逻辑学引论

Logic in Mathematics

华东师范大学数学系　　羊丹平

数理逻辑，又称符号逻辑，是现代逻辑学的重要分支。借助于将逻辑研究对象的符号化，可以用数学的方法研究逻辑学的问题，为逻辑学的研究提供了强有力的技术和武器。符号逻辑的研究始于莱布尼兹，基于莱布尼兹的理想和设想：将哲学家们争论的问题，变成数学计算。命题演算系统是最简单、最基本的形式系统，用来表现较为简单的逻辑推理的数学模型。本章介绍命题演算的基本概念和方法。

4.1 复合命题的符号化

原子命题（Atomic statement）不包含任何其它命题作为组成部分的命题。

原子命题即为简单命题。

复合命题（Compound statement）至少包含一个原子命题作为组成部分的命题。

在命题逻辑中，简单命题是最小的基本单位，对它不再分解。将命题和论证符号化，能够应用有力的数学技术对命题和论证进行逻辑演算和研究。我们用小写字母 a、b、c、……等表示命题。

命题的逻辑联接词：将几个原子命题联接起来构成一个复合命题的词项叫做逻辑联接词，简称联接词。

基本逻辑联接词：否、合取、析取、蕴含和等价，对应符号为：

$$\neg、\wedge、\vee、\rightarrow、\leftrightarrow。$$

使用多个联接词可以组成更复杂的复合命题，此外还可以使用圆括号（ ），括号必须成对出现。为简化和方便命题演算，规定基本联接词的优先顺序。

基本逻辑联接词优先顺序：( )、¬、∧、∨、→、↔，同一优先级，从左到右顺序进行。

复合命题符号化的基本步骤:

（1）找出各个原子命题，并逐个符号化。

（2）找出各个连接词，符号化成相应联结词。

（3）用联结词符号将原子命题符号逐个联结起来。

下面举一些命题符号化的例子。

例 4.1 王乐是计算机系的学生，生于 1980 年或 1981 年，是三好学生。

解答: 设如下简单命题

p: 王乐是计算机系的学生。

q: 生于 1980 年。

r: 生于 1981 年.

s: 是三好学生.

则 $p \wedge (q \vee r) \wedge s$。

例 4.2 路易斯喜欢烤宽薯条，仅当或者诺玛喜欢面条或者玛利亚喜欢甜馅当且仅当奥利弗喜欢鸵鸟。（l: 路易斯喜欢烤宽薯条，n: 诺玛喜欢面条，m: 玛利亚喜欢甜馅，n: 奥利弗喜欢鸵鸟）

解答: $l \rightarrow n \vee (m \leftrightarrow n)$。

例 4.3 我们将失败，除非我们尽最大努力。（p: 我们失败; q: 尽最大努力）

解答一: $\neg q \rightarrow p$。（如果不尽最大努力，我们将失败）

解答二: $p \vee q$。（或者尽最大努力，或者失败=不尽最大努力且不失败是不可能的）

在中文表述中，“除非”是经常容易被混淆的词。例如: 除非……，……; 除非……，才……; 除非……，否则……; 除非……，否则不……。“除非”作为连词，单独使用时通常引入条件状语从句，作为蕴含主句成立的条件，“除非 p”的基本含义是“在 p 之外”的情形（if not, unless），即非 p 情形。但在与其

它连词共同使用时，“除非”引导的句子通常不再是使主句成立的条件状语从句，而是表示唯一的条件，常跟“才”、“否则”、“不然”等合用，相当于“只有”，作为条件语句的作用由后面的联词决定。下面给出上述含有“除非”的命题的含义。

（1）“除非……，……”表达的含义为“如果不……，则……”。

除非 p， q $= \neg p \to q$

（2）句式“除非……，才……”表示的含义为“只有……，才……”、“仅当……，才……”。（only if，only when）

除非 p 才 q $= q \to p$

例如：除非你给我买戒指，我才嫁给你。等同于只有（仅当）你给我买戒指，我才嫁给你。买戒指是嫁给你的必要条件。

（3）句式“除非……，否则……”和“除非……，不然……”表达的含义是“如果不……，则……”。

除非 p 否则 q = 如果不 p 则 q $= \neg p \to q = \neg q \to p$

例如：除非我们尽最大努力，否则（不然）我们将失败。

（4）句式“除非……，否则不……”表达的含义是“如果不……，则不……”，等同于“除非……，才……”。

除非 p 否则不 q =除非 p 才 q $= \neg p \to \neg q = q \to p$

注：在 “除非……，才……”、“除非……，否则……” 和“除非……，否则不……”等句式中，“除非”可以省略，联接词“才、“否则”和“否则不”等已经清楚表达条件式的结构，前件 p 作为后件的主语或否定词的宾语成为后件 q 或其否定的必要条件。如：给我买戒指，我才嫁给你。反之不然，若省略联词“才”、“否则”和“否则不”等会导致异议。如上句“我们将失败，除非我们尽最

大努力”，如果我们理解成是“除非我们尽最大努力我们才将失败”的省略联词“才”后的省略式，则意义完全相反，后者意义是“仅当我们尽最大努力，我们才将失败”。

命题形式 复合命题经符号化得到的形式结构称为命题形式。

命题和论证符号化也称为命题和论证的形式化。形式化的最大好处是可以抛开命题和论证的具体含义，专注于研究命题和论证的逻辑结构和关系。

4.2 命题公式

复合命题符号化后，人们所关心的就是原子命题真值与复合命题真值的关系。为了数学上的计算，可采用数字 0 代表假，数字 1 代表真。命题符号化后，抽去了命题的实际含义，命题符号仅是一个可取真值 0 或 1 的符号变量，由此引出命题变项的概念。

命题变项（命题变元） 取值 1（真）或 0（假）的变元。

命题常项（命题常元）仅取一个确定的值的命题变项称为命题常项。

命题常项和命题变项都不是命题，仅是取值 0 或 1 的变量。命题常项的特点是保持一个确定的真值，是一种特殊的命题变项，类似于常数。对应任何一个具体的简单命题。命题变项也用小写英文字母：p、q、r、…等表示。

真值联接词：反映复合命题与支命题真假关系的联接词称为真值联接词。

基本真值联接词： $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$，由下述真值表定义：

基本逻辑连接词真值表

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

由基本的真值联接词可以定义出各种复杂的真值联接词。

定义：真值联接词“↓”和“↑”为

$$p\downarrow q=\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q,\quad p\uparrow q=\neg(p\wedge q)=\neg p\vee\neg q,$$

