P.226.21 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 中定义 $\omega=\frac{x}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z}{r^3}dx\wedge dy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
记 $S^2(r_0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以原点 O 为中心，以 r_0 为半径的球面. 证明: $\int_{S^2(r_0)}\omega=4\pi$.

证明: 注意 $\omega\notin A^2(\mathbb{R}^3)$, 但 $x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy\in A^2(\mathbb{R}^3)$. 于是由 Stokes定理, 记 $B^2(r_0)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中以 O 为心, r_0 为半径的球体, 则 $\partial B^2(r_0)=S^2(r_0)$. 且

$$\int_{S^2(r_0)}\omega=\int_{\partial B^2(r_0)}\omega=\int_{B^2(r_0)}d\omega \ \dots$$ 是不正确的.

应为

$$\int_{S^2(r_0)}\omega=\frac{1}{r_0^3}\int_{S^2(r_0)}x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$$

$$=\frac{1}{r_0^3}\int_{\partial B^2(r_0)}x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$$

$$=\frac{1}{r_0^3}\int_{B^2(r_0)}3\,dx\wedge dy\wedge dz=3\frac{1}{r_0^3}\,|B^2(r_0)|=\frac{3}{r_0^3}\,\frac{4}{3}\pi r_0^3$$

$$=4\pi.$$ #

22. 定义映射 $f: D\to\mathbb{R}^3$ 为 $f(u,v)=(u,v,u^2+v^2+1)$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$. 设 $\omega=y\,dy\wedge dz+xz\,dx\wedge dz$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上2次微分式，求积分 $\int_D f^*\omega$.

解: $\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=u^2+v^2+1 \end{cases}$

$$f^*\omega=v\left(dv\wedge(2u\,du+2v\,dv)\right)+u(u^2+v^2+1)\,du\wedge(2u\,du+2v\,dv)$$

$$=-2uv\,du\wedge dv+2uv(u^2+v^2+1)\,du\wedge dv$$

$$=2uv(u^2+v^2)\,du\wedge dv.$$

从而

$$\int_D f^*\omega=\int_0^1\int_0^1 2uv(u^2+v^2)\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}.$$ #

注: $\omega=d\left(\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}z\right)dz\right)$. $\therefore f^*\omega=d\left(f^*\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}z\right)dz\right)$

$$=d\left(\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{u^2}{2}(u^2+v^2+1)\right)(2u\,du+2v\,dv)\right)$$

$$\therefore \int_D f^*\omega=\int_{\partial D}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u^2(u^2+v^2+1)\right)(2u\,du+2v\,dv)$$

$$=\frac{1}{2}.$$ #