习题二(40). 设M, N是连通的光滑流形，证明:

(1) 若M, N都可定向，则$M\times N$也可定向;

(2) 若M、N中有一个是不可定向的，则$M\times N$是不可定向的;

(3) 若$\partial M\neq\phi$, $\partial N=\phi$，则$M\times N$为带边流形，且$\partial(M\times N)=\partial M\times N$.

证明: 设M的微分结构为$\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha\in I\}$，$N$的微分结构为$\mathcal{V}=\{(V_\beta,\psi_\beta),\beta\in J\}$. 则$M\times N$的微分结构由$\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta),\alpha\in I,\beta\in J\}$ $(*)$ 极大化得到. 因此若$M\times N$有定向A，则A中坐标系未必有$(*)$形式!

(1) 不妨设$\mathcal{U}$、$\mathcal{N}$分别为M、N的定向，则$\mathcal{B}$即为$M\times N$的定向(依定义自己证明.)

(2) 利用推论6.2及(34)题. 不妨设M不可定向，则必$\exists\, p\in M$，以及以p为基点的回路γ，使p点的定向λ_p依γ连续传播回到p时变为$(-\lambda_p)$. 任取$q\in N$，取p点M内坐标系$\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$ $(x^i)_{i=1}^m$，q在N内坐标系(V_β,ψ_β) $(y^j)_{j=1}^n$. 不妨设$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}\in\lambda_p$，则$\mu_1=\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p),\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}(p),\frac{\partial}{\partial y^1}(q),\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}(q)\right\}$构成$(p,q)\in M\times N$点的一个定向. 此定向依$\gamma\times\{q\}$连续传播回到$(p,q)\in M\times N$，不妨设变为$\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}(p),\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}(p),\frac{\partial}{\partial y^1}(q),\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}(q)\right\}\in-\mu_1$. 从而$M\times N$上有一个回路$\gamma\times\{q\}$，$\mu_1$由之连续传播变为$-\mu_1$. $\because M\times N$连通，$\therefore M\times N$不可定向.

(3) 依带边流形定义可证. #