逻辑学引论

Introduction of Logic

华东师范大学数学系　　羊丹平

命题 3

逻辑的研究推理，推理由一系列命题组成。本章介绍命题的基本概念和种类。

3.1 语句及其赋值

语句 具有广义和狭义和两种含义。

广义语句即语言学规定的语句：合乎语法规则、具有完整明确的意思，由某种语言的词语和词组组成的语言单位。包括陈述句、疑问句、祈使句、感叹句四种类型。

语句是表达思维的载体。在形式逻辑体系下，思维过程中使用的语句的表述方式必须满足逻辑学基本规律的要求。对于语句而言，排中律和无矛盾律的表述为：

> **排中律：语句明确表述或肯定或否定的意义。**
>
> **无矛盾律：同一语句中不能表述同时肯定和否定。**

基于排中律和无矛盾律的要求，逻辑学研究具有某种限定的语句。

狭义语句 一种语句，具有特点：必须**或者肯定或者否定，二者仅居其一**。

狭义语句必须表达出或者肯定或者否定的明确意义，即明确肯定或否定存在某种状态和发生某个行为。这种语句只包括陈述句、部分特殊的疑问句和特殊的感叹句。如“张先生去北京了”是确定发生了的行为。“张先生不在家”是明确否定的状态。这些是狭义语句。

一般疑问句和感叹句不表示或者肯定或者否定的明确意义，因而不是狭义语句。如“张先生在办公室吗？” 不表达明确定或否定意义，不是一个狭义语句。但某些反映了强烈的确定意义的特殊的疑问句以及特殊的感叹句，可以作为狭义语句处理。如反讥疑问句：“难道闵行校区樱桃河畔景色不美吗？”（该句真实表达的含义是“闵行校区樱桃河畔景色美。”）以及感叹句 “大海，多么辽阔

啊！”。祈使句也不是狭义语句。如“请不要踩踏草地！”这是祈使句，并未表达踩踏或未踩踏的明确意义。

狭义语句满足排中律和无矛盾律的要求：任何所述的状态和行为必须处于且仅处于“肯定”和“否定”情况之一。

语句的真值和假值　一个狭义语句所表达的明确意义是否正确，引出逻辑学关于语句的“真”值和“假”值问题，统称为真值问题。

什么是语句的“真”与“假”？

亚里士多德提出的说法：“说是者为是，非者为非，是真的；说是者为非，非者为是，是假的。”

亚里士多德说法的解读：“者” 指语句。“者”字前面的“是”与“非”与后面的“是”与“非”是两个不同的概念。前者是语句中表达的状态和行为的“肯定（是）”与“否定（非）”的意义，后者是实际情况或经推理证明确认的语句表述的状态“肯定（是）”与“否定（非）”。亚里士多德关于语句真假的含义为：语句中肯定（否定）存在的状态或发生的行为等，真实情形也为肯定（否定）存在或发生，则该语句取值为“真”。语句中肯定（否定）存在的状态或发生的行为等，真实情形却为否定（肯定）的，则该语句取值为“假”。某语句取“真”值，表明该语句表述的意义与实际情况一致（是者为是，非者为非）；某语句取“假”值，表明该语句表述的意义与实际情况不一致（是者为非，非者为是）。

确定一个语句的真假不是逻辑学的任务，通常由实际情况和各门学科确定。

例 3.1　“李白是一位天才诗人”和“李白不是一位伟大的政治家”。

根据李白的诗作和史书记载，李白确实是唐代天才诗人（是者为是）但不是伟大的政治家（非者为非），因此上述二语句均取值为“真”。

例 3.2　“李白不是一位天才诗人”与“李白是一位伟大的政治家”。

根据史书记载：李白确实是天才的诗人(非者为是)，李白确实不是伟大的政治家（是者为非），因此，这两个语句均取值为“假”。

例 3.3 著名的哥德巴赫猜想：“充分大的正的偶数都可以表示成两个正的素数之和”，简记为“1 + 1”。如果该猜想取“真”值，表示哥德巴赫猜想是正确的；如果该猜想取“假”值，表示哥德巴赫猜想是不正确的。数百年来，国内外众多天才数学家前赴后继地试图证明“哥德巴赫猜想”取“真”值。

例 3.4 金山是山。字面上看，此语句应取值为“真”。但由于“金山”是一个空概念（外延为空类），没有这样的山，此语句实际是不真实的，是者为非，因此这个语句应取值为“假”。类似语句有孙悟空是猴，永动机是机器等。本例子提醒人们注意空概念带给人的误导。

真值承担者 如果一个狭义语句能够取“真”或“假”值（逻辑学上统称为“真值”），称该语句可以作为真值承担者，尽管很多情形人们不知道该语句取何值。例如“李白是一位天才诗人”和哥德巴赫猜想等是真值承担者。

并非所有的狭义语句都能够取“真”值或“假”值。

例 3.5 “海战问题”：“明天发生海战”。明天海战是否发生，今天不能见分晓，不确定是“真”或“假”。

例 3.6 “张三像李四”。此语句的正确性不确定。

例 3.7 本语句假。（悖论）

例 3.8 “明信片问题”：一张明信片的 A 面写有一句话：“本明信片背面那句话是真的。”另一面（B）的那句话是：“本明信片背面那句话是假的。”在这个问题中，若 A 面的话为真（假），则 B 面的话告诉人们 A 面的话为假（真）。无论从那句话出发，都得到该话为真当且仅当该话为假。从而两个语句无法取真假值。

3.2 命题、判断和陈述的基本概念

命题、判断和陈述是思维过程中的重要形式和组成部分。命题、判断和陈述都是通过语句表达的，但语句不一定都是命题、判断和陈述。能够构成命题、判断和

陈述的语句必须满足形式逻辑的排中律和无矛盾律。思维的目的是判别是非和得出真假。作为思维的一种重要形式，命题、判断和陈述等均需具有可判别的特质。

对于语句的赋值而言，排中律表述为:

排中律：在同一思维过程中，一个语句或真或假，必居其一。

无矛盾律表述为:

无矛盾律：在同一思维过程中，没有语句可以同时取真值和假值。

上述要求表明：真与假是相互反对的。

亚里士多德关于语句真值的界定满足形式逻辑的排中律和无矛盾律的要求：适用于形式逻辑思考的语句必须处于且仅处于“真”和“假”两种判定之一。

命题（Proposition）具有下述两个特征的语句:

（1）表述形式或者肯定或者否定，二者必居且仅居其一。

（2）表达含义或者为真或者为假，二者必居且仅居其一。

判断（Judgment） 一种重要的思维形式，即对思维对象是否具有某种性质或某种关系的断定。对象无不具有一定的属性，判断就是肯定或者否定对象具有某种属性。判断具有真假性。

陈述（Statement）一个或真或假的狭义语句。

在国内的形式逻辑书籍中，命题、判断与陈述无区别。

在国外的形式逻辑书籍中，命题和陈述是有区别的。

（1）陈述含有语言和文字的差别，如中文、英文、法文等等不同语言文字。同一命题可用不同的的语言或文字来表述。

（2）即使同种语言或文字，也存在多种不同的方式表达同一个命题。

（3）**命题则专指各种语言表述的语句的真实含义（Meaning）**。

换言之，陈述是多样性的，命题是唯一性的。这种区别的好处是剥除语言文字差异所带来的岐义性。

命题通常用小写英文字母表示：如 a, b, c, d, …….

