

逻辑学引论

Introduction to Logic

华东师范大学数学系 羊丹平

论证的有效性即为推理模式的有效性。有效推理是论证可靠性的中心问题。第五章给出了判别推理有效性的许多方法。如何建立一个有效的论证，在独立和创新思维中占有更加重要的地位。人们不仅需要理解别人的思想和观点是否正确，更需要正确地思考和阐述个人的思想和观点。后者需要掌握有效推理的方法和理论，在其指导下进行准确的思维，最终产生有效的论证。推理是数理逻辑研究的中心问题。命题逻辑是关于复合命题和复合推理的逻辑分支。本章介绍命题逻辑的推理理论。本章分为两个部分。第一部分给出基本复合推理。在这一部分，讨论一些基本的和常用的有效推理模式。第二部分建立自然推理系统。

6.1 推理的形式结构

推理 推理是一个有限的命题公式系列，其中一个命题公式 B 称为结论，其余命题公式组成的公式集合称为前提，记为： $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 。由 Γ 得 B 称为一个推理。

有效性 设 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 都是命题公式。若对 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 中出现的命题变元的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为 0，或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 取值为 1 时 B 也取值为 1，则称由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出结论 B 的推理是有效的或正确的。并称 B 是有效的结论。

推理的形式结构 由 Γ 得 B 的推理记为： $\Gamma \vdash B$ 或 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$ ，称为该推理的形式结构。若推理是正确的，则记为 $\Gamma \vDash B$ ，称 Γ 可以推出 B ；否则记为 $\Gamma \not\vDash B$ ，称 Γ 推不出 B 。

推理的三段论

三段论是一类典型的推理论证形式，通常由两组前提和一个结论构成，其中第一组前提称为大前提，一般是一个或几个具有普遍意义的命题；第二组前提称为小前提，一般是大前提中的某一部分支命题；结论是在大前提和小前提下所能断言的结果，一般是大前提中的其余部分支命题。具体形式为：

大前提。

小前提。

结论

三段论推理的基本思想是，在一个或多个已经确信或公认的一般结果下，在确知了部分信息后，可以对涉及的其它相关信息断定获得什么样的结果。

6.2 有效的基本复合推理

复杂的推理是由简单的推理组合而成的。本节给出一些常用的有效的基本推理模式，它们是组成复杂推理的基础，同时本身也是常用的推理形式。基本复合推理是基于基本复合命题建立的有效推理模式。

A. 联言推理

联言推理是前提或结论为联言命题的论证形式，有分解式和组合式两种形式：

(1) 分解式

分解式是前提为联言命题，由前提为真，推出其任一命题为真的联言推理。

公式为：

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n, \therefore p_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

由联言命题的性质，同真才真，因此， $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ 为真， p_i 必为真。这是一个有效的推理。

(2) 组合式

组合式是结论为联言命题，由前提为真，推出结论为真的联言推理。

公式为：

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \therefore p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n.$$

这是一个有效的推理。

例如：我们要弄清思想。我们要团结同志。所以，我们即要弄清思想，又要团结同志。

但 $p_{n_1}, p_{n_2}, \cdots, p_{n_s}, 1 \leq s < n, \therefore p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ 是无效推理，即不能由部分支命题为真推出全部支命题联言为真。

B. 选言推理

选言推理是前提或结论含有选言命题的论证形式。选言推理分为可兼选言推理和不可兼选言推理。

(1) 可兼选言推理

可兼选言推理的一种形式是前提中含可兼选言命题，且知道选言命题中的一部分的真假，推出其它部分的真假的论证。由可兼选言命题的性质，一真即真，当选言命题成立时，有两种可能的结论：① 否定一部分选言支，就能断言另一部分选言支中至少一支为真；② 肯定一部分选言支，即不能否定另一部分选言支，也不能断言其中至少一支为真。

因此，有效的可兼选言命题推理的模式为：

$$\frac{p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n, \quad \neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \cdots, \neg p_{n_s}, \quad 1 \leq s < n.}{\text{所以, } \bigvee_{k \in \Upsilon} p_k, \quad \Upsilon = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{n_1, \cdots, n_s\}.}$$

有效性证明：如果 $\bigvee_{k \in \Upsilon} p_k$ 假，则 $\{p_k, k \in \Upsilon\}$ 全假。如果 $\{p_k, k \in \Upsilon\}$ 全假，再由前提 $\neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \cdots, \neg p_{n_s}$ 全真，得 $\{p_k, 1 \leq k \leq n\}$ 全假，使得 $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ 为假。与前提 $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ 为真矛盾。于是 $\bigvee_{k \in \Upsilon} p_k$ 不可能为假。证毕。

可兼选言的另一种有效推理的模式为：

$$p_{n_s}, \quad 1 \leq n_s \leq n. \quad \therefore p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

作为 $n=2$ 的情形：

$$\begin{array}{l} \text{析取三段论} \\ p \text{ 或者 } q. \\ \text{非} p. \\ \hline \text{所以, } q. \end{array}$$

$$p. \text{ 所以, } p \text{ 或者 } q.$$

例如：出现错误或是主观原因或是客观原因。某甲出现错误不是主观原因。所以，某甲出现错误是客观原因。

(2) 不可兼选言推理

不可兼选言推理的一种形式是前提中含不可兼选言命题，且知道不可兼选言命题中的一部分的真假，推出其它部分的真假的论证。由不可兼选言命题的性质，当且仅当一真才真，当不可兼选言命题成立时，有两种可能的结论：① 否定一部

分选言支，就能断言另一部分选言支中一支为真；②肯定一部分选言支中一支为真，则能否定另一部分选言支。

因此，有效的可兼选言命题推理的模式为：

$$\frac{p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n, \neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \dots, \neg p_{n_s}, 1 \leq s < n.}{\therefore \bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k, \Upsilon = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n_1, \dots, n_s\} .}$$

有效性证明：如果 $\bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k$ 假，则或者 $\{p_k, k \in \Upsilon\}$ 全假，或者其中存在两个为真。如果 $\{p_k, k \in \Upsilon\}$ 全假，再由前提 $\neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \dots, \neg p_{n_s}, 1 \leq s < n$ ，得 $\{p_k, 1 \leq k \leq n\}$ 全假使得 $p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n$ 为假。如果其中存在两个为真，则 $p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n$ 为假。与前提 $p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n$ 为真矛盾。于是 $\bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k$ ，不可能为假。证毕。

例如：要么改革开放，要么闭关锁国。我们不能闭关锁国。所以，我们只能改革开放。

例如：要么依靠外援，要么自力更生。现在没有外援。所以，我们只能自力更生。

$$\frac{p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n, \bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k, \Upsilon = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n_1, \dots, n_s\} .}{\therefore \neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \dots, \neg p_{n_s}, 1 \leq s < n.}$$

