补充题2. 以下这些集合视为$\mathbb{R}^2$的子空间赋有相应的拓扑. 试问:

能否赋予这些拓扑空间以微分结构而使它们成为微分流形?

(1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: xy=0\}$;

(2) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|=1\}$;

(3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\}$;

(4) $D=C\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0,\ |y|<1\}$.

答案: (1) 否. A在0点开邻域内不同胚于$\mathbb{R}^1$的开集(利用连通分支个数为拓扑不变量).

(2) 可以.

(4) 否. D的拓扑与$\mathbb{R}^1$的拓扑不同胚. $\forall p\in(0,y)$, $|y|<1$, p的$\mathbb{R}^2$内的开邻

~~邻~~域内对应$\mathbb{R}^+$的无数个开区间.

(3) 可以. □

补充题3. 设M为紧致微分流形, $f: M\to\mathbb{R}$为可微映射. 试证: 至少存在M上的两个点p和q, 使得 f_{*p} 和 f_{*q} 都是零映射.

提示: 若f为常函数, 则得证. 否则, 必有 $p\neq q$, $p,q\in M$, s.t. $f(p)$为极小值, $f(q)$为极大值.

再利用公式 $f_*(\gamma'(0))=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\gamma(t)=(f\circ\gamma)'(0)$及Rolle定理.

γ为经过p(或q)的光滑曲线, $f\circ\gamma$为$\mathbb{R}$(作为流形)上的C^∞曲线. □