$\downarrow$称为或非（析非、合舍）或 nor（=not or），$\uparrow$称为与非（合非、析舍）或 nand（=not and）。

这是两个新的真值联接词。由于其后面将看到的独特性质，被用于在计算机硬件逻辑线路的设计中。

逻辑联接词和真值联接词的形式是相同的，但意义有所不同。逻辑联接词关心的是逻辑或实际的意义，其结果得到一个复合命题；真值联接词关心所联接命题的真值的逻辑运算结果，其结果依然是一个真值。换言之，真值联接词可以看做对真值 0 或 1 的运算符，运算结果取值为 0 或 1。

真值形式： 将命题变项用真值联接词和括号按一定顺序连接起来的符号串称为真值形式。

真值形式是复合命题及其命题形式的进一步抽象表述方式，它将命题抽象为仅取两个值的命题变项，逻辑连接词抽象为对两个值的运算规则，将命题和逻辑联接词的语义放在一边，只进行纯形式、纯语法的考察。

合式公式类： 将命题变项用一个真值联接词集和括号按一定顺序连接起来的符号串称为对应于该真值联接词组的合式公式类。

合式公式类是一类真值形式，它依赖于选取的真值联接词集。真值联接词集的多样性，表明合式公式族的多样性。根据不同的需求，人们可以选择不同的合式公式族。在一般的情形，我们考虑联接词集{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$}对应的合式公式类如下。

合式公式（命题公式）： 满足下面条件的真值形式称为命题公式：

（1）单个命题常项和命题变项是合式公式，并称为原子合式公式。

（2）若 p 是合式公式，则$\neg p$是合式公式。

（3）若 p 和 q 是合式公式，则 $p\wedge q$、$p\vee q$、$p\to q$、$p\leftrightarrow q$ 是合式公式。

（4）有限次地应用（1）-（3）形成的符号串是合式公式。

合式公式称为命题公式，也简称为公式。设 p 为命题公式，q 是 p 的一部分，若 q 也是命题公式，q 称为 p 的子公式。在逻辑学中，我们研究具有上述形式的命题。对于不同的应用，可以采用特殊的真值联接词集，生成特殊的合式公式类。

定义：设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在公式 q 中的全部命题变项，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值，称为对 q 的一个**赋值（指派）**和**解释**。若指定的一组值使得 q 为 1，则称这组值为 q 的**成真赋值（指派）**；若指定的一组值使得 q 为 0，则称这组值为 q 的**成假赋值（指派）**。

设公式 p 和 q 中共含 n 个命题变项，而 p 或 q 可能不全含这些命题变项，这些变项称为该命题公式的哑元。任一命题的取值与哑元无关，因而在讨论 p 和 q 是否具有相同的真值时，可将 p 和 q 都看成含 n 个命题变项的命题公式。

4.3 真值函项与真值表

每一个真值形式实际上都可以被看作一个函数，其自变量为其所含的命题变项，其值域是真值的集合。

真值函项（真值函数）：一个函数，如果其自身的值域是真值，其自变量所取的值也是真值，那么称这样的函数为真值函项，也称真值函数。

由定义可知，每一个命题公式都是一个真值函项。定义一个真值函项（真值函数）的直接方法是给出对应的真值表。命题的真值表是命题逻辑研究的重要工具和方法之一。

真值表：命题公式 p 在所有赋值情况下的取值列成的表称为命题 p 的真值表。

含 n 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值，每个赋值可以写成 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 的形式，其中 α_i 取 0 或 1。于是，每个 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 对应一个二进制整数，进而对应一个十进位数。一般的，我们按照一定方式构造真值表。

制作真值表的一般规则步骤是:

第一步：首先找出公式中所含的全体命题变项并按一定顺序排列;

第二步：按照二进制加法顺序由$00\cdots0$开始，直到$11\cdots1$排列2^n个命题变项的赋值;

第三步：确定命题公式计算顺序，逐步写出相应的命题公式的真值。

计算命题公式的值有两种方式：一是从简单命题开始计算，由简到繁，逐步复合计算，最终计算出复合命题的值。二是确定复合命题的计算顺序后，将每一步复合后的取值情况写在对应的真值联接词下方。第二种算法比较简洁。

例：写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假赋值

（1） $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$;

（2） $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$.

解答: 我们用红色表示最终的计算结果。

（1）按照由简到繁的顺序计算:

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

换一种方式：运算顺序为$\neg$、$\wedge$、$\rightarrow$，最后真值运算为$\rightarrow$。

p	q	r	$\neg p$	$\wedge$	q	$\rightarrow$	$\neg r$
0	0	0	1	0		1	1
0	0	1	1	0		1	0
0	1	0	1	1		1	1
0	1	1	1	1		0	0
1	0	0	0	0		1	1
1	0	1	0	0		1	0
1	1	0	0	0		1	1
1	1	1	0	0		1	0

成假赋值是 011，其余均是成真赋值。

（2）按照由简到繁的顺序计算:

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0

换一个方式计算该真值表。确定计算顺序为: $((\neg(p \to q)) \wedge q) \wedge r$，即 $\to$、$\neg$、$\wedge$、$\wedge$。最后运算符为第二个 $\wedge$。

$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$ 真值表

p	q	r	$((\neg\ (p \to q))\ \wedge q)\ \wedge r$			
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$ 的值恒为 0。全部是成假赋值。

4.4 等值运算

计算一个真值函项的值，原则上都可以使用真值表法完成。但对于含多个命题变项或较多个简单命题的情形，运用真值表法是非常繁琐和困难的。等值运算提供了另一类强有力的逻辑计算方法。

等值式 设 p 和 q 是任意两个包含 n 个命题变项的命题公式，如果对于命题变项的任何赋值，两个公式的值总是相同，则称它们是等值的，用符号$p \Leftrightarrow q$表示。

符号“$\Leftrightarrow$”不是逻辑或真值联接词，也不同于“=”，只是表示等值关系。如果约定“=”仅表示两端公式的值相等，则“=”可等同于“$\Leftrightarrow$”。

等值关系是一种等价关系：

（1）自反性：$p \Leftrightarrow p$；

（2）对称性：若$p \Leftrightarrow q$，则$q \Leftrightarrow p$；

（3）传递性：若$p \Leftrightarrow q$和$q \Leftrightarrow r$，则$p \Leftrightarrow r$。

下面给出 15 组常用的等值式模式，以它们为基础可以证明更多的公式等值式。

1、双重否定律：$p \Leftrightarrow \neg\neg p$

2、幂等律：$p \vee p \Leftrightarrow p$

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

3、交换律：$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4、结合律：$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$

5、分配律：$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6、摩根律：$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

7、吸收律：$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

8、空全率: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$

9、同一律: $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$

10、排中律: $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$

11、无矛盾律: $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

12、蕴含等值式: $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$p \to q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

