补充题. 设 u 为 $\mathbb{R}^3$ 中的球体 B 上的光滑向量场且 $\operatorname{div} B=0$. 则存在 B 上光滑切向量场 A s.t. $\nabla\times A=u$.

证明: 用 Poincare 引理. 设 $u=(u_1, u_2, u_3)$, 则

$$\omega_u^{II} = u_1 dx^2\wedge dx^3 + u_2 dx^3\wedge dx^1 + u_3 dx^1\wedge dx^2$$

而 $d\omega_u^{II} = (\operatorname{div} u)\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = 0$

从而 ω_u^{II} 在 B 上是闭的. 由 Poincare 引理, ω_u^{II} 必是恰当的, 即有

$\tau\in A^1(B)$ s.t. $\omega_u^{II} = d\tau$.

设 $\tau = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$, 则

$$d\tau = \omega_u^{II}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times A = u.$$

其中 $A=(A_1, A_2, A_3)$ 为 B 上向量场.

#.