二值逻辑 从命题的定义我们可以看出，经典逻辑学限制于讨论语句内仅包含肯定和否定两种选择，语句取值仅真与假两种可能的问题，因而是所谓“二值逻辑”。这种二值性，也决定了形式逻辑仅适用于确定性问题，在数学领域，适用于确定性数学。

等价的命题（等值的命题）（Equivalent proposition) 两个同时取真值，也同时取假值的命题称为等价（等值）的命题，即 p 为真，则 q 为真，且 q 为真，则 p 为真。如果两个命题 p 和 q 等价（等值），记为 $p \Leftrightarrow q$,

例如：$x^2-2x+1=0$ 和 x=1。

例如：“三条对应边相等的两个三角形是全等三角形”和“两边一夹角相等的两三角形是全等三角形”。

如果两个命题等价（等值），人们可以将一个问题的研究，转移到对等价（等值）的命题的研究。许多情形，一个非常困难的命题的等价命题，可能具有更清晰的结构，拥有更多和更丰富的分析工具。近几十年来，许多重大的数学难题，如费马大道理、庞卡来猜想等都是在运用跨学科领域对等价命题采用新的理论和方法进行研究，获得了突破和解决。

在数学上，等价思想是被极其普遍使用的重要思想和方法。在数学研究中，人们经常抽去问题的实际含义，仅保存某些形式的共有的抽象的特性。例如高等代数中研究的各种抽象的向量空间、代数结构等。同学们面对一堆抽象的符号和对象等会一脸疑惑，但是，一旦运用某种方法建立了实际问题与抽象问题的等价关系，抽象的数学的作用就会爆发出来，展现出数学的强大力量。这就是数学的魅力、美丽和威力。

反对的命题（Contrary proposition） 两个不能同时取真值的命题称为反对的命题。

例如最典型的两个命题来自典故或成语“矛盾”。卖兵器的吆喝：“我的矛锐不可挡，我的盾坚不可摧”。围观者问：“用你之矛攻你之盾若何？”卖者面红耳赤，无言以对。在这个例子中，“矛锐不可挡”和“盾坚不可摧”是不能同时成立的。从而是两个相互反对的命题。此例是中文“矛盾”一词的典故来源。

定理：两个互相反对的命题必有一假。

例如上例中，“矛锐不可挡”和“盾坚不可摧”中至少有一个是假的。

定理：在同一思维过程中，如果两个互相反对的命题同时为真，则违反无矛盾律。

证明：设在同一思维过程中，两个命题 a 和 b 同时成立。即 a 真且 b 真。另一方面，如果 a 和 b 是互相反对的命题，必有一个为假。于是 a 真则 b 假。b 同时取真值与假值，无矛盾律不成立。

违反无矛盾律要求，称为**自相矛盾**。协调，就是不自相矛盾。无矛盾律要求思想的协调性，认为自相矛盾的思想一定是一种谬误。

矛盾的命题 (Contradictoy proposition) 两个不能同取真值，也不能同时取假值的命题称为矛盾的命题。

定理：两个互相矛盾的命题必有一真一假。

例如：$x^2-2x+1=0$ 和 $x\neq1$。

矛盾的命题一定是反对的命题，但反对的命题不一定是矛盾的命题。

在“矛盾”的典故中，两个命题是反对命题（不能同时为真），不是矛盾命题（可以同时为假）。“我的矛锐不可挡”为假意味着“我的矛刺不穿某个盾”，“我的盾坚不可摧”为假意味着“我的盾挡不住某枝矛”。这两个命题可以同时成立。于是，“我的矛锐不可挡”与“我的盾坚不可摧”可以同时为假。因此，由成语导出的“矛盾”一词是反对的含义。这是逻辑中的“矛盾”与日常语言中的“矛盾”的一点差别。

定理：在同一思维过程中，如果两个互相矛盾的命题同时成立或同时不成立，则违反无矛盾律。

证明：由于互相矛盾的命题一定是互相反对的命题，所以第一种情形已证。设在同一思维过程中，两个命题 a 和 b 同时为假。则 a 假且 b 假。另一方面，如果 a 和 b 是互相矛盾的命题，a 假则 b 真。于是 b 即假又真，违反无矛盾律。

上述定理表明，在同一思维过程中，如果同时肯定或同时否定两个互相矛盾的命题，则该思维过程是违反无矛盾律的。

命题分为**模态命题**和**非模态命题**两大类。**非模态命题**又分为**简单命题**和**复合命题**。模态命题放在后面的对应章节介绍。 下面分别介绍简单命题和复合命题的基本知识。

3.3 简单命题

简单命题是由简单句构成的命题。从语言学的角度，一个简单句含有主语、谓语、宾语或表语及其它修饰部分。在逻辑学中，相应组成部分有逻辑学专用词汇表述。

3.3.1 简单命题的组成成分

主项（主词）（Subject）命题所反映的思维对象称为命题的主项或主词，常用 S 表示。

谓项（谓词、宾词）（Predicate）命题所反映的思维对象具有或不具有某种属性的概念称为谓项、谓词或宾词，常用 P 表示。

联项（联词、系词）(Copula)联系主项和谓项的概念称为联项、联词或系词，常用“是”或“不是”等表示思维对象（主项）和属性（谓项）间肯定或否定的关系。

量项（量词）(Quantifier)表示主项数量的概念称为量项或量词。

命题的质 对命题中联项肯定和否定的专称。

联项“是”表示命题的质是肯定的。联项“不是”表示命题的质是否定的。

换质 推理过程中的术语“换质”指换命题的质：“是”与“不是”互换。

命题的量 对命题中主词的量的专称。

全称量项(全称量词) 表示全体对象的量词称为全称量项，用“所有”、“全部”、“一切”、“任意一个”等来表示。

特称量项(特称量词) 表示全部对象中至少有一个对象的量词称为特称量项，用“有”、“有的”、“存在”等表示。

单称量词 表示一般的单独对象的量词，常用“这个”、“一个”表示。

词项 主项和谓项统称为词项。

例如：“金属都（部分）是发光的”。

这是一个命题，其中“金属”是主项，“是”是联项，“都”（“部分”）是量项，“都”（“部分”）是全称（特称）量项，“发光的”是谓项。

简单命题 只包含一个主项和一个谓项的命题。

简单命题由主项、谓项、联项和量项四部分组成。

主项表示命题的对象概念。

谓项表示主项具有或不具有的性质概念。

联项反映命题的质的差异。

量项表示主项和谓项的数量，反映命题的量的差别。

简单命题分为**直言命题**和**关系命题**。

直言命题（性质命题、属性命题）(Categorical proposition) 一类简单命题，直接陈述事物具有或不具有某种属性的命题。基本结构是:

（量词）+主项+联项+谓项

例如: 一切犯罪是违法行为。

直言命题的分类: 直言命题按质分为肯定命题和否定命题; 按量分为全称命题、特称命题和单称命题; 按质和量结合起来分为六种基本形式: 全称肯定命题与全称否定命题，特称肯定命题与特称否定命题，单称肯定命题与单称否定命题。

肯定命题(Affirmative proposition) 一类直言命题，指断定事物具有某种性质的命题。形式结构为:

S 是 P

其中 S 之前可以加上适当量词，

例如: 一切反动派都是纸老虎。

性格决定命运。

任意大于 6 的偶数都是两个素数的和。

否定命题(Negative proposition) 一类直言命题，指断定事物不具有某种性质的命题。形式结构为:

S 不是 P

其中 S 之前可以加上适当量词。

例如: 2 不是奇数。

例如: 闭区间上所有无界函数不是该闭区间上连续函数。

全称命题 (Universal proposition) 一类简单命题，指具有全称量词的直言命题。形式结构为:

$\boxed{\text{所有 S 是（不是）P}}$

例如：对任何 $0 \le x \le \pi$，成立 $\sin x \ge 0$。

特称命题 (Particular proposition) 一类简单命题，指具有特称量词的直言命题。形式结构为:

$\boxed{\text{有 S 是（不是）P}}$

例如：有些正实数的平方根是（不是）有理数。

单称命题 一类简单命题，指主项为单独概念的直言命题。形式结构为:

$\boxed{\text{这个 S 是（不是）P}}$

例如：圆周率不是有理数。

全称肯定命题（A 命题、SAP）(Universal affirmative proposition) 指断定某类事物的全部都具有某种性质的简单命题。形式结构为:

$\boxed{\text{所有 S 是 P}}$

全称肯定命题的代表符号为 A，又称为 A 型命题（A 命题），简记为：SAP。

例如：“所有四边形都是平行四边形”。“四边形”是主项，“平行四边形”是谓词，“是”联词，“都”是全称量词。这是一个全称肯定命题。

特称肯定命题（**I 命题、SIP**）(Particular affirmative proposition) 指断定某类事物中有的（某个或某一部分）具有某种性质的简单命题。形式结构为:

$\boxed{\text{有 S 是 P}}$

特称肯定命题的代表符号为 I，又称为 I 型命题（I 命题），简记为：SIP。

例如：中国仍有不少家庭处在贫困线下。

存在 $-\infty < x < +\infty$，满足 $\sin x = 0$。

单称肯定命题 指断定某一特定的个别对象具有某种性质的简单命题。形式结构为:

这个 S 是 P

例如:这个三角形是等腰三角形。

全称否定命题(E 命题、SEP)(Universal negative proposition) 指断定某类事物的全部都不具有某种性质的简单命题。形式结构为:

所有 S 都不是 P

全称肯定命题的代表符号为 E,又称为 E 型命题(E 命题),简记为:SEP。

例如:所有奇数都不能被二整除。

特称否定命题(O 命题、SOP)(Particular negative proposition) 指断定某类事物中有的(某个或某一部分)不具有某种性质的简单命题。形式结构为:

有 S 不是 P

特称否定命题的代表符号为 O,又称为 O 型命题(O 命题),简记为:SOP。

例如:有的数不是有理数。

单称否定命题 指断定某一特定的个别对象不具有某种性质的命题。

例如:2 的平方根不是有理数。

全称肯定命题与对应全称否定命题是反对的命题,但不一定是矛盾的命题。

设全称肯定命题 A:所有 S 是 P。对应全称否定命题 B:所有 S 不是 P。A 和 B 二者不能同时为真,于是 A 和 B 是反对的。“所有 S 是 P”为假是“有 S 不是 P”,“所有 S 不是 P”为假是“有 S 是 P”,“有 S 不是 P”与“有 S 是 P”可以同时成立,A 和 B 二者可以同时为假,于是不一定是矛盾的。

例如:全称肯定命题:小王和小赵出差去了北京(二人同时去了北京)。

全称否定命题：小王和小赵没出差去北京（二人都没有去北京）。

二命题不可同时为真，因而是反对命题。

“小王和小赵出差去了北京”为假意为“小王和小赵至少一人没出差去北京”。

“小王和小赵没出差去北京”为假意为“小王和小赵至少一人出差去了北京”。

二命题可同时为假，因而不是矛盾命题。

特称肯定命题与对应特称否定命题不一定是反对的命题

设特称肯定命题 A：有 S 是 P。对应特称否定命题 B：有 S 不是 P。A 和 B 二者可能同时为真，于是 A 和 B 不一定是反对命题。

例如特称肯定命题：二人之一是凶手。特称否定命题：二人之一不是凶手。二命题可以同时为真，因而不是反对命题。

单称肯定命题与对应单称否定命题是矛盾命题

设单称肯定命题 A：这个 S 是 P。对应单称否定命题 B：这个 S 不是 P。A 和 B 二者不可能同时为真，于是 A 和 B 是反对命题。“这个 S 是 P”为假是“这个 S 不是 P”，“这个 S 不是 P”为假是“这个 S 是 P”。A 和 B 也不可能同时为假。因而 A 和 B 是矛盾的。

简单命题的上述特性需要特别注意。

关系命题　一类简单命题，是断定两个或两个以上事物之间有无某种关系的命题。相关内容后面章节介绍。

3.4 复合命题

复合命题　用一定的命题联接词连接多个命题而形成的命题。形式上是复合句。组成复合命题的命题叫做该复合命题的**支命题**，支命题可以是简单命题，也可以是一个复合命题。

基本的复合命题通常分为四类：负（否）命题、联言命题、选言命题、假言命题。

（1）负命题（否命题、负判断、否判断）（Negation）

负命题是否定一个命题而得到的命题，标准形式为：

$$\boxed{\neg p，\ \text{not } p}$$

p 称为原命题。读作“并非 p”、“否 p”、“非 p”。

有些逻辑书上也采用：□ p或 $\overline{p}$，表示负命题。

负命题的取值　负命题的真值与原命题的真值相反，即 p 取“真”时，¬p 取“假”；p 取“假”时，¬p 取“真”。这就是负命题与原命题的逻辑性质。

负（否）命题真值表

p	¬p
T	F
F	T

其中：T-Ture，表示真，F-False，表示假。通常可以用 1 表示 T，用 0 表示 F。

真值表反映了一个复合命题取值与其支命题取值的关系。一个命题对应一张真值表，反之，一张真值表全体，给出一个命题。具有相同真值表的命题是等价（等值）的命题。

负（否）命题在数学中是一个非常重要和常用的概念。正确地写出和理解一个命题的负（否）命题，可以加深对该命题的理解，特别是在数学的推理、论证（尤其是反证法）中，负（否）命题发挥着决定性的作用。

原命题与其负命题是相互矛盾的命题

例如：命题"一刮风就下雨"的负（否）命题为"并非一刮风就下雨"。等同于说"一刮风就下雨"是假的，或"一刮风就下雨"之说不成立。含义为：有时刮风不下雨。

特别注意： **负（否）命题与否定命题是两个不同的概念，具有不同的含义。**

首先，否定命题仅限于简单命题，对于简单命题，由于仅含一个联项，所以，容易通过换质确定新的有意义的命题。对于复合命题而言，在各支命题中含有多个联项，可能不能通过换质获得有意义的新命题。而对任意命题，通过负（否）命题程序，总可以获得有意义的新命题。

其次，负（否）命题是否定整个原命题，否定词放在命题前面，或整个句子的后面。否定命题中的否定词在放在主项与谓项之间。

第三、负（否）命题与相应否定命题取真假值没有必然的关系。

例如：有的数是有理数。对应否命题是"没有数是有理数"，取值为假。对应否定命题是"有的数不是有理数"，取值为真。二者取值不同。

例如：存在自然数是无理数。对应否命题是"所有自然数是有理数"，取值为真。对应否定命题是"存在自然数是有理数"，取值亦为真。二者同为真但意义不相同。

例如：存在自然数是有理数。对应否命题是"所有自然数是无理数"，取值为假。对应否定命题是"存在自然数是无理数"，取值亦为假。二者同为假但意义不相同。

例如：所有实数是无理数。对应否命题是"有实数是有理数"，取值为真。对应否定命题是"所有实数是有理数"，取值为假。二者取值不相同。

$$\boxed{\neg\,(\text{所有 } S \text{ 是 } P) = \text{有 } S \text{ 不是 } P}$$

$$\boxed{\neg\,(\text{所有 } S \text{ 不是 } P) = \text{有 } S \text{ 是 } P}$$

例如：小王和老张出差去了北京（二人同时去了北京）。

¬ (小王和老张出差去了北京) = 小王和老张至少一人没出差去北京。意思为二人中一人或二人都没去北京。

例如：哥德巴赫猜想：任意大的偶数可以表示为两个素数之和。

¬ 哥德巴赫猜想 = 对任意大的 N，存在一个大于 N 的偶数不能表示成两个素数之和。

$$\boxed{\neg\,(\text{有 } S \text{ 是 } P) = \text{所有 } S \text{ 不是 } P}$$

$$\boxed{\neg\,(\text{有 } S \text{ 不是 } P) = \text{所有 } S \text{ 是 } P}$$

例如：存在自然数是有理数。

¬ (存在自然数是有理数) = 所有自然数是无理数

$$\boxed{\neg\,(\text{这个 } S \text{ 是 } P) = \text{这个 } S \text{ 不是 } P}$$

$$\boxed{\neg\,(\text{这个 } S \text{ 不是 } P) = \text{这个 } S \text{ 是 } P}$$

逻辑学上的负（否）命题与高中教材中“否命题”的定义是不同的。为了国际的通用性，请大家坚决放弃掉高中教材的关于“否命题”的定义。至少应该注意到差别，正确理解否命题的真实含义。这一点，在下面假言命题中还会讲到。

$$\boxed{\text{双否律：}\ \neg(\neg p) = p}$$

证明：只需证明两端对应的命题同时取真值或假值。设 $\neg(\neg p)$ 为真，则由负命题的定义得 $\neg p$ 为假，进一步得 p 为真。反之，$\neg(\neg p)$ 为假，则由负命题的定义得 $\neg p$ 为真，进一步得 p 为假。证毕。