有效性证明：如果 $\neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \dots, \neg p_{n_s}$ 全真为假，至少存在一个 p_{n_i} 为真。如果 $p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n$ 为真，则除 p_{n_i} 外，其它 p_j 全假。从而 $\{p_k, k \in \Upsilon\}$ 全假，使得 $\bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k$ ，为假。与前提 $\bigoplus_{k \in \Upsilon} p_k$ ，为真矛盾。于是 $\neg p_{n_1}, \neg p_{n_2}, \dots, \neg p_{n_s}$ 全真不可能为假。证毕。

例如：要么改革开放，要么闭关锁国。我们坚持改革开放。所以，我们不会闭关锁国。

作为 $n=2$ 的情形：

$$\text{要么 } p, \text{ 要么 } q. \text{ 非 } p. \text{ 所以 } q.$$

$$\text{要么 } p, \text{ 要么 } q. \text{ } p. \text{ 所以非 } q.$$

例如：对西方文化，或者全盘地照搬，或者批判地吸收。
我们批判地吸收西方文化。

所以，我们绝不会全盘照搬西方文化。

案例：一桩投毒谋杀案，作案者要么是甲，要么是乙。所用毒药或者是毒鼠强，或者是乐果。

如果上述断定为真，以下哪项推断一定成立？

I. 该投毒案不是甲投毒鼠强所为，因此，一定是乙投乐果所为。

II. 在该案侦破中，发现甲投了毒鼠强。因此，案中的毒药不可能是乐果。

III. 该投毒案的作案者不是甲，并且所投的毒药不是毒鼠强。因此，一定是乙投乐果所为。

解析：I 不一定成立。因为“不是甲投毒鼠强”不排除“甲投乐果”和“乙投毒鼠强”的可能。II 也不一定成立，“或者是毒鼠强，或者是乐果”是可兼选言命题，甲有可能即投了毒鼠强也用了乐果。III 是正确的。“要么是甲，要么是乙”和“该投毒案的作案者不是甲”推出作案者是乙。“所用毒药或者是毒鼠强，或者是乐果”和“所投的毒药不是毒鼠强”推出“所投的毒药必为乐果”。因此，一定是乙投乐果所为。

C. 假言推理

假言推理具有三段论的典型形式。假言推理包括充分条件假言推理、必要条件假言推理和充要条件假言推理。假言推理的一般形式为，大前提是普遍性假言命题，作为个体的假言命题的前件和后件作为小前提和结论。

(1) 充分条件假言推理

对于充分条件假言命题“ $p \rightarrow q$ ”，我们可以得到如下结论：①肯定前件 p 可以断言肯定后件 q 。②否定后件 q 一定断言否定前件 p 。③否定前件 p 不能断言否定后件 q 。④肯定后件 q 不能断言肯定前件 p 。

充分条件假言推理有两个有效的推理模式：

(a) 肯定前件式： $p \rightarrow q, p, \therefore q$

如果 p ，那么 q 。

p 。

所以， q 。

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\
& \Leftrightarrow \neg(q \wedge p) \vee q \Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee q \\
& \Leftrightarrow \neg p \vee 1 \Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ 是重言式。得证： $p \rightarrow q, p, \therefore q$ 是有效的。证毕。

例如：如果物体受到摩擦，那么它就会发热。此物受到了摩擦。所以此物会发热。

(b) 否定后件式： $p \rightarrow q, \neg q, \therefore \neg p$

如果 p ，那么 q 。 $\neg q$ 。 <hr style="width: 50%; margin: 5px auto;"/> 所以， $\neg p$ 。
--

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\
& \Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \Leftrightarrow q \vee p \vee \neg p \\
& \Leftrightarrow q \vee 1 \Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ 是重言式。得证：推理 $p \rightarrow q, \neg q, \therefore p$ 是有效的。证毕。

例如：如果物体受到摩擦，那么它就会发热。此物没有发热。所以此物未受到摩擦。

案例：在美国，企业高级主管和董事们买卖他们手里的本公司的股票是很普遍的。一般说来，某种股票内部卖与买的比率低于 2:1 时，股票价格会迅速上升。近些天来，虽然 MEGA 公司的股票价格一直在下跌，但公司的高级主管和董事们购进的股票却 9 倍于卖出的股票。

以上事实最能支持以下哪种猜测？

- A. MEGA 公司股票内部买卖的不平衡今后还会增长。
- B. MEGA 公司股票内部购买会马上停止。
- C. MEGA 公司股票的价格会马上上涨。
- D. MEGA 公司股票的价格会继续下降，但速度放慢。

解析：大前提是“如果某种股票内部卖与买的比率低于 2:1 时，则股票价格会迅速上升”，小前提是“高级主管和董事们购进的股票却 9 倍于卖出的股票”即卖与买的比率为 1:9，即低于 2:1。于是肯定前件必肯定后件。结论是：MEGA 公司股票的价格会马上上涨。正确选项：C。

(c) 反证推理:

作为否定后件式的一个特例，有下面的反证推理:

<p>反证推理: $p, \neg q \rightarrow \neg p; \therefore q$</p> <p>如果非 q，那么非 p。</p> <p style="text-align: center;"><u>p。</u></p> <p>所以，q。</p>

上述推理即为反证法。要由 p 真得到 q 真，只需“如果非 q 那么非 p ”为真。

(d) 反三段论推理

三段论的一般形式为:

如果 p 并且 q ，则 r 。 $\neg r$ 。所以，非 p 或者非 q

对于有效的充分条件推理，当前提为真时，其结论不可能假。如果结论假，则说明前提中至少一个为假。这就是反三段论的思想。

反三段论推理: $p \wedge q \rightarrow r, \neg r, \therefore \neg p \vee \neg q$

<p>如果 p 并且 q，那么 r。</p> <p>非 r。</p> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <p>所以，非 p 或者非 q。</p>

反三段论是否定后件式的一个更一般的例子。

例如：如果甲和乙都是小偷，那么丙是小偷。现已查明丙不是小偷。所以甲和乙中至少一个不是小偷。如果又知其中的甲是小偷，则就可以知道乙不是小偷。

案例：如果小张考试及格且大田考试不及格，则小娜考试一定不及格。

如果上述命题成立，那么再加上什么前提，可以得出结论：大田考试及格了。

- A. 小张考试及格而大田考试不及格。
- B. 小张与小娜考试都不及格。
- C. 小张考试不及格而小娜考试及格。
- D. 小张与小娜考试都及格了。

解析：若小娜考试及格，则或者“小张考试及格”为假或“大田考试不及格”为假，即或者“小张考试不及格”或“大田考试及格”。为使“大田考试及格”成立，必须“小张考试不及格”假。于是，必须加上条件 D。

