习题二(16) 设 $i: M\to N$ 为 N 的浸入子流形，其中 i 为包含映射. $\gamma:(a,b)\to N$ 为 N 中的一条光滑曲线，并且 $\gamma(a,b)\subset M=i(M)$. 举例说明：未必在每一点 $t\in(a,b)$ 都成立 $\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}M$.

解：第一步：记 $M=\{(2\cos(2\arctg t-\frac{\pi}{2}), \sin 2(2\arctg t-\frac{\pi}{2}))\in R^2;\ t\in R\}\subset R^2$.

(参见P. 84 例3). 我们在M上建立微分结构，使之成为光滑流形.

第二步：证明 $i: M\to N$ 为浸入子流形，其中 $N=R^2$

第三步：取曲线 $\gamma: R\to R^2$ 为

$$\gamma(t)=\left(2\cos(t-\tfrac{\pi}{2}),\ \sin 2(t-\tfrac{\pi}{2})\right)\in R^2$$ (见 P.85 例2).

说明 γ 为 R^2 中光滑曲线，且 $\gamma(t)\in M$.

第四步：计算 $\gamma(t)$ 在 $t=\pi$ 处的切向量. 计算 M 在 $t=0$ 处的切向量.

下面我们详细计算，希望同学们通过具体的算例来加深对于抽象定义和一般定理的理解.

第一步：M 如图所示. 注意 $t\to+\infty$ 时，BC段无限接近于原点 O，当 $t\to-\infty$ 时，EF段无限接近于原点 O. 从而作为曲线来说，M没有自交点，是 $R\to R^2$ 的单射，但作为集合来说，它与 $\gamma(t)$ 的像集是重合的. 从而 $\gamma(t)\in M,\ \forall t\in R$

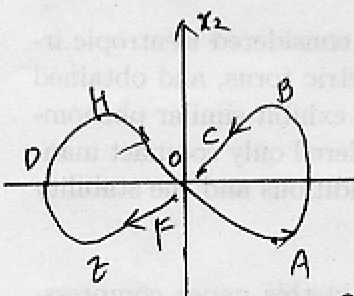

图1

$\gamma(t)$ 显然是 R^2 上光滑曲线. 因为在局部坐标

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos(t-\frac{\pi}{2}) \\ x_2 = \sin 2(t-\frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad t\in R$$

下，x_1, x_2 均为 t 的 C^∞ 函数.

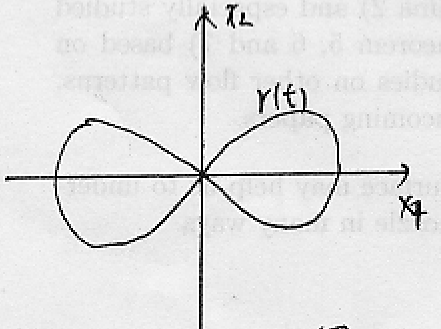

图2.

第二步：在M上建立微分结构. 记映射 $G: R\to R^2$ 为

$$G(t)=\left(2\cos(2\arctg t-\tfrac{\pi}{2}),\ \sin 2(2\arctg t-\tfrac{\pi}{2})\right).$$

这是个单射，从而可以用 G 将R的拓扑

诱导为M上的拓扑. 即: U为M上开集 $\Leftrightarrow$ $G^{-1}(U)$为R中开集. 于是, M在此拓扑下与R拓扑同胚, 因为G, G^{-1}均为连续的.

由此, M有坐标系$(M;\varphi)$. 其中对 ~~任意~~ $(x^1(t), x^2(t)) \in M$, $\varphi(x^1(t), x^2(t)) = t \in R$. 由上面拓扑定义, φ为$M \to R$同胚. 从而(M, φ)确为坐标系.

由此, 由$\{(M,\varphi)\}$生成M上的一个C^∞微分结构, 由之, M为一个C^∞微分流形.

第三步: $i: M \to R^2$为浸入子流形.

为此, $\forall (x^1(t), x^2(t)) \in M$, 它有局部坐标$(M; t)$. 从而 i在局部坐标下为

$$\underset{t}{t} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \underset{\in M}{(x^1(t), x^2(t))} \xrightarrow{i} \underset{\in R^2}{(x^1(t), x^2(t))} \to (x^1(t), x^2(t))$$

$$\begin{cases} x^1(t) = 2\cos(2\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}), & \cancel{\sin 2(2\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2})} \\ x^2(t) = \sin 2(2\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}) & t \in R^1 \end{cases}$$

这里$R^1 \to R^2$的普通映射. 我们须说明 i_{*t}的秩恒为1, $\forall t \in R$. 即

$$i_{*t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{dx^1(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{dx^2(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

向量$\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \frac{dx^2(t)}{dt}\right)$恒$\neq 0$, $\forall t \in R$.

