p.169.

15. 设 $\varphi(t,x,y)=(xe^{\lambda t}, ye^{\mu t})$，其中 λ, μ 为常数. 证明: $\{\varphi_t\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上单参数变换群，并求它诱导的切向量场.

解: (1) $\varphi(0,x,y)=(x,y)$;

(2) $\varphi(t,\varphi(s,x,y)) = \varphi(t,(xe^{\lambda s}, ye^{\mu s}))$

$= (xe^{\lambda s}\cdot e^{\lambda t}, ye^{\mu s}e^{\mu t}) = (xe^{\lambda(s+t)}, ye^{\mu(s+t)})$

$= \varphi(t+s; x,y)$. $\therefore \varphi$ 为单参数变换群.

(3) 固定 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，经过 (x,y) 的 $\{\varphi_t\}$ 的轨线为

$$(xe^{\lambda t}, ye^{\mu t})$$

从而诱导切向量场为 $\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} xe^{\lambda t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ye^{\mu t}\right)\frac{\partial}{\partial y}$

$$= \lambda x\frac{\partial}{\partial x} + \mu y\frac{\partial}{\partial y}.$$

#

18. 设 $X = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ 为 R上的光滑切向量场 (x^2 指 x 的平方). 求 X 生成的局部单参数变换群.

解: $\forall\ x_0\in\mathbb{R}$，解 ODE: $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x^2\\ x(t=0)=x_0\end{cases} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{-t+\frac{1}{x_0}}\right) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$

它确定了 $\mathbb{R}$ 上的一个局部单参数变换群.

#

27. 设 $f: M\to N$ 为光滑同胚，证明: $f_*(L_X Y) = L_{f_*X}(f_*Y)$.

证明: $f_*(L_X Y) = f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y] = L_{f_*X}(f_*Y)$.

#