13、等价等值式: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$

14、假言易位: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

15、归谬论: $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

等值置换规则: 设$\Phi(p)$是含公式 p 的命题公式，$\Phi(q)$是由公式 q 置换$\Phi(p)$中的 p 后得到的命题公式，如果$p \Leftrightarrow q$，则

$$\Phi(p) \Leftrightarrow \Phi(q).$$

例如：在公式$(p \to q) \to r$中用$\neg p \vee q$置换$p \to q$，得

$$\begin{aligned}(p \to q) \to r &\Leftrightarrow \neg p \vee q \to r \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\end{aligned}$$

运用等值运算和上面规则可研究复杂问题。下面是一些解决实际问题的例子。

例. 验证等值式:

$$(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$$

证明：可由左边开始演算，也可由右边开始演算。我们从左边开始演算。

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)\,.
\end{aligned}
$$

等值运算可以验证两个公式等值，但一般情况下不能用直接用等值演算验证两个公式不等值。可采用其它方法。

例． 证明:

$$(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

证法一：观察找反例。对于赋值 010，$p \to q$ 取 1，从而 $(p \to q) \to r$ 取 0 值。但对 p 取 0 值，$p \to (q \to r)$ 恒取 1 值。于是 $(p \to q) \to r$ 与 $p \to (q \to r)$ 不等值。

证法二：化简两端公式再比较。

$$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$$

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

显而易见，000 和 010 是 $(p \wedge \neg q) \vee r$ 的成假赋值，是 $\neg p \vee \neg q \vee r$ 的成真赋值。于是二者不等值。

证法三：真值表法。作 $(p \to q) \to r$ 与 $p \to (q \to r)$ 的真值表:

p	q	r	$(p \to q) \to r$		$p \to (q \to r)$	
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

两个公式不等值。

下面给出一个用等值运算法解决实际问题的例子。

例：在某次研讨会的中间休息期间，甲、乙、丙三个与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听了三人的判断后，王教授笑着说："你们三人中有一人说得全对，有一人说得对了一半，另一人说得全不对。"

试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

解答：设命题 p: 王教授是苏州人，q: 王教授是上海人，r: 王教授是杭州人。

甲全对： $A_1 = \neg p \wedge q$.

甲对一半： $A_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

甲全错： $A_3 = p \wedge \neg q$.

乙全对： $B_1 = p \wedge \neg q$.

乙对一半： $B_2 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

乙全错： $B_3 = \neg p \wedge q$.

丙全对： $C_1 = \neg q \wedge \neg r$.

丙对一半： $C_2 = (\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$.

丙全错： $C_3 = q \wedge r$.

按照王教授的说法，一人全对、一人全错和一人半对的情况共有六种可能：

$$A_1 \wedge B_2 \wedge C_3,\ A_1 \wedge B_3 \wedge C_2,\ A_2 \wedge B_1 \wedge C_3,$$

$$A_2 \wedge B_3 \wedge C_1,\ A_3 \wedge B_1 \wedge C_2,\ A_3 \wedge B_2 \wedge C_1,$$

其中一个是真的。此外根据题意，p、q、r 中只有一个为真，得附加条件：

$$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r \Leftrightarrow q \wedge r \Leftrightarrow 0 。$$

分别计算上述命题。首先：$q \wedge r \Leftrightarrow 0$ 意味着 $C_3 = 0$。从而

$$A_1 \wedge B_2 \wedge C_3 \Leftrightarrow A_2 \wedge B_1 \wedge C_3 \Leftrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
A_1 \wedge B_3 \wedge C_2 &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p) \wedge q \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p) \wedge ((0 \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 \wedge B_3 \wedge C_1 &\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge (\neg q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge \neg p \wedge 0 \wedge \neg r \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 \wedge B_1 \wedge C_2 &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\Leftrightarrow p \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\Leftrightarrow p \wedge ((\neg q \wedge r) \vee 0) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge r) \wedge (\neg q) \wedge r \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 \wedge B_2 \wedge C_1 &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow p \wedge (\neg q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge (\neg r) \\
&\Leftrightarrow (\neg q) \wedge ((p \wedge q) \vee 0) \wedge (\neg r) \\
&\Leftrightarrow 0 \wedge \neg r \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}$$

于是五种情况 $A_1 \wedge B_2 \wedge C_3$、$A_2 \wedge B_1 \wedge C_3$、$A_2 \wedge B_3 \wedge C_1$、$A_3 \wedge B_1 \wedge C_2$ 和 $A_3 \wedge B_2 \wedge C_1$ 是假的。只有 $A_1 \wedge B_3 \wedge C_2 \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$ 可以为真，此时 q 为真，p 和 r 为假。

答案：王教授是上海人，甲猜得全对，乙猜得全错，丙猜对了一半。

4.3 真值联接词的完备集

我们已经引入了五个基本的真值联接词集：{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$}。是否可用更少的真值联接词生成所有的命题公式？答案是肯定的。

真值联接词的完备集　真值联接词的完备集是指这样一个集合，它使得每个命题公式能用该集合的联接词表示出来。

定理 4.1:　以下真值联接词集合都是完备集:

（1）{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$}.

（2）{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$}.

（3）{$\neg$、$\wedge$、$\vee$}.

（4）{$\neg$、$\wedge$}.

（5）{$\neg$、$\vee$}.

（6）{$\neg$、$\rightarrow$}.

（7）{$\downarrow$}.

（8）{$\uparrow$}.

证明:（1）由命题公式定义，联接词集{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$}是一个完备集。

（2）因为 $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$，所以{$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$}是完备集。

（3）因为 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$，所以{$\neg$、$\wedge$、$\vee$}是完备集。

（4）因为 $p \vee q \Leftrightarrow \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$，所以{$\neg$、$\wedge$}是完备集。

（5）因为 $p \wedge q \Leftrightarrow \neg((\neg p) \vee (\neg q))$，所以{$\neg$、$\vee$}是完备集。

（6）因为 $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p) \rightarrow q$，所以{$\neg$、$\rightarrow$}是完备集。

（7）由 $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$ 得 $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) = p \downarrow p$。进一步，由 $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ 得 $p \wedge q \Leftrightarrow (\neg p) \downarrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$。于是{$\downarrow$}是完备集。

（8）由 $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$ 得 $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) = p \uparrow p$。进一步，由 $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ 得 $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p) \uparrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$。于是{$\uparrow$}是完备集。证毕。

定理 4.1 表明，可以用较少的逻辑符号表示命题公式。（4）和（5）在后面的命题范式理论中起了决定的作用。在计算机硬件设计中，用与非门↑或用或非门↓设计逻辑线路。

