第四章习题

一、 将下列命题符号化:

1、庄稼将会枯死，除非天下雨。（C: 庄稼将会枯死，R: 天下雨）

答案: $C \vee R$ 或 $\neg R \to C$

2、蛇是哺乳动物，仅当蛇用奶喂养它们的后代，但蛇并不用奶来喂养它们的后代。（M: 蛇是哺乳动物; N: 蛇用奶喂养它们的后代）

答案: $(M \to N) \wedge (\neg N)$ 或 $(\neg N \to \neg M) \wedge (\neg N)$

3、假设弗雷德既是有理性的又是动物，那么弗雷德是人; 但弗雷德不是有理性的。(R: 弗雷德是有理性的， A: 弗雷德是动物; H: 弗雷德是人)

答案: $((R \wedge A) \to H) \wedge \neg R$

4、尽管驯鹿存在，圣诞老人不存在; 但如果圣诞老人不存在，那么成年人不诚实。（R: 驯鹿存在; S: 圣诞老人存在; H: 成年人诚实）

答案: $(R \wedge \neg S) \wedge (\neg S \to \neg H)$

5、如果特鲁德不写诗那么霍勒斯写歌; 但其实并非如果特鲁德写诗那么霍勒斯不写歌。（H: 特鲁德写诗; F: 霍勒斯写歌）

答案: $(\neg H \to F) \wedge (\neg(H \to \neg F))$

6. 这个三角形是锐角三角形，因此它不是直角三角形，也不是钝角三角形。（A: 它是钝角三角形; B: 这个三角形是锐角三角形; C: 它是直角三角形）

答案: $B \to (\neg A \wedge \neg C)$

7、他或者买空调，或者买电视机，就是不买电脑。（L: 买电脑; M: 买电视机; N: 买空调）

答案:（$M \vee N$）$\wedge$（$\neg L$）

8、这学期，刘晓月只能选学英语或日语中的一门外语课。（A: 选学英语; B: 选学日语）

答案: $A \oplus B$ 或 $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ 或 $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

二、将下列命题符号化，并指出真值。（ p: $2<1$和 q: $3<2$ ）

（1）只要 $2<1$，就有 $3<2$。 答案: $p \to q$ 真

（2）如果 $2<1$，则 $3 \geq 2$。 答案: $p \to \neg q$ 真

（3）只有 $2<1$，才有 $3 \geq 2$。 答案: $\neg q \to p$ 假

（4）除非 $2<1$，才有 $3 \geq 2$。 答案: $\neg q \to p$ 假

（5）除非$2<1$，否则$3\ge 2$。　答案：$\neg p\to\neg q$　真

（6）$2<1$，仅当$3\ge 2$。　答案：$p\to\neg q$　真

三、回答下面问题并说明理由：

（1）判断下面一段论述是否为真：“π是无理数。并且，如果3是无理数，则$\sqrt{2}$也是无理数。另外，只有6能被2整除，6才能被4整除。”

答案：上述论述是联言命题，全真才真。“π是无理数”为真；“如果3是无理数，则$\sqrt{2}$也是无理数”为真（前提假）；“只有6能被2整除，6才能被4整除”也为真。上述论述为真。

（2）在什么情况下，下面一段论述是真的：“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的，而如果说小王会唱歌，小李就会跳舞是不正确的。”

答案：上述是联言命题，全真才真。“如果小王会唱歌，小李就会跳舞”不正确，则小王会唱歌但小李不会跳舞。进一步“小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的”是正确的。于是：在小王会唱歌且小李不会跳舞的情形，该论述是真的。