(2) 必要条件假言推理

对于必要条件假言命题“只有 p，才有 q”，我们可以得到如下结论：

① 没有前件 p 可以断言没有后件 q。

② 有后件 q 一定断言有前件 p。

其它情形不能断定 p 和 q 的关系。

必要条件假言推理有两个有效的推理模式：

(a) 否定前件式： $p \leftarrow q, \neg p; \therefore \neg q$

<p>只有 p，才有 q。</p> <p>非 p。</p> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <p>所以，非 q。</p>
--

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
 (p \leftarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q &\Leftrightarrow \neg((p \vee \neg q) \wedge \neg p) \vee \neg q \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg q \Leftrightarrow q \vee p \vee \neg q \\
 &\Leftrightarrow p \vee 1 \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

$(p \leftarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$ 是重言式。得证：推理 $p \leftarrow q, \neg p, \therefore \neg q$ 是有效的。证毕。

例如：只有年满 18 岁，才有选举权。某甲未满 18 岁。所以，某甲没有选举权。

(b) 肯定后件式： $p \leftarrow q, q, \therefore p$

<p>只有 p，才有 q。</p> <p>q。</p> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <p>所以，p。</p>
--

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
& (p \leftarrow q) \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow \neg((p \vee \neg q) \wedge q) \vee p \\
& \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee p \\
& \Leftrightarrow \neg q \vee 1 \Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

$(p \leftarrow q) \wedge q \rightarrow p$ 是重言式。得证：推理 $p \leftarrow q, q, \therefore p$ 是有效的。证毕。

下述推理是一个肯定后件式的必要条件假言推理。

只有认识错误，才能改正错误。

他改正了错误。

所以，他认识了错误。

案例：一个社会是公正的，必须满足以下条件：有健全的法律；贫富差异是有的；但同时确保消灭赤贫和每个公民都事实上有公平竞争的机会。

根据上述条件，最能得出以下哪项结论？

A. S 社会有健全的法律，同时又在消灭赤贫的条件下，允许贫富差异的存在，并且大多数公民都事实上有公平竞争的机会。因此，S 社会是公正的。

B. S 社会有健全的法律，但这是以贫富差异为代价的。因此，S 社会是不公正的。

C. S 社会允许贫富差异，但所有人都由此获益，并且每个公民都事实上有公平竞争的机会。因此，S 社会是公正的。

D. S 社会不允许贫富差异，但这是以法律不健全为代价的。因此，S 社会是不公正的。

解析：题干给出了必要条件假言命题，其结构是“只 p 且 q 且 s 且 t，才有 r”，即四个条件都具备的社会才是公正的。

A 是错误的。作为必要条件推理，从有效性上讲，肯定前件不能断言肯定后件。即使作为充分条件推理，A 不满足“每个公民都事实上有公平竞争的机会”的条件，也不能肯定后件。

B 是错误的，因为贫富差距是允许的。B 没有否认掉前件，不能否定后件。

C 是错误的。C 中没有给出法律健全和消灭赤贫的必要条件。

D 是正确选项。否定了法律健全，从而否定了前件，必然否定后件。

(3) 充要条件假言推理

对于充要条件假言命题“当且仅当 p ，有 q ”，我们可以得到如下结论：① 有前件 p 必有后件 q 。② 有后件 q 必有前件 p 。③ 没有前件 p 必没有后件 q 。④ 没有后件 q 必没有前件 p 。

充要条件假言推理有四个有效的推理模式：

(a) 肯定前件式： $p \leftrightarrow q, p, \therefore q$

<p style="text-align: center;">当且仅当 p，有 q。</p> <p style="text-align: center;">p。</p> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <p style="text-align: center;">所以， q。</p>
--

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
 (p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge p) \vee q \\
 &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \\
 &\Leftrightarrow \neg q \vee 1 \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ 是重言式。得证：推理 $p \leftrightarrow q, p, \therefore q$ 是有效的。证毕。

例如：坚持且只有坚持改革开放，才能实现中华民族的伟大复兴。我们继续坚持改革开放。所以，我们一定能够实现中华民族的伟大复兴。

(b) 否定前件式： $p \leftrightarrow q, \neg p, \therefore \neg q$

<p style="text-align: center;">当且仅当 p，有 q。</p> <p style="text-align: center;">非 p。</p> <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> <p style="text-align: center;">所以，非 q。</p>

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned}
 (p \leftrightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p) \vee \neg q \\
 &\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \Leftrightarrow p \vee q \vee \neg q \\
 &\Leftrightarrow p \vee 1 \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$ 是重言式。得证：推理 $p \leftrightarrow q, \neg p, \therefore \neg q$ 是有效的。证毕。

例如：当且仅当同位角相同时，两条共面直线平行。这两条共面直线的同位角不相等。所以，这两条直线不平行。

(c) 肯定后件式: $p \leftrightarrow q, q; \therefore p$

当且仅当 p , 有 q 。
 q 。
—————
所以, p 。

有效性的证明: 注意到

$$\begin{aligned} & (p \leftrightarrow q) \wedge q \rightarrow p \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge q) \vee p \\ \Leftrightarrow & \neg(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee p \\ \Leftrightarrow & \neg q \vee 1 \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

$(p \leftrightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ 是重言式。得证: 推理 $p \leftrightarrow q, q; \therefore p$ 是有效的。证毕。

例如: 有且只有被疟蚊叮咬, 才会患痢疾。某甲患了痢疾。所以, 某甲一定被疟蚊叮咬过。

(d) 否定后件式: $p \leftrightarrow q, \neg q; \therefore \neg p$

当且仅当 p , 有 q 。
非 q 。
—————
所以, 非 p 。

有效性证明: 注意到

$$\begin{aligned} & (p \leftrightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \\ \Leftrightarrow & p \vee q \vee \neg p \\ \Leftrightarrow & q \vee 1 \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ 是重言式。得证: 推理 $p \leftrightarrow q, \neg q; \therefore \neg p$ 是有效的。证毕。

例如: 有且只有被疟蚊叮咬, 才会患痢疾。某甲没有患痢疾。所以, 某甲没被疟蚊叮咬。

(4) 假言连锁推理

假言连锁推理是指从前提中几个同样性质的假言命题推出一个新的同样性质的假言命题的推理，通常又称**假言三段论**。假言连锁推理要求前提中的第一个假言命题的后件必须与第二个假言命题的前件相同。

(a) 充分条件假言三段论: $p \rightarrow q, q \rightarrow r; \therefore p \rightarrow r$

如果 p，那么 q。
 如果 q，那么 r。

 所以，如果 p，那么 r。

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\ \Leftrightarrow & \neg q \vee \neg r \vee \neg p \vee r \\ \Leftrightarrow & \neg q \vee \neg p \vee 1 \Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 是重言式。得证：推理 $p \rightarrow q, q \rightarrow r; \therefore p \rightarrow r$ 是有效的。证毕。

