补充题1. 设M为拓扑流形 A_1, A_2为其上两个微分结构. 记$C^\infty(M_i)$为微分流形(M, A_i)上C^∞函数全体, $i=1,2$. 证明: $A_1 = A_2 \Leftrightarrow C^\infty(M_1)=C^\infty(M_2)$.

证明: $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$. 设(U,φ)为A_1中一张容许坐标卡, (V,ψ)为A_2中一张容许坐标卡. 不妨设$U\cap V\neq\phi$.

φ为M_1上U内的C^∞函数, 从而$\forall x\in U\cap V$, φ为x处C^∞函数. 由P.64定理2.3, φ可以延拓为M_1上C^∞函数. 由于$C^\infty(M_1)=C^\infty(M_2)$, 从而$\varphi$也是$x\in V$处$C^\infty$函数, 即, $\varphi\circ\psi^{-1}|_{\psi(x)}$为$C^\infty$函数. 从而坐标卡$(U,\varphi)$与$(V,\psi)$在$x\in U\cap V$处$C^\infty$相关 $\Rightarrow$ (U,φ)与(V,ψ)在$U\cap V$上C^∞相关. 由微分结构A_2极大性, $(U,\varphi)\in A_2$. $\therefore A_1\subset A_2$.

类似可证 $A_2\subset A_1$. 从而 $A_1=A_2$.

证毕.

注: 这个定理告诉我们研究流形上C^∞函数对于理解微分流形的重要性.

思考题: 设$f: M\to N$为微分同胚, 则$C^\infty(M)$与$C^\infty(N)$有什么关系? 反之, 若$C^\infty(M)$与$C^\infty(N)$有这种关系, 是否可推出M与N微分同胚?