四、设p：俄罗斯位于南半球，q：亚洲人口最多。将下面命题用自然语言表述，并指出真值。

（1）$p\to q$　如果俄罗斯位于南半球则亚洲人口最多。　真

（2）$q\to p$　只有俄罗斯位于南半球才亚洲人口最多。　假

（3）$(\neg p)\to q$　除非俄罗斯位于南半球，否则亚洲人口最多。　真

（4）$p\to(\neg q)$　如果俄罗斯位于南半球则亚洲人口不最多。　真

（5）$(\neg q)\to p$　除非亚洲人口最多最多，否则俄罗斯位于南半球。真

（6）$(\neg p)\to(\neg q)$　如果亚洲人口最多则俄罗斯位于南半球。　假

（8）$(\neg q)\to(\neg p)$　如果俄罗斯位于南半球则亚洲人口最多。　真

五、在某班班委会的选举中，已知王小红、李强和丁金生三位同学被选进了班委会。该班的甲、乙、丙三位同学预言：

甲说：王小红为班长，李强为生活委员；

乙说：丁金生为班长，王小红为生活委员；

丙说：李强为班长，王小红为学习委员；

班委会分工名单公布后发现：甲、乙、丙三位都恰好猜对了一半。问：王小红、李强和丁金生各任何职？（等值演算法求解）

解：设 a：王小红为班长；b：王小红为生活委员；c：李强为班长；

d：李强为生活委员；e：丁金生为班长。f: 王小红为学习委员；

按题意:

甲对一半：$(a\wedge\neg d)\vee(\neg a\wedge d)=(\neg a\vee\neg d)\wedge(a\vee d)=1$

乙对一半：$(e\wedge\neg b)\vee(\neg e\wedge b)=(\neg b\vee\neg e)\wedge(e\vee b)=1$

丙对一半：$(c\wedge\neg f)\vee(\neg c\wedge f)=(\neg f\vee\neg c)\wedge(c\vee f)=1$

此外每个职责只有一人担任，得附加条件:

$a\wedge b=a\wedge c=a\wedge e=a\wedge f=b\wedge d=0$

$(\neg d\vee\neg a)\wedge(a\vee d)=1\Leftrightarrow a\vee d=1$ 和 $a\wedge d=0$

$(\neg b\vee\neg e)\wedge(e\vee b)=1\Leftrightarrow e\vee b=1$ 和 $b\wedge e=0$

$(\neg f\vee\neg c)\wedge(c\vee f)=1\Leftrightarrow c\vee f=1$ 和 $f\wedge c=0$

$(a\vee d)\wedge(e\vee b)=(a\wedge e)\vee(d\wedge e)\vee(a\wedge b)\vee(d\wedge b)=(d\wedge e)=1$，于是 $d=e=1$。

又 $a\wedge d=0$ 和 $d=1$ 得 $a=0$；$b\wedge e=0$ 和 $e=1$ 得 $b=0$。

最后 $f=1$ 和 $f\wedge c=0$ 得 $c=0$。

答案：王小红为学习委员，李强为生活委员，丁金生为班长。

六、某公司要从赵、钱、孙、李、周五位选派一些人出国学习，选派必须满足以下条件:

（1）若赵去，钱也去；

（2）李、周二人中必有一人去；

（3）钱、孙二人中去且仅去一人；

（4）孙、李二人同去或同不去；

（5）若周去，则李、钱也同去。

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

解法一：设 a：赵去；b：钱去；c：孙去；d：李去；e：周去。

按题意：$a\rightarrow b=1$；$d\vee e=1$；$(b\vee c)\wedge(\neg(b\wedge c))=1$；

$c\leftrightarrow d=1$；$e\rightarrow(b\wedge d)=1$

于是 $\neg a\vee b=1$；$d\vee e=1$；$b\vee c=1$；$b\wedge c=0$；

$\neg c\vee d=1$；$c\vee\neg d=1$；$\neg e\vee b=1$；$\neg e\vee d=1$。

由 $d\vee e=1$ 和 $\neg e\vee d=1$ 得：$(d\vee e)\wedge(\neg e\vee d)=d=1$；进而由 $\neg c\vee d=1$ 和 $c\vee\neg d=1$ 得：$c=1$；再由 $b\wedge c=0$ 得：$b=0$。$\neg a\vee b=1$ 和 $\neg e\vee b=1$ 推得：$a=0$ 和 $e=0$。

