P.223 习题四 7. 设 $U=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，令 $\omega=(xdx+ydy)/(x^2+y^2)$.

(1) 证明：ω是闭微分式；(2) 证明：ω是恰当微分式.

证明：(1) $$d\omega=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)}\right)dy\wedge dx+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy$$

$$=\left(\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy=0$$

(2) 取 $f=\ln\sqrt{x^2+y^2}\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$，则

$$df=\frac{1}{2}\,\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\omega.$$ #.

8. 设 $U=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$m$为固定的正数，考虑 U上的 $n-1$ 次外微分式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

其中 $f_i=x^i/\|x\|^m$，$\|x\|^m=\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{\frac{m}{2}}$.

(1) 求 $d\omega$；(2) 确定m的值使 $d\omega=0$；(3) 证明在上述情形下，ω不是恰当微分式.

解：(1)(2) $d\omega=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. 而 $\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\frac{1}{\|x\|^m}-\frac{m}{\|x\|^m}\frac{(x^i)^2}{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$

$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}=\frac{n}{\|x\|^m}-\frac{m}{\|x\|^m}\Rightarrow m=n$ 时 $d\omega=0$.

(3). 若 ω是恰当的，$\omega=d\alpha$，$\alpha\in A^{n-2}(U)$，则由Stokes定理，

$$\int_{S^{n-1}}\omega=\int_{\partial S^{n-1}}\alpha=0$$ S^{n-1}为$\mathbb{R}^n$中单位球面，$\partial S^{n-1}=\emptyset$.

但事实上 $$\int_{S^{n-1}}\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\int_{S^{n-1}}x^i\,dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n=\int_{\partial B^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$=\int_{B^n}n\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=n\,|B^n|\neq 0$. B^n为$\mathbb{R}^n$中单位球体. 后面用了Stokes定理. #.

14. 证明：$\omega=(-ydx+xdy)/(x^2+y^2)$ 在$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上是闭的，但并非恰当的. 又假定$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>0\}$，则$\omega$在$M$上是否恰当？若$\omega$恰当，找出函数 f s.t. $df=\omega$.

证明：见 P.195 例2. ω在M上恰当，$\omega=d(-\operatorname{arctg}x/y)$. 后者 $f=-\operatorname{arctg}x/y\in C^\infty(M)$.

亦可由 de Rham 定理判断 ω在M上恰当. #.