初始联接词：完备集中的联接词称为初始联接词，其它联接词可以由它们表示出来。

含有一个初始联接词的完备集有两个，含有两个初始联接词的完备集有三个，含有三个初始联接词的完备集有一个。

4.5 真值函项类与范式

真值函项类：具有相同真值表的真值函项全体称为一个真值函项类。两个具有相同真值表的真值函项称为同一类的真值函项。

真值函项的数目是无限的，每一真值函项类中的真值函项的数目也是无限的。但当命题变项的数目确定后，建立在其上的真值函项类的数目却是有限的。

对具有 n 个命题变项，不同的赋值共有 2^n 种。对于其中每一种赋值，真值函项的取值又各有两种，因此，含 n 个命题变项的不同的真值函项共有

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{2^n\text{个}}=2^{2^n}$$

种。换言之，n 元联接词有 2^{2^n} 个，或真值函项类有 2^{2^n} 个。

同一真值函项类中的真值函项有无限多个，但它们的取值是相同的。在同一真值函项类中的只要给出一个代表性的真值函项就可以了解该类全部真值函项逻辑性质，按照需要可以给出代表性的真值函项的多种规范表示形式。关于真值联接词的完备集的研究告诉我们，{¬、∧}和{¬、∨}是完备集。所有命题可以表示成否与合取或析取的形式，而合取和析取具有非常简捷的特性，便于研究。因此析取范式和合取范式是经常被使用的两种命题公式的规范表示方法。

定义：命题变项及其否定统称为文字。仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式，仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

一个文字即是简单析取式，也是简单合取式。

范式：由有限个简单合取式的析取构成的命题公式，即形式为 $\bigvee_{j=1}^{J}(\bigwedge_{i=1}^{I_j} A_{ij})$ 的命题公式，称为**析取范式**；由有限个简单析取式的合取构成的命题公式，即形式为 $\bigwedge_{j=1}^{J}(\bigvee_{i=1}^{I_j} A_{ij})$ 的命题公式，称为**合取范式**； 析取范式和合取范式统称为**范式**。

例如：$(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee s$ 是析取范式。

$(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge s\wedge(\neg p\vee\neg q)$ 是合取范式。

问题：任何一个命题公式，是否存在一个与之等值的合取范式或析取范式？

定理 4.2.（范式存在定理）

任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

证明略去。下面求范式的步骤给出了定理的大致证明思路。

求给定公式的范式的步骤如下：

1、利用 $p\to q\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 和 $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ 消去 $\to$ 和 $\leftrightarrow$。

2、用双否律消去双重否定符。

3、用摩根率 $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ 和 $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ 内移否定符 $\neg$。

4、用 $p\vee\neg p\Leftrightarrow 1$ 和 $p\wedge\neg p\Leftrightarrow 0$ 消去常值命题公式。

5、使用分配率合并成析取范式或合取范式。求析取式时使用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配率；求合取式时使用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配率。

例：求下面命题公式的析取范式和合取范式：

$$(p\to q)\leftrightarrow r.$$

解答：（1）先求析取式：

$$\begin{aligned}(p\to q)\leftrightarrow r &\Leftrightarrow ((p\to q)\to r)\wedge(r\to(p\to q)) && \text{消去}\leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q)) && \text{消去}\to\\ &\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q) && \text{内移}\neg\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \qquad \text{分配率}$$

（2）再求合取式：

$$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow ((p\to q)\to r)\wedge(r\to(p\to q)) \qquad \text{消去}\leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q)) \qquad \text{消去}\to$$

$$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q) \qquad \text{内移}\neg$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q))\vee(r\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)) \quad \text{分配率}$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge((\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg p)))\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)) \quad \text{分配率}$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r) \qquad \text{分配率}$$

范式有很多应用。在实际问题中，如果问题的要求是给出多种选择，人们应该选择析取范式。如果问题的要求是给出唯一选择，人们应该选择合取范式。下面给出一个解决实际问题的例子。

例：在侦破某金库被盗案件时，调查人员发现该金库 5 名工作人员进金库的情况是：

（1）当 A 进去时，B 也进去；

（2）D 或 E 至少有一个进去；

（3）B 或 C 有且只有一个能进去；

（4）当且仅当 D 进去时 C 进去；

（5）如果 E 进去，则 A 和 D 也进去。

请问：5 人到底谁可能进去过？谁没进去过？

解：在上述调查情况下，判断结论。设 A、B、C、D 和 E 分别代表相应的人进金库。5 种线索用命题形式表示为：

$$(A\to B)\wedge(D\vee E)\wedge((B\vee C)\wedge(\neg(B\wedge C)))\wedge(D\leftrightarrow C)\wedge(E\to(A\wedge D))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A)\vee B)\wedge(D\vee E)\wedge(B\vee C)\wedge((\neg B)\vee(\neg C))$$

$$\wedge((D\wedge C)\vee((\neg D)\wedge(\neg C)))\wedge((\neg E)\vee A)\wedge((\neg E)\vee D))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A)\vee B)\wedge((D\vee E)\wedge((\neg E)\vee D)))\wedge((B\wedge(\neg C))\vee(C\wedge(\neg B)))$$

$$\wedge((D\wedge C)\vee((\neg D)\wedge(\neg C)))\wedge((\neg E)\vee A)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A)\vee B)\wedge((B\wedge(\neg C))\vee(C\wedge(\neg B)))$$

$$\wedge D \wedge ((D \wedge C) \vee ((\neg D) \wedge (\neg C))) \wedge ((\neg E) \vee A)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \wedge ((B \wedge (\neg C)) \vee (C \wedge (\neg B))) \wedge D \wedge C \wedge ((\neg E) \vee A)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \wedge C \wedge (\neg B) \wedge D \wedge ((\neg E) \vee A)$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge ((\neg E) \vee A)$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E .$$

于是，在 5 种线索为真的情况下，C 和 D 进过金库，A、B 和 E 未进过金库。

一个命题公式的析取范式和合取范式是不唯一的。例如上式中后面三行都已经是析取范式形式了。为了使得命题公式的范式唯一，需进一步将范式中所含的简单合取式和简单析取式进一步规范化。为此引入极小项和极大项的定义。

极小项和极大项：在含有 n 个命题变项的简单合取（析取）式中，若每个命题变项和它的否定项恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项和它的否定式按下标从小到大或按字典顺序排列，称这样的简单合取（析取）式为极小项（极大项）。

关于极大项和极小项有下面重要的性质：

（1）由于每个命题变项在极小项（极大项）中以原形式或否定形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项（极大项）。

（2）由于简单合取式（简单析取式）全真为真（全假为假），所以每个极小项（极大项）都有且仅有一个成真（假）赋值。另一方面，极小项和极大项中每个命题变项的顺序位置是确定的，因此不同的极小项（极大项）对应的成真（假）赋值不同。若极小项（极大项）的成真（假）赋值所对应的二进制数等于十进制数 i，就将这个极小项（极大项）记作 m_i（M_i），$0 \le i \le 2^n - 1$。

