习题二. P.119.(7) 设 M, N 为光滑流形，且 M 连通，$f: M \to N$ 为光滑映射. 证明：若 $\forall p \in M$，有 $f_{*p}=0$，则 f 为常值映射.

证明：任取 $c \in f(M)$，则 $\{c\}$ 为 N 中闭集（$\because N$ 局部同胚于 $\mathbb{R}^n$）.
从而 $f^{-1}(c) \in M$ 为闭集（$\because f$ 连续）且非空. 由 M 连通性，为证 $f^{-1}(c)=M$，只须证 $f^{-1}(c)$ 为开集.

$\forall p \in f^{-1}(c)$，取 p 局部坐标 $(U; x^i)$ $\in M$，取 c 局部坐标 $(V; y^\alpha)$ $\in N$，则 f 局部坐标表示为：

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad \alpha = 1 \cdots n. \qquad (1)$$

而 f_{*p} 的由基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ 到 $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^m}\}$ 的矩阵为

$$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ \alpha=1,\cdots,n}} \equiv 0$$

由于 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 中的结果，(1) 中 $f^\alpha \equiv (y^1(c), \cdots, y^n(c))$ 为常值映射. 从而 $p \in U \in f^{-1}(c) \Rightarrow f^{-1}(c)$ 为开集. □