附：Poincaré回归定理：若$g: D\to D$为保测度的单射，~~满射~~，则对D内任一开集U都有$x\in U$及$n>0$，使得 $g^n x\in U$，只要D有有限测度。（保测度即$|gU|=|U|$）。

证明：考虑U的像集 $U, gU, \cdots g^k U, \cdots$ 由于D测度有限，则必有$k, l>0$，$k>l$，s.t $g^k U\cap g^l U\neq\phi$. 由于g单，则令$n=k-l$，

$$g^n U\cap U\neq\phi.$$

设 $z\in g^n U\cap U$，则$\exists\, x\in U$ s.t $g^n x=z\in U$. 证毕。

Poincaré定理是遍历理论里最简单的遍历定理之一，在力学与统计力学、微分动力系统等学科中有诸多应用。下面用上述定理的证明思路证习题14.

P.120 习题二.(14) 作映射 $\varphi: \mathbb{R}\to T^2=\mathbb{R}^2/\sim$ s.t.

$$\varphi(t)=(\sqrt{2}t \bmod 1,\ t \bmod 1).$$

证明：φ为光滑映射且象集$\varphi(\mathbb{R})$在T^2上处处稠密。

证明 (1) $\bar{\varphi}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$: $\bar{\varphi}(t)=(\sqrt{2}t, t)$；$\pi: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/\sim=T^2$为自然投影。则$\bar{\varphi}$, π均为光滑映射(P.94. Thm 5.2). 从而 $\varphi=\pi\circ\bar{\varphi}$ 为C^∞映射。

(2) T^2是有从$\mathbb{R}^2$诱导的度量。为证$\varphi(\mathbb{R})$在T^2上稠，只须证：$\exists\, m_n, l_n\in\mathbb{Z}$，取 $t_n=l_n+b$，s.t. $\sqrt{2}t_n+m_n\to a$. 即

$$\sqrt{2}l_n+m_n\to a-\sqrt{2}b.$$

其中$(a,b)\in T^2$. 从而 $0\le a<1$，$0\le b<1$，$a-\sqrt{2}b\in(-\sqrt{2},1)$

我们证明 $\{\sqrt{2}m+n\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ 在$(-\sqrt{2},1)$上稠密即可。

(3) claim: $\{\sqrt{2}m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 在$S^1=\mathbb{R}^1/\sim$上稠周。

若此断言成立，则$\forall\, a\in[0,1)$，$\exists\, m_n, l_n$ s.t $\sqrt{2}m_n+l_n\to a$. $\Rightarrow$

$$\underset{\in[-\sqrt{2},1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(m_n-1)+l_n\to a-\sqrt{2}},\quad \underset{\in[-1,0)}{\sqrt{2}m_n+(l_n-1)\to a-1}$$

从而$\{\sqrt{2}m+n\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ 在$(-\sqrt{2},1)$上稠周.

(4) 考察S^1上映射：　$g(x)=(x+\sqrt{2}) \bmod 1 \in S^1$　则g为双射，保测度的同胚，且保序（g本质上就是S^1上的旋转变换）。易见 $g^k(x)=(x+k\sqrt{2}) \bmod 1$，$k\in\mathbb{Z}$.

我们证明，$\forall x\in S^1$，$\{g^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 在S^1上稠　(*)　$x=0$情形即(3)中claim.

(5) 用反证法，假若不然，则$\exists$ S^1上开集U, s.t.

$$\{g^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap U = \phi \qquad (1)$$

因为$\mathbb{R}$上开集由可列个开区间(互不相交)并得到，从而S^1上开集也可表为互不相交的可列个开区间(开弧)之并。由于$|S^1|<\infty$（$|S^1|$指S^1的Lebesgue测度），从而可找到测度的一个开区间$(a_0,b_0)\subset U$（当然这样的(a_0,b_0)可能不唯一）。

现考察　(a_0,b_0)，　$g(a_0,b_0)$，…　$g^k(a_0,b_0)$，…

则　$g^k(a_0,b_0)$ 均为开区间 ($\forall k$)，且 $|g^k(a_0,b_0)|=|(a_0,b_0)|>0$. 由于$|S^1|<\infty$，必有$k>l>0$ s.t.

$$g^k(a_0,b_0)\cap g^l(a_0,b_0)\neq\phi$$

由g为单射，取$n=k-l>0$则　$(a_0,b_0)\cap g^n(a_0,b_0)\neq\phi$.

现若　$(a_0,b_0)\neq g^n(a_0,b_0)$，则　$(a_0,b_0)\cup g^n(a_0,b_0)$ 仍为开区间，且$|(a_0,b_0)\cup g^n(a_0,b_0)|>|(a_0,b_0)|$. 另一方面，由(1)，$\{g^k(x)\}\cap(a_0,b_0)=\phi$，从而$\{g^k(x)\}\cap g^n(a_0,b_0)=\phi \Rightarrow \{g^k(x)\}\cap\left((a_0,b_0)\cup g^n(a_0,b_0)\right)=\phi$. 这与$(a_0,b_0)$的选取矛盾。

由此，　$g^n(a_0,b_0)=(a_0,b_0)$. 从而 $\forall x\in(a_0,b_0)\subset S^1$，由$g$保序性，

$$g^n x = x$$

即 $\exists$ $m,k\in\mathbb{Z}$. s.t

$$x+\sqrt{2}n+m=x+k$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{k-m}{n}\in\mathbb{Q}.$$

矛盾，(*)得证。