习题四 P.225.

17. 在光滑流形M上指定一个非退化的闭2次外微分式ω，则称(M,ω)为一个辛流形，ω称为M上的辛结构。在$\mathbb{R}^{2n}$中设直角坐标系为$(p^1,\cdots,p^n,q^1,\cdots,q^n)$，令

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp^i\wedge dq^i.$$

验证：$(\mathbb{R}^{2n},\omega)$是一个辛流形。

证：显然$d\omega=0$。要证ω是非退化的，即对任意给定的ξ，若$\forall\eta$，

$$\omega(\xi,\eta)=0$$

要证$\xi=0$。

设$\xi=(\xi_p^1,\cdots,\xi_p^n,\xi_q^1,\cdots,\xi_q^n)$。取$\eta=(-\xi_q^1,\cdots,-\xi_q^n,\xi_p^1,\cdots,\xi_p^n)$，

则

$$0=\omega(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} dp^i(\xi) & dp^i(\eta)\\ dq^i(\xi) & dq^i(\eta)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\xi_p^i & \eta_p^i\\ \xi_q^i & \eta_q^i\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\left[(\xi_p^i)^2+(\xi_q^i)^2\right]$$

$\Rightarrow \xi=0$. #

注：ω非退化也可以定义为：对给定的$\xi\neq0$，$\exists\eta$ s.t. $\omega(\xi,\eta)\neq0$.

显然若$\omega(p)=0$，则ω在p点退化。

ω退化$\Leftrightarrow$ $\exists$ $\xi\neq0$，s.t. $\forall\eta$，$\omega(\xi,\eta)=0$.

例：$\omega=dp^1\wedge dq^1$退化，因为取$\xi=(0,\xi_p^2,\cdots,\xi_p^n,0,\xi_q^2,\cdots,\xi_q^n)$即可。 #

习题四 P.225.

17. 在光滑流形 M 上指定一个非退化的闭 2次外微分式 ω，则称 (M,ω) 为一个辛流形，ω 称为 M 上的辛结构. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中设直角坐标系为 $(p^1,\cdots,p^n,q^1,\cdots,q^n)$，令

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp^i\wedge dq^i.$$

验证：$(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ 是一个辛流形.

证：显然 $d\omega=0$. 要证 ω 是非退化的，即对任意给定的 ξ，若 $\forall\eta$，

$$\omega(\xi,\eta)=0$$

要证 $\xi=0$.

设 $\xi=(\xi_p^1,\cdots,\xi_p^n,\xi_q^1,\cdots,\xi_q^n)$. 取 $\eta=(-\xi_q^1,\cdots,-\xi_q^n,\xi_p^1,\cdots,\xi_p^n)$，

则

$$0=\omega(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} dp^i(\xi) & dp^i(\eta)\\ dq^i(\xi) & dq^i(\eta)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \xi_p^i & \eta_p^i\\ \xi_q^i & \eta_q^i\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\left[(\xi_p^i)^2+(\xi_q^i)^2\right]$$

$\Rightarrow \xi=0$. #.

注：ω 非退化也可以定义为：对给定的 $\xi\neq0$，$\exists\eta$ s.t. $\omega(\xi,\eta)\neq0$.

显然若 $\omega(p)=0$，则 ω 在 p 点退化.

ω 退化 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 对 $\xi\neq0$, s.t. $\forall\eta$, $\omega(\xi,\eta)=0$.

例：$\omega=dp^1\wedge dq^1$ 退化，因为取 $\xi=(0,\xi_p,\cdots,\xi_p^n,0,\xi_q,\cdots,\xi_q^n)$ 即可. #.