum a_n(a_1+\cdots+a_n)|<A|a_n|$. ok.

(3) 错. $\{a_n=\frac{1}{n}\}$为反例.

3. 设正项级数 $\sum a_n$发散，$S_n=a_1+\cdots+a_n$，$n=1,\ldots$. 则 $\sum\frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

证明：用Cauchy收敛准则~~证~~. $\forall p=1,2,\ldots$，$S_{n+p}>S_{n+p-1}>\cdots>S_n$.

$$\frac{a_n}{S_n}+\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}>\frac{a_n+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n\nearrow+\infty$，取p充分大，则 $S_n/S_{n+p}<\frac12 \Rightarrow \sum_{i=n}^{n+p}\frac{a_i}{S_i}>\frac12$. (*)

即$\forall n$，$\exists p$充分大，(*)成立. 得证. #.