尽管命题 p 与命题 $\neg(\neg p)$ 等价，但它们从不同的观点考察同一个问题，启发产生不同的思路。反证法是数学论证与思维中非常重要和常用的方法。双否律表明：为了证明命题 p 为真，只需证明 $\neg p$ 假。

例如：哥德巴赫猜想的一个证明思路是证明“非哥德巴赫猜想”为假。非哥德巴赫猜想为：存在无穷多个正的偶数不能表示成两个素数之和。

定义不能表示为两个素数之和的偶数为一个非哥德巴赫数。若证明非哥德巴赫数是有限个，则非哥德巴赫猜想为假。从而哥德巴赫猜想正确。

（2）联言（合取）命题（Conjunction）

联言（合取）连接词：“合取”、“并且”，“and”。

数理逻辑记号：$\wedge$

联言（合取）命题 由联言连接词连接的复合命题。表示由联言连接词连接的各分支命题同时为真时取值为真的命题。

联言支 联言命题的支命题称为联言支。

“联言”一词是中文意译，突出“联合”或“共同”的含义，更生活化一些；“合取”一词是专业化的意译，更专业化一些。

标准形式：

$$\boxed{p \wedge q}$$

读作“p 联言 q”、“p 合取 q”、“p 且 q”、“p 和 q”、“ p and q”。

联言（合取）命题可以包含任意多个支命题的情形：如

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

基本特征是所连接的命题同时成立时为真。

联言命题真值表

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

简言之：**全真为真，见假为假。**

交换律： $p\wedge q = q\wedge p$

结合律： $(p\wedge q)\wedge r = p\wedge(q\wedge r) = p\wedge q\wedge r$

证明：只需证明第一个等式两端，全真才真。设$(p\wedge q)\wedge r$为真，则由定义必有$p\wedge q$真和r真。再由定义$p\wedge q$真得必有p真和q真。于是p、q和r全真。另一方面，若p、q和r全真，则$p\wedge q$真和r真，进一步得$(p\wedge q)\wedge r$为真。于是得证$(p\wedge q)\wedge r$全真才真。类似可得$p\wedge(q\wedge r)$全真才真。证毕。

例如：

3 和 117 都是素数。

即使他是一位穷人，他依然努力保持自己的尊严。

鸟宿池边树，僧敲月下门。

（3）选言（析取）命题（Disjunction）

“选言”一词是中文意译，突出“可选择”的含义，更生活化一些；“析取”一词是专业化的意译，更专业化一些。

选言命题分为两类：可兼（相容）选言（析取）命题（Inclusive disjunction）和不可兼（不相容）选言（析取）命题（Exclusive disjunction）。

通常可兼（相容）选言（析取）命题略去可兼（相容）一词，即如果不特殊说明或界定，选言命题指可兼（相容）选言（析取）命题。

选言（析取）命题：由相容选言连接词连接的复合命题。表示由相容选言连接词连接的各分支命题至少一个为真时取值为真的命题。

选言支 选言命题的支命题称为选言（析取）支。

选言（析取）连接词：或者、析取、or。

数理逻辑记号： ∨

标准形式：

$$\boxed{p \vee q}$$

读作“p 或者 q”、“或者 p，或者 q”、“p or q”。

选言命题 可以包含任意多个支命题的情形：

$$\boxed{p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n}$$

选言命题的基本特征为多个选言支可以共存，断言几种情况至少有一种存在，容许多种甚至全部情况同时存在。相容（可兼）是指各选言支命题可以同时成立。

相容选言命题真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

简言之：**见真即真，全假才假**。

交换律： $p \vee q = q \vee p$

结合律： $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r$

证明：只需证明第一个等式两端，全假才假。设 $(p \vee q) \vee r$ 为假，则由定义必有 $p \vee q$ 假和 r 假。再由定义 $p \vee q$ 假得必有 p 假和 q 假。于是 p 、 q 和 r 全假。另一方面，若 p 、 q 和 r 全假，必有 $p \vee q$ 假和 r 假，进一步得 $(p \vee q) \vee r$ 为假。得证 $(p \vee q) \vee r$ 全假才假。则类似可得 $p \vee (q \vee r)$ 全假才假。证毕。

例如:

（a）或甲作案，或乙作案。（含甲乙同作案）

（b）或甲当选议员，或乙当选议员。（含甲乙同当选）

（c）在有界闭区间上连续或具有有限个第一类间断点或单调的函数是黎曼可积的。

（d）物质形态或者是气体、或者是液体、或者是固体、或者是等离子体、或者是波色-爱因斯坦冷凝体，或者是费米冷凝体。

不可兼选言命题： 由不可兼选言连接词连接的复合命题。表示由不可兼选言连接词连接的各分支 命题有且只有一个为真时取值为真的命题, 不容许多种情况同时为真。

逻辑符号为: ⊕。有些逻辑书上用符号: $\dot{\vee}$

不可兼命题的标准形式为:

$$\boxed{p \oplus q}$$

读作“p不可兼析取q”、“要么p，要么q”、“p或者q，仅居其一”。

不可兼选言命题真值表

p	q	p⊕q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

简言之: **一真才真，其它为假。**

不可兼选言（命题） 可以包含任意多个支命题的情形:

$$\boxed{p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n}$$

不可兼选言命题的基本特征为多个选言支可以共存，但断定多种情况中有且只有一种情况成立,

不可兼选言命题的等价形式:

$$\boxed{p \oplus q = (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))}$$

含义为: **p 和 q 之一为真但不能同时为真。**

$$p \oplus q = (p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)$$

含义为：**或者 p 真 q 假，或者 p 假 q 真**。

$$\text{交换律：} p \oplus q = q \oplus p$$

对于不可兼选言命题，结合律不成立。例如考虑 $p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$ 的情形。设 p_1、p_2 和 p_3 全真，则由不可兼选言命题的定义可得 $p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$ 为假，而 $p_1 \oplus (p_2 \oplus p_3)$ 为真。这说明不可兼选言命题与可兼选言命题有本质的不同。

在研究选言命题的推理逻辑时，要充分注意到可兼与不可兼的特点。例如:

（e）该案为一人所为，不是甲作案，就是乙作案。(不会共同作案)

（f）要么甲当选总统，要么乙当选总统。（不可能同当选总统）

（g）要么司机甲撞人，要么司机乙撞人。（不可能同时撞一人）

（h）一个仪器一次仅能通过一个信号，或信号 A 通过，或信号 B 通过。（不可能同时通过。）

（i）为官不可牟利，为利不能从官。要么为官，要么牟利。（不可兼得）

对比（a）和（e），同是判断谁作案，但（a）不排除共同作案的可能，故容许共犯的情况发生。而（e）已经断定一人作案，是不可兼选言命题。类似的比较（b）和（f），议员可以多人当选，而总统只有一人当选，故尽管甲乙都有当选可能，但（b）是可兼选言命题，（f）是不可兼选言命题。

在（d）中，各选言支是不能共存的（自然不可兼），但（d）可以不必作为不可兼命题处理，可兼选言命题包含此种各选言支不能共存的情况。不可兼选言命题的本质和意义是在各支命题可共存情况下，限定不可兼。

