(24) 设 $f: M \to N$ 为光滑映射. 若有嵌入子流形 $i: W \to N$, 使得 $f(M) \subset W$. 证明: 映射 $f: M \to W$ 光滑.

证明: (1) W 的拓扑由 N 诱导, 故 $f: M \to W$ 连续.

(2) $\forall p \in M$, $f(p) \in W$. 取 p 在 M 上局部坐标系 $(U; x^i)$, $f(p)$ 在 N 上局部坐标系 (V, y^α). 由定理 4.4, 可取 (V, y^α) 使得

$$W \cap V := \{(y^1, \cdots, y^w, y^{w+1}, \cdots y^n) : y^\nu = 0, \nu = w+1, \cdots, n\}.$$

此外设 $\dim W = w$.

另一方面, f 在此局部坐标下表为

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \cdots, x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^n(x^1, \cdots, x^m) \end{cases} \quad (y^1 \cdots y^n) \in V.$$

$\because f(M) \subset W$, 从而 $y^{w+1} = \cdots = y^n = 0$. 从而 $f: M \to W$ 为

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots x^m), \ \alpha = 1, \cdots, w. \quad C^\infty.$$

注意由 (i, W) 为 N 的嵌入子流形 $(y^1, \cdots, y^w)$ 可以作为 W 的局部坐标.

从而 $f: M \to W$ 光滑. $\square$.