答案：$a=b=e=0$，$c=d=1$。即 派孙和李去，赵、钱和周不去。

解法二：设 a：赵去；b：钱去；c：孙去；d：李去；e：周去。

按题意：$a \to b = 1$；$d \vee e = 1$；$(b \vee c) \wedge (\neg(b \wedge c)) = 1$；

$c \leftrightarrow d = 1$；$e \to (b \wedge d) = 1$

由 $a \to b = \neg a \vee b$；$c \leftrightarrow d = (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$ 和 $e \to (b \wedge d) = (\neg e \vee b) \wedge (\neg e \vee d)$ 联言得：

$$(\neg a \vee b) \wedge (d \vee e) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg(b \wedge c)) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d) \wedge (\neg e \vee b) \wedge (\neg e \vee d)$$

$$\Leftrightarrow d \wedge (\neg a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg(b \wedge c)) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d) \wedge (\neg e \vee b)$$

$$\Leftrightarrow d \wedge c \wedge (\neg a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg(b \wedge c)) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (\neg e \vee b)$$

$$\Leftrightarrow d \wedge c \wedge (\neg a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg e \vee b)$$

$$\Leftrightarrow d \wedge c \wedge \neg b \wedge (\neg a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg e \vee b)$$

$$\Leftrightarrow d \wedge c \wedge \neg b \wedge \neg a \wedge \neg e = 1$$

同真才真，于是 $a = b = e = 0$，$c = d = 1$。

答案：派孙和李去，赵、钱和周不去。

七、某工程局有六个工程队，实力分布如下表：

工程队	土木建筑	修建房屋	电器按装	修建隧道	机械安装	运输	管道安装
p	√	√	√				
q				√		√	
r		√					√
s			√		√		
t	√			√			
u						√	√

现该工程局承接一项工程，上述能力全部需要，

问：至少派哪些队去才能胜任？有多少种派遣方案？

解：根据实力分布，写出复合命题的命题公式。由于最终目标是得到所有可能的选项，因此，最终应将命题公式写成析取范式的形式。由于七种能力全部需要，用合取命题形式写出所有可能

$$(p\vee t)\wedge(p\vee r)\wedge(p\vee s)\wedge(q\vee t)\wedge s\wedge(q\vee u)\wedge(r\vee u)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee t)\wedge(p\vee r)\wedge s\wedge(q\vee t)\wedge(q\vee u)\wedge(r\vee u)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee(t\wedge r))\wedge s\wedge(q\vee(t\wedge u))\wedge(r\vee u)$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge s)\vee(t\wedge r\wedge s))\wedge(q\vee(t\wedge u))\wedge(r\vee u)$$

$$\Leftrightarrow (((p\wedge s)\wedge(r\vee u))\vee((t\wedge r\wedge s)\wedge(r\vee u)))\wedge(q\vee(t\wedge u))$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge s\wedge r)\vee(p\wedge s\wedge u)\vee(t\wedge r\wedge s)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u))\wedge(q\vee(t\wedge u))$$

$$\Leftrightarrow (((p\wedge s\wedge r)\wedge(q\vee(t\wedge u)))\vee((p\wedge s\wedge u)\wedge(q\vee(t\wedge u))))$$
$$\vee((t\wedge r\wedge s)\wedge(q\vee(t\wedge u)))\vee((t\wedge r\wedge s\wedge u)\wedge(q\vee(t\wedge u)))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge s\wedge r\wedge q)\vee(p\wedge s\wedge r\wedge t\wedge u)\vee(p\wedge s\wedge u\wedge q)\vee(p\wedge s\wedge u\wedge t)$$
$$\vee(t\wedge r\wedge s\wedge q)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u\wedge q)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge s\wedge r\wedge q)\vee(p\wedge s\wedge r\wedge t\wedge u)\vee(p\wedge s\wedge u\wedge q)\vee(p\wedge s\wedge u\wedge t)$$
$$\vee(t\wedge r\wedge s\wedge q)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u)\vee(t\wedge r\wedge s\wedge u\wedge q)$$

按照派遣工程队数目最少的原则，从可供选择的七种方案中去掉$(t\wedge r\wedge s\wedge u\wedge q)$和$(p\wedge s\wedge r\wedge t\wedge u)$，则有以下五种派队方案:

$$(p,s,r,q),\ (p,s,u,q),\ (p,s,u,t),\ (t,r,s,q),\ (t,r,s,u)\text{。}$$

八、求下列命题公式的主析取范式和主合取范式:

（1） $(p\to q)\wedge(\neg q\to p)$.