下面的定理给出了极小项和极大项的关系。

定理：设 m_i 和 M_i 是含 n 个命题变项的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i, \quad 0 \le i \le 2^n - 1。$$

证明：利用摩根率，支命题的合（析）取式的否命题，变成支命题的否命题的析（合）取式，整体取值相反，极小（极大）项的否变为极大（极小）项。证毕。

含二个命题变项的极大项和极小项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	00	m_0	$p\vee q$	00	M_0
$\neg p\wedge q$	01	m_1	$p\vee\neg q$	01	M_1
$p\wedge\neg q$	10	m_2	$\neg p\vee q$	10	M_2
$p\wedge q$	11	m_3	$\neg p\vee\neg q$	11	M_3

含三个命题变项的极大项和极小项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	000	m_0	$p\vee q\vee r$	000	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	001	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	001	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	010	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	010	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	011	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	011	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	100	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	100	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	101	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	101	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	110	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	110	M_6
$p\wedge q\wedge r$	111	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	111	M_7

下面通过进一步限定合取范式和析取范式中的简单析取式和简单合取式的形式，对每一命题公式给出唯一的标准范式形式。

主范式（优范式）：所有简单合取式都是极小项的析取范式称为**主析取范式**。所有简单析取式都是极大项的合取范式称为**主合取范式**。

由主范式的定义可以看出，求主范式的过程，就是在范式的基础上，进一步将其中的简单范式规化成极小项或极大项。简单合取范式和简单析取范式与极小项和极大项的区别在于：（1）前者要求每个命题变项必须出现一次且仅一次，而后者允许某个命题变项可以出现多次甚至不出现；（2）前者要求每个命题变项和它

的否定式只能出现其中一个，后者允许某个命题变项和它的否定式可以同时出现;（3）前者中命题表现按给定顺序排列。后者不要求命题变项按顺序排列。在上述规定下，前者将是唯一的，后者是不唯一的。

基于上述讨论，下面算法逐步完成由一般简单合取范式和简单析取范式到极小项和极大项的过程。

第一步：求一般范式。设 A 是任一含 n 个命题变项的公式。首先求出与公式 A 等值的一个析取范式或合取范式 B，使得 $A \Leftrightarrow B$。然后逐步将 B 中的简单合取式或简单析取式化成极小项或极大项。

第二步：消去简单合取式或简单析取式中的重复命题变项，使得每一个命题变项仅出现一次。设 B' 是 B 中的任意一个简单合取式或简单析取式。若 B' 中有重复的命题变项 p，可以通过重复使用交换律将重复命题变项汇合到一处，再利用结合律和幂等律 $p \vee p \Leftrightarrow p$ 或 $p \wedge p \Leftrightarrow p$ 消去多余的重复项。

第三步：消去简单合取式或简单析取式中的自身和它的否定式同时出现的命题变项，使在每个简单合取式或简单析取式中每一个命题变项和它的否定式仅有一个出现。设 B' 是 B 中的任意一个简单合取式或简单析取式。若 B' 同时出现某个命题变项 p 和它的否定式 $\neg p$，可以通过交换律将该命题变项与它的否定式合到一处，使用结合律、排中律 $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ 和矛盾律 $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$，然后由空全率 $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ 或 $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ 知该简单合取式或简单析取式 B' 取值为 0 或 1。再利用 $p \vee 0 \Leftrightarrow p$ 或 $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$，该简单合取式或简单析取式 B' 可以消去。实际计算时，在析取范式或合取范式中的某一个简单合取式或简单析取式同时含有某个命题变项和它的否定式，可直接去除该简单合取式或简单析取式。

第四步：增添命题变项。若 B 中的某个简单合取式或简单析取式 B' 中即不含命题变项 p 也不含它的否定 $\neg p$，那么将 B' 展开成如下等值的形式：

$$B' \Leftrightarrow B' \wedge (p \vee \neg p) \Leftrightarrow (B' \wedge p) \vee (B' \wedge \neg p)$$

或

$$B' \Leftrightarrow B' \vee (p \wedge \neg p) \Leftrightarrow (B' \vee p) \wedge (B' \vee \neg p)\text{。}$$

继续这个过程，直到所有的简单合取式都含有所有命题变项或它的否定式。最终得到极小项或极大项。

求公式的主范式的步骤如下:

1、首先求出与公式 A 等值的一个析取（合取）范式 B 。

2、直接去除 B 中每个简单合取（析取）式中的重复的多余的命题变项。

3、直接消去 B 中同时含某个命题变项和它的否定式的简单合（析）取式。

4、添加命题变项：设 B'是一个不含命题变项 p 的简单合（析取）取式，

$$B' \Leftrightarrow (B' \wedge p) \vee (B' \wedge \neg p)$$

$$B' \Leftrightarrow (B' \vee p) \wedge (B' \vee \neg p)$$

使用上述步骤，直到每个简单合取（析取）式成为极小项（极大项）。

定理 4.3（主范式存在唯一性）.

除常值命题公式外，任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

取值恒为 0 的命题公式仅有主合取范式。

取值恒为 1 的命题公式仅有主析取范式。

证明：上面算法给出了主范式的存在性。只需证主范式的唯一性。

唯一性的证明：假设命题公式 A 等值于两个不同的主析（合）取范式 B 和 C ，则必有 $B \Leftrightarrow C$ 。由于 B 和 C 是不同的主析（合）取范式，不妨设存在某个极小（大）项 m_i（ M_i ）出现在 B 中但不出现在 C 中。于是角标 i 的二进制表示为 B 的成真（假）赋值，而为 C 的成假（真）赋值，与 $B \Leftrightarrow C$ 矛盾。于是于 B 和 C 含有相同的极小（大）项。

对于取值恒为 0（1）的命题公式，假如存在主析（合）取范式，全假才假(全真才真)，则其中每个简单合（析）取式也必须恒假（真）。又主析（合）取式中每个简单合（析）取式必须是极小（大）项，必有一个成真（假）赋值，与恒假（真）矛盾。因此假设不成立，即不存在主析（合）取式。证毕。

主范式在逻辑的分析和研究中具有很多的应用。

定理 4.4. 命题公式 A 和 B 等值，当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式或主合取范式。

我们再举一个应用主范式分析和解决实际问题的例子。

例. 某科研所要从 3 名科研骨干 A、B、C 中挑选 1-2 人出国进修。由于工作需要，选派时要满足以下条件:

（1）若 A 去，则 C 同去;

（2）若 B 去，则 C 不能去;

（3）若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

问: 有哪些选派方案?

