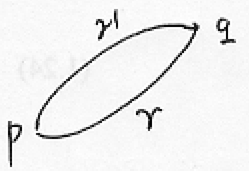
习题(三) P.121 (34). 设M为连通的n维光滑流形，$p\in M$，并且在T_pM中指定了一个定向. 证明：如果T_pM的定向沿着以p为基点的任意一条闭路径传播，在回到p点时仍然保持T_pM的定向，则M是可定向的.

证明：(1) 设给定T_pM的定向为λ. 则$\forall q\in M$，可以唯一的确定T_qM上的定向λ_q.

事实上，作连接p.q的连续曲线γ，将λ沿γ连续延拓到q点，得到λ_q.

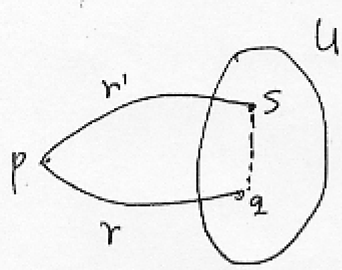
λ_q与γ的选取无关. 假设沿另一条曲线γ'，λ连续延拓为q点定向



$-\lambda_q$ (T_qM只有两个定向!)，那么，将λ_q由$(-\gamma')$ (γ'的反向曲线) 连续延拓得到$-\lambda$. (这只需更换γ上连续延拓时所用局部坐标定向即可，如将$(x^1,\cdots x^n)$换为$(-x^1,\cdots x^n)$).

那么，λ将由$\gamma-\gamma'$这条闭曲线传播回p点得$-\lambda$，与假设矛盾.

(2) 现取坐标卡$(U;x^i)$. 设$q\in U$为任一固定点. 取$(x^1,\cdots x^n)$使$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_q$在$T_qM$上确定的定向与$\lambda_q$相同. 则$\forall s\in U$，$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_s$在$T_sM$上确定的定向与$\lambda_s$相同.



事实上，取光滑曲线在U内连接q.s. 则$\gamma+\widehat{qs}$为连续曲线.

由于λ_q为λ沿γ的传播，则$\exists q$的坐标邻域(U_1, y_1^α)，使$\{\frac{\partial}{\partial y_1^\alpha}\}\in\lambda_{\bar{s}}$，$\bar{s}\in\gamma\cap U_1$. 而$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_q\in\lambda_q$，

从而在q点$\left|\left(\frac{\partial y_1^\alpha}{\partial x^i}\right)\right|>0$，~~不妨设此行列式在$U_1$上均$>0$~~. 此行列式$q$点一邻域内$>0$. 从而此邻域内传到定向与右相同.

另一方面，$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$在$\widehat{qs}$上确定了一个定向，此定向为$\lambda$沿$\gamma+(\widehat{qs})$的连续延拓.

于是由(1)的结论，$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}\in\lambda_s$. 即$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$确定的定向与$\lambda_s$相同.

(3) 取由(2)中得到的全部坐标卡构成集合 A_0，证明 A_0 为 M 的一个定向.

显然所有这些坐标卡全部覆盖 M.

再证若 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)(U_\beta,\varphi_\beta)$ 为 A_0 中坐标卡，则变换 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 之Jacobi行列式在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 >0. 设局部坐标分别为 (U_α, x^i), (U_β, y^α),
则 $\forall p\in U_\alpha\cap U_\beta$，由于 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}\in\lambda_p$，$\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\}\in\lambda_p$ (回忆(2)中坐标卡性质)，则

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)\Big|_{\varphi_\alpha(p)}>0.$$

从而

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)\Big|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}>0.$$

将 A_0 极大扩张为 $\tilde{A}_0$，

由此 $\tilde{A}_0$ 为 M 的一个定向。 #.