习题三.

⑦ 设 $\Phi: R\to R$ 是由 $t\mapsto t^2$ 给出的光滑映射. 证明: 不存在光滑切向量场 $Y\in\mathfrak{X}(R)$ 使得 $\frac{d}{dt}$ 与 Y 是 Φ 相关的.

解.

$$\begin{array}{ccccccc} R_1 & \xleftarrow{\mathrm{id}} & R & \xrightarrow{\Phi} & R & \xrightarrow{\mathrm{id}} & R_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{t\} & & \text{流形} & & \text{流形} & & \{x\} \end{array}$$

R_1 局部坐标取为 $(R;t)$

R_2 ············ $(R;x)$.

则 Φ 局部坐标下表为

$$x=t^2.$$

从而

$$\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}=2t\frac{\partial}{\partial x}=\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial x}.$$

∵ $\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处不光滑, ∴ $Y\in\mathfrak{X}(R)$ 不存在. #

⑪ 设 A_1, A_2 为在 R 上由第二章 §1. 例12 给出的两个光滑结构. 令 $M_i=(R,A_i)$, $i=1,2$. 定义映射 $\varphi: M_1\to M_2$, 使得 $\varphi(t)=t$. 证明: φ 为 C^∞ 映射, 但不存在 $Y\in\mathfrak{X}(M_2)$, 使得 $\frac{d}{dt}\in\mathfrak{X}(M_1)$ 与 Y 是 φ-相关的.

证明 $A_1=(R,\varphi=\mathrm{id})$ $A_2=(R,\psi)$; ($\psi: R\to R$: $\psi(x)=x^3$.)

$$\begin{array}{ccccccc} R & \xleftarrow{\mathrm{id}} & M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2 & \xrightarrow{\psi} & R \\ (t) & & & & & & (x) \end{array}$$

(1) φ 局部坐标表达式: $\psi\circ\varphi\circ\mathrm{id}^{-1}$: $x=t^3$ $x\in R$, $t\in R$. smooth. ok.

(2) $$\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}=3t^2\frac{\partial}{\partial x}=3\cdot x^{\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial x}$$ 系数 $3\cdot x^{\frac{2}{3}}\notin C^\infty(M_2)$

∴ Y 不存在. #

⑫ R^3 中3个光滑切向量场 $X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$, $Y=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$.

求: $[X,Y]$, $[Y,Z]$, $[Z,X]$.

答: $[X,Y]=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}$, $[Y,Z]=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}$, $[Z,X]=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}$. #