解答: 设 p: 派 A 去; q: 派 B 去; r: 派 C 去。由题意应采用析取范式求解。由已知条件得:

$$(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q))。$$

经演算得:

$$
\begin{aligned}
& (p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee p \vee q) && \text{消去}\to \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge q)) && \text{分配率} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{析取范式} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) && \text{主析取范式}
\end{aligned}
$$

答: 共有 3 种方案可供选择:

（a） C 去，A、B 都不去;

（b） B 去，A、C 都不去;

（c） A 和 C 去同去，B 不去。

利用真值表计算主范式

给定命题公式，可以写出对应的真值表。反之，给出真值表，一般不能还原出原命题公式，但可以给出等值的主范式。根据主范式分成主析取范式和主合取范式

的两类，由真值表计算主范式分成写真法和写假法两种方法：写真法用于反演主析取范式，写假法用于反演主合取范式。

写真法 对主析取范式，一真即真，因此对应一个成真赋值，必含一个极小项，写出该简单合取式，然后将所有简单合取式析取即得主析取范式。

写假法 对主合取范式，一假即假，因此对应一个成假赋值，必含一个极大项，写出该简单析取式，然后将所有简单析取式合取即得主合取范式。

我们用例子给予说明。

例：考虑含有两个命题变项的真值表如下

p	q	α
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

写真法计算主析取式：

p	q	α	
1	1	0	
1	0	1	$p\wedge\neg q$
0	1	0	
0	0	1	$\neg p\wedge\neg q$

α 的主析取范式为：$\alpha \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$。

写假法计算主合取式

p	q	α	
1	1	0	$\neg p\vee\neg q$
1	0	1	
0	1	0	$p\vee\neg q$
0	0	1	

α 的主合取范式为：$\alpha \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$ 。

例：考虑含有三个命题变项的真值表如下

p	q	r	β
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

写真法计算主析取式：

p	q	r	β	
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

β 的主析取范式为：$\beta \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

写假法计算主合取式：

p	q	r	β	
1	1	1	1	
1	1	0	0	$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	0	$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	0	0	1	

0	1	1	1	
0	1	0	0	$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	0	$p \vee q \vee \neg r$
0	0	0	0	$p \vee q \vee r$

β 的主合取范式为: $\beta \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

$$\wedge(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

利用主析（合）取范式计算主合（析）取范式

定理 4.5. 设命题公式 A 含 n 个命题变项。主析取范式含 s（$0 < s < 2^n - 1$）个极小项，即

$A = m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}$， $0 \le i_k \le 2^n - 1$, $1 \le k \le s$。

没出现的极小项为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_{2^n - s}}$, 则

$$A \Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n - s}}。$$

证明：设 $A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}$，则 $j_1, j_2, \cdots, j_{2^n - s}$ 对应的二进制数是 A 的成假赋值，从而是 $\neg A$ 的成真赋值，因而其主析取范式为

$$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n - s}}。$$

作为结果，利用双否率和 $\neg m_j \Leftrightarrow M_j$，我们有

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n - s}})$$

$$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n - s}} \Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg M_{j_{2^n - s}}.$$

即 $M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg M_{j_{2^n - s}}$.是 A 的主合取范式。定理证毕。

类似地可证明关于由主合取范式得到主析取范式的结果。

定理 4.6. 设命题公式 A 含 n 个命题变项。主合取范式含 s（$0 < s < 2^n - 1$）个极大项，即

$$A = M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_s}，\quad 0 \le i_k \le 2^n - 1, \quad 1 \le k \le s。$$

没有出现的极大项为 $M_{j_1}, M_{j_2}, \cdots, M_{j_{2^n-s}}$，则

$$A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}。$$

综合定理 4.5 和 4.6，由主析（合）取范式计算主合（析）取范式的步骤是：

第一步：由已知的主析（合）取范式确定其中每个极小（大）项对应的成真（假）赋值。

第二步：找出剩余的命题变项的赋值集合，对应每一赋值，使用写假（真）法写出对应的极大（小）项（简单析（合）取式）。

第三步：合（析）取第二步得到的所有简单析（合）取式，即得到主合（析）取范式。

真值函项类的范式

我们写出含一个和二个命题变项的真值函项类的主范式。

（1）含有一个命题变项的真值函数类有 $2^2 = 4$ 个，对应真值表为：

含一个命题变项 p 的真值函数类

p	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

范式： $f_0 = p \wedge \neg p$ ， $f_1 = p$ ， $f_2 = \neg p$ ， $f_2 = p \vee \neg p$ 。

（2）含有二个命题变项的真值函数类有 $2^{2^2} = 16$ 个，对应真值表为：

含二个命题变项的真值函数类（一）

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

含二个命题变项的真值函数类（二）

p	q	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

使用写真法可写出全部主析取范式:

$f_0 = 0$ 写不出主析取式； $f_1 = p \wedge q$； $f_1 = p \wedge \neg q$； $f_3 = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$；

$f_4 = \neg p \wedge q$； $f_5 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$； $f_6 = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$；

$f_7 = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$； $f_8 = \neg p \wedge \neg q$；

$f_9 = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$； $f_{10} = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$；

$f_{11} = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$； $f_{12} = (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$；

$f_{13} = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$；

$f_{14} = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$；

$f_{15} = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

使用写假法可写出全部主合取范式:

$f_0 = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$；

$f_1 = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$； $f_2 = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$；

$f_3 = (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$； $f_4 = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$；

$f_5 = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$； $f_6 = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$；

$f_7 = p \vee q$； $f_8 = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$；

$f_9 = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$； $f_{10} = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$；

$f_{11} = p \vee \neg q$； $f_{12} = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$； $f_{13} = \neg p \vee q$；

$f_{14} = \neg p \vee \neg q$； $f_{15} = 1$ 写不出合取范式。

含有三个命题变项的真值函数类有 $2^{2^3} = 256$ 个，不再列出。

上述例子表明一和二元真值函数均可表示由 $\{\neg、\vee、\wedge\}$ 中的真值联接词表示出来的等值公式。下面定理表明此结论对一般真值函数也是正确的。

定理 4.7 任意真值函项，可由$\{\neg、\vee、\wedge\}$中的真值联接词表示出来的公式与之等值。

证明：设 n 元真值函数 $f(p_1,p_2,\cdots p_n)$。对命题变项个数 n 作数学归纳。

对 $n=1$ 和 2 情形已证成立。

设 $n=k$ 时结论成立。

当 $n=k+1$ 时，则由归纳法假设 $f(p_1,p_2,\cdots p_k,1)$ 和 $f(p_1,p_2,\cdots p_k,0)$ 可由$\{\neg、\vee、\wedge\}$中的真值联接词表示出来的公式与之等值, 且

$$
\begin{aligned}
& f(p_1,p_2,\cdots p_k,p_{k+1}) \\
\Leftrightarrow & (p_{k+1}\to f(p_1,p_2,\cdots p_k,1))\wedge(\neg p_{k+1}\to f(p_1,p_2,\cdots p_k,0)) \\
\Leftrightarrow & (\neg p_{k+1}\vee f(p_1,p_2,\cdots p_k,1))\wedge(p_{k+1}\vee f(p_1,p_2,\cdots p_k,0))。
\end{aligned}
$$

得证： $f(p_1,p_2,\cdots p_k,p_{k+1})$ 可由$\{\neg、\vee、\wedge\}$中的真值联接词表示出来的公式与之等值。由归纳法原理，结论对任意自然数成立。证毕.