这可以自行验证.

第四步: M在$t=0$ (即$(0,0)$处)的切向量为$\{\frac{\partial}{\partial t}\}$. 而

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 4\frac{\partial}{\partial x^1} - 4\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

由于M为1维的, 从而 ~~其切空间~~ $\overset{\text{错误}}{\cancel{T_{(0,0)}M = \operatorname{span}\{2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2\frac{\partial}{\partial x^2}\}}}$

其在$t=0$处切空间为 $T_{(0,0)}M = \{\frac{\partial}{\partial t}\}$, 而 $i_*(T_{(0,0)}M) = \operatorname{span}\{4\frac{\partial}{\partial x^1} - 4\frac{\partial}{\partial x^2}\}$.

再来看 $\gamma'(\pi)$. γ作为$R \to R^2$上的光滑曲线,

$$\gamma'(\pi) = x_1'(t)\frac{\partial}{\partial x^1} - x_2'(t)\frac{\partial}{\partial x^2} = -2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

显然 $\gamma'(\pi) \notin i_*(T_{(0,0)}M)$. 从而 $\gamma'(\pi) \notin T_{(0,0)}M$. 否则, 若 $\gamma'(\pi) \in T_{(0,0)}M$,

则由 $i_*\gamma'(\pi) = \gamma'(\pi)$ 会导出矛盾.

□

诱导为 M 上的拓扑. 即: U 为 M 上开集 $\Leftrightarrow$ $G^{-1}(U)$ 为 R 中开集, 于是, M 在此拓扑下与 R 拓扑同胚, 因为 G, G^{-1} 均为连续的.

由此, M 有坐标系 $(M; \varphi)$ 其中对 $\forall$ 点 $(x^1(t), x^2(t)) \in M$, $\varphi(x^1(t), x^2(t)) = t \in R$. 由上面拓扑定义, φ 为 $M \to R$ 同胚. 从而 (M, φ) 称为坐标系.

由此, 由 $\{(M, \varphi)\}$ 生成 M 上的一个 C^∞ 微分结构, 由之, M 为一个 C^∞ 微分流形.

第三步: 证 $M \to \mathbb{R}^2$ 为浸入子流形.

为此, $\forall (x^1(t), x^2(t)) \in M$, 它有局部坐标 $(M; t)$. 从而 i 在局部坐标下为

$$t \xrightarrow{\varphi^{-1}} \overset{\in M}{(x^1(t), x^2(t))} \xrightarrow{i} \underset{\in R^2}{(x^1(t), x^2(t))} \to (x^1(t), x^2(t))$$

$$\begin{cases} x^1(t) = 2\cos(2\arctan t - \frac{\pi}{2}), & \cancel{\sin 2(2\arctan t - \frac{\pi}{2})} \\ x^2(t) = \sin 2(2\arctan t - \frac{\pi}{2}) & t \in R^1 \end{cases}$$

这里 $R^1 \to R^2$ 的普通映射. 我们须说明 i_{*t} 的秩恒为 1, $\forall t \in R$. 即

$$i_{*t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{dx^1(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{dx^2(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\text{向量}\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \frac{dx^2(t)}{dt}\right) \text{恒} \neq 0, \ \forall t \in R.$$

这可以自行验证.

第四步: M 在 $t=0$ (即 $(0,0)$ 处) 的切向量为 $\{\frac{\partial}{\partial t}\}$. 而

$$i_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 4\frac{\partial}{\partial x^1} - 4\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

由于 M 为 1 维的, 从而 ~~其切空间~~ $\cancel{T_{(0,0)}M = \mathrm{span}\{-2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2\frac{\partial}{\partial x^2}\}}$
其在 $t=0$ 处切空间为 $T_{(0,0)}M = \{\frac{\partial}{\partial t}\}$, 而 $i_*(T_{(0,0)}M) = \mathrm{span}\{4\frac{\partial}{\partial x^1} - 4\frac{\partial}{\partial x^2}\}$.

再来看 $\gamma'(\pi)$. γ 作为 $R \to R^2$ 上的光滑曲线,

$$\gamma'(\pi) = \dot{x}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1} - \dot{x}^2(t)\frac{\partial}{\partial x^2} = -2\frac{\partial}{\partial x^1} - 2\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

显然 $\gamma'(\pi) \notin i_*(T_{(0,0)}M)$. 从而 $\gamma'(\pi) \notin T_{(0,0)}M$. 否则, 若 $\gamma'(\pi) \in T_{(0,0)}M$,

则由 $i_*\gamma'(\pi) = \gamma'(\pi)$ 会导出矛盾.

$\square$