例如：如果犯了法，就会受到法律制裁。

如果受到法律制裁，别人就会看不起。

所以，如果犯了法，别人就会看不起。

这个论证是可靠的。

(b) 必要条件假言三段论: $p \leftarrow q, q \leftarrow r; \therefore p \leftarrow r$

只有 p，才有 q。
 只有 q，才有 r。

 所以，只有 p，才有 r。

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned} & (p \leftarrow q) \wedge (q \leftarrow r) \rightarrow (p \leftarrow r) \\ \Leftrightarrow & \neg((p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)) \vee (p \vee \neg r) \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee p \vee \neg r \\ \Leftrightarrow & q \vee r \vee p \vee \neg r \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow q \vee p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

$(p \leftarrow q) \wedge (q \leftarrow r) \rightarrow (p \leftarrow r)$ 是重言式。得证：推理 $p \leftarrow q, q \leftarrow r, \therefore p \leftarrow r$ 是有效的。
证毕。

例如：只有有了第二味觉，哺乳动物才能边吃边呼吸。

只有边吃边呼吸，哺乳动物才能进行高效率的新陈代谢。

所以，哺乳动物有了第二味觉，才能进行高效率的新陈代谢。

案例：正是因为有充足的奶制品作为食物来源，生活在呼伦贝尔大草原上的牧民才能摄入充足的钙。很明显，这种足够的钙质，对呼伦贝尔大草原上的牧民拥有强壮的体魄是必不可少的。

以下哪种情况，最能削弱上述断定？

A. 有的呼伦贝尔大草原上的牧民从食物中能摄入足够的钙质，且有强壮的体魄。

B. 有的呼伦贝尔大草原上的牧民不具有强壮的体魄，但从食物中摄入的钙质并不少。

C. 有的呼伦贝尔大草原上的牧民没有强壮的体魄，但有充足的奶制品作为食物来源。

D. 有的呼伦贝尔大草原上的牧民有强壮的体魄，但没有充足的奶制品作为食物来源。

解析：正确选项 D。题干表达两个命题：只有充足的奶制品作为食物来源，生活在呼伦贝尔大草原上的牧民才能摄入充足的钙。只有摄入充足的钙质，呼伦贝尔大草原上的牧民才拥有强壮的体魄。于是，连锁推理的结论为：只有充足的奶制品作为食物来源，呼伦贝尔大草原上的牧民才拥有强壮的体魄。反驳这个题干，即否定这个结论，则为没有充足的奶制品作为食物来源，有些呼伦贝尔大草原上的牧民也能拥有强壮的体魄。只有 D 符合这个反驳，其它选项支持这个题干。

(c) 等价三段论: $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r, \therefore p \leftrightarrow r$

当且仅当 p，有 q。

当且仅当 q，有 r。

所以，当且仅当 p，有 r。

(5) 假言易位推理

假言易位推理是指将前提中的一个充分条件假言命题的前件和后件的位置进行交换得出结论的推理模式。它的一般公式为：

假言易位推理： $p \rightarrow q, \therefore \neg q \rightarrow \neg p$

如果 p ，那么 q 。

所以，如果非 q ，那么非 p 。

假言易位推理模式等同于蕴含命题与其逆反命题等价，或者看作充分条件否定后件有效推理的另一种表述。推理是有效的。

例如：如果李工程师出席会议，那么张工程师出席会议。

所以，如果张工程师不出席会议，那么李工程师不出席会议。

案例：19世纪前，技术和科学的发展相对独立。而19世纪的电器技术革命是建立在科学基础上的科技创新，它不可避免的导致了两者的结合与发展，而这又使人类不可避免地面对尖锐的伦理道德问题和资源环境问题。

以下哪些符合题干的断定？

I. 产生当今尖锐的伦理道德问题和资源环境问题的一个重要根源是电器革命。

II. 如果没有电器革命，则不会产生当今尖锐的伦理道德问题和资源环境问题。

III. 如果没有科学和技术的结合，就不会有电器革命。

A. 仅仅 I B. 仅仅 II C. 仅仅 III D. 仅仅 I 和 III

解析：题干断定了两个充分条件假言命题：

① 电器革命导致了科学和技术的结合。

② 科学和技术的结合产生当今尖锐的伦理道德问题和资源环境问题。

根据两个断定连锁推理得结论：

③ 电器革命导致当今尖锐的伦理道德问题和资源环境问题。

I与③是一致的。II与②不符合，题干没有断定“科学和技术的结合”是产生“当今尖锐的伦理道德问题和资源环境问题”的必要条件。再考虑论断III进行易位推理即得①。D同时含有I和III。于是D符合题干的断定。

D. 多重复合推理

(1) 假言选言二重推理

二重假言选言推理是由两个充分条件假言命题和一个具有两支的选言命题联合作为前提而构成的推理。假言选言推理有多种类型。根据结论的形式，分为简单式和复杂性两类。按照充分条件假言命题的肯定式还是否定式，又分为构成式和破斥式两种。假言选言推理又称为二难推理。

(a) 复杂构成式二重推理: $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r, \therefore q \vee s$

如果 p ，那么 q 。
 如果 r ，那么 s 。
 p 或者 r 。
 所以， q 或者 s 。

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \rightarrow (q \vee s) \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)) \vee q \vee s \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s \\ \Leftrightarrow & p \vee q \vee r \vee s \vee \neg r \Leftrightarrow p \vee q \vee s \vee 1 \Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$ 是重言式。所以， $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r, \therefore q \vee s$ 是有效推理。证毕。

例如：东方朔是汉代的一位智者。一次，东方朔偷饮了汉武帝求得的据说饮了能够不死的酒，汉武帝要杀他。他说：

如果这酒真能使人不死，那么你杀不死我；

如果这酒不能使人不死，那你就不必杀我。

这酒或者能使人不死，或者不能使人不死。

所以，或者你杀不死我，或者你不必杀我。

汉武帝觉得他说得有道理，就放了他。

东方朔的论辩采用了典型的复杂构成式二重推理模式。他的推理是有效的，无论如何他死不了，使得汉武帝处于抉择“杀与不杀”的两难境地。

(b) 简单构成式二重推理: $p \rightarrow q, r \rightarrow q, p \vee r, \therefore q$

如果 p ，那么 q 。
 如果 r ，那么 q 。
 p 或者 r 。
 所以， q 。

例如：如果论证的前提不真实，那么它不是可靠的论证。

如果论证的推理形式无效，那么它不是可靠的论证。

这个论证或者前提不真实或者推理形式无效。

所以，这个论证不是可靠的论证。

作为一个特例： $r = \neg p$ ，即 $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q, \therefore q$