定理 4.7 表明：任何复杂的复合命题总可以由$\{\neg、\vee、\wedge、\to、\leftrightarrow\}$几个简单逻辑连接词联接复合而成，即 n 元合式公式包含了所有 n 元真值函数的情形。

4.6 重言式（永真式）（Tautology）

根据公式在各种赋值下的取值情况，可按下述定义将命题公式进行分类。

定义：设 A 为含 n 个命题变项的任一命题公式。

（1）若 A 在命题变项的各种赋值下取值均为 1（真），则称命题公式 A 是**重言式**或**永真式**。

（2）若 A 在命题变项的各种赋值下取值均为 0（假），则称命题公式 A 是**矛盾式**、**永假式**或**不可满足式**。

（3）若 A 不是矛盾式，则称 A 是**可真式**或**可满足式**。

注：Tautology 的含义是同义重复。

从定义不难得出下面结论:

结论 1：一个命题公式是重言的，当且仅当它的否命题公式是矛盾的。

结论 2：一个命题公式不是重言的，当且仅当在它的命题变项的至少一种赋值下，其值为假。

结论 3：重言式是可满足的，反之不然。

在命题逻辑中，重言式是人们最感兴趣的，具有重要的意义和应用。下面给出判定重言式的一些方法。

（a）**真值表法**

理论上讲，任何一个命题公式，无论多么复杂，都可以用真值表法判断其是否是一个重言式。写出真值表，如果该命题恒取值为 1，则该命题是重言式。

（b）**简化真值表法**

当命题公式的形式非常复杂，或所含的命题变项比较多时，构造该命题公式的真值表就是一件十分繁琐的工作。为此给出一种比较简便的判定方法：简化真值表方法，也称赋值归谬法。

由重言式定义，一个命题公式是重言式，当且仅当其没有成假赋值。简化真值表法就是一个判别一个命题公式是否有成假赋值的方法。其基本思想是反证法，假设命题公式取假值，然后根据某一个逻辑运算符两端的真假给出子公式的真假，不断地将子公式的规模减小，若得出一个矛盾的结果，则说明该赋值不是成假赋值。排除掉所有可能的成假赋值，则得知假设不成，得证该命题公式是重言式。若未得出矛盾，则获得一个成假赋值，得知该命题公式不是重言式。

简化真值表法特别适合于蕴含命题。因为，对于蕴含命题而言，只有前件真而后件假时命题为假。因此，在蕴含命题为假时，蕴含运算符两侧的子公式只有一种选择。

例：讨论 $((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (q \leftrightarrow p)$ 是否为重言式？

解答：设此命题公式为假，则 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 为真，$q \leftrightarrow p$ 为假。有两个可能的成假赋值：10 和 01。

p q	$((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (q \leftrightarrow p)$
	⓪ T 0 T 0 T 1 F 0 F ①
	0 T 1 T 1 T ① F 1 F ⓪

均产生矛盾，因此，$((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (q \leftrightarrow p)$ 无成假赋值，为重言式。

例：讨论 $(p \vee q) \wedge (p \to r \wedge s) \wedge (\neg q \to \neg r) \to r$ 是否为重言式？

解答：设此命题公式为假，则 $(p \vee q) \wedge (p \to r \wedge s) \wedge (\neg q \to \neg r)$ 为真，r 为假。于是 $p \vee q$、$p \to (r \wedge s)$ 和 $(\neg q) \to (\neg r)$ 同真。

p q r s	$(p \vee q) \wedge (p \to r \wedge s) \wedge (\neg q \to \neg r) \to r$
0 1 0 1	0 T 1 T 0 T 0 F 0 T F 1 T T 0 F 0

于是，该命题公式至少有一个成假赋值：0100。从而不是重言式。

简化真值表法的基本作法大致可以归结为以下四步。

第一步：假设要判断的公式为假，即在其主联接词（蕴含词）下置假。

第二步：根据真值表对其子公式赋值，即在这些子公式的主联接词下置真或假。逐步进行下去，必要时对所有子公式赋值。

第三步：根据子公式联接词的真假值，确定联接词两端的命题变项的真假值。一旦出现两个相同的命题变项即需置真又需置假，则产生矛盾。表明含有该值的赋值不是成假赋值，画圈作出标识。换其它可能的赋值再试。

第四步：如果按以上方式给对某个可能的成假赋值后未出现矛盾，则找到了一个成假赋值，表明该命题公式不是重言式。如果排除了所有可能的成假赋值，则表明该命题公式是重言式。

简化真值表的优点是仅需写出真值表中可能成假的那些行。从而大大减少复杂的计算。

（c）**等值运算法**

通过等值运算确定命题公式是否等值于常数 1。

（d）**范式法**

范式法是判断重言式的有效方法之一。我们有如下定理。

定理 4.8　下述结论成立:

（1）一个简单析取式是重言式当且仅当同时含某个命题变项和它的否定式。

（2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当同时含某个命题变项和它的否定式。

证明:（1）“充分性”。设一个简单析取式中存在一个命题变项和它的否定都在该简单析取中，则由交换律和结合律，可将它和它的否定结合到一起，形成它和它的否定的析取，由排中律知其值为 1。再由空全律，任何命题变项与 1 的析取取值为 1，从而该简单析取式是重言式。

“必要性”。对任何重言的简单析取命题，如果其中命题变项和它的否定只能有一个存在，令不含¬的命题变项取值为假和含¬的命题变项取值为真，则析取联接词连接的所有项均取假值（全假为假），从而该简单析取命题取值为假，该简单析取命题有成假赋值，不是重言式。产生矛盾。

（2）“充分性”。设一个简单合取式中存在一个命题变项和它的否定都在该简单合取式中，由交换律和结合律，可将它和它的否定结合到一起，形成它和它的否定的合取，由矛盾律知其值为 0。再由空全律，任何命题变项与 0 的合取取值为 0，从而该简单合取是不可满足的。

“必要性”。对任何不可满足的简单合取命题，如果其中命题变项和它的否定只能有一个存在，令不含¬的命题变项取值为真，含¬的命题变项取值为假，则合取联接词连接的所有项均取真值，从而该简单合取命题取值为真，该简单合取命题有成真赋值，不是不可满足式。产生矛盾。

定理 4.9 下述结论成立:

（1）一个合取范式是重言式当且仅当它的每一个简单析取式均是重言式。

（2）一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每一个简单合取式均是矛盾式。

证明:（1）一个合取范式是重言式，当且仅当它恒取 1，当且仅当合取联接词连接的每一个简单析取式恒取 1，从而全部是重言式。

（2）一个析取范式是不可满足式，当且仅当它恒取 0，当且仅当析取联接词连接的每一个简单合取式全部取 0，从而全部是不可满足式。

作为上面定理的推论，我们有下面的结论。

定理 4.10 下述结论成立:

（1）一个命题公式是重言的，当且仅当它的一个合取范式中的每一个简单析取式含某个命题变项和它的否定式。

（2）一个命题公式是矛盾的，当且仅当它的一个析取范式中的每一个简单合取式含某个命题变项和它的否定式。

定理 4.11 设 p 是含 n 个命题变项的命题公式，下述结论成立:

（1）p 为重言式当且仅当 p 的主析取范式含全部 2^n 个极小项;

（2）p 为矛盾式当且仅当 p 的主合取范式含全部 2^n 个极大项。

证明:（1）p 为重言式当且仅当它的主析取范式是重言式，当且仅当对命题变项的 2^n 个不同赋值，至少其中一个极小项取值为 1（一真即真）。由于每个极小项仅有一个成真赋值，所以主析取范式必须含全部 2^n 个极小项。

（2）p 为矛盾式当且仅当它的主合取范式是矛盾式，当且仅当对命题变项的 2^n 个不同赋值，至少其中一个极大项取值为 0（一假即假）。由于每个极大项仅有一个成假赋值，所以主合取范式必须含全部 2^n 个极大项。

利用上述定理，可以采用合取范式和主析取范式检验命题公式是否是重言式。

第四章习题

一、 将下列命题符号化

1、庄稼将会枯死，除非天下雨。（C：庄稼将会枯死，R：天下雨）

2、蛇是哺乳动物，仅当蛇用奶喂养它们的后代，但蛇并不用奶来喂养它们的后代。（M：蛇是哺乳动物；N：蛇用奶喂养它们的后代）

3、假设弗雷德既是有理性的又是动物，那么弗雷德是人；但弗雷德不是有理性的。(R：弗雷德是有理性的，A: 弗雷德是动物；H：弗雷德是人)

4、尽管驯鹿存在，圣诞老人不存在；但如果圣诞老人不存在，那么成年人不诚实。（R：驯鹿存在；S：圣诞老人存在；H：成年人诚实）

5、如果特鲁德不写诗那么霍勒斯写歌；但其实并非如果特鲁德写诗那么霍勒斯不写歌。（H：特鲁德写诗；F：霍勒斯写歌）

6. 这个三角形是锐角三角形，因此它不是直角三角形，也不是钝角三角形。（A：它是钝角三角形；B：这个三角形是锐角三角形；C：它是直角三角形）

7、他或者买空调，或者买电视机，不买电脑。（L: 买电脑；M：买电视机；N：买空调）

8、这学期，刘晓只能选学英语或日语中的一门外语课。（A：选学英语；B：选学日语）

二、将下列命题符号化，并指出真值。（p: $2<1$和q: $3<2$）

（1） 只要$2<1$，就有$3<2$。

（2） 如果$2<1$，则$3\geq 2$。

（3） 只有$2<1$，才有$3\geq 2$。

（4） 除非$2<1$，才有$3\geq 2$。

（5） 除非$2<1$，否则$3\geq 2$。

（6） $2<1$，仅当$3\geq 2$。

三、回答下面问题并说明理由：

（1）判断下面一段论述是否为真：“π是无理数。并且，如果 3 是无理数，则$\sqrt{2}$也是无理数。另外，只有 6 能被 2 整除，6 才能被 4 整除。”

（2）在什么情况下，下面一段论述是真的：“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的，而如果说小王会唱歌，小李就会跳舞是不正确的。”

四、设 p：俄罗斯位于南半球，q：亚洲人口最多。将下面命题用自然语言表述，并指出真值。

（1） $p\rightarrow q$

（2） $q\rightarrow p$

（3） $(\neg p)\rightarrow q$

（4） $p \to (\neg q)$

（5） $(\neg q) \to p$

（6） $(\neg p) \to (\neg q)$

（8） $(\neg q) \to (\neg p)$

五、在某班班委会的选举中，已知王小红、李强和丁金生三位同学被选进了班委会。该班的甲、乙、丙三位同学预言：

甲说：王小红为班长，李强为生活委员；

乙说：丁金生为班长，王小红为生活委员；

丙说：李强为班长，王小红为学习委员；

班委会分工名单公布后发现：甲、乙、丙三位都恰好猜对了一半。

问：王小红、李强和丁金生各任何职？（等值演算法求解）

六、某公司要从赵、钱、孙、李、周五位选派一些人出国学习，选派必须满足以下条件：

（1）若赵去，钱也去；

（2）李、周二人中必有一人去；

（3）钱、孙二人中去且仅去一人；

（4）孙、李二人同去或同不去；

（5）若周去，则李、钱也同去。

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

七、某工程局有六个工程队，实力分布如下表：

工程队	土木建筑	修建房屋	电器按装	修建隧道	机械安装	运输	管道安装
p	√	√	√				
q				√		√	
r		√					√
s			√		√		
t	√			√			
u						√	√

现该工程局承接一项工程，上述能力全部需要，

问：至少派哪些队去才能胜任？有多少种派遣方案？

八、求下列命题公式的主析取范式和主合取范式：

（1） $(p \to q) \wedge (\neg q \to p)$.

（2） $p \wedge (p \to q) \to q$.

（3） $(p \vee q \to r) \to p$.

九、写出下面命题公式的真值表，然后用真值表求出主析取范式和主合取范式：

（1） $(p \vee q) \wedge r$.

（2） $p \to (p \vee q \vee r)$.

十、已知命题公式 A 含 3 个命题变量 p、q 和 r，并且它的成真赋值为 000， 011 和 110。求 A 的主合取式和主析取式。

十一、新学期开始，给某年级安排课表时，各任课老师分别有如下要求：

外语老师：要求在每周星期一或三上课；

数学老师：要求在每周星期一或二上课；

法学老师：要求在每周星期二或四上课；

美学老师：要求在每周星期三或五上课；

体育老师：要求在每周星期四或五上课；

问：怎样安排才能满足全部教师的要求，并且一天只有一个教师上课（每个教师每星期只上一次课）？

十二、用真值表判断下列公式的类型：

（1） $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$。

（2） $(\neg p \to q) \to (q \to p)$。

十三、用简化真值表法判断下列公式是否重言式：

（1） $((p \to q) \to q) \to (p \vee q)$。

（2） $((p \to q) \wedge r) \to (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$。