习题3

6. 设M,N是光滑流形，$M\subset N$，且包含映射 $i:M\to N$ 是N的嵌入子流形. 假定 $X\in\mathfrak{X}(N)$，并且对于每一点 $p\in M$，$X(p)\in i_{*p}(T_pM)$. 证明：切向量场X在M上的限制是M上的光滑切向量场.

证明 $i:M\to N$ 为嵌入，则 $m=\dim M\le n=\dim N$ 且 $\operatorname{rank} i_*=\min\{m,n\}=m$. $\therefore i_*$ 为 $T_pM\to T_pN$ 之单射. 现由 $X(p)\in i_{*p}(T_pM)$，$\Rightarrow \exists!\, V_p\in T_pM$ s.t. $i_*V_p=X_p$. 于是 $\{V_p\}_{p\in M}$ 即 M上之切向量场. 下证 $V\in\mathfrak{X}(M)$.

由定理4.4（嵌入子流形标准型），$\forall p\in M\subset N$，取p在N中坐标邻域(V,y^α)，则

$$\varphi\, i(M)\cap V=\{y\in V:\ y^{m+1}=\cdots=y^n=0\}.$$

设 V_p 在 $i(M)\cap V$上可写为

$$V=\sum_{i=1}^{m}v^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$V=\sum_{i=1}^{m}v^i(y^1,\dots,y^m)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

由 $i_*V_p=X_p$，$\Rightarrow$ $X=\sum_{i=1}^{m}v^i(y^1\dots y^m)\frac{\partial}{\partial y^i}$

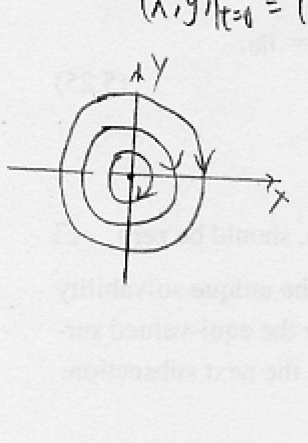
$\because X\in\mathfrak{X}(V)\Rightarrow v^i(y^1\dots y^m)\in C^\infty\Rightarrow V\in C^\infty(i(M)\cap V)\Rightarrow V\in\mathfrak{X}(M)$. #

13 设 $X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$ 是$\mathbb{R}^2$光滑切向量场. 求X生成的单参数变换群.

解：
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}\Rightarrow d(x^2+y^2)=0\Rightarrow x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$$

$(x,y)|_{t=0}=(x_0,y_0)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x=r_0\cos(t-t_0)\\ y=-r_0\sin(t-t_0)\end{cases}\quad r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$



or

$$\varphi(t,(x_0,y_0))=\cancel{(r_0\cos t^{-t_0},\,-r_0\sin t)}$$
$$=(r_0\cos(t-t_0),\,-r_0\sin(t-t_0))$$

(t_0满足：$r_0\cos t_0=x_0$，$r_0\sin t_0=y_0$) #