习题三. 4. 设 X 为光滑流形 M 上的一个切向量场. 证明: X 是光滑切向量场的充分必要条件为: $\forall f\in C^\infty(M)$, 由

$$(X(f))(p) = X_p(f), \quad \forall p\in M$$

定义的函数 $X(f)\in C^\infty(M)$.

证明: $\Rightarrow$ 课本中已证. $\Leftarrow$. $\forall p\in M$, 取 p 坐标邻域 $(U;x^i)$. $\because$ X 为切向量场, 设

$$X|_U=\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中 $X^i(x)=X(x^i)(x)$, x^i 为 U 上第 i 个坐标函数, $x\in U$. $\therefore X^i(x)\in C^\infty(U)$

$\Rightarrow X\in \mathfrak{X}(M)$. #

3. 设 U 为 m 维光滑流形 M 上的一个开子集, $v\in\mathfrak{X}(U)$. 证明: $\forall x_0\in U$, $\exists$ x_0 的一个邻域 $V\subset U$, s.t. 存在 $\tilde{v}\in\mathfrak{X}(M)$, 且 $\tilde{v}|_V=v|_V$.

证明: 取 p 的邻域 $p\subset V\subset\bar{V}\subset W\subset\bar{W}\subset U$, 则存在 $f\in C^\infty(M)$, s.t. $f|_V\equiv1$, $f|_{M\setminus W}\equiv0$. 令 $\tilde{v}=f\cdot v$, 则 $\tilde{v}\in\mathfrak{X}(M)$ 且 $\tilde{v}|_V=v$. #.

5. 设 $f:M\to N$ 为光滑同胚, $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, 定义 $f_*X: C^\infty(N)\to C^\infty(N)$ 如下:

$$(f_*X)(g)=X(g\circ f)\circ f^{-1}, \quad \forall g\in C^\infty(N).$$

证明: (1) f_*X 是 N 上的光滑切向量场, 且 f_*X 与 X 是 f-相关的;

(2) $f_*: \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(N)$ 为 Lie 代数同构.

证明 (1). $f_*X\in\mathfrak{X}(N)$. 只须验证 f_*X 满足线性性及 Leibniz 法则;

f_*X 与 X 之 f-相关性: $(f_*X_p)h = X_p(h\circ f)$. $p\in M$, $h\in C^\infty_{f(p)\in N}$.

~~(f_*X)~~

$$= X(h\circ f)(p) = X(h\circ f)\circ f^{-1}(f(p))$$

$$= (f_*X)h(f(p)) = (f_*X)_{f(p)}h \Rightarrow f_*X_p=(f_*X)_{f(p)}. \text{ OK!}$$

(2) f_* 为线性空间 $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(N)$ 之同构. 设 $X\in\ker f_*$, 则 $\forall g\in C^\infty(N)$, $X(g\circ f)\circ f^{-1}\equiv0\Rightarrow X(g\circ f)\equiv0$ $\Rightarrow X=0$. $\therefore f_*$ 为单射. 又因为 f 为同胚, $\therefore f^{-1}$ 存在, $\therefore (f^{-1})_*$ 也存在 $\Rightarrow (f_*)^{-1}=(f^{-1})_*$. $\therefore f_*$ 也满. 又依定理 2.6, $f_*[X,Y]=[f_*X, f_*Y]$ $\Rightarrow$ f_* 为 Lie 代数同构. #.