解答: 主合取范式: $(p\to q)\wedge(\neg q\to p)=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)$

主析取范式: $(p\to q)\wedge(\neg q\to p)=(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

（2） $p\wedge(p\to q)\to q$.

解答: 主合取范式: $p\wedge(p\to q)\to q=(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

主析取范式: $p\wedge(p\to q)\to q=(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

（3） $(p\vee q\to r)\to p$.

解答: 主合取范式: $(p\vee q\to r)\to p=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

主析取范式: $(p\vee q\to r)\to p=(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$$\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

九、写出下面命题公式的真值表，然后用真值表求出主析取范式和主合取范式:

（1） $(p\vee q)\wedge r$.

解答：作真值表

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge r$	α
0	0	0	0	0	$p\vee q\vee r$
0	0	1	0	0	$p\vee q\vee\neg r$
0	1	0	1	0	$p\vee\neg q\vee r$
0	1	1	1	1	$\neg p\wedge q\wedge r$
1	0	0	1	0	$\neg p\vee q\vee r$
1	0	1	1	1	$p\wedge\neg q\wedge r$
1	1	0	1	0	$\neg p\vee\neg q\vee r$
1	1	1	1	1	$p\wedge q\wedge r$

主合取范式：$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

主析取范式：$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

（2） $p\to(p\vee q\vee r)$.

解答：作真值表：

0	0	1	1	1	$p\wedge q\wedge\neg r$
0	1	0	1	1	$\neg p\wedge q\wedge\neg r$
0	1	1	1	1	$\neg p\wedge q\wedge r$
1	0	0	1	1	$p\wedge\neg q\wedge\neg r$
1	0	1	1	1	$p\wedge\neg q\wedge r$
1	1	0	1	1	$p\wedge q\wedge\neg r$
1	1	1	1	1	$p\wedge q\wedge r$

主合取范式：$\alpha=1$

主析取范式：$\alpha=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$$\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

十、已知命题公式 A 含 3 个命题变量 p、q 和 r，并且它的成真赋值为 000， 011 和 110。求 A 的主合取式和主析取式。

解：由于公式的成真赋值为 000，011 和 110，对应有三个极小项：

$$m_0=\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r,\quad m_3=\neg p\wedge q\wedge r,\quad m_7=p\wedge q\wedge\neg r。$$

成假赋值为：001，010，100，101，111，对应三个极大项：

$$M_1=p\vee q\vee\neg r,\quad M_2=p\vee\neg q\vee r,\quad M_5=\neg p\vee q\vee r,$$

$$M_6=\neg p\vee q\vee\neg r,\quad M_7=\neg p\vee\neg q\vee\neg r。$$

主析取式为： $A=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$。

主合取式为：

$$A=(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)。$$

十一、新学期开始，给某年级安排课表时，各任课老师分别有如下要求：

外语老师：要求在每周星期一或三上课；

数学老师：要求在每周星期一或二上课；

法学老师：要求在每周星期二或四上课；

美学老师：要求在每周星期三或五上课；

体育老师：要求在每周星期四或五上课；

怎样安排才能满足全部教师的要求，并且一天只有一个教师上课（每个教师每星期只上一次课）？

解答：设 a_1：星期一上外语；a_2：星期三上外语；

b_1：星期一上数学；b_2：星期二上数学；

c_1：星期二上法学；c_2：星期四上法学；

d_1：星期三上美学；d_2：星期五上美学；

e_1：星期四上体育；e_2：星期五上体育。

由题意：$a_1\wedge a_2=0$；$b_1\wedge b_2=0$；$c_1\wedge c_2=0$；$d_1\wedge d_2=0$；$e_1\wedge e_2=0$。

