习题二(41).(P.122) 设M为满足第二可数公理的m维光滑流形，A,B为M中互不相交的闭子集. 证明：存在$\psi\in C^\infty(M)$，使得$0\le\psi\le1$，$\psi|_A\equiv1$，$\psi|_B\equiv0$.

证明：① A,B为闭集 $\Rightarrow$ $M\setminus A$，$M\setminus B$为开集；$A\cap B=\phi \Rightarrow \Sigma=\{M\setminus A, M\setminus B\}$为$M$的一个开覆盖.

由单位分解定理，存在Σ的一个可数的局部有限加细开覆盖$\Sigma_0=\{V_i: i\in N\}$，以及 $f_i\in C^\infty(M)$，$0\le f_i\le1$，$\mathrm{supp}\, f_i\subset V_i$，且$\sum_i f_i\equiv1$.

② 利用Σ_0为Σ的加细，$\forall\, V_i\in\Sigma_0$，必有$V_i\subset M\setminus A$ 或 $V_i\subset M\setminus B$. 记

$$\Lambda_1=\{i\in N:\ V_i\subset M\setminus A \text{ 但 } V_i\not\subset M\setminus B\},$$
$$\Lambda_2=\{i\in N:\ V_i\subset M\setminus B \text{ 但 } V_i\not\subset M\setminus A\};$$
$$\Lambda_3=\{i\in N:\ V_i\subset(M\setminus B\cap M\setminus A)\}.$$

则 $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$互不相交且 $\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3=N$.

③ 置 $\psi=\sum_{i\in\Lambda_2} f_i$，则$\psi$为满足题目要求的$C^\infty(M)$函数.

(1) 显然 $\psi\in C^\infty(M)$，且$0\le\psi\le1$.

(2) 对$i\in\Lambda_2$，$\mathrm{supp}\, f_i\subset V_i\subset M\setminus B \Rightarrow f_i|_B=0 \Rightarrow \psi|_B\equiv0$.

(3) 类似地，对 $i\in\Lambda_1$，有 $f_i|_A\equiv0$，对$j\in\Lambda_3$，有 $f_j|_A\equiv f_j|_B\equiv0$.

从而由
$$1=\sum_{i\in N} f_i=\sum_{i\in\Lambda_2} f_i+\sum_{j\in\Lambda_3} f_j+\psi$$

$$\Rightarrow \psi|_A=1-\sum_{i\in\Lambda_2} f_i|_A-\sum_{j\in\Lambda_3} f_j|_A=1-0-0=1.$$

证毕。