如果 p ，那么 q 。

如果非 p ，那么 q 。

所以， q 。

上述推理形式在论证一个永恒真理时常被使用。

例如：如果刺激老虎，老虎要吃人。

如果不刺激老虎，老虎也要吃人。

无论刺激或者不刺激老虎。

总之，老虎要吃人。

例如：当初松赞干布求娶文成公主时，文成公主想要试一下这个小伙子是不是足够聪明智慧，就说：如果松赞干布问一个她答不上来的问题，自己就随他远嫁吐蕃。松赞干布想了好久才想出一个问题，于是问：“公主啊，我要问一个什么样的问题你才会答不出来呢？”这个问题使文成公主陷入了两难。如果这个问题是存在的，公主肯定答不上来；如果想不出这样的问题，松赞干布的这个问题本身就难倒了公主。因此不管是有还是没有这样的问题，文成公主都回答不出来。松赞干布就这样娶到了公主。

松赞干布用的就是一个简单构成式的二重推理：

如果有这样一个问题，那么公主回答不上来。

如果无这样一个问题，那么公主回答不上来。

或者存在这样一个问题，或者不存在这样一个问题。

总之，公主回答不上来。

(c) 复杂破斥式二重推理： $p \rightarrow q, r \rightarrow s, \neg q \vee \neg s, \therefore \neg p \vee \neg r$

如果 p，那么 q。

如果 r，那么 s。

非 q 或者非 s。

所以，非 p 或者非 r。

有效性证明：注意到

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r) \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s)) \vee \neg p \vee \neg r \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s) \vee (q \wedge s) \vee \neg p \vee \neg r \\ \Leftrightarrow & \neg q \vee s \vee \neg p \vee 1 \Leftrightarrow 1. \end{aligned}$$

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$ 是重言式。所以论证是有效推理。证毕。

案例：某地有甲和乙两个部落，甲部落总是讲真话，乙部落总是讲假话。一天，一个旅行者来到这里，碰到一个土著人 A。旅行者问 A：“你是哪一个部落的人？” A 回答：“我是甲部落的人。”这时又过来一个土著人 B。旅行者就请 A 去问 B 属于哪一个部落。A 问过 B 后，回来对旅行者说：“他说他是甲部落的人”。

根据这种情况，对 A 和 B 所属的部落，旅行者所作的正确判断是下列哪一项？

- (1) A 是甲部落的人，B 是乙部落的人。
- (2) A 是乙部落的人，B 是甲部落的人。
- (3) A 是甲部落的人，B 所属部落不明。
- (4) A 所属部落不明，B 是乙部落的人。

解析：我们首先对 B 说了什么作出判断。

如果 B 是甲部落的人，他会说：“我是甲部落的人”。（甲部落说真话）

如果 B 是乙部落的人，他会说：“我是甲部落的人”。（乙部落说真话）

B 或者是甲部落的人，或者是乙部落的人。

总之，他会说：“我是甲部落的人”。

下面再分析 A。

如果 A 是乙部落的人，他会假话说：“他说他是乙部落的人”。

A 没有说假话。

所以，A 是甲部落的人。

对 B 我们无法作进一步的推断，所以 B 所属部落不明。

结论：（3）是正确的。

案例：某发展中国家所面临的问题是，要维持它的经济发展，必须不断加强国内企业的竞争力；要保持社会稳定，必须不断建立健全养老、医疗、失业等社会保障体系。而要建立健全社会保障体系，则需要企业每年为职工缴纳一定比例的社会保险费。如果企业每年为职工缴纳这样比例的社会保险费，则会降低企业的竞争力。

以下哪项结论可以从上面的陈述中推出？

- A. 这个国家无法维持它的经济发展，或者不能保持它的社会稳定。
- B. 这个国家或者可以维持它的经济发展，或者可以保持它的社会稳定。
- C. 如果降低企业每年为职工缴纳社会保险费的比例，则可以保持企业的竞争力量。
- D. 这个国家的经济发展会受到一定影响。

解析：题干包含四个充分条件假言命题，整理如下：

- ① 维持经济发展 → 必须加强企业竞争力；
 - ② 保持社会稳定 → 必须建立健全社会保障体系；
 - ③ 建立健全社会保障体系 → 需要缴纳一定比例的社会保险费；
 - ④ 缴纳一定比例的社会保险费 → 降低企业竞争力。
- ②、③和④是连锁推理，所以
- ⑤ 保持社会稳定 → 必须降低企业竞争力。

由于加强企业竞争力和降低企业竞争力不可能同时实现，或者加强企业竞争力或者降低企业竞争力总为真。

于是得：

如果维持经济发展，那么必须加强企业竞争力；

如果保持社会稳定，那么必然降低企业竞争力；

或者加强企业竞争力或者降低企业竞争力；

所以，或者不能维持经济发展，或者不能保持社会稳定。

即 A 项正确。

(d) 简单破斥式二重推理： $p \rightarrow q, p \rightarrow s, \neg q \vee \neg s, \therefore \neg p$

如果 p，那么 q。 如果 p，那么 s。 <u>非 q 或者非 s。</u> 所以，非 p。
--

例如：如果这是一部好作品，那么其思想性一定好。
 如果这是一部好作品，那么其艺术性一定高。
这部作品或者思想性不好或者艺术性不高。
 总之，这不是一部好作品。

(e) 归谬律: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, \therefore \neg p$

如果 p，那么 q。 如果 p，那么非 q。 <u>所以，非 p。</u>

归谬律是简单破斥式二重推理的一个特例。其中“非 q 或者非非 q”等同于“非 q 或者 q”，取值恒为真，故可省略。

归谬律表明：如果从同一个命题 p 出发，既可以推出 q，也可以推出非 q，即推出两个相互矛盾的结果，则其出发点 p 就是不成立的。

作为简单破斥式二重推理的又一个特例，有反证律：

$$\neg q \rightarrow \neg p, \neg q \rightarrow p; \therefore q$$

如果非 q，那么非 p。 <u>如果非 q，那么 p。</u> 所以，q。

(2) 多重假言选言推理

多重假言选言推理是由多个充分条件假言命题和一个具有多支的选言命题联合作为前提而构成的推理。

(a) 复杂构成式多重推理：

$$p_i \rightarrow q_i, (1 \leq i \leq m), p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m, \therefore q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_m$$

如果 p_1 ，那么 q_1 。

<p>.....</p> <p>如果 p_m，那么 q_m。</p> <p><u>p_1 或者 p_2 或者...或者 p_m。</u></p> <p>所以，q_1 或者 q_2 或者...或者 q_m。</p>
--

(b) 复杂破斥式多重推理:

$$p_i \rightarrow q_i, (1 \leq i \leq m), \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_m, \therefore \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_m.$$