在实际应用中，对可兼或不可兼选言命题没有专门的术语，基本取决于语境。通常会使用仅居其一或类似的限制语，有时通过条件隐含不可兼，如（f）、（g）

和（h）。要根据具体情况具体分析确定。有些中文逻辑书中用“或者”表示可兼，“要么”表示不可兼，以示区别。

案例：某单位挑选献血者体检。最不可能被挑上的是 2012 年以来已经献过血的，或是在献血体检中不合格的人。下面几位报名者最有可能被选上？

A. 小张 2013 年献过血，血型是 O 型，医用价值最高。

B. 小王是区献血标兵，近年来年年献血，坚决要求献血。

C. 小刘 2013 年要求献血，因“澳抗”阳性体检不合格，这次出具“澳抗”转阴的证明，坚决要求献血。

D. 大陈最近一次献血是 2010 年，他因工伤截肢，也坚决要求献血。

解析：小张和小王 2012 年以来献过血，小刘不合格，满足最不可能被挑上的条件之一。大陈献血是在 2012 年之前，工伤截肢也不是最不可能被挑上的条件。结论：大陈最可能被选上。

（3）假言命题（条件命题）（Hypothesis，Condition or the Condition）

假言命题（条件命题）：由条件关系连接词连接的两个命题 p 和 q 形成的复合命题。标准形式为:

p 条件关系连接词 q

p称为命题的前件(antecedent)，q称为命题的后件(consequent)。

设 p 和 q 是两个命题，与之相关的条件命题有以下几种形式。

（A）蕴含命题（Implication）

条件关系连接词：蕴含，如果…，则…；一旦…，必有…。

数理逻辑记号： $\rightarrow$

蕴含命题 指形式为“如果p为真则q为真”的复合命题。

标准形式为:

$p \rightarrow q$.　If p, then q

读作“如果 p 则 q ”、“有 p 必有 q ”、“ p 蕴含 q ”、“ p 推出 q ”。

下面考察蕴含命题的真值表。从蕴含命题的原意，并未考虑 p 为假时 q 取何值，因此，需补充定义 p 为假时 q 的值。从蕴含命题的原意， p 为假时，并不能对 q 施加什么影响，所以此时 q 或真或假都是可以成立的。

形式逻辑中规定：$p\to q$ 取假值，当且仅当 p 真而 q 假。

蕴含命题真值表

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

我们采用定义和真值表两种方法证明上述等式。

证明一： $(\neg p)\vee q$ 为假时， $\neg p$ 假且 q 假，即 p 真且 q 假。而 $p\to q$ 为假，当且仅当 p 真且 q 假。于是 $(\neg p)\vee q$ 与 $p\to q$ 取值等同。证毕。

证明二：采用真值表法证明。作出真值表如下：

p	q	$\neg p$	$(\neg p)\vee q$	$p\to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$(\neg p)\vee q$ 与 $p\to q$ 真值表相同，所以二命题等值。证毕。

等价的形式：

$$\boxed{p \to q = (\neg p) \vee q}$$

上式右端含义为: $\neg p$ 和 q 全假才假，即 p 真 q 假才假。与左端等值。

例如: 蕴含命题: 如果身体感冒，则身体发烧。（感冒必发烧）

蕴含命题等价的命题: 或者不感冒，或者发烧。（感冒不发烧假）

（B）反命题（Inversion or the inverse）

反命题 指形式为"如果非p则非q"的复合命题。称为蕴含命题（A）"如果p则q"的反命题。前件与后件全否，但角色或地位未变（换质不换位）。

标准形式为:

$$\boxed{(\neg p) \to (\neg q)\ .\quad \text{If } \neg p \text{, then } \neg q\ .}$$

读作“如果非 p 则非 q”，“没有 p 则没有 q”，“ If p false, then q false.”

反命题真值表

p	q	$(\neg p) \to (\neg q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

等价的形式:

$$\boxed{(\neg p) \to (\neg q) = p \vee (\neg q)}$$

例如: 原命题: 如果身体感冒，则身体发烧。（感冒必发烧）。

反命题: 如果身体不感冒，则身体不发烧。（不感冒必不发烧）。

反命题等价的命题: 或者身体感冒或者身体不发烧。

（不感冒且发烧假）

Inverse 的含义是位置、方向、顺序或作用等对立面、反义词、反面、负面。强调具有质的不同，具有换质的含义，一般不具有否定的含义。否定在逻辑上是指不真实。Inverse 不能翻译作"否"，尽管反命题中出现了逻辑符号"¬"。在上面例子中，"如果身体感冒，则身体发烧"假意味着有时感冒不发烧。与"不感冒不发烧"意义完全不同，没有对原问题的否定意味。一般讲，反问题不是原问题的负（否）命题。

数十年来中国的逻辑学书籍、中学教科书和各种辞典中使用"否命题"命名"$(\neg p) \to (\neg q)$"是错误的，因为否命题已另有定义，而且是一个非常重要、常用和国际化的定义。在国内权威的数学学科大辞典"数学辞海"中，关于"否命题"词条有两种不同的定义方式：逻辑学中的负（否）命题和$(\neg p) \to (\neg q)$，这在逻辑上是非常错误的，误导了数代中国学子。

（C）**逆命题（Conversion or the converse）**

逆命题 指形式为"如果q则p"的复合命题。称为蕴含命题（A）"如果p则q"的逆命题。前件与后件互换位置。标准形式为:

$q \to p$. If q then p.

读作"如果 q 则 p"、"有 q 必有 p"、"q 蕴含 p"。

逆命题真值表

p	q	$q \to p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

等价的形式:

$$q \to p = (\neg q) \vee p$$

定理：蕴含命题的逆命题与反命题等价（等值）。

即

$$q \to p = (\neg p) \to (\neg q)$$

例如：原命题：如果身体感冒，则身体发烧。（感冒必发烧）。

逆命题：如果身体发烧，则身体感冒。（发烧必感冒）

反命题：如果身体不感冒，则身体不发烧。（不感冒必不发烧）

逆命题的等价命题：或者身体不发烧或者身体感冒。

反命题的等价命题：或者身体感冒或者身体不发烧。

（D）**逆反命题（Contraposition or the contrapositive）**

逆反命题：形式为“如果非q则非p”的复合命题。称为蕴含命题（A）"如果p则q"的逆反命题（反命题的逆命题或逆命题的反命题）。前件与后件全否且角色互变（换质亦换位）。标准形式为：

$$(\neg q) \to (\neg p) \quad \text{If } \neg q \text{ then } \neg p.$$

读作“如果非 q 则非 p”、“没有 q 必没有 p”、“ If q false then p false”。

注：Contraposition 的数学含义是换质位。

逆反命题真值表

p	q	$(\neg q)\to(\neg p)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

定理：蕴含命题与相应逆反命题等价。

即

$$\boxed{((\neg q)\to(\neg p))\leftrightarrow(p\to q)}$$

例如：原命题：如果身体感冒，则身体发烧。（感冒必发烧）。

逆反命题：如果身体不发烧，则身体不感冒。（不发烧必不感冒）

尽管蕴含命题与逆反命题是等价的，但给出了关于一个命题的两个不同的思考方式。

例如：如果函数 $f(x)$ 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且在两端点异号，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少一点取值为零。

对应的逆反命题为：如果 $f(x)$ 不在 $[a,b]$ 内取值为零，则或区间 $[a,b]$ 无界，或函数 $f(x)$ 不在整个区间 $[a,b]$ 上连续，或在两端点同号。这个思考方式，会促使我们思考每一条件的作用。

逆反命题是反证法的逻辑基础和根据。在数学论证中经常使用反证法。反证法基本步骤如下。

反证法原理:

求证：如果p真则q真。($p \rightarrow q$)
证明（反证法）:
第一步：假设q假。
第二步：q假推出p假。$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
第三步：与p真矛盾。假设不成立，必有q为真。

例如：试证明：$x \in A \cap (B \cup C) \rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

令命题 p 为：$x \in A \cap (B \cup C)$；命题 q 为：$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。则上题为：$p \rightarrow q$。

证法一：采用直接证法。设 p 真，即 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，后者导出 $x \in B$ 或 $x \in C$。如果 $x \in B$，则 $x \in A \cap B$；如果 $x \in C$，则 $x \in A \cap C$；总之，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，即 q 为真。

证法二：采用反证法。设对任意 x，假设 $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$，（假设 $\neg q$ 为真）。则 $x \notin A \cap B$ 且 $x \notin A \cap C$，于是，存在两种可能：(a) $x \notin A$；(b) $x \in A$，但 $x \notin B$ 且 $x \notin C$ 从而 $x \notin B \cup C$。无论何种情形，都有 $x \notin A \cap (B \cup C)$。$((\neg q) \rightarrow (\neg p))$。与条件 $x \in A \cap (B \cup C)$ 矛盾。于是假设 $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 不成立，必有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

在实际运用反证法的过程中，略去逻辑学的语言。

（E）**等价命题（Equivalence or the biconditional）**

等价命题 指形式为"当且仅当p真时q真"的复合命题。即p和q同时为真，同时为假。标准形式为:

$p \leftrightarrow q$ If and only if p then q.

