P.222. 习题四 1. 设 (M, g) 为 n 维有向 Riemann 流形，$(U; x^i)$ 为定向相符的局部坐标系. 令 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$，$G = \det(g_{ij})$.

证明：$\sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 与定向相符的局部坐标系 $(U; x^i)$ 的选取无关，因而是大范围地定义在 M 上的 n 次外微分式.

证明：设 $(V; y^i)$ 为另一个与定向相符的坐标卡且 $U \cap V \neq \varnothing$. 我们已知在 $U \cap V$ 上有 $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = |J|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$，其中 J 为 (x) 坐标到 (y) 坐标变换的 Jacobi 矩阵：$J = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$.

注意 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 到 $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ 的过渡矩阵也是 $J^{-1} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

由于 (g_{ij}) 为 2 阶协变张量，故在 (y) 坐标下，

$$\tilde{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{g} = (J^{-1})^T g (J^{-1})$$

$$\therefore \quad \tilde{G} = |J^{-1}|^2 G.$$

从而

$$\sqrt{\tilde{G}}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = |J^{-1}| \sqrt{G} \cdot |J|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

#.