$a_1\wedge b_1=0$；$a_2\wedge d_1=0$；$b_2\wedge c_1=0$；$c_2\wedge e_1=0$；$d_2\wedge e_2=0$

$a_1\vee a_2=1$；$b_1\vee b_2=1$；$c_1\vee c_2=1$；$d_1\vee d_2=1$；$e_1\vee e_2=1$。

联言上述命题求主析取式：

$$(a_1\vee a_2)\wedge(b_1\vee b_2)\wedge(c_1\vee c_2)\wedge(d_1\vee d_2)\wedge(e_1\vee e_2)$$

$$\Leftrightarrow((a_1\wedge b_2)\vee(a_2\wedge b_1)\vee(a_2\wedge b_2))\wedge(c_1\vee c_2)\wedge(d_1\vee d_2)\wedge(e_1\vee e_2)$$

$$\Leftrightarrow((a_1\wedge b_2\wedge c_2)\vee(a_2\wedge b_1\wedge c_1)\vee(a_2\wedge b_1\wedge c_2)$$

$$\vee(a_2\wedge b_2\wedge c_2))\wedge(d_1\vee d_2)\wedge(e_1\vee e_2)$$

$$\Leftrightarrow ((a_1 \wedge b_2 \wedge c_2 \wedge d_1) \vee (a_1 \wedge b_2 \wedge c_2 \wedge d_2) \vee (a_2 \wedge b_1 \wedge c_1 \wedge d_2)$$

$$\vee (a_2 \wedge b_1 \wedge c_2 \wedge d_2) \vee (a_2 \wedge b_2 \wedge c_2 \wedge d_2)) \wedge (e_1 \vee e_2)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 \wedge b_2 \wedge c_2 \wedge d_1 \wedge e_2) \vee (a_2 \wedge b_1 \wedge c_1 \wedge d_2 \wedge e_1)$$

答案：有两种安排方式：

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
外语	数学	美学	法学	体育
数学	法学	外语	体育	美学

十二、用真值表判断下列公式的类型：

（1）$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$。

解：作真值表：

p	q	r	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	1 1 1 1 1
0	0	1	1 1 1 1 1
0	1	0	1 0 0 1 1
0	1	1	1 1 1 1 1
1	0	0	0 0 1 1 0
1	0	1	0 0 1 1 1
1	1	0	1 0 0 1 0
1	1	1	1 1 1 1 1

答案：重言式

（2）$(\neg p \to q) \to (q \to p)$。

解：作真值表：

p	q	$(\neg p \to q) \to (q \to p)$
0	0	1 0 1 1
0	1	1 1 0 0
1	0	0 1 1 1
1	1	0 1 1 1

答案：不是重言式，是可满足式。

十三、用简化真值表法判断下列公式是否重言式:

（1）$((p \to q) \to q) \to (p \vee q)$ 。

解：设公式为假。则 $((p \to q) \to q) \to (p \vee q)$ 为真。而 $p \vee q$ 为假，从而 $p = q = 0$

p	q	$((p \to q) \to q) \to (p \vee q)$
0	0	① F 0 T 0 F ⓪ F 0

p 必需置 0 和 1，产生矛盾。

答案：公式是重言式。

（2）$((p \to q) \wedge r) \to (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 。

解：设公式为假。则 $((p \to q) \wedge r)$ 为真。而 $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge r$ 为假。$((p \to q) \wedge r)$ 为真得：$p \to q$ 和 r 同时为 1。在 $r = 1$ 时，$(p \vee q) \wedge r$ 为假的情形为：$p \vee q$ 为 0，即 $p = q = 0$

p	q	r	$((p \to q) \wedge r) \to (p \vee q) \wedge r)$
0	0	1	0 T 0 T 1 F 0 F 0 F 1

答案：存在唯一的成假赋值 001。公式不是重言式。