习题二. 20. P.120. 设 $f: M\to N$ 为淹没. 证明: f 为开映射.

证明: (1) 设 $U\subset M$ 为开集, 要证 $V=f(U)$ 为开集. 即, $\forall p\in V$, $\exists$ p 的邻域 $\tilde{V}\subset N$, 使得 $\tilde{V}\subset V=f(U)$.

(2) 取点 $q\in U$ s.t $f(q)=p$. 取 q 在M内的局部坐标系 $(\tilde{U}, x^i)$, p在N内局部坐标 $(\tilde{V}, y^\alpha)$. 不妨设 $x^i(q)=0$, $i=1,\cdots,m$, $y^\alpha(p)=0$, $\alpha=1,\cdots,n$.

f 在此局部坐标下为

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m),\qquad \alpha=1,\cdots,n.$$

由于f为淹没, 则 $m\geq n$, 且不妨设

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|_0\neq 0$$

从而由反函数定理, 缩小 $\tilde{U}$, 可使 $\tilde{V}$ 与 $I_n=\{(x^1,\cdots,x^n,\cdots x^m): |x^i|<\delta, 1\leq i\leq n, x^\nu=0, \nu=n+1,\cdots,m\}$ 同胚. 从而 $f(I_n)=\tilde{V}$. 现取 δ及$\tilde{U}$适当小, 则 $I_n\subset U$, 那么 $\tilde{V}=f(I_n)\subset f(U)$. 取 $\tilde{V}=\tilde{V}$ 即得证. □

(23)题: 证明见 P.103 习题 5.4. 注意 Dg 处处不为零, 则 $\operatorname{rank} g=1$. □

21题 设M为连通的C^∞流形 $\dim M\geq 2$. 证明: 任一C^∞函数 $f: M\to\mathbb{R}$ 都不可能是1-1的.

证明 反证法. 假设某f为1-1的. 在M上挖去一点 p, 相应$\mathbb{R}$上挖去 $f(p)$. 则

$$f: M\setminus\{p\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(p)\}$$

仍为1-1对应且连续. $\mathbb{R}\setminus\{f(p)\}$不连通, 但 $M\setminus\{p\}$ 由于$\dim M\geq 2$, 仍连通. 这与连续映射保持连通性矛盾.

$M\setminus\{p\}$的连通性$\Leftrightarrow$道路连通. 若连接M上任两点(异于p)的连续曲线经过p点, 取p的坐标邻域, 利用$\mathbb{R}^m$ ($m\geq 2$)的性质可以修改曲线使之仍在 $M\setminus\{p\}$内. □