<p>如果 p_1，那么 q_1。</p> <p>.....</p> <p>如果 p_m，那么 q_m。</p> <p><u>非 q_1 或者非 q_2 或者...或者非 q_m。</u></p> <p>所以，非 p_1 或者非 p_2 或者...或者非 p_m。</p>
--

(3) 破斥错误二难论证的方法

基于多重假言选言推理的论证称为多重假言选言论证。多重假言选言论证经常能够使人陷入左右为难、进退维谷的境地。在日常的辩论中，运用二重假言选言论证往往很有说服力。辩论的一方提出一个表明有两种可能性的选言命题，再由这两种可能性引申出对方难于接受的结论，由此组成一个论证，故这类推理汉译为“二难论证”或“多难论证”。构成多难论证的推理模式称为多难推理。多难论证的推理形式是有效的，它的结论是否难以接受则不是思维形式方面的问题。

二难推理由于它的特殊的形式结构而成为论辩中强有力的武器。但不可否认的是，人们在运用二难推理和论证时有时会犯错误，甚至有人故意利用错误的二难推理和论证作为诡辩的工具。所以，必须学会破斥错误的二难推理和论证的方法。方法从两个方面入手：首先验证论证的有效性，辨明和指出论证形式的错误所在；在形式有效的前提下，检验论证的前提真实性。

(I) 指出该二难论证的推理形式无效

检验论证的可靠性，首先检查其推理形式的有效性。如果推理形式是无效的，那就是不可靠的二难论证。

例如：如果某甲贪污数额巨大，那么某甲构成犯罪；
 如果某甲受贿数额巨大，那么某甲也构成犯罪；
 某甲或者贪污数额不大，或者受贿数额不大；

所以，某甲不构成犯罪。

例如：如果经济上犯罪，那么就要受到惩罚；
如果政治上犯罪，那么就要受到惩罚；
或者经济上不犯罪，或者政治上不犯罪；
总之，不会受到惩罚。

上述两个论证都是错误的。其错误首先在于推理形式的错误，可以指出它违反了充分条件假言推理“否定前件不能否定后件”的规则，推理无效。从而论证不可靠。

(II) 指出论证的前提虚假

在形式有效的前提下，二难论证的假的结论总是来源于假的前提。反驳结论假的二难论证的主要方法有：①指出论证的选言前提为假；②指出论证的某一假言前提为假；③提出一个相反的二难论证，即提出和原论证相反的两个假言前提，并由此导致不同结论。

(a) 前提中选言命题的虚假

前提中选言判断的虚假，可能导致错误的结论。出现这种虚假的情况有：**选言前提的选言支没有穷尽所有可能，尤其是选言支之间可能不是矛盾关系。**在这种情形，选言命题看似为真，实际上是虚假的，所有选言支不成立，从而导致结论不成立。

例如：如果天气过热，那么人会很难受。
如果天气过冷，那么人会也很难受。
天气或者过热或者过冷。
总之，人会很难受。

此论证结论显然错误，其原因在于选言支没有穷尽所有可能，天气存在不过热也过冷情况。论证中选言命题“天气或者过热或者过冷”不为真。因此，论证不可靠。

例如：关于你是否已经停止殴打你的父亲？这个问题，你只能回答是与否。
如果你回答“是”，那就是说你过去打过你父亲；
如果你回答“否”，那就是说你现在还在打你的父亲；
或者你回答“是”，或者回答“否”；

所以，你或者过去打过你的父亲，或者现在还在打你的父亲。总之，你打过父亲。

这个论证的结论显然也是错误的。这个二难论证之所以错误，是因为它是建立在一个预设着“你殴打你的父亲”的前提。相当于已预设你犯罪，只是问你是否停止犯罪？完全是一个伪命题。完整的选项应该是“是否打过父亲”，在此基础上再谈“是否停止”。没有前者，后者是伪命题，无需回答。

(b) 前提中假言命题虚假

前提中假言判断的虚假，也可能导致错误的结论。出现这种虚假的情况有：
前提中假言判断不是正确的充分条件假言判断，即前后之间不具有必然联系。

例如：如果从经验出发，就会犯经验主义错误；

如果从书本出发，就会犯本本主义错误；

或者从经验出发，或者从书本出发；

所以，或者犯经验主义的错误，或者犯本本主义的错误。

这个二难论证之所以错误，是因为前提中的两个假言判断前后不具有充分条件关系，假言前提虚假。

例如：如果你聪明，那么不要学逻辑，因为太聪明了反而会被聪明误。

如果你不聪明，那么也不要学逻辑，因为不聪明的人学不了逻辑。

你或者聪明或者不聪明。

总之，你不要学逻辑。

这个二难论证之所以错误，是因为前提中的假言命题的前件不是后件的充分条件。假言前提虚假。

例如：如果造物主能够创造一块他举不起的石头，那么他不是万能的。

如果造物主不能够创造一块他举不起的石头，那么他不是万能的。

造物主能够或者不能够创造一块这样的石头。

所以，造物主不是万能的。

这个论证的意图是证明不存在“万能”的造物主。上述论证是有效的，但在逻辑上是有缺陷的。在前提中“使用了举不起的石头”的定义，该定义不当使用了否定概念，使得该定义是不确定的。

(c) 构造反二难论证

反驳一个二难论证最巧妙的方法是仿照原二难推理的形式结构构造一个结论相反的二难论证，即构造反二难论证。该方法要求所构造出来的二难论证的论证形式与原论证相同，但结论一定要与原论证中的结论相反。

例如：古希腊的一个青年人从事考演说为生的职业，但他的父亲觉得这个专业不可靠。父亲劝他那喜欢到处游说的儿子说，“你不要到处游说。

如果你说真话，那么富人和显贵憎恨你；

如果你说假话，那么黎民和百姓憎恨你。

你或者说真话或者说假话；

所以，或者富人和显贵憎恨你，或者黎民和百姓憎恨你。

既然游说只会招致大家憎恨你，你又何苦为之呢？”在这里，父亲劝儿子就使用了一个二难论证。

青年人针锋相对地给予回应：“我到处演说。

如果我说真话，那么黎民和百姓颂扬我；

如果我说假话，那么富人和显贵颂扬我。

我或者说真话或者说假话；

所以，或者黎民和百姓颂扬我，或者富人和显贵颂扬我。

既然游说总会招致大家颂扬我，我又为什么何乐而不为呢？”

年青人并不直接反驳父亲的论证，而是利用父亲的论证方式构造了结论相反的论证，没有明说，但显然和巧妙地指出了父亲的论证是不可靠的，轻易地跳出了其父为之所设置的两难境地。当然，年青人同其父亲所构造的二难论证一样各有其片面性，二者各选择了对己有利的一面。年青人采用相反的片面性，以其人之道还治其人之身，以此证明了其父所构造的二难推理的片面性，起到了反驳作用。

