习题二. P.119.(11) 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 为光滑流形 X、Y、Z 之间的光滑映射. 证明: (1) $(g\circ f)_* = g_*\circ f_* : T_pX \to T_{g\circ f(p)}Z$, $\forall p \in X$.

(2) $(g\circ f)^* = f^*\circ g^* : T^*_{g\circ f(p)}Z \to T^*_pX$, $\forall p\in X$.

证明: (1) $\forall v \in T_pX$, $\varphi \in C^\infty_{g\circ f(p)}(Z)$,

$$((g\circ f)_* v)\varphi = v(\varphi\circ g\circ f) = (f_* v)(\varphi\circ g)$$

$$= (g_*(f_* v))\varphi$$

$$\Rightarrow \quad (g\circ f)_* = g_*\circ f_*.$$

(2). $\forall \alpha \in T^*_{g\circ f(p)}Z$, $v \in T_pX$,

$$\langle (g\circ f)^*\alpha, v\rangle = \langle \alpha, (g\circ f)_* v\rangle$$

$$= \langle \alpha, g_*\circ f_*(v)\rangle$$

$$= \langle g^*\alpha, f_* v\rangle = \langle f^*\circ g^*\alpha, v\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (g\circ f)^* = f^*\circ g^*.$$

□

注意: 本题当然可以用局部坐标方法化为矩阵乘法来证, 但是, 在证明与求解思路上, 一般还是提倡用整体的不依赖于坐标的方法求解。