读作“当且仅当 q，则 p”。

等价命题真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

两个命题等价，当且仅当两个命题同真同假。

等价形式：

定理：$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

证明：采用真值表法。

p	q	$p \wedge q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

对比真值表得：等式两端等值。证毕。

例如：等价命题：当且仅当身体感冒时，身体发烧。

等价命题的等价形式：或者感冒且发烧，或者不感冒且不发烧。

等价的命题与**等价命题**是不同的概念。等价命题是关于两个命题是否等价的一个复合命题。等价的命题是两个命题之间的关系，不是一个命题。

注释：在英文中，inverse、converse、negative 是有本质区别的。

（a）词义上的差别：

Inverse 的含义是位置、方向、顺序或作用等对立面、反义词、反面、负面。强调具有质的不同。具有换质的含义。

Converse 的含义是反转的、反向的、逆向的、相反的。具有换位的含义。

Negative 的含义是否定的、负的。

在日常生活中，交换地使用词汇“inverse”和“converse”并非罕见的现象。但是，从技术的标准，它们不是同义词。在逻辑学、数学和统计学中，两个词描述了两个有区别类型的关系。

（b）逻辑上的差别

反命题(inverse)由换质得到，逆命题(converse)由换位得到。

逆命题总是可以自动对应一个原蕴含命题（交换条件与结论的位置即可）。但反命题并不一定自动对应一个原蕴含命题。即换位总是可以的且唯一的，换质则不同。一个命题可能是多个命题的反命题。

命题 A：如果 $x=2$ 则 $x^3=8$。

命题 B：如果 $x\neq 2$ 则

$$x^3+i(f(x^3)-f(2x^2))\neq 8,$$

这里 $f(x)$ 是任意实函数。

显而易见，命题 B 的反命题是命题 A。但命题 B 是一族命题。

（F）数学上常用命题

充分条件命题（Sufficient condition）

充分条件命题是指形式为“如果有条件 p，那么有结论 q”形式的命题。

充分条件命题即为蕴含命题。前件 p 为后件 q 成立的**充分条件**，后件 q 是前件 p 的**必然结果**。

充分条件的特征：有条件必有结论，但没有该条件也可能有结论，即有结论不一定有条件。如感冒引起发烧，但发烧不一定由感冒引起，可以另有它因。

例如：命题“如果函数 $f(x)$ 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且在两端点异号，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少一点取值为零”。则条件“有界闭区间、连续和两端异号”是函数在区间内取到零值的充分条件。

例如：设 A、B 和 C 是三个集合，若

$$\boxed{x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

成立，$x \in A \cap (B \cup C)$ 是 $x \in (A \cap B) \cap (A \cup C)$ 的充分条件。

案例：小张承诺：“如果天不下雨，我一定去听音乐会”。

以下哪项为真，说明小张没有兑现承诺？

（1） 天没下雨，小张没去听音乐会。

（2） 天下雨，小张去听了音乐会。

（3） 天下雨，小张没去听音乐会。

A. 仅仅（1）； B. 仅仅（2）； C. 仅仅（3）； D. 仅仅（1）和（2）。

解答：题干是充分条件。选项（2）和（3）中，条件均不成立，结果如何，与承诺无关。只有（1）是条件成立，结果未发生，小张没有兑现承诺。正确选项是 A。

必要条件命题（Necessary condition)

必要条件命题是指形式为“没有条件 p 则没有结论 q”的命题，即前件 p 成立是后件 q 成立的必备条件，简称 p 是 q 的必要条件。必要条件的特征：没有条件

（前件）p 一定没有结论（结论）q，但有条件（前件）p 不一定有结论（后件）q。

$$\boxed{(\neg p) \to (\neg q)}$$

由定义可见，**必要条件命题是相应充分条件命题的反命题**。

必要条件命题的另一说法是“条件成立 p 是结论 q 成立的前提”。即“有 q 必有 p”或者“有 p 才有 q”（注意：才有不是一定有）。必要条件的另一特征：有结论 q 一定有条件 p，有条件 p 是有结论 q 的前提。换言之，q 为真必有 p 为真，即必要条件命题的基本形式为:

$$\boxed{p \leftarrow q}$$

逻辑符号“$\leftarrow$”读作逆蕴含或反蕴含。

由定义可见:

必要条件命题等价于相应充分条件命题的反命题和逆命题。

这再次表明，反命题并无否定原充分条件命题的含义，而是换一个角度，进一步探究结论成立的充分条件是否又是结论成立的必要条件。深化对条件和结果的认识。

尽管反命题和逆命题是等价的命题，但它们从两个不同的角度，阐述必要条件。一个从正面，一个从反面，拓宽了证明必要条件的思路。

例如: 设 A、B 和 C 是三个集合，试用两个不同的方法证明: $x \in A \cap (B \cup C)$ 是 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的必要条件。

证法一（反命题法）: 设 $x \notin A \cap (B \cup C)$，则或 $x \notin A$，或 $x \notin B$ 且 $x \notin C$。如果 $x \notin A$，则 $x \notin A \cap B$ 和 $x \notin A \cap C$；如果 $x \notin B$ 且 $x \notin C$，则亦有 $x \notin A \cap B$ 和 $x \notin A \cap C$；无论何种情况，都有 $x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$，即

$$x \notin A \cap (B \cup C) \to x \notin (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

等同于 $\neg(x\in A\bigcap(B\bigcup C))\rightarrow\neg(x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)))$。得证 $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ 是 $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ 的必要条件。

证法二（逆命题法）：设 $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$，则 $x\in(A\bigcap B)$ 从而 $x\in A$ 且 $x\in B$，或 $x\in(A\bigcap C)$ 从而 $x\in A$ 且 $x\in C$。总有 $x\in A$ 且 $x\in B\bigcup C$，进而 $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$，即 $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\rightarrow x\in A\bigcap(B\bigcup C)$。得证 $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ 是 $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ 的必要条件。

案例：在中国，只有富士山连锁店经营日式快餐。

如果上述命题为真，以下哪项不可能为真？

(1) 苏州的富士山连锁店不经营日式快餐。

(2) 杭州的樱花连锁店经营日式快餐。

(3) 温州的富士山连锁店经营韩式快餐。

A. 仅仅（1）；B. 仅仅（2）； C.仅仅（1）和（2）；D.仅仅（2）和（3）。

解答：题干是一个必要条件。(2)中必要条件不存在，可以为真。（1）中必要条件存在，但作为必要条件，餐厅可以不经营日式快餐。（1）依然可以为真。只有（2），必要条件不成立，餐厅不可以经营日式快餐。（2）不成立。正确选项：B.