综上所述，在指出一个二难论证前提虚假时，通常，或者说明其假言前提不真，或者证明其选言前提不穷尽。使用二难论证常出现的错误就是抓住对自己有利的一面而看不到或故意忽略不利的一面。这时如果能构造一个与对方类似的二难论证，不失为一种非常有效的反驳方法。

6.3 命题逻辑中的自然推理系统 P

推理是逻辑学研究的重要内容之一。推理的功能分为两类：判定和推导，前者是对给定推理形式有效性的验证，我们已经给出多种方法，如真值表法、等值演算方法和范式方法等等；后者则是根据规则建立有效的推理。本节介绍形式推理系统，这种系统更类似于人类通常思维的过程。

A. 形式推理系统

定义 一个形式推理系统 I 由下面 4 个部分组成：

- (1) 非空的字母表 $A(I)$ 。
- (2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集 $E(I)$ 。
- (3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集 $AX(I)$ 。
- (4) 推理规则集 $R(I)$ 。

将 I 记为四元组 $\langle A(I), E(I), AX(I), R(I) \rangle$, 其中 $\langle A(I), E(I) \rangle$ 是 I 的形式语言; $\langle AX(I), R(I) \rangle$ 为 I 的形式演算系统。

在数理逻辑中, 形式推理系统一般分为两类: 自然推理系统和公理推理系统。自然推理系统的特点是从任意给定的前提出发, 应用系统中的推理规则进行推理演算, 最后推得的命题公式是推理的结论。这个结论是有效的结论, 可能是重言式, 也可能不是重言式。公理推理系统的特点是从若干条给定的公理出发, 应用系统中的推理规则进行推理演算, 得到的结论是系统中的重言式, 称为系统中的定理。

本节只介绍自然推理系统 P , 它的定义中无公理部分, 因而只有 3 个部分。

定义 自然推理系统 P 定义如下:

1、字母表

- a. 命题变项: $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$
- b. 真值联接符: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- c. 括号与逗号: $(,), ,$

2、合式公式

- (1) 单个命题常项和命题变项是合式公式, 并称为原子合式公式。
- (2) 若 p 是合式公式, 则 $\neg p$ 是合式公式。
- (3) 若 p 和 q 是合式公式, 则 $p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 是合式公式。
- (4) 有限次地应用 (1) - (3) 形成的符号串是合式公式。

3、推理规则

- (1) 前提引入规则: 在推理的任何步骤都可以引入前提。
- (2) 结论引入规则: 在推理的任何步骤所得到的结论都可以作为后继推理的前提。
- (3) 置换规则: 在推理的任何步骤, 命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换。
- (4) 假言推理规则: $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 。 B 是推理的有效结论。
- (5) 附加规则: $A \Rightarrow A \vee B$

(6) 化简规则: $A \wedge B \Rightarrow A$

(7) 拒取规则: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

(8) 假言三段论规则: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$

(9) 析取三段论规则: $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

(10) 构造式二难推理规则: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

(11) 破坏式二难推理规则: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow \neg A \vee \neg C$

(12) 否定消去规则: $\neg\neg A \Rightarrow A$

(13) 归谬规则: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

其中 \Rightarrow 是元语言符, 表示推出。

自然推理系统的一个主要功能是证明推理的有效性。我们给出证明的精确刻画。

定义: 设前提 A_1, A_2, \dots, A_k 和结论 B 与公式序列 C_1, C_2, \dots, C_m , 如果对每一个 i ($i=1, 2, \dots, m$), C_i 或者是某个 A_j , 或者可由序列中其前面的公式应用推理规则得到, 并且 $C_m = B$, 则公式序列 C_1, C_2, \dots, C_m 称为由 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的证明。

例: 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

前提: $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$, 结论: $r \wedge (p \vee q)$

证明:

- | | |
|-------------------------|-----------------|
| ① $p \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ② $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg p$ | ① + ② + 拒取规则 |
| ④ $p \vee q$ | 前提引入 |
| ⑤ q | ③ + ④ + 析取三段论规则 |
| ⑥ $q \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ⑦ r | ⑤ + ⑥ + 假言推理规则 |
| ⑧ $r \wedge (p \vee q)$ | ④ + ⑦ + 合取 |

得证: 结论 $r \wedge (p \vee q)$ 有效。

在证明过程中, 我们将写出两列。第一列是命题公式, 通常是前提和结论。第二列是该公式的来源或依据的推理规则。

例：在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：若数 a 是实数，则它不是有理数就是无理数；若 a 不能表示成分数，则它不是有理数。a 是实数且它不能表示成分数。所以 a 是无理数。

证明：设简单命题

p: a 是实数

q: a 是有理数

r: a 是无理数

s: a 能表示成分数

前提： $p \rightarrow q \vee r$ ； $\neg s \rightarrow \neg q$ ； $p \wedge \neg s$ 。结论： r。

- ① $p \wedge \neg s$ 前提引入
- ② p 化简
- ③ $\neg s$ 化简 ① + ② + 拒取规则
- ④ $p \rightarrow q \vee r$ 前提引入
- ⑤ $q \vee r$ ③ + ④ + 假言推理
- ⑥ $\neg s \rightarrow \neg q$ 前提引入
- ⑦ $\neg q$ ③ + ⑥ + 假言推理
- ⑧ r ⑤ + ⑦ + 析取三段论

推理是有效的。又前提是真实的，所以论证是可靠的，从而结论正确。

B. 附加前提证明法

考虑如下形式的推理：

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash A \rightarrow B$$

则该推理等价于

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k, A\} \vdash B$$

在证明 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash A \rightarrow B$ 有效时采用证明 $\{A_1, A_2, \dots, A_k, A\} \vdash B$ 的有效性，称为附加前提证明法，并将 A 称为附加前提。

等价性证明：注意到

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \neg A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A \rightarrow B$$

于是 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow (A \rightarrow B)$ 为重言式当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A \rightarrow B$ 为重言式, 即 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \models A \rightarrow B$ 当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A \models B$ 。

例: 在自然推理系统 P 中构造下面命题的证明。

如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影; 小赵不去看电影或小张去看电影; 小王去看电影。所以当小赵去看电影时, 小李也去。

证明: 设简单命题

p : 小张去看电影

q : 小王去看电影

r : 小李去看电影

s : 小赵去看电影

前提: $p \wedge q \rightarrow r$; $\neg s \vee p$; q 。结论: $s \rightarrow r$ 。

利用附加前提证明法, 等价于: $p \wedge q \rightarrow r$; $\neg s \vee p$; q ; s 。结论: r 。

- ① s 附加前提引入
- ② $\neg s \vee p$ 前提引入
- ③ p ① + ② + 析取三段论
- ④ q 前提引入
- ⑤ $p \wedge q$ ③ + ④ = 合取引入
- ⑥ $p \wedge q \rightarrow r$ 前提引入
- ⑦ r ⑤ + ⑥ + 假言推理

