25. 设 (x,y) 为 $\mathbb{R}^2$ 的坐标系，$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}$，$Y=\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$，求 $\mathcal{L}_X Y$ 关于 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ 的表达式. 设 $u=x$, $v=x+y$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上坐标变换，求 $\mathcal{L}_X Y$ 关于 $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ 的表达式.

解: $\mathcal{L}_X Y=[X,Y]=[x^2\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}]$

$=-2x\frac{\partial}{\partial x}$.

在 $\begin{cases} u=x \\ v=x+y \end{cases}$ 坐标变换下，$\frac{\partial}{\partial x}=1\cdot\frac{\partial}{\partial u}+1\frac{\partial}{\partial v}$

$\therefore\ \mathcal{L}_X Y=-2\cdot u(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v})$ 　#.

37. 设 $\begin{cases} w^1=x^1dx^1+x^2dx^2 \\ w^2=x^2dx^1+x^1dx^2 \end{cases}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上两个余切向量场(1次外微分式). 求 w^1, w^2 彼此线性无关的区域，并在该区域内求 $\{w^1, w^2\}$ 的对偶标架场.

解: 由第一章 P.43 定理 5.7，w^1 与 w^2 线性相关 $\Leftrightarrow w^1\wedge w^2=0 \Leftrightarrow$ $(x^1dx^1+x^2dx^2)\wedge(x^2dx^1+x^1dx^2)=0 \Leftrightarrow (x^1)^2=(x^2)^2$. 从而当 $|x^1|\neq|x^2|$ 时 w^1 与 w^2 线性无关，从而可以作用余切空间(2维)的基底，成为相应区域上标架.

对偶标架场: $\begin{cases} v_1=\frac{1}{(x^1)^2-(x^2)^2}(x^1\frac{\partial}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial}{\partial x^2}) \\ v_2=\frac{1}{(x^1)^2-(x^2)^2}(-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial}{\partial x^2}) \end{cases}$

它们满足 $\langle w^i, v_j\rangle=\delta^i_j$. 　#.