充分必要条件命题（Sufficient and necessary condition）

充分必要条件命题指形如“当且仅当有条件 p 时必有结论 q”或“当且仅当有条件 p 才有结论 q”命题。前件 p 即是后件 q 的充分条件，也是必要条件。特征为：有前件 p 必有后件 q，无前件 p 必无后件 q。

充分必要命题即为等价命题。

充分条件与必要条件的关系：

（1）如果 p 是 q 的充分条件，则 q 是 p 的必要条件。

（2）如果 p 是 q 的必要条件，则 q 是 p 的充分条件。

案例：“只有认识错误，才能改正错误”。

以下哪项没有准确表达上述命题的含义？

A. 除非认识错误，否则不能改正错误。

B. 如果不认识错误，那么不能改正错误。

C. 如果改正了错误，说明已经认识了错误。

D. 只要认识错误，就一定改正了错误。

结论：题干是必要条件命题。A、B 和 C 均表达了必要条件的含义。仅 D 是充分条件。D 没有准确表达原命题的含义。

（5）复合命题的负（否）命题

负（否）命题在理论和应用占有重要的地位。正确的写出复杂命题具有重要的意义和假值。本节讨论上述几个基本复合命题的负（否）命题。基于这些基本负（否）命题及相应规则，可以得到更加复杂命题的负（否）命题。

（A）联言（合取）命题的负（否）命题

摩根（De Morgan）律: $\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow (\neg p)\vee(\neg q)$

证明一：“充分性”。设 $\neg(p\wedge q)$ 取真值。按照负命题的定义，$p\wedge q$ 为假，从而 p 和 q 至少一个为假。于是 $\neg p$ 与 $\neg q$ 中至少一个为真，对应着 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 为真。设 $\neg(p\wedge q)$ 取假值，则 $p\wedge q$ 为真，从而 p 和 q 同时为真。于是 $\neg p$ 与 $\neg q$ 同时为假，对应着 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 为假。得证：$\neg(p\wedge q) \to (\neg p)\vee(\neg q)$。

“必要性”。设 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 取真值，则 $\neg p$ 与 $\neg q$ 中至少一个为真。于是 p 和 q 至少一个为假，对应着 $p\wedge q$ 为假，即 $\neg(p\wedge q)$ 为真。设 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 取假值，则 $\neg p$ 与 $\neg q$ 中同时为假。于是 p 和 q 同时为真，对应着 $p\wedge q$ 为真，即 $\neg(p\wedge q)$ 为假。得证：$(\neg p)\vee(\neg q) \to \neg(p\wedge q)$。证毕。

证法二：利用真值表方法证明。写出真值表：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$(\neg p)\vee(\neg q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

上表看出 $\neg(p\wedge q)$ 与 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 等值。从而是等值（等价）命题。证毕。

（**B**）选言命题的负（否）命题

可兼选言命题的负（否）命题

摩根律： $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p)\wedge(\neg q)$

证明留作习题。

不可兼析取（选言）命题的负（否）命题

$$\neg(p\oplus q)\Leftrightarrow((\neg p)\wedge(\neg q))\vee(p\wedge q)$$

例：总经理：“我主张小王和小李两人中至少提拔一人。”董事长：“我不同意”。以下哪项最能准确地表述了董事长的实际意思？

A 小王和小李两人都得提拔

B 小王和小李两人都不提拔

C 如果提拔小王，那么不提拔小李

D 如果提拔小李，那么不提拔小王

解：设提拔小王为 p，提拔小李为 q。则总经理的意见为“$p\vee q$”，董事长的意思是“$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p)\wedge(\neg q)$”。于是最能准确地表述了董事长的实际意思的是 B。

（**C**）蕴含命题的负（否）命题

命题“p 蕴含 q”的否命题为“并非 p 蕴含 q”。

标准形式为:

$$\boxed{\neg(p \to q)}$$

等价的形式:

$$\boxed{\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)}$$

有时 p 发生但 q 不发生。

证明一:“充分性”。设 $\neg(p \to q)$ 取真值，则 $p \to q$ 取假值，即 p 取真值，q 取假值。于是 p 和 $\neg q$ 同时取真值，对应着 $p \wedge (\neg q)$ 取真值。设 $\neg(p \to q)$ 取假值，则 $p \to q$ 取真值。两种情形: (a) 即 p 取真值，q 取真值。(b) p 取假值。在情形(a)，即 p 取真值，$\neg q$ 取假值，对应着 $p \wedge (\neg q)$ 取假值；在情形(b)，p 取假值，也对应着 $p \wedge (\neg q)$ 取假值。得证: $\neg(p \to q) \to p \wedge (\neg q)$。

“必要性”。设 $p \wedge (\neg q)$ 取真值。则 p 和 $\neg q$ 同时取真值，于是 q 取假值，对应着 $p \to q$ 取假值，即 $\neg(p \to q)$ 取真值。设 $p \wedge (\neg q)$ 取假值，则 p 和 $\neg q$ 至少一个取假值。如果 p 取假值，对应着 $p \to q$ 取真值，即 $\neg(p \to q)$ 取假值。如果 $\neg q$ 取假值，即 q 取真值，也对应着 $p \to q$ 取真值，依然有 $\neg(p \to q)$ 取假值。得证: $\neg(p \to q) \leftarrow p \wedge (\neg q)$。证毕。

证明二: 采用真值表法证明。作出真值表如下:

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$p \wedge (\neg q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

比较真值表即得$\neg(p \to q)$ 与 $p \wedge (\neg q)$ 等值。证毕。

证明三：注意到：$p \to q = (\neg p) \vee q$。由摩根律得：

$$\neg(p \to q) = \neg((\neg p) \vee q) = (\neg\neg p) \wedge (\neg q) = p \wedge (\neg q)\text{。}$$

证毕。

例如：如果身体感冒则身体发烧。其否命题为：并非感冒必发烧。等同于有时感冒不发烧。

（D）反命题的负（否）命题

反命题“非 p 蕴含非 q”的否命题为：并非“非 p 蕴含非 q”。

标准形式为：

$$\boxed{\neg((\neg p) \to (\neg q))}$$

等价的形式：

$$\boxed{\neg((\neg p) \to (\neg q)) \leftrightarrow (\neg p) \wedge q}$$

读作非 p 但 q 真。即有时没有条件 p，依然有结果 q。p 不是 q 的必要条件。对照一下反命题的含义：p 是 q 的必要条件。

例如：原命题：一刮风就下雨。

反命题：不刮风不下雨。

反命题的否命题：有时不刮风也下雨。

（E）逆命题的负（否）命题

命题“p 蕴含 q”的逆命题“q 蕴含 p”的否命题为“并非 q 蕴含 p”。

标准形式为：

$$\boxed{\neg(q \to p)}$$

等价形式：

$$\boxed{\neg(q \to p) \Leftrightarrow q \wedge (\neg p)}$$

由于 逆命题和反命题等价，所以它们相应的负（否）命题是相同的。

请用三种方式自己证明。

（F）逆反命题的负（否）命题

命题“p 蕴含 q”的逆反命题“非 q 蕴含非 p”的的否命题为“并非‘非 q 蕴含非 p’”。

标准形式为:

$$\boxed{\neg((\neg q) \to (\neg p))}$$

等价的形式:

$$\boxed{\neg((\neg q) \to (\neg p)) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)}$$

证明：注意到逆反命题与原蕴含命题等价即得结论。证毕。

（G）等价命题的负（否）命题

等价命题“p 等价于 q ”的否命题为“并非 p 等价于 q”。

标准形式为:

$$\boxed{\neg(p \leftrightarrow q)}$$

等价形式:

$$\boxed{\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \oplus q}$$

即等价命题的负（否）命题与不可兼选言命题等价。

留给读者自证。

第三章习题

1、判断下列断定的真假。

（1）有真假的句子就是命题。

（2）如果 p 是 q 充分条件，那么 q 就是 p 的必要条件。

（3）如果 p 不是 q 的充分条件，那么 q 就不是 p 的必要条件。

（4）否定一个选言命题，等于肯定一个联言命题；否定一个联言命题，等于肯定一个选言命题。

（5）否定 p 是 q 的充分条件，就等于肯定 p 是 q 的必要条件。

2、选择正确答案（可多选）。

（1）命题的真值是指（　）。

A、真命题的值。 B、命题的真假二值。

（2）可兼选言命题和不可兼选言命题的共同之处是（　　）。

A、都断定至少有一个选言支是真的。

B、如果其选言支都是假的，则自身是假的。

C、如果至少有一个选言支是真的，则自身是真的。

（3）如果 p 是 q 的充分条件，则（　　）。

A、q 一定是 p 的必要条件。

B、p 一定不是 q 的必要条件。

C、q 可能是 p 的充分条件。

（4）以下的等值式中，正确的是（　　）。

A、（要么 p，要么 q）$\leftrightarrow ((p\wedge(\neg q)\vee((\neg p)\wedge q))$.