得证推理有效。

C. 归谬法

考虑一般形式的推理:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$$

在前提 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 下，如果将 $\neg B$ 作为前提能推出对某个 A 和它的否 $\neg A$ 同时成立，则 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$ 是有效推理。

证明：若在前提 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 下， $\neg B \rightarrow A$ 且 $\neg B \rightarrow \neg A$ ，则由归谬律得 $\neg B = 0$ ，即 $B = 1$ ，因此，在 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 下， $B = 0$ 是不可能的。于是推理 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$ 有效。

上述采用将 $\neg B$ 作为前提推出矛盾，如得出 A 与 $\neg A$ 同时成立，来证明 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$ 有效的方法称为归谬法或间接证明方法。

例：在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球，则 A 队取胜；或者 A 队未取胜，或者 A 队成为联赛第一名； A 队没有成为联赛的第一名；小张守第一垒。因此，小李没向 B 队投球。

证明：设简单命题

p : 小张守第一垒

q : 小李向 B 队投球

r : A 队取胜

s : A 队成为联赛第一名

前提： $p \wedge q \rightarrow r$ ； $\neg r \vee s$ ； $\neg s$ ； p 。结论： $\neg q$ 。

采用归谬法。假设： q 。

- | | |
|------------------------------|---------------|
| ① q | 归谬法前提引入 |
| ② $\neg r \vee s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg s$ | 前提引入 |
| ④ $\neg r$ | ② + ③ + 析取三段论 |
| ⑤ p | 前提引入 |
| ⑥ $p \wedge q$ | ① + ⑤ = 合取引入 |
| ⑦ $p \wedge q \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ⑧ r | ⑥ + ⑦ + 假言推理 |
| ⑨ $r \wedge \neg r$ | ④ + ⑧ = 合取引入 |

推出矛盾。

第六章习题

一、中央作出新一轮支援新疆的战略部署后，某单位很快组成由党办、人事处、业务处参加的推荐小组，确定了援疆干部人选，这三部门的推荐意见分别是：

党办：从甲乙丙三人中选排出一至两人

人事处：如果不选派甲，就不选派乙和丙

业务处室：只有不选派乙和丙，才选派甲

在下列选项中，能够同时满足党办、人事处和业务处室意见的方案是（ ）

- A. 选派乙和丙，不选派甲
- B. 不选派乙和丙，选派甲
- C. 选派乙，不选派甲和丙
- D. 选派丙，不选派甲和乙

二、如果李生喜欢表演，那么他报考戏剧学院，如果他不喜欢表演，那么他可以成为戏剧理论家。如果他不报考戏剧学院，那么不能成为戏剧理论家。

由此可推出李生：

- A. 不喜欢表演。
- B. 成为戏剧理论家。
- C. 不报考戏剧学院。
- D. 报考戏剧学院。

三、相传古时候有两座怪城，一座叫“真城”，一座叫“假城”。真城里的人都说真话，假城里的人都说假话。一位知晓这一情况的旅行者第一次来到其中一座城市，他只要问遇到的第一个人一个答案“是”或者“否”的问题，就会明白自己所到的是真城还是假城。

以下问句哪个是最恰当的？（ ）

- A. 你是真城的人吗？
- B. 你是假城的人吗？
- C. 你是说假话的人吗？
- D. 你是这座城市的人么？

四、如果一个人自傲，就会盲目乐观；如果一个人自卑，就会缺乏信心。你或者是自傲，或者是自卑。总之，你或者是盲目乐观，或者是缺乏信心。

这个推理是无效的，其原因并非是（ ）。

- A. 选言判断没有穷尽支判断。
- B. 两个假言判断的前件构不成矛盾关系。
- C. 两个假言判断的前件只是反对关系
- D. 结论不符合实际。

五、关于财务混乱的错误谣言损害了一家银行的声誉。如果管理人员不试图反驳这些谣言，它们就会传播开来并最终摧毁顾客的信心。但如果管理人员努力驳斥这种谣言，这种驳斥使怀疑增加的程度比使它减少的程度更大。

如果以上的陈述都是正确的，根据这些陈述，下列哪一项一定是正确的？

- A. 银行的声誉不会受到猛烈的广告宣传活动的影
- B. 管理人员无法阻止已经出现的威胁银行声誉的谣言
- C. 面对错误的谣言，银行经理的最佳对策是直接说出财务的真实情况
- D. 关于财务混乱的正确的传言，对银行储户对该银行的信心的影响没有错误的流言大。

六、滨海市政府决定上马一项园林绿化工程，政府有关部门在调研论证的基础上，就特色树种的选择问题形成如下几项决定：

- (1) 樟树、柳树至少选择一样；
- (2) 如果不种桂树，那么就要种雪松；
- (3) 如果种柳树，那么就要种桃树；
- (4) 桃树、雪松至少要舍弃一样。

据此，可以推出该市应选择特色树种是（ ）。

- A. 柳树或者桃树
- B. 樟树或者桂树
- C. 雪松或者柳树
- D. 雪松或者樟树

七、前提： $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ ， $p \vee q$ ， $r \rightarrow s$ 。

- 1、证明从此前提出发，推出结论 $r \vee s$ 的推理是正确的。
- 2、证明从此前提出发，推出任何结论的推理是正确的。

八、在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 1、前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ， p ， q 。结论： $r \vee s$
- 2、前提： $p \rightarrow q$ ， $\neg(q \wedge p)$ ， r 。结论： $\neg p$
- 3、前提： $\neg p \vee r$ ， $\neg p \vee s$ ， $p \wedge q$ 。结论： $t \rightarrow (r \wedge s)$

九、在自然推理系统 P 中用附加前提法或归谬法证明下面推理。

- 1、前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ， $s \rightarrow p$ ， q 。结论： $s \rightarrow r$
- 2、前提： $p \vee q \rightarrow (r \wedge s)$ ， $s \vee t \rightarrow u$ 。结论： $p \rightarrow u$
- 3、前提： $p \rightarrow \neg q$ ， $\neg r \vee q$ ， $r \wedge \neg s$ 。结论： $\neg p$
- 4、前提： $p \vee q$ ， $p \rightarrow r$ ， $q \rightarrow s$ 。结论： $r \vee s$

十、在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

1、只要 A 曾到过受害者房间并且在 11 点以前没离开，A 就是谋杀嫌犯。A 曾到过受害者房间。如果 A 在 11 点前离开，看门人会看见他。看门人没看见他。所以 A 是谋杀嫌犯。

2、如果是星期六，我们就要到颐和园或圆明园去玩。如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园去玩。今天是星期六，颐和园游人太多。所以我们去圆明园去玩。