p.225

16. 设M为$2n$维光滑流形，ω是M上的2次外微分式. 假定ω是非退化的，即：在任意一点$x\in M$，及任意的$\xi\in T_xM$，恒等式$\omega(\xi,\eta)=0$对于任意的$\eta\in T_xM$成立蕴含着$\xi=0$. 证明：$\forall x\in M$，$\exists$自然同构I: $T_xM\to T_x^*M$ s.t. $\forall \xi\in T_xM$，有

$$(I(\xi))(\eta)=\omega\langle\eta,\xi\rangle,\quad \forall\eta\in T_xM.$$

证明：取定$\xi\in T_xM$，则$\omega\langle\eta,\xi\rangle$关于$\eta\in T_xM$线性泛函，从而$\omega\langle\cdot,\xi\rangle\in T_x^*M$. 由此建立映射$I$: $\xi\to \underset{\overset{\|}{I(\xi)}}{\omega\langle\cdot,\xi\rangle}$. 下证$I$为同构.

(1) I的线性性. $\omega\langle\cdot,\xi_1+\xi_2\rangle=\omega\langle\cdot,\xi_1\rangle+\omega\langle\cdot,\xi_2\rangle$. 成立(由于$\omega$为多重线性函数)

(2) I为单射：若$I(\xi)=0$，即$\omega\langle\eta,\xi\rangle=0$ $\forall\eta\in T_xM$成立，则由于ω非退化$\Rightarrow\xi=0\Rightarrow I$为单射.

(3) I: $T_xM\to T_x^*M$，$\dim(T_xM)=\dim(T_x^*M)=2n$，从而由线性代数知$I$为满射.

$\therefore I$为同构. #