B、$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge(\neg q))$.

C、$\neg$(只有 p 才 q)$\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$.

D、$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\neg$(要么 p，要么 q)。

3、指出下列各题中，A 是 B 的什么条件（充分条件、必要条件、充要条件或不构成条件关系）

（1）A、认识错误； B、改正错误。

（2）A、有作案行为；B、有作案动机。

（3）A、吸烟成瘾；B、患肺癌。

（4）A、同位角相等；B、两直线平行。

（5）A、x 不等于 y；B、y 小于 x。

4、写出下列命题的负命题（不要用“并非 A”的简单形式）。

（1）这个商店的商品不但价廉，而且物美。

（2）昨晚是小张或小李值班。

（3）人有多大胆，地有多高产。

（4）只有经济发达地区，才有环境治理问题。

（5）要么老张当选代表，要么老李当选代表。

（6）当且仅当衣食足，才能知荣辱。

（7）只要认识字母，就能学好外语。

（8）孩子每天吃巧克力，身体才能长好。

5. 判断下面结论是否成立，给出 T 或 F 并说明理由。如果是 F，给出正确答案。

（1）与“或者你出局，或者我出局”等值的负命题是并非你我都不出局。

（2）与“你不行，我也不行”等值的负命题是并非或者你行，或者我行。

（3）与“并非明天后天都不去”等价的析取命题是或者明天去，或者后天去

。

（4）与“并非你去或者我不去”等价的合取命题是虽然你不去但我去。

6. 设 p、q 和 r 是命题，用文字和真值表法两种方法证明:

（1） $\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p)\wedge(\neg q)$.

（2） $p\oplus q\leftrightarrow(p\wedge(\neg q))\vee((\neg p)\wedge q)$.

（3） 蕴含命题与其逆反命题等价。

（4） 蕴含命题的反命题与逆命题等价。

7. 设 A、B 和 C 是三个集合。

（1）用蕴含和逆反命题两种方方式证明：

$x \in A \cup (B \cap C)$ 是 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 的充分条件。

（2）用反命题和逆命题两种方法证明：

$x \in A \cup (B \cap C)$ 是 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 的必要条件。

9. 总经理："我主张小王和小李两人中最多提拔一人。"董事长："我不同意"。

以下哪项最能准确地表述了董事长的实际意思？

A 小王和小李两人都得提拔

B 小王和小李两人都不提拔

C 如果提拔小王，那么不提拔小李

D 如果提拔小李，那么不提拔小王

10. 逻辑学家说：如果 2+2=5，则地球是方的。

以下哪项和逻辑学家所说的同真？说明理由。

（1）如果地球是方的，则 2+2=5

（2）如果地球是圆的，则 2+2≠5

（3）2+2≠5 或者地球是方的

（4）2+2=5 或者地球是方的

11. 设 x 是实数。考虑下述命题：如果 $x \neq 1$，则 $x^2+1 \neq 0$。写出该问题的逆反命题，并说明其与该命题等价。

12. 某高校外语系排课，5 位教师每人只授一门外语课，并且满足以下条件：

（1）如果钱教德语，则孙不教俄语；

（2）或李教德语，或钱教德语；

（3）如果孙不教俄语，则赵不教法语；

（4）或赵教法语，或周不教英语。

下面四项仅一项为真。请问：哪项为真时，可得出"李教德语"的结论。

A. 孙不教俄语；B. 钱教德语； C. 周教英语；D. 赵不教法语。

13. 某商场被盗，甲、乙、丙三人涉嫌被拘审，警方经调查得到以下事实:

（1）罪犯是带赃物坐车逃走的;

（2）不伙同甲，丙不会作案;

（3）乙不会开车;

（4）罪犯就是三人中的一人或一伙。

试问：甲是否作案?

14. A、B、C、D 四位同学在某课程考试后预测成绩:

A: 我看这次考试我们都及格。　　B: 有人不及格。

C: D 及格。　　D: 如果我及格，那么我们都及格。

成绩公布后，证明只有一个人预测错误，试问谁预测错误？是否都及格？为什么?

15、甲、乙、丙、丁四位实习医生，对 A、B、C、D 四位病人作出如下诊断:

A、甲诊断为细菌性痢疾，乙诊断为霍乱。

B、乙诊断为肺炎，丙诊断为气管炎。

C、丙诊断为疟疾，丁诊断为脑炎。

D、丁诊断为胃癌，甲诊断为胃溃疡。

经主治医生复诊：判明实习医生对每一位病人，只有一种诊断正确；有一位实习医生的诊断全对；有一位实习医生的诊断全错；丙不全对。经化验，确诊 A 患细菌性痢疾，C 患疟疾。试问：B、D 患何病？全对者为谁？全错者为谁?

16、A、B、C、D、E、F、G、H 八位猎人打猎。经一番追逐，其中某一猎人的一支箭射中一只鹿。大家决定先不看箭上姓氏，猜测谁射中的。

A: 鹿死 H 和 F 手。

B: 若箭射中鹿首，则是鹿死我手。

C: 鹿死 G 手。

D: 即使箭射中鹿首，也并非鹿死 B 手。

E: A 猜错。

F：并非鹿死 H 和我手。

G：并非鹿死 C 手。

H：并非 A 猜错。

猜毕，大家拔箭检查，发现三人猜中，试推断鹿死谁手？谁猜中？另设五人猜中，则鹿死谁手？谁猜中？

17、古代有一人家嫁女，父母订规据猜匣选婿。设金银铜三个匣子，分别刻有三句话，其中只有一个匣子内放有女儿肖像。求婚者通过这三句话，猜测肖像放在哪个匣子内。三个匣子上刻的三句话是：

金匣：肖像不在此匣内。

银匣：肖像在金匣内，

铜匣：肖像不在此匣内。

以上三句话只有一项为真。问肖像在哪个匣子中？为什么？

18、在侦破某金库被盗案件时，调查人员发该金库 5 名工作人员进金库的情况是：

（1）当 A 进去时，B 也进去；

（2）D 或 E 至少有一个进去；

（3）B 或 C 有且只有一个能进去；

（4）当且仅当 D 进去时 C 进去；

（5）如果 E 进去，则 A 和 D 也进去。

请问：5 人到底谁可能进去过？谁没进去过？

19、根据下面真语句，判断是谁谋害了张先生。

（1）A、B、C 三人中至少有一人。

（2）如果张先生生前未服过麻醉剂，则不是 C。

（3）如果张先生生前服过麻醉剂，则不是 A。

（4）如果 A 参与谋杀，那么 B 也参与。

（5）如果作案在落雨前，则是 A 谋害的。

（6）如果作案不在落雨前，张先生临死前搏斗过。

（7）张先生临死前搏斗过，就不是 B 谋害的。

（8）经过法医解剖化验，张先生死前服过麻醉剂。

20、某排球队有 A、B、C、D、E、F、G、P、Q、R、S、T 等 12 名队员。在某场比赛中，上场队员的挑选有以下的原则：

（1）如果 P 不上场，则 S 不上场；

（2）只有 D 不上场，G 才上场；

（3）A 和 C 要么都上场，要么都不上场；

（4）当且仅当 D 上场，R 才不上场；

（5）只有 R 不上场，C 才不上场；

（6）A 和 P 两人中，只能上场一人；

（7）如果 S 不上场，则 T 和 Q 也不上场；

（8）R 和 F 两人中也只能上场一个。

（9）G 上场。

从上述